

519.6
Д54



ISSN 9125 0912

ВІСНИК

Дніпропетровського університету

№ 8

Т. 19

2011

Серія: МОДЕЛЮВАННЯ

Випуск 3

ВІСНИК



Дніпропетровського університету

Науковий журнал

№ 8

Том 19

2011

РЕДАКЦІЙНА РАДА:

акад. Академії наук ВО України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Поляков** (*голова редакційної ради*); акад. Академії наук ВО України, д-р техн. наук, проф. **М. М. Дронь** (*заст. голови*); д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. О. Кочубей**; д-р хім. наук, проф. **В. Ф. Варгалюк**; чл.-кор. АПН України, д-р філос. наук, проф. **П. І. Гнатенко**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Г. Гоман**; д-р філол. наук, проф. **В. Д. Демченко**; д-р техн. наук, проф. **А. П. Дзюба**; д-р пед. наук, проф. **Л. І. Зеленська**; чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. П. Моторний**; чл.-кор. АПН України, д-р психол. наук, проф. **Е. Л. Нєсенко**; д-р філос. наук, проф. **В. О. Панфілов**; д-р біол. наук, проф. **О. Є. Пахомов**; д-р іст. наук, проф. **С. І. Світленко**; акад. Академії наук ВО України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Скалозуб**; д-р філол. наук, проф. **Т. С. Пристайко**; чл.-кор. НАН України, д-р біол. наук, проф. **А. П. Травлєєв**; д-р техн. наук, проф. **Ю. Д. Шептун**.

Серія: МОДЕЛЮВАННЯ

Випуск 3

Дніпропетровськ
Видавництво
Дніпропетровського
національного університету

*Друкується за рішенням вченої ради
Дніпропетровського національного університету ім. Олеся Гончара
згідно із затвердженим планом видань на 2011 р.*

Викладено результати наукових досліджень із сучасних питань математичної фізики, теорії оптимального керування рівняннями та варіаційними нерівностями в частинних похідних, методи теорії стійкості та якісного аналізу динамічних систем, а також їх застосування в задачах математичного моделювання фізичних процесів.

Для наукових працівників, аспірантів та студентів старших курсів.

Изложены результаты научных исследований по современным вопросам математической физики, теории оптимального управления уравнениями и вариационными неравенствами в частных производных, методам теории устойчивости и качественного анализа динамических систем, а также их применения в задачах математического моделирования физических процессов.

Для научных сотрудников, аспирантов и студентов старших курсов.

Редакційна колегія:

акад. Академії ВШ України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Поляков** (відп. редактор), д-р фіз.-мат. наук, проф. **П. І. Когут** (заст. відп. редактора), д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. Є. Белозьоров**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Г. Гоман**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. М. Кісельова**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. О. Капустян**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. В. Капустян**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. А. Ковалевський**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. О. Кочубей**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Лобода**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Г. Наконечний**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. О. Остапенко**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **А. В. Тичинін**, канд. фіз.-мат. наук, доц. **Ю. Л. Меньшиков**, канд. фіз.-мат. наук, доц. **А. В. Сясєв** (відп. секретар).

Рецензенти:

чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. П. Моторний**
д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. П. Тіман**

© Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара, 2011

© Видавництво Дніпропетровського національного
університету, оформлення, 2011

УДК 681.31

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ L^p -РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

П. И. Когут

Днепропетровский национальный университет, кафедра дифференциальных уравнений, ул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010 Днепропетровск, E-mail: p.kogut@i.ua

Рассматриваются вопросы устойчивости линейных интегральных уравнений Вольтерра с позиций второго метода Ляпунова. Характерной особенностью рассматриваемого класса уравнений есть принадлежность их решений классу локально p -интегрируемых по Вохнеру функций $L^p_{loc}(0, \infty; X)$.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра, устойчивость по состоянию, интегральные неравенства, второй метод Ляпунова.

1. Введение

В настоящее время имеется значительное число работ, посвященных решению задач устойчивости и оптимальной стабилизации различных динамических систем, в том числе и систем с последействием (см., напр., [3, 10, 14, 16–18]). Вместе с тем системы обыкновенных дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальные системы, системы с последействием могут быть легко преобразованы к интегральным уравнениям типа Вольтерра (ИУ), аппарат которых неуклонно расширяет область своих приложений (см., напр., [1, 3, 8]). К тому же, есть задачи [3, 6], для описания которых принципиально невозможно применить какие-либо другие типы уравнений. Эти обстоятельства приводят к необходимости разработки самостоятельных методов и подходов для решения проблем устойчивости интегральных уравнений Вольтерра.

Общеизвестно, что описание процессов с помощью ИУ существенно ограничивает возможность применения традиционных методов теории устойчивости, в частности, второго метода Ляпунова. Причиной такого обстоятельства служит не техническая сторона вопроса, а специфика структуры состояния таких процессов. К тому же, решения интегральных уравнений Вольтерра только в исключительных случаях принадлежат пространствам непрерывных функций. Как правило, типичным их свойством является локальная интегрируемость.

Анализ литературы показывает, что задачи устойчивости для ИУ, допускающих разрывные решения, с позиций применения идей второго метода Ляпунова являются неизученными. Вместе с тем свойство устойчивости динамических систем существенно зависит от того, каким образом оценивается

”инертность” (иными словами, устойчивость) выбранного режима их работы. Традиционно такая оценка опирается на надлежащим образом определенное понятие обобщенной метрики, которая позволяет решать, существенно ли изменяется поведение системы под действием внешних воздействий, и лежит в основе построения функции Ляпунова. При этом непременным условием выступает то обстоятельство, что функция Ляпунова, определенная на исследуемой траектории или множестве траекторий, должна обладать свойством непрерывности. Этим, в частности, можно объяснить тот факт, что в подавляющем большинстве исследований по качественной теории ИУ предполагается непрерывность их решений (см., например, [3, 7, 11, 12, 14, 16, 17]). При этом в качестве метрических пространств, порожденных обобщенной метрикой, рассматривались нереплексивные банаховы пространства $C(-\infty, 0; X)$ [3, 17], $X \times C(-\infty, 0; X)$ [11, 12], пространство непрерывных и ограниченных функций $CB(-\infty, 0; X)$ [9], пространства Соболева $W^{1,p}(-\infty, 0; X)$ [12].

В связи с этим в настоящей работе исследуются некоторые аспекты качественной теории процессов, описываемых линейными интегральными уравнениями Вольтерра в гильбертовом пространстве X . Отличительное свойство рассматриваемых ИУ в том, что классом их решений является банахово пространство $L_{loc}^p(0, \infty; X)$, вследствие чего ИУ могут допускать существование разрывных решений. Для изучения качественного поведения таких объектов, в частности, для получения необходимых и достаточных условий устойчивости исследуемых процессов, предлагается подход, основанный на соображениях математической теории систем [5] и идеях второго метода Ляпунова. Основное внимание уделяется конструированию пространства состояний для класса линейных ИУ. Это объясняется тем, что основная информация о процессе, необходимая для выяснения вопроса о его устойчивости, заключена в последовательной смене состояний [2, 5, 11, 13, 15]. Такой подход позволил ввести для ИУ ряд нетрадиционных определений устойчивости и получить новые результаты в решении задач качественной теории динамических процессов с последствием.

2. Основные обозначения и предварительные результаты

Пусть X и Y — произвольные гильбертовы пространства над полем вещественных чисел. Норму и скалярное произведение в X будем далее обозначать как $|\cdot|_X$ и $(\cdot, \cdot)_X$, соответственно. Пусть $\mathcal{L}(X, Y)$ — банахово пространство всех линейных непрерывных отображений $L : X \rightarrow Y$ с естественной нормой $\|L\| = \sup\{|Lx|_Y : |x|_X = 1\}$. В случае, когда $X = Y$, будем писать $\mathcal{L}(X)$. Тождественный оператор в $\mathcal{L}(X)$ обозначим как I_X .

Пусть F — открытое выпуклое множество в \mathbb{R}^n , E — произвольное банахово пространство над полем вещественных чисел. Через $L^p(F; E)$ обозначим векторное пространство измеримых по Бохнеру отображений $f : F \rightarrow E$, для которых $\|f\|_{L^p(F; E)} := \left(\int_F |f(x)|_E^p dx \right)^{1/p} < +\infty$. Здесь и всюду далее предполагается, что $1 < p < \infty$. Пусть далее $C(\bar{F}; E)$ — банахово пространство

непрерывных отображений $\varphi : \bar{F} \rightarrow E$, а $W^{1,p}(F; E)$ — пространство Соболева всех $f \in L^p(F; E)$ с обобщенными производными $D^i f = \partial f / \partial x^i$ из $L^p(F; E)$, $i = 1, 2, \dots, n$. При этом

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \left[\sum_{i=1}^n \|D^i f\|_{L^p(F;E)}^p + \|f\|_{L^p(F;E)}^p \right]^{1/p}.$$

В дальнейшем через $L_{loc}^p(F; E)$, $W_{loc}^{1,p}(F; E)$ и $C_{loc}(F; E)$ будем обозначать локально выпуклые пространства всех $f : F \rightarrow E$, сужения которых на произвольный компакт K из F принадлежат классам $L^p(K; E)$, $W^{1,p}(K; E)$, и $C(K; E)$, соответственно. Пусть далее $I(a, b) = \{(t, s) : t \in (a, b), s \in (a, t)\}$. Декартово произведение $X \times L^p(a, b; X)$, наделенное нормой

$$\|h\| := \left[|h^0|_X^p + \|h^1\|_{L^p(a,b;X)}^p \right]^{1/p},$$

обозначим как $M^p(a, b; X)$.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве X следующее ИУ типа Вольтерра:

$$x(t) = h(t) + \int_{-\infty}^t K(t, \gamma)x(\gamma) d\gamma \quad \forall t > 0. \quad (2.1)$$

В дальнейшем будем предполагать следующее:

$$x(\gamma) = \xi(\gamma), \quad \forall \gamma \in (-\infty, 0), \quad \xi \in L^p(-\infty, 0; X), \quad (2.2)$$

$$h \in W_{loc}^{1,p}(0, \infty; X), \quad 1/p + 1/q = 1, \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{aligned} K &\in L^\infty(0, \infty; L^q(-\infty, 0; \mathcal{L}(X))), \\ f_0 &\in L_{loc}^\infty(0, \infty), \text{ где } f_0(t) := \int_0^t \|K(t, \gamma)\|_{\mathcal{L}(X)}^q d\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Имеют место следующие результаты, касающиеся разрешимости интегрального уравнения (2.1) (см. [8, 12]):

Теорема 2.1. *При выполнении условия (2.4), для каждой пары функций $\xi \in L^p(-\infty, 0; X)$ и $h \in W_{loc}^{1,p}(0, \infty; X)$ существует единственное решение интегрального уравнения (2.1) в классе $L_{loc}^p(0, \infty; X)$. При этом, если отображение $t \rightarrow \|K(t, s)\|$ при почти всех $s \in (-\infty, t)$ принадлежит классу $C_{loc}(0, \infty)$, то $x \in C_{loc}(0, \infty; X)$.*

Доказательство теоремы 2.1 основано на использовании принципа Каччиполи – Банаха и неравенства Гронуолла.

С целью конструирования пространства состояний для динамического процесса, описываемого ИУ (2.1), введем декомпозицию оператора $K(t, \gamma) \in \mathcal{L}(X)$ в виде:

$$K(t, \gamma) = U(t, \gamma) + Q(t, \gamma), \quad (2.5)$$

где основными условиями для представления (2.5) выступают следующие требования:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &\in L_{loc}^\infty(0, \infty), \text{ где } f_1(t) := \|Q(t, t)\|_{\mathcal{L}(X)}, \\ Q &\in L^\infty(0, \infty; L^q(-\infty, 0; \mathcal{L}(X))), \\ f_2 &\in L_{loc}^\infty(0, \infty), \text{ где } f_2(t) := \int_0^t \|Q(t, \gamma)\|_{\mathcal{L}(X)}^q d\gamma, \\ Q(t, \gamma) &\in \mathcal{L}(X) - \text{сильно дифференцируем по } t, \\ \left[\frac{\partial Q}{\partial t} \right]_t &\in L_{loc}^\infty(0, \infty; L^q(-\infty, +\infty; \mathcal{L}(X))). \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Здесь

$$[f]_s(t, \gamma) = \begin{cases} f(t, \gamma), & -\infty < \gamma < s, \\ 0, & s < \gamma < \infty, \end{cases}$$

и всюду далее будем полагать $x_t(\gamma) = x(t + \gamma)$, $\forall \gamma \in (-\infty, 0)$, $\forall t > 0$.

Основываясь на представлении (2.5) введем, в качестве объекта дальнейшего исследования, следующую систему соотношений:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int_{-\infty}^0 G(t, \gamma)x_t(\gamma) d\gamma + f(t), \quad (2.7)$$

$$x_t(0) = y(t) + \int_{-\infty}^0 U(t, t + \gamma)x_t(\gamma) d\gamma \quad (2.8)$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0 \in X, \quad x(\gamma) = \xi(\gamma), \quad \forall \gamma \in (-\infty, 0). \quad (2.9)$$

Здесь

$$A(t) = Q(t, t), \quad (2.10)$$

$$G(t, \gamma) = A(t)U(t, t + \gamma) + \left. \frac{\partial}{\partial s}Q(s, t + \gamma) \right|_{s=t}. \quad (2.11)$$

Используя принцип сжимающих отображений и беря за основу схему доказательства теоремы 2.1 из [12], легко установить следующий результат:

Теорема 2.2. Пусть выполняются условия (2.2)–(2.4), (2.6) и при этом

$$\xi = (y_0, \xi) \in M^p(-\infty, 0; X), \quad u \in L_{loc}^1(0, \infty; U) \quad \text{и} \quad f \in L_{loc}^p(0, \infty; X).$$

Тогда задача Коши (2.7)–(2.9) допускает единственное решение $(y(t), x(t))$ в классе $W_{loc}^{1,p}(0, \infty; X) \times L_{loc}^p(0, \infty; X)$ со следующими априорными оценками:

$$|y(t)|_X \leq C_1 \exp^{C_2 t} \left[|y(0)|_X^p + \|\xi\|_{L^p(-\infty, 0; X)}^p \right]^{1/p}, \quad \forall t > 0, \quad (2.12)$$

$$\|x_t(\cdot)\|_{L^p(-\infty, 0; X)} \leq C_1 \exp^{C_2 t} \left[|y(0)|_X^p + \|\xi\|_{L^p(-\infty, 0; X)}^p \right]^{1/p}, \quad \forall t > 0, \quad (2.13)$$

$$\int_0^T \|(y(t), x_t(\cdot))\|_{M^p(-\infty, 0; X)}^p dt \leq C_5 \left[|y(0)|_X^p + \|\xi\|_{L^p(-\infty, 0; X)}^p \right]. \quad (2.14)$$

Следствие 2.1. Если в соотношениях (2.7) и (2.9) положить

$$f(t) = \frac{d}{dt}h(t), \quad y_0 = h(0) + \int_{-\infty}^0 Q(0, \gamma)\xi(\gamma) d\gamma, \quad (2.15)$$

то решением задачи Коши (2.7)–(2.9) будет пара функций $(y(t), x(t))$, в которой функция $x(t)$ есть решением интегрального уравнения (2.1).

Доказательство. Достаточно проинтегрировать уравнение (2.7) на отрезке $[0, t]$ и подставить найденную функцию $y(t)$ в соотношение (2.8). \square

Замечание 2.1. Всюду далее условия (2.15) предполагаются выполненными.

3. Пространство состояний и его свойства

С целью конструирования пространства состояний для динамического процесса (2.1) будем исходить из определения пространства состояний, приведенного в [5, с. 35], и общих положений математической теории систем. Основываясь на идеях работы [11], можно установить следующий результат (доказательство см. в [15]).

Теорема 3.1. Пусть выполняются предположения теоремы 2.1. Тогда состоянием интегрального уравнения (2.1) в произвольный момент времени $t > 0$ является элемент $z(t)$ такой, что:

$$z(t) \in M^p(-\infty, 0; X) \quad \forall t \geq 0, \\ z(t) = (z^0(t), \{z^1(t)(\alpha), -\infty < \alpha < 0\}),$$

где обозначено:

$$z^0(t) = y(t), \quad z^1(t)(\alpha) = \left\{ \begin{array}{ll} x(t + \alpha), & -t < \alpha < 0 \\ \xi(t + \alpha), & -\infty < \alpha < -t \end{array} \right\}.$$

Здесь $(x(\cdot), y(\cdot)) \in L_{loc}^p(0, \infty; X) \times W_{loc}^{1,p}(0, \infty; X)$ — единственное решение задачи (2.7)–(2.9) при условиях (2.15).

Всюду далее $M^p(-\infty, 0, X)$ будем называть пространством состояний для уравнения (2.1).

Следствие 3.1. При всех $h \in W^{1,p}(0, T; X)$ и $\xi \in L^p(-\infty, 0; X)$ отображение $t \rightarrow \|z(t)\|_{M^p(-\infty, 0; X)}$, после исправления, быть может, на множестве меры нуль, принадлежит классу $C(0, T)$, $\forall T < \infty$.

Доказательство. Согласно теоремам вложения (см., например, [4, лемма 1.1.2]), заключаем, что функция $y \in W_{loc}^{1,p}(0, \infty; X)$, как решение задачи (2.7)–(2.9), после исправления, при необходимости, на множестве меры нуль, будет удовлетворять включению $y \in C([0, T]; X) \quad \forall T < \infty$. Тогда, в силу условий

(2.2)–(2.4), отображение $t \rightarrow \int_{-\infty}^0 |x(t + \gamma)|^p d\gamma$ также принадлежит классу $C([0, T])$, $\forall T < \infty$. Поэтому функция

$$t \rightarrow \|z(t)\|_{M^p(-\infty, 0; X)} = \left(|y(t)|^p + \int_{-\infty}^0 |x(t + \alpha)|^p d\alpha \right)^{1/p}$$

является непрерывной на любом компакте $[0, T]$. \square

Замечание 3.1. Из представления (2.5) следует, что для заданного оператора $K(t, \gamma)$, удовлетворяющего условиям (2.4), операторы $U(t, \gamma)$ и $Q(t, \gamma)$ могут быть определены неоднозначно. Поэтому состояние $z(t)$ также будет зависеть от выбора указанных составляющих. Вместе с тем, несмотря на определенный произвол в декомпозиции (2.5), при различных $U(t, \gamma)$ состояния $z(t)|_U$ для одного и того же интегрального уравнения будут эквивалентными в том смысле, что они имеют одинаковую $z^1(t)|_U(\cdot)$ -составляющую, а значит они определяют одинаковое поведение системы (2.1) в будущем.

Замечание 3.2. Пусть выполнены следующие условия:

$$K(t, \gamma) = K(\gamma), \quad \xi = 0, \quad h(t) = h = \text{const}, \\ K \in L_{loc}^\infty(0, \infty; \mathcal{L}(X)).$$

Тогда уравнение (2.1) при $t > 0$ эквивалентно дифференциальному уравнению $\dot{x} = K(t)x$, состоянием которого в произвольный момент времени $t \leq 0$ является вектор $x(t) \in X$. Положив в (2.5) $U(t, \gamma) := 0$, находим, что $y(t) = x(t)$, а значит, согласно теореме 3.1, состоянием интегрального уравнения (2.1) будет пара $z(t) = (x(t), 0) \in X$ (поскольку в этом случае определяющая система (2.7)–(2.9) вырождается в одно дифференциальное уравнение).

Замечание 3.3. Если в (2.5) положить $U(t, \gamma) = K(t, \gamma)$ и при этом считать, что $h(t) = \text{const}$, $u = 0$, то по теореме 3.1 состоянием процесса (2.1) будет вектор $z(t) = (\text{const}, \{x(t + \alpha), -\infty < \alpha < 0\})$. Так как качественные свойства состояния, его эволюция являются инвариантными по отношению к аффинным преобразованиям, то без потери общности можно считать, что $y(t) = \text{const} = 0$. Тогда $z(t) = (0, x(t + \cdot))$, где $x(t + \cdot) \in L^p(-\infty, 0; X)$. Аналогичный результат установлен в работе [3], где под состоянием интегральных уравнений Вольтерра, допускающих только непрерывные решения, предложено понимать его предысторию $x(t + \cdot)$.

Пример 3.1. Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = c - \int_1^t \frac{x(s)}{s} ds, \quad c = \text{const}, \quad t > 1. \quad (3.1)$$

Легко видеть, что его решением есть функция $x(t) = c/t$. Следуя вышеизложенному подходу, поочередно будем полагать:

$$U_1(t, \gamma) = 0, \quad U_2(t, \gamma) = t - \gamma, \quad U_3(t, \gamma) = \frac{\sin t}{\gamma}, \quad U_4(t, \gamma) = \frac{1}{\gamma}.$$

Тогда, согласно теореме 3.1, соответствующие состояния процесса (3.1) примут вид:

$$z_1(t) = \left(\frac{c}{t}, 0 \right) \in \mathbb{R}^1, \quad (3.2)$$

$$z_i(t) = \left(y_i(t), \left\{ \frac{c}{t+\alpha}, 1-t < \alpha < 0 \right\} \right) \in \mathbb{R}^1 \times L^p(1-t, 0), \quad i = 2, 3, 4, \quad (3.3)$$

где обозначено:

$$y_2(t) = c \frac{t^2(\ln t - 1) - t + 1}{t}, \quad y_3(t) = c \left[\frac{1 + \sin t}{t} - \sin t \right], \\ y_4(t) = c = \text{const.}$$

При этом очевидно, что указанные состояния определяют одно и то же решение исходного уравнения (3.1). Вместе с тем эволюция во времени этих состояний различна, поскольку

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_1(t)\|_{M^p(-\infty, 0; \mathbb{R})} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{c}{t} \right| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|z_2(t)\|_{M^p(-\infty, 0; \mathbb{R})} = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_i(t)\|_{M^p(-\infty, 0; \mathbb{R})} = \text{const} < \infty, \quad i = 3, 4.$$

Таким образом, при исследовании вопросов устойчивости интегральных уравнений в метрике их функционального пространства состояний необходимо в первую очередь определить то состояние или множество состояний, относительно которого поведение системы (2.7)–(2.9) представляет наибольший интерес. Во-вторых, вследствие неоднозначности определения оператора $U(t, \gamma)$, состояние $z(t)$ в каждом конкретном случае выбирается из соображений его естественной физической интерпретации, а также с учетом таких важных свойств исследуемых процессов, каковыми являются управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость. Вместе с тем следует отметить, что проблема выбора оператора $U(t, \gamma)$ в декомпозиции (2.5), при которой соответствующее состояние для уравнения (3.1) было бы в определенном смысле "оптимальным", является открытой и не изученной на сегодня. По-видимому, эту задачу следует решать в оптимизационной постановке, выбирая в качестве класса допустимых управлений множество операторов

$$\mathcal{Q}_{ad} = \{Q(t, \gamma) \in \mathcal{L}(X) : |Q(t, y)|_X \leq C \quad \forall t > 0, \forall \gamma \in (-\infty, t)\},$$

которое было бы замкнутым относительно свойств (2.6).

4. Постановка задачи устойчивости

Будем полагать в дальнейшем, что $h(t) = \text{const}$. В этом случае, как следует из условий (2.15), имеем $f(t) \equiv 0$. Пусть пара $(y(t), \{x(t+\cdot)\})$ есть решением задачи Коши (2.7)–(2.8) при $t > s$ с начальными условиями

$$z(s) = (y(s), \{x(s+\alpha), -\infty < \alpha < 0\}) \in M^p(-\infty, 0; X). \quad (4.1)$$

Введем обозначения

$$\Phi(t, s, z(s)) := z(t) = (y(t), \{x(t + \alpha), -\infty < \alpha < 0\}), \quad R(t, s, z(s)) := x(t).$$

Как следует из априорных оценок (2.12)–(2.14), операторы

$$\Phi(t, s, \cdot) : M^p(-\infty, 0; X) \rightarrow M^p(-\infty, 0; X), \quad R(t, s, \cdot) : M^p(-\infty, 0; X) \rightarrow X$$

линейны и непрерывны для любых $t, s \in \mathbb{R}$ таких, что $0 \leq s < t$, т. е.

$$\Phi(t, s, \cdot) \in \mathcal{L}(M^p(-\infty, 0; X)), \quad R(t, s, \cdot) \in \mathcal{L}(M^p(-\infty, 0; X), X). \quad (4.2)$$

В силу единственности решения задачи Коши (2.7)–(2.8), (4.1) и того обстоятельства, что $M^p(-\infty, 0; X)$ — пространство ее состояний, а значит, и пространство состояний для уравнения (2.1), будут справедливыми следующие соотношения:

$$R(t, s, z(s)) = R(t, r, \Phi(r, s, z(s))), \quad \Phi(t, s, z(s)) = \Phi(t, r, \Phi(r, s, z(s))), \\ \Phi(t, t, z(t)) = z(t), \quad \forall t, r, s \in \mathbb{R} \quad (0 < s < r < t).$$

Введем в рассмотрение оператор $\Lambda : M^p(-\infty, 0; X) \rightarrow X$, который определим по следующему правилу:

$$\Lambda(t, z(t)) := y(t) + \int_{-\infty}^0 U(t, \gamma + t)x(t + \gamma) d\gamma. \quad \forall t > 0.$$

Вследствие неравенства Коши – Буняковского и оценок (2.12)–(2.14), имеем:

$$|\Lambda(t, z(t))|_X \leq |y(t)|_X + \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|U(t, \cdot)\|_{L^q(-\infty, 0; X)} \|\xi\|_{L^p(-\infty, 0; X)} + \\ + \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \|U(t, \cdot)\|_{L^q(0, t; X)} \|x_t(\cdot)\|_{M^p(-\infty, 0; X)} \quad \text{для любых } t \in [0, T]. \quad (4.3)$$

Следовательно $\Lambda(t, \cdot) : \mathcal{L}(M^p(-\infty, 0; X) \rightarrow X$ — линейный непрерывный оператор.

Далее заметим, что в силу единственности решения ИУ (2.1) и следствия 2.1 из теоремы 2.2, имеет место соотношение

$$x(t) = R(t, s, z(s)) = \Lambda(t, \Phi(t, s, z(s))), \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \quad (0 < s < t).$$

Это означает, что для любых значений $t, s \in \mathbb{R}$ таких, что $0 < s < t < \infty$, будет коммутативной диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} M^p(-\infty, 0; X) & \xrightarrow{R(t, s, z(s))} & X \\ & \searrow \Phi(t, s, z(s)) & \nearrow \Lambda(t, z(t)) \\ & & M^p(-\infty, 0; X) \end{array}$$

что, согласно [5, с. 62], означает существование канонического представления для ИУ (2.1). Таким образом, ввиду коммутативности приведенной диаграммы и свойств (4.2)–(4.3), можно сделать следующий вывод: эволюция во времени решения интегрального уравнения (2.1), его качественные свойства полностью характеризуются отображением

$$\Phi(t, s, \cdot) \in \mathcal{L}(M^p(-\infty, 0; X)). \quad (4.4)$$

Этот вывод основывается на том, что для любого текущего состояния $z(t) \in M^p(-\infty, 0; X)$ функция $\Lambda(t, z(t))$ является статической в том смысле, что она определяет лишь, как состояние $z(t) \in M^p(-\infty, 0; X)$ преобразуется в решение ИУ (2.1). Поэтому вопросы качественного поведения интегральных уравнений Вольтерра естественно изучать в терминах меры отклонения возмущенного состояния (а не решения) от невозмущенного, т. е. по свойствам отображения (4.4). В связи с этим приведем некоторые возможные постановки задач устойчивости.

Определение 4.1. Интегральное уравнение (2.1) назовем устойчивым по состоянию $z(t) = (y(t), x(t + \cdot))$ в метрике пространства $M^p(-\infty, 0; X)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать величины $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\eta(\varepsilon) > 0$, такие, что неравенство

$$\left(|y(t)|_X^p + \int_{-\infty}^0 [|x(t + \gamma) - x(t - \eta(\varepsilon) + \gamma)|_X^p] d\gamma \right)^{1/p} \leq \varepsilon \quad (4.5)$$

будет выполнено для всех $t \geq 0$, если только $|y_0| \leq \delta(\varepsilon)$ и $\xi \in L^p(-\infty, 0; X)$. Напомним, что здесь $x(\gamma) = \xi(\gamma)$ на множестве $-\infty < \gamma < 0$.

Определение 4.2. Интегральное уравнение (2.1) назовем асимптотически устойчивым по состоянию в метрике $M^p(-\infty, 0; X)$, если для всякого $s > 0$ найдется $\Delta = \Delta(s) > 0$ такое, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t, s, z(s))|_X = 0, \quad (4.6)$$

$$\sup_{t > 0} \|z(t, s, z(s))\|_{M^p(-\infty, 0; X)} < +\infty, \quad (4.7)$$

если только

$$\|z(s)\|_{M^p(-\infty, 0; X)} = \left(|y(s)|_X^p + \int_{-\infty}^0 |x(s + \gamma)|_X^p d\gamma \right)^{1/p} \leq \Delta(s).$$

Замечание 4.1. Легко заметить, что необходимым условием устойчивости по состоянию в смысле определения 4.1 выступает следующее неравенство:

$$\sup_{t \in [0, \infty)} \|z(t)\|_{M^p(-\infty, 0; X)} = \sup_{t \in [0, \infty)} \left(|y(t)|_X^p + \int_{-\infty}^0 |x(t + \alpha)|_X^p d\alpha \right)^{1/p} < \infty. \quad (4.8)$$

Если при этом тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ задачи ((2.7)) устойчиво по Ляпунову и функция $|x(t)|_X^2$ экви-интегрируема на любом компакте $S \subset (0, +\infty)$, что означает: для любого $\delta > 0$ найдется $\tau = \tau(\delta) > 0$ такое, что $\int_S |x(t)|_X^2 dt < \delta$ для всех измеримых подмножеств $S \subset [0, +\infty)$ с лебеговой мерой $|S| < \tau$, то выполнения этих условий будет достаточно для устойчивости ИУ (2.1) по состоянию.

Важную роль в дальнейшем будут играть понятия, связанные с устойчивостью интегральных неравенств вида

$$|x(t) - \int_{-\infty}^t U(t, \gamma)x(\gamma) d\gamma|_X \leq g(t), \quad t > 0, \quad (4.9)$$

где $x(\gamma) = \xi(\gamma)$, $-\infty < \gamma < 0$, $\xi \in L^p(-\infty, 0; X)$ и $g(t)$ — неотрицательная непрерывная скалярная функция.

Определение 4.3. Интегральное неравенство (4.9) назовем L^p -устойчивым, если каждой непрерывной на $[0, +\infty)$ функции $g(t)$ с конечной $L^\infty(0, \infty)$ -нормой найдется хотя бы одна функция $x \in L^p(-\infty, +\infty; X)$, при которой неравенство (4.9) будет истинным почти всюду на $[0, +\infty)$.

Приведем ряд критериев, обеспечивающих указанное свойство.

Утверждение 4.1. Пусть

$$\zeta(t) = \int_0^t \|U(t, \gamma)\|_{\mathcal{L}(X)}^q d\gamma \in L^\infty(0, \infty) \quad \text{и при этом} \quad \|\zeta\|_{L^\infty} < 1, \quad (4.10)$$

где $q = p/(p-1)$. Тогда неравенство (4.9) L^p -устойчиво.

Доказательство. Как следует из условий (2.4), (2.6) и представления (2.5), для оператора $U(t, \gamma) \in \mathcal{L}(X)$ справедливо:

$$U \in L^\infty(0, \infty; L^q(-\infty, 0; \mathcal{L}(X))), \quad \int_0^t \|U(t, \gamma)\|_{\mathcal{L}(X)}^q d\gamma \in L_{loc}^\infty(0, \infty).$$

Тогда из (4.9) следует, что

$$|x(t)|_X \leq g(t) + \int_0^t \|U(t, \gamma)\|_{\mathcal{L}(X)} |x(\gamma)|_X d\gamma + \int_{-\infty}^0 \|U(t, \gamma)\|_{\mathcal{L}(X)} |\xi(\gamma)|_X d\gamma$$

почти всюду на $[0, \infty)$. Применяя неравенство Коши – Буняковского, находим:

$$\begin{aligned} \|x(t)\|_{L^p(0, t; X)} &\leq \|g(t)\|_{L^p(0, \infty; X)} + \\ &+ \left(\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, \infty)} \int_0^t \|U(t, \gamma)\|_{\mathcal{L}(X)}^q d\gamma \right)^{1/q} \|x\|_{L^p(0, t; X)} + \\ &+ \|U\|_{L^\infty(0, \infty; L^q(-\infty, 0; \mathcal{L}(X)))} \|\xi\|_{L^p(-\infty, 0; X)}. \end{aligned}$$

Вследствие выполнения условия (4.10), приходим к требуемому заключению: $x \in L^p(0, +\infty; X)$. \square

Привлекая лемму Гронуолла – Беллмана, предыдущий результат можно уточнить в следующей редакции.

Утверждение 4.2. Если для оператора $U(t, \gamma) \in \mathcal{L}(X)$ выполняется условие

$$\max \left(\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, \infty)} \int_0^t \|U(t, \gamma)\|_{\mathcal{L}(X)} d\gamma, \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, \infty)} \int_t^\infty \|U(t, \gamma)\|_{\mathcal{L}(X)} d\gamma \right) < 1,$$

то неравенство (4.9) L^2 -устойчиво.

Утверждение 4.3. Если $U(t, \gamma) = U(t - \gamma)$, то интегральное неравенство (4.9) L^2 -устойчиво при условии, что $U \in L^1(0, \infty; \mathcal{L}(X))$ и $\|U\|_{L^1(0, \infty; \mathcal{L}(X))} < 1$.

5. Второй метод Ляпунова и основные теоремы устойчивости

Пусть $V(t, z) : [0, \infty) \times M^p(-\infty, 0; X) \rightarrow R^1$ — непрерывный функционал, определенный на пространстве состояний $M^p(-\infty, 0; X)$. Обозначим через \mathfrak{K} класс непрерывных неубывающих скалярных функций $w(u)$, таких, что $w(0) = 0$ и $w(u) > 0$ при $u > 0$. В дальнейшем будем предполагать, что $V(t, 0) = 0$.

Определение 5.1. Функционал V будем называть положительно определенным, если существует функция $w_1 \in \mathfrak{K}$, при которой будет справедливо неравенство:

$$\left. \begin{aligned} V(t, z) &\geq w_1(|y|), \\ z = (y, x_t = x(t + \cdot)) &\in M^p(-\infty, 0; X), \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Определение 5.2. Будем говорить, что функционал V допускает бесконечно малый высший предел, если существует такая функция $w_2 \in \mathfrak{K}$, что

$$V(t, z) \leq w_2(\|z\|_{M^p(-\infty, 0; X)}), \quad \forall t \geq 0. \quad (5.2)$$

Введем в функционале $V(t, z) = V(t, y, x_t(\cdot))$ замену переменных так, чтобы $x_t(\gamma) := x(t + \gamma) \mapsto x(\alpha)$ при $\alpha \in (-\infty, t)$ и выделим в качестве явного аргумента "переменный предел" $\{t\}$ (за счет области изменения $x_t(\cdot) = \{x(\gamma), -\infty < \gamma < t\}$). Результат обозначим через $\tilde{V}(t, \{t\}, y, x^t)$.

Пусть далее $z_0 = (y_0, \xi(\cdot))$ — начальное состояние объекта (2.7)–(2.8), где $y_0 \in X$ и $\xi \in L^2(-\infty, 0; X)$ определены в (2.9). Обозначим через $y(t) = y(t, z_0)$ и $x_t(\gamma) = x_t(\gamma, z_0)$ — соответствующее решение задачи Коши (2.7)–(2.9), где $x_t(\gamma) = x(t + \gamma)$ при $\gamma \in (-\infty, 0)$. Тогда значение функционала $V(t, z) = V(t, y, x_t(\cdot))$ на состоянии $z(t) = (y(t, z_0), x_t(\cdot, z_0))$ исходной задачи будем обозначать через $V[t, y(t), x(t + \cdot)]$.

Предположим, что функционал $V(t, z) = \tilde{V}(t, \{t\}, y, x^t)$ дифференцируем по t , $\{t\}$ и имеет производную Фреше по вектору состояний $z = (y, x_t(\cdot)) \in$

$M^p(-\infty, 0; X)$. Тогда полной производной функционала $V(t, z)$ в силу задачи (2.7)–(2.8) назовем следующую функцию:

$$\frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V[t + \Delta t, y(t + \Delta t), x(t + \Delta t + \cdot)] - V[t, y(t), x(t + \cdot)]}{\Delta t}. \quad (5.3)$$

Следуя стандартной процедуре, несложно показать, что

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{V[t + \Delta t, z(t + \Delta)] - V[t, z(t)]}{\Delta t} &= \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \\ &+ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \{t\}} + \int_{-\infty}^0 \left(\nabla_{x_t(\cdot)} \tilde{V}, x_t(\gamma) \right)_X d\gamma + \\ &+ \left(\nabla_y \tilde{V}, A(t)y(t) \right) + \int_{-\infty}^t G(t, \gamma - t)x(\gamma) d\gamma. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Однако для идентификации составляющих

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \{t\}} \text{ и } \int_{-\infty}^0 \left(\nabla_{x_t(\cdot)} \tilde{V}, x_t(\gamma) \right)_X d\gamma$$

в (5.4), приведем некоторые пояснения.

Из предположения о дифференцируемости функционала $V(t, z)$ находим:

$$\begin{aligned} V[t + \Delta t, z(t + \Delta)] - V[t, z(t)] &= \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} \Delta t + \\ &+ \Phi[t, y(t), x(t + \cdot), \Delta y, \Delta x_t(\cdot)] + o(\Delta t, \Delta y, \Delta x_t(\cdot)), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $\Delta y = y(t + \Delta t)$, $\Delta x_t = \{x(t + \Delta t + \gamma) - x(t + \gamma) : -\infty < \gamma < 0\}$, Φ — дифференциал Фреше,

$$\begin{aligned} o(\Delta t, \Delta y, \Delta x_t(\cdot)) / (|\Delta t| + \|(\Delta y, \Delta x_t(\cdot))\|_{M^p(-\infty, 0; X)}) &\rightarrow 0 \\ \text{при } |\Delta t| + \|(\Delta y, \Delta x_t(\cdot))\|_{M^p(-\infty, 0; X)} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Так как Φ — линейный непрерывный оператор относительно $(\Delta y, \Delta x_t(\cdot)) \in X \times L^p(-\infty, 0; X)$, то, в силу теоремы Рисса, для него имеет место представление:

$$\begin{aligned} \Phi[t, y(t), x(t + \cdot), \Delta y, \Delta x_t(\cdot)] &= \\ &= (q^0(t), \Delta y(t))_X + \langle q^1(t, \cdot), \Delta x_t(\cdot) \rangle_{L^q(-\infty, 0; X), L^p(-\infty, 0; X)}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где обозначено $q^0(t) = \Phi^0[t, y(t), x(t + \cdot)]$, $q^1(t, \cdot) = \Phi^1[t, \cdot, y(t), x(t + \cdot)]$ — производные Фреше функционала $V[t, y(t), x(t + \cdot)]$ относительно аргументов $y = y(t)$ и $x_t(\gamma) = x(t + \gamma)$ ($\gamma \in (-\infty, 0)$), соответственно.

Определение 5.3. $V(t, z) = \tilde{V}(t, \{t\}, y, x^t)$ будем называть функционалом Ляпунова, если он дифференцируем по $t, \{t\}$, имеет производную Фреше по вектору состояний $z = (y, x_t(\cdot)) \in M^p(-\infty, 0; X)$ и представление (5.6) справедливо при

$$q^0(\cdot) \in W_{loc}^{1,q}(0, +\infty; X), \quad q^1(t, \cdot) \in W_{loc}^{1,q}(-\infty, +\infty; X) \text{ п.в. при } t > 0. \quad (5.7)$$

Теперь установим следующий результат:

Лемма 5.1. Пусть $V(t, z) : [0, \infty) \times M^p(-\infty, 0; X) \rightarrow R$ является функционалом Ляпунова в смысле определения 5.3. Тогда полная его производная в силу уравнений движения (2.7)–(2.8) существует и представима в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0+} \frac{V[t + \Delta t, z(t + \Delta)] - V[t, z(t)]}{\Delta t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \\ + (\Phi^0[t, y(t), x(t + \cdot)], A(t)y(t) + \int_{-\infty}^0 G(t, \gamma)x_t(\gamma) d\gamma)_X + \\ + (\Phi^1[t, 0, y(t), x(t + \cdot)], y(t) + \int_{-\infty}^0 U(t, t + \gamma)x_t(\gamma) d\gamma)_X - \\ - \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial \Phi^1[t, \alpha, y(t), x(t + \cdot)]}{\partial \alpha}, x_t(\alpha) \right)_X d\alpha. \quad (5.8) \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ и $x_t(\cdot)$ — решение задачи Коши (2.7)–(2.9) (в силу исходных предпосылок $f(t) \equiv 0$). Тогда для любой функции $w \in W_{loc}^{1,q}(0, \infty; X)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} (w(s), \dot{y}(s))_X ds = \int_t^{t+\Delta t} (w(s), A(s)y(s))_X ds + \\ + \int_t^{t+\Delta t} (w(s), \int_{-\infty}^0 G(s, \gamma)x_s(\gamma) d\gamma)_X ds. \end{aligned}$$

После интегрирования по частям приходим к соотношению

$$\begin{aligned} (w(s), y(s))_X \Big|_t^{t+\Delta t} = \\ = \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{d}{ds} w(s), y(s) \right)_X ds + \int_t^{t+\Delta t} (w(s), A(s)y(s))_X ds + \\ + \int_t^{t+\Delta t} (w(s), \int_{-\infty}^0 G(s, \gamma)x_s(\gamma) d\gamma)_X ds. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Используя тождество

$$\begin{aligned} (q^0(t), \Delta y(t))_X = (q^0(t), y(t) \Big|_t^{t+\Delta t})_X = \\ = (q^0(t), y(t))_X \Big|_t^{t+\Delta t} - (q^0(t) \Big|_t^{t+\Delta t}, y(t + \Delta t))_X \quad (5.10) \end{aligned}$$

и положив в (5.9) $w(t) = q^0(t)$, находим:

$$\begin{aligned} \Phi[t, y(t), x(t + \cdot), \Delta y, \Delta x_t(\cdot)] = \\ = \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{d}{ds} q^0(s), y(s) \right)_X ds + \int_t^{t+\Delta t} (q^0(s), A(s)y(s))_X ds + \\ + \int_t^{t+\Delta t} (q^0(s), \int_{-\infty}^0 G(s, \gamma)x_s(\gamma) d\gamma)_X ds - \\ - (q^0(t) \Big|_t^{t+\Delta t}, y(t + \Delta t))_X + \langle q^1(t, \cdot), \Delta x_t(\cdot) \rangle_{L^q(-\infty, 0; X), L^p(-\infty, 0; X)}. \quad (5.11) \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}
 \langle q^1(t, \cdot), \Delta x_t(\cdot) \rangle_{L^q(-\infty, 0; X), L^p(-\infty, 0; X)} &= \\
 &= \int_{-\infty}^0 (q^1(t, \gamma), x(t + \Delta t + \gamma) - x(t + \gamma))_X d\gamma = \\
 &= \int_{-\infty}^0 (q^1(t, \gamma), x(t + \Delta t + \gamma))_X d\gamma - \int_{-\infty}^0 (q^1(t, \gamma), x(t + \gamma))_X d\gamma = \\
 &= \int_{-\infty}^0 (q^1(t, \gamma - t - \Delta t), \xi(\gamma))_X d\gamma + \int_0^{t+\Delta t} (q^1(t, \gamma - t - \Delta t), x(\gamma))_X d\gamma - \\
 &\quad - \int_{-\infty}^0 (q^1(t, \gamma - t), \xi(\gamma))_X d\gamma - \int_0^t (q^1(t, \gamma - t), x(\gamma))_X d\gamma = \\
 &\quad = \int_{-\infty}^0 (q^1(t, \gamma - \cdot)|_t^{t+\Delta t}, \xi(\gamma))_X d\gamma + \\
 &\quad + \int_0^{t+\Delta t} (q^1(t, \gamma - t - \Delta t), x(\gamma))_X d\gamma - \int_0^t (q^1(t, \gamma - t), x(\gamma))_X d\gamma \quad (5.12)
 \end{aligned}$$

и при этом

$$\begin{aligned}
 \int_0^{t+\Delta t} (q^1(t, \gamma - t - \Delta t), x(\gamma))_X d\gamma &= \\
 &= \int_{-\Delta t}^0 (q^1(t, \gamma - t), x(\gamma + \Delta t))_X d\gamma + \\
 &\quad + \int_0^t (q^1(t, \gamma - t), x(\gamma + \Delta t))_X d\gamma, \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

то из (5.12)–(5.13), (5.10) получаем:

$$\begin{aligned}
 \langle q^1(t, \cdot), \Delta x_t(\cdot) \rangle_{L^q(-\infty, 0; X), L^p(-\infty, 0; X)} &= \\
 &= \int_{-\infty}^0 (q^1(t, \gamma - \cdot)|_t^{t+\Delta t}, \xi(\gamma))_X d\gamma + \\
 &\quad + \int_{-\Delta t}^0 (q^1(t, \gamma - t), x(\gamma + \Delta t))_X d\gamma + \int_0^t (q^1(t, \gamma - t), x(\cdot)|_\gamma^{\gamma+\Delta t})_X d\gamma = \\
 &= \int_{-\infty}^0 (q^1(t, \gamma - \cdot)|_t^{t+\Delta t}, \xi(\gamma))_X d\gamma + \int_{-\Delta t}^0 (q^1(t, \gamma - t), x(\gamma + \Delta t))_X d\gamma + \\
 &\quad + \int_0^t (q^1(t, \cdot - t), x(\cdot))_X \Big|_\gamma^{\gamma+\Delta t} d\gamma - \\
 &\quad - \int_0^t (q^1(t, \cdot - t)|_\gamma^{\gamma+\Delta t}, x(\gamma + \Delta t))_X d\gamma. \quad (5.14)
 \end{aligned}$$

Поскольку для любой интегрируемой функции ζ имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^t [\zeta(\gamma + \Delta t) - \zeta(\gamma)] d\gamma &= \int_{\Delta t}^{t+\Delta t} \zeta(\gamma) d\gamma - \int_0^t \zeta(\gamma) d\gamma = \\ &= - \int_0^{\Delta t} \zeta(\gamma) d\gamma + \int_t^{t+\Delta t} \zeta(\gamma) d\gamma, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^t (q^1(t, \cdot - t), x(\cdot))_X \Big|_{\gamma}^{\gamma+\Delta t} d\gamma &= \\ &= - \int_0^{\Delta t} (q^1(t, \gamma - t), x(\gamma))_X d\gamma + \int_t^{t+\Delta t} (q^1(t, \gamma - t), x(\gamma))_X d\gamma. \end{aligned}$$

В результате соотношение (5.11) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \Phi[t, y(t), x(t + \cdot), \Delta y, \Delta x_t(\cdot)] &= \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{d}{ds} q^0(s), y^0(s) \right)_X ds - (q^0(t) \Big|_t^{t+\Delta t}, y(t + \Delta t))_X + \\ &\quad + \int_t^{t+\Delta t} (q^0(s), A(s)y(s) + \int_{-\infty}^0 G(s, \gamma)x_s(\gamma) d\gamma)_X ds + \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 (q^1(t, \gamma - \cdot) \Big|_t^{t+\Delta t}, \xi(\gamma))_X d\gamma - \int_0^t (q^1(t, \cdot - t) \Big|_{\gamma}^{\gamma+\Delta t}, x(\gamma + \Delta t))_X d\gamma + \\ &\quad + \int_{-\Delta t}^0 (q^1(t, \gamma - t), x(\gamma + \Delta t))_X d\gamma - \int_0^{\Delta t} (q^1(t, \gamma - t), x(\gamma))_X d\gamma + \\ &\quad + \int_t^{t+\Delta t} (q^1(t, \gamma - t), x(\gamma))_X d\gamma. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Принимая во внимание исходные предположения и условия (5.7) и (2.8), несложно убедиться в справедливости следующих предельных переходов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left(\int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{d}{ds} q^0(s), y^0(s) \right)_X ds - (q^0(t) \Big|_t^{t+\Delta t}, y(t + \Delta t))_X \right) &\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0, \\ \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^0 (q^1(t, \gamma - \cdot) \Big|_t^{t+\Delta t}, \xi(\gamma))_X d\gamma &\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} - \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial q^1(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\gamma-t}, \xi(\gamma) \right)_X d\gamma, \\ \frac{1}{\Delta t} \int_0^t (q^1(t, \cdot - t) \Big|_{\gamma}^{\gamma+\Delta t}, x(\gamma + \Delta t))_X d\gamma &\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^t \left(\frac{\partial q^1(t, \alpha)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\gamma-t}, x(\gamma) \right)_X d\gamma, \\ \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{-\Delta t}^0 (q^1(t, \gamma - t), x(\gamma + \Delta t))_X d\gamma - \int_0^{\Delta t} (q^1(t, \gamma - t), x(\gamma))_X d\gamma \right] &\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0, \\ \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (q^1(t, \gamma - t), x(\gamma))_X d\gamma &\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \\ \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} (q^1(t, 0), y(t) + \int_{-\infty}^0 U(t, t + \gamma)x_t(\gamma) d\gamma)_X. \end{aligned}$$

В результате, подставив (5.15) в соотношение (5.5), и реализовав затем переход к пределу в (5.3) при $\Delta t \rightarrow 0$ и приняв во внимание приведенные выше тождества, получим представление для формулы полной производной функционала $V(t, z) : [0, \infty) \times M^p(-\infty, 0; X) \rightarrow R$ в виде (5.8), что и требовалось установить. \square

Для полноты изложения заметим, что полученный результат (см. для сравнения представление (5.4)) приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \{t\}} &= (\Phi^0[t, y(t), x(t + \cdot)], A(t)y(t) + \int_{-\infty}^0 G(t, \gamma)x_t(\gamma) d\gamma)_X, \\ \int_{-\infty}^0 (\nabla_{x_t(\cdot)} \tilde{V}, x_t(\gamma))_X d\gamma &= - \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial \Phi^1[t, \alpha, y(t), x(t + \cdot)]}{\partial \alpha}, x_t(\alpha) \right)_X d\alpha, \end{aligned}$$

что говорит о нетривиальности вычисления полной производной для функционалов типа $V(t, z) : [0, \infty) \times M^p(-\infty, 0; X) \rightarrow R$.

Приведем основные теоремы об устойчивости ИУ (2.1) в смысле определений 4.1–4.2.

Теорема 5.1. Пусть для ИУ (2.1) найдутся функционал Ляпунова $V(t, z) : [0, \infty) \times M^p(-\infty, 0; X) \rightarrow R$, функции $w_i \in \mathfrak{K}$ ($i = 1, 2, 3$) и постоянная $k_3 > 0$ такие, что:

$$w_1(|y|_X) \leq V(t, z) \leq w_2(\|z\|_{M^p(-\infty, 0; X)}); \quad (5.16)$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1.1)} \leq w_3(|y|_X); \quad (5.17)$$

$$w_3(|u|) \geq k_3 |u|^p \quad \forall u \in \mathbb{R}; \quad (5.18)$$

$$\text{интегральное неравенство (4.9) } L^p\text{-устойчиво.} \quad (5.19)$$

Тогда ИУ (2.1) асимптотически устойчиво по состоянию $z(t)$ в метрике $M^p(-\infty, 0; X)$.

Доказательство. Проинтегрируем неравенство (5.17) в пределах от 0 до t . Тогда условия (5.16) и (5.18) гарантируют выполнение следующего неравенства:

$$\int_0^t |y(s)|_X^p ds \leq k_3^{-1} [V(0, y_0, \xi(\cdot)) - V[t, y(t), x_t(\cdot)]] \leq C w_2(\|\xi\|_{M^p(-\infty, 0; X)})$$

при некотором $C > 0$ и произвольном $t > 0$. Откуда следует, что функция $y(t) = y(t, y_0, \xi(\cdot))$, как единственное решение задачи Коши (2.7)–(2.9) в классе $W_{loc}^{1,p}(0, \infty; X)$, удовлетворяет включению $y \in L^p(0, \infty; X)$. Следовательно, в силу непрерывности вложения $W_{loc}^{1,p}(0, \infty; X) \hookrightarrow C_{loc}([0, \infty); X)$, имеем $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)|_X = 0$. Теперь заметим, что с точностью до подмножества меры ноль, на множестве $[0, +\infty)$ выполняется интегральное равенство (2.8). Переходя в нем к неравенству, получим:

$$|x(t) - \int_{-\infty}^t U(t, \gamma)x(\gamma) d\gamma|_X \leq |y(t)|_X, \quad \forall t > 0.$$

Откуда, в силу условия (5.19), находим $x \in L^p(0, \infty; X)$. Следовательно,

$$\sup_{t>0} \|z(t)\|_{M^p(-\infty, 0; X)} = \sup_{t>0} \left(|y(t)|_X^p + \int_{-\infty}^0 |x(t + \alpha)|_X^p d\alpha \right)^{1/p} < +\infty,$$

тем самым теорема доказана. □

Теорема 5.2. Пусть в (2.7) имеют место декомпозиция $A(t) = A + A_1(t)$ и операторное уравнение $A^* \Pi + \Pi A = -I_X$ своим решением имеет самосопряженный положительно определенный оператор $\Pi \in \mathcal{L}(X)$. Тогда, если:

- 1) $\xi = 0$; 2) $A_1 \in L^\infty(0, \infty; \mathcal{L}(X))$;
- 3) $U(t, \gamma) = U(t - \gamma)$, $U \in L^1(0, \infty; \mathcal{L}(X)) \cap L^\infty(0, \infty; \mathcal{L}(X))$;
- 4) $\tilde{G} \in L^\infty(I(0, \infty); \mathcal{L}(X))$, $\int_0^t \|\tilde{G}(t, \gamma)\|_{\mathcal{L}(X)} d\gamma \in L^\infty(0, \infty)$,
 $\text{ess sup}_{[0, \infty)} \int_t^\infty \|\tilde{G}(\gamma, t)\| d\gamma < \infty$, где $\tilde{G}(\gamma, t) = G(t, \gamma - t)$;
- 5) $\delta = \|\Pi\| (2\|A_1\|_{L^\infty} + \text{ess sup}_{[0, \infty)} \int_0^t \|\tilde{G}(\gamma, t)\| d\gamma) < 1$;
- 6) $\tau = \|U\|_{L^1(0, \infty; \mathcal{L}(X))} + \sqrt{(1 - \delta)^{-1}} \text{ess sup}_{[0, \infty)} \int_t^\infty \|\tilde{G}(\gamma, t)\| d\gamma < 1$,

то интегральное уравнение (2.1) асимптотически устойчиво по состоянию $z(t)$ в метрике $M^2(-\infty, 0; X)$.

Для доказательства достаточно функционал Ляпунова выбрать в виде

$$V(t, z) = (y, \Pi y)_X + \int_t^\infty \|\Pi\|_{\mathcal{L}(X)} \int_{-s}^0 \|G(s, \gamma)\|_{\mathcal{L}(X)} |x(s + \gamma)|_X^2 d\gamma ds$$

и показать, что условия 1)–6) гарантируют выполнение всех предпосылок теоремы 5.1 (см., напр., [2, 13, 15]).

Библиографические ссылки

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы/ А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков.— К. : Наук. думка, 1986. — 544 с.
2. Егоров А. И. Оптимальный синтез для уравнений нейтрального типа/ А. И. Егоров, П. И. Когут. Докл. АН УССР. Сер. А., 1989, № 5.— С. 64–67.
3. Колмановский В. Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием/ В. Б. Колмановский, В. Р. Носов.— М. : Наука, 1981.— 448 с.
4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач/ Ж.-Л. Лионс.— М. : Мир, 1972.— 587 с.
5. Месарович М. Общая теория систем: математические основы/ М. Месарович, Я. Такаха.— М. : Мир, 1978.— 311 с.
6. Подгаецкий Э. М. Построение аппроксимаций решения нелинейного интегрального уравнения с оценкой погрешности в задачах о тепло- и массообмене/ Э. М. Подгаецкий. ЖВМ и МФ, Том.18, № 1.— С. 226–232.
7. Appleby J. A. D., Almost sure asymptotic stability of stochastic Volterra integro-differential equations with fading perturbations/ J. A. D. Appleby, M. Riedle. A. Stoch. Anal. Appl., Volume 24, Number 4, 2006, p. 813–826.

8. *Burton T. A.* Volterra integral and differential equations/ T. A. Burton.— Mathematics in Science and Engineering, Elsevier, Amsterdam, Vol.202, 2005.
9. *Burton T. A.*, Stability by decompositions for Volterra equation/ T. A. Burton, W. E. Manfoud. *Tohoku Math.J.*, Number 37, 1985, p. 270–284.
10. *Cahlon B.*, On the numerical stability of Volterra integral equations with delay argument/ B. Cahlon. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 33, Issue 1, 1990, p. 97–104.
11. *Delfour M. C.*, Status of state theory of linear hereditary differential systems with delays in state and control variables/ M. C. Delfour. *Lecture Notes Control. Inform. Sci.*, No. 28, 1980, p. 83–96.
12. *Delfour M. C.*, State space theory of linear time invariant systems with delay in state, control and observation variables/ M. C. Delfour, J. Karakchou. *J.Math.Anal.Appl.*, Volume 12, 1987, p. 361–450.
13. *Egorov A. I.*, On the state stability of a system of integro-differential equations of non-stationary aero-elasticity/ A. I. Egorov, P. I. Kogut. *J.of Mathematical Sciences* (Springer, New York), Volume 70, No. 1, 1994, p. 1578–1585.
14. *Islam M. N.*, Stability in linear Volterra integrodifferential equations with nonlinear perturbation/ M. N. Islam, Y. N. Raffoul. *J. Integral Equations Appl.*, Volume 17, Number 3, 2005, p. 259–276.
15. *Kogut P. I.*, State exponential stability of a denumerable system of the Volterra integral equations/ P. I. Kogut. *Sov. J. Autom. Inf. Sci.*, Volume 24, Number 5, 1991, p. 37–46.
16. *Miller R. K.*, Asymptotic behavior for a linear Volterra integral equation in Hilbert space/ R. K. Miller. *J.Differential Equations*, Number 23, 1977, p. 270–284.
17. *Rodkina A. E.*, On asymptotic behaviour of solutions of stochastic difference equations with Volterra type main term/ A. E. Rodkina, X. Mao, V. Kolmanovskii. *Stoch. Anal. Appl.*, Volume 18, Number 5, 2000, p. 837–857.
18. *Soon-Mo Jung*, A fixed point approach to the stability of a Volterra integral equation/ Soon-Mo Jung. *Fixed Point Theory and Applications*, 2007, Article ID 57064, doi:10.1155/ 2007/ 57064.
19. *Sanyal S.*, A sufficient condition for the mean square stability of Ito-Volterra dynamic equation/ S. Sanyal. *Nonlinear Analysis and Applications*, 2011, (to appear).

Надійшла до редколегії 25.01.2011

УДК 539.9

**ЩОДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ
ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ
ДЛЯ ОБЛАСТІ СКЛАДНОЇ ФОРМИ**

Л. В. Волошко, О. М. Кісельова, В. Д. Ламзюк
*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ, 49050.*

Отримано алгоритм саморегуляризації системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду і крайової задачі для бігармонічного рівняння.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, крайова задача, неканонічна форма області.

1. Вступ

Для постановки і розв'язування складних задач оптимізації [7], механіки [2], теорії керування [8] необхідні ефективні обчислювальні алгоритми розв'язку крайових задач рівнянь математичної фізики. На відміну від точних (аналітичних) розв'язків для канонічних областей, отримати такий розв'язок у випадку складної форми області досить складно. Далі розглядається наближений метод розв'язування крайової задачі, який базується на інтегральному представленні певного типу і, головне, при цьому ефективно враховується складність області. Обчислювальна ефективність цього методу, який має назву методу потенціалу, ґрунтується на двох відомих обставинах. Перша з них полягає в тому, що крайова задача зводиться до системи інтегральних рівнянь. Це означає, що апроксимації при чисельній реалізації методів потенціалу підлягають інтегральні оператори, а не диференціальні. А така апроксимація може бути здійснена з високою точністю при малих затратах часу на обчислення. Другий момент — зведення вихідної крайової задачі до контурних інтегральних рівнянь — приводить до скорочення на одиницю розмірності множини, на якій відшукуються невідомі.

Метод полягає в тому, що ядрами відповідних потенціалів є фундаментальні розв'язки відповідних диференціальних рівнянь, саме такий варіант методу потенціалу був використаний. В процесі розробки, засвоєння і поглиблення уявлень про обчислювальні можливості цього підходу виявлені його істотні переваги і помітна конкурентоспроможність порівняно з іншими наближеними методами — скінченних елементів і кінцевих різниць [2, 9].

2. Крайова задача для бігармонічного рівняння

$$\Delta\Delta w(x, y) = 0, \quad (2.1)$$

$$w|_{\Gamma} = \varphi, \quad \left. \frac{dw}{dn} \right|_{\Gamma} = \psi, \quad (2.2)$$

$w = w(x, y)$ — невідома функція; Γ — контур складної форми, який обмежує область Ω ; φ, ψ — неперервні в Ω функції. На відміну від точних розв'язків для канонічних областей, використовується наближений метод розв'язування граничної задачі для такого рівняння. Останній базується на інтегральному представленні розв'язку у вигляді суми бігармонічних потенціалів, ядра яких є фундаментальними розв'язками рівняння (2.1). Отже, розв'язок задачі (2.1)–(2.2) будемо шукати у вигляді:

$$w(x, y) = \int_{\Gamma} \left[\mu_1(s) r^2 \ln r + \mu_2(s) \frac{\partial}{\partial \nu} (r^2 \ln r) \right] d\Gamma(s), \quad (2.3)$$

де μ_1, μ_2 — невідомі функції щільності, $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$. Далі крайова задача (2.1)–(2.2) зводиться до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} r^2 \ln r \mu_1(s) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} (r^2 \ln r) \mu_2(s) d\Gamma(s) &= \varphi(x, y), \\ \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} (r^2 \ln r) \mu_1(s) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial^2}{\partial n \partial \nu} (r^2 \ln r) \mu_2(s) d\Gamma(s) &= \psi(x, y), \end{aligned} \quad (2.4)$$

які є некоректними за третьою умовою Адамара [9]. Систему (2.4) подамо у вигляді, зручному для наближеного обчислення інтегралів. Для цього треба знайти похідні по нормалі, подати їх у вигляді, зручному для застосування відомих формул аналітичної геометрії [6] для знаходження тригонометричних функцій кутів:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} r^2 \ln r \mu_1(s) d\Gamma + \int_{\Gamma} -r(2 \ln r + 1) \cos(r, \nu) \mu_2(s) d\Gamma(s) &= \varphi(x, y), \\ \int_{\Gamma} r(2 \ln r + 1) \cos(r, n) \mu_1(s) d\Gamma + \int_{\Gamma} [(2 \ln r + 3) \cos(r, \nu) \cos(r, n) + \\ + k_1 k_2 (2 \ln r + 1) \sin(r, n) \sin(r, \nu)] \mu_2(s) d\Gamma(s) &= \psi(x, y), \end{aligned} \quad (2.5)$$

де $k_1 = \text{sign}(\text{Pr}_{oz}[n \times r])$, $k_2 = \text{sign}(\text{Pr}_{oz}[\nu \times r])$. Наявність в ядрах системи рівнянь (2.5) логарифмічних особливостей дозволяє домогтися регуляризуючого ефекту їх розв'язку прямими обчислювальними методами, що підтверджено досвідом розв'язування інтегральних рівнянь подібного типу [5]. Їх суть полягає в тому, що систему інтегральних рівнянь (2.5) за допомогою формули Симпсона зводимо до системи алгебраїчних. Для цього контур Γ розбиваємо на n елементарних дуг, на кожній з яких обираємо проміжну точку. Систему інтегральних рівнянь наближено, заміною інтегралів по елементарних дугах, подаємо у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^n I_{1i} \mu_{1i} + \sum_{i=1}^n I'_{1i} \mu_{2i} = \varphi_1,$$

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 & \sum_{i=1}^n I_{ni}\mu_{1i} + \sum_{i=1}^n I'_{ni}\mu_{2i} = \varphi_n, \\
 & \sum_{i=1}^n I''_{1i}\mu_{1i} + \sum_{i=1}^n I'''_{1i}\mu_{2i} = \psi_1, \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \sum_{i=1}^n I''_{ni}\mu_{1i} + \sum_{i=1}^n I'''_{ni}\mu_{2i} = \psi_n,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

де μ_1, μ_2 — невідомі значення функції щільності, φ_i і ψ_i — відомі значення функцій φ і ψ на i -й частині контуру, $I_{ij}, I'_{ij}, I''_{ij}, I'''_{ij}$ — коефіцієнти системи лінійних алгебраїчних рівнянь, обчислені за формулою Симпсона. В результаті розв'язку системи (2.6) визначаємо μ_1 і μ_2 на ділянках контуру. Після цього можна підрахувати значення функції $w(x, y)$ в будь-якій внутрішній точці області. Приклади чисельної реалізації методу потенціалу свідчать про його високу обчислювальну ефективність (точність у модельних задачах становить понад 99 %). Для перевірки чисельних результатів розглядаємо різні бігармонічні в області Ω функції $f(x, y)$, тобто $\Delta\Delta f(x, y) = 0$. Такі функції далі називаються модельними. Вони наведені в другій колонці таблиці 2. Потім формулюємо граничну задачу:

$$w|_{\Gamma} = f, \quad \left. \frac{dw}{dn} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{df}{dn} \right|_{\Gamma}.$$

В силу єдиності розв'язку останньої, знайдена функція $w(x, y)$ у внутрішніх точках області повинна тотожно збігатися з модельною функцією. В таблиці 1, наведено результати обчислювального експерименту, які свідчать про явище саморегуляризації в системі інтегральних рівнянь (2.4).

Форма контуру	$f(x, y)$	$(x, y) \in \Omega$	Точн. розв.	Набл. розв.
Коло радіуса $R=6$	$x^2/2 + y^2/2$	(0,1)	0.500000	0.497914
Коло радіуса $R=8$	3	(3,0)	3.000000	3.000007
Еліпс $a=10, b=8$	$x^2/2 + y^2/2$	(0,5)	12.5000	12.5009
Еліпс $a=3, b=15$	5	(0,4)	5.000000	4.99949
Еліпс $a=7, b=5$	$x+y$	(3,4)	7.000000	7.00142

Таблиця 1.

3. Крайова задача для неоднорідного бігармонічного рівняння. Фізичний приклад

Розглянемо рівняння Софі Жермен, тобто рівняння згину серединних точок тонкої пружної пластини

$$\Delta\Delta w(x, y) = \frac{q}{D}, \quad (3.1)$$

$$w|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{dw}{dn} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (3.2)$$

де $w = w(x, y)$ — невідома функція згину серединної точки (x, y) пластини (призматичне тіло, товщина якого мала порівняно з іншими геометричними параметрами), Γ — контур пластини, який обмежує її область Ω , $q = \text{const}$ — інтенсивність поперечного навантаження; $D = \frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)}$ — циліндрична жорсткість пластини, h — товщина пластини, E — модуль пружності першого роду, σ — коефіцієнт Пуассона її матеріалу. Крайові умови (3.2) фізично відповідають випадку, коли пластинка в граничних точках жорстко закріплена. Легко перевірити безпосередньою підстановкою, що розв'язком рівняння (3.1) буде

$$w_1(x, y) = \frac{q(x^2 + y^2)^2}{D}. \quad (3.3)$$

Тоді

$$\Delta\Delta w_1(x, y) = \frac{q}{D}. \quad (3.4)$$

Далі розв'яжемо однорідну задачу з неоднорідними крайовими умовами

$$\Delta\Delta w_2(x, y) = 0, \quad (3.5)$$

$$w_2|_{\Gamma} = -w_1(x, y), \quad \left. \frac{dw_2}{dn} \right|_{\Gamma} = -\frac{\partial w_1(x, y)}{\partial n}. \quad (3.6)$$

Тобто при формуванні крайових умов (3.6) ми фактично обчислюємо на контурі Γ відому функцію $w_1(x, y)$ та її нормальну похідну. Алгоритм розв'язку задачі (3.5)–(3.6) є таким самим, як і для задачі (2.1)–(2.2). Знайшовши функції щільності μ_1, μ_2 , маємо розв'язок задачі (3.1)–(3.2):

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y),$$

$$w(x, y) = \frac{q(x^2 + y^2)^2}{D} + \int_{\Gamma} (r^2 \ln r) \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} -r(2 \ln r + 1) \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta),$$

де $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, а (x, y) — внутрішня точка області Ω . Наведемо конкретні приклади розрахунку напружено-деформованого стану пластин, які будемо обчислювати за такими параметрами: $h = 0,07$ м, $q = 3$ кН/м²,

$\sigma = 0.3$, $E = 21.5 \cdot 10^{10}$ Нм². Зауважимо, що в прикладах 1, 2 і 3 розглядаються пластини канонічної форми і результати (значення функції $w(x, y)$) збігаються з відомими [10], а в прикладах 4 і 5 проведено розрахунок напружено-деформованого стану пластин, для яких точно значення функції згину середніх точок $w(x, y)$ не відоме.

Приклад 1. Для еліпса (зокрема, круга) отримані результати можна порівняти з відомими, обчисленими аналітично. В таблиці 2 наведено такі порівняння для пластини, яка має форму круга радіуса 5. Дані таблиці свідчать про високу точність методу.

Коорд. точок пласт.	Отрим. розв.	Точний розв.	Похибка
(5,0)	0.00000	0.00000	-.131861E-08
(4,0)	0.331926E-06	0.332885E-06	0.958352E-09
(2,0)	0.181387E-05	0.181237E-05	-.150112E-08
(0,0)	0.257184E-05	0.256856E-05	-.328873E-08
(-1,0)	0.236998E-05	0.236718E-05	-.279783E-08
(-3,0)	0.105203E-05	0.105208E-05	0.518412E-10
(-4,0)	0.331929E-06	0.332885E-06	0.956305E-09
(-5,0)	0.00000	0.00000	-.748359E-09

Таблиця 2.

Приклад 2. Пластина має форму еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $a = 5$ м, $b = 4$ м (див. рис. 1).

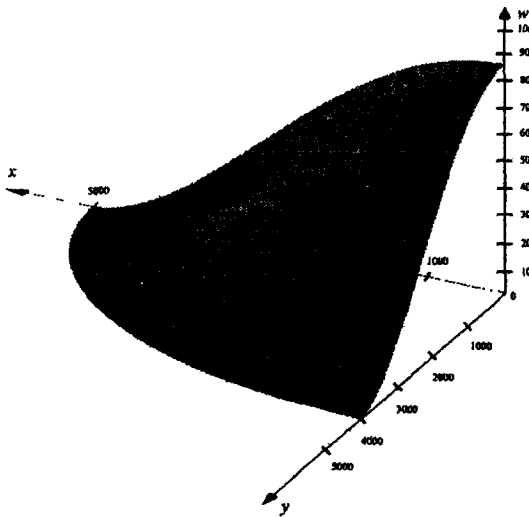


Рис. 1.

Приклад 3. Пластина має форму квадрата зі стороною 4 (див. рис. 2).

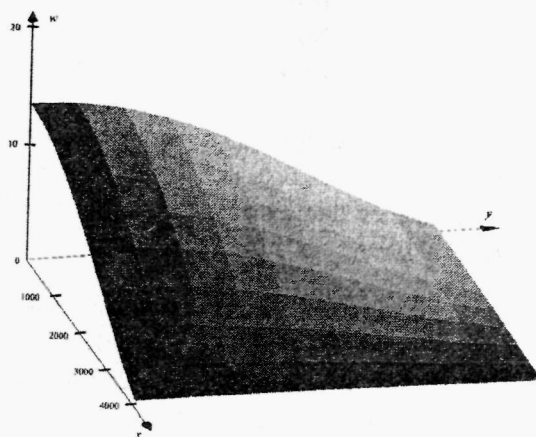


Рис. 2.

Приклад 4. Пластина має форму гіпоциклоїди

$$x = (R - r) \cos \varphi + d \cos \left(\frac{R - r}{r} \varphi \right),$$

$$y = (R - r) \sin \varphi + d \sin \left(\frac{R - r}{r} \varphi \right)$$

з параметрами $R = 7$ м, $r = 1.2$ м, $d = 0.6$ м (див. рис. 3).

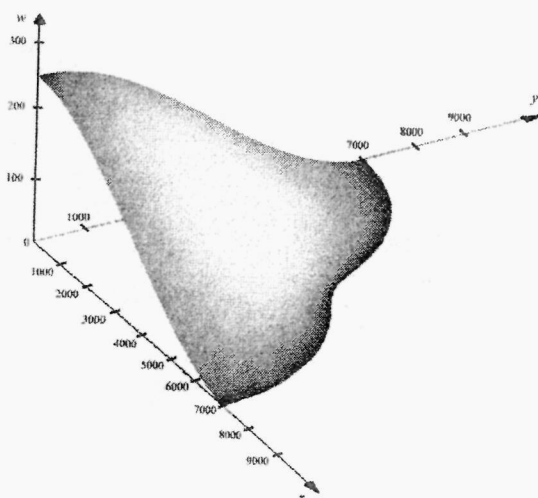


Рис. 3.

Приклад 5. Пластина має форму овала Кассіні

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi + \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\varphi},$$

де $a = 6$ м, $c = 5.5$ м (див. рис. 4).

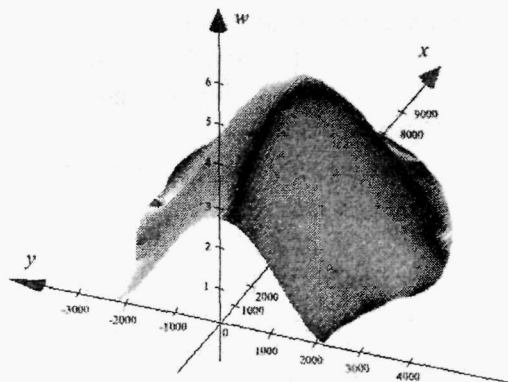


Рис. 4.

Ці приклади підтверджують високу обчислювальну ефективність і достатню для практики точність та зручність у застосуванні методу потенціалів. Розглянемо далі більш складну задачу.

4. Крайова задача для неоднорідного бігармонічного рівняння з неоднорідними крайовими умовами

$$\Delta\Delta w(x, y) = f \quad (4.1)$$

$$w|_{\Gamma} = \varphi, \quad \frac{dw}{dn}\Big|_{\Gamma} = \psi, \quad (4.2)$$

де $w = w(x, y)$ — невідома функція, f , φ , ψ — задані неперервні функції, Γ — контур, який обмежує область Ω [2]. За теоремою Гільберта [1] розв'язок рівняння (4.1) має вигляд:

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi D} \iint_{\Omega} r^2 \ln r f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta), \quad (4.3)$$

де $w_1(x, y)$, знайдена через подвійний інтеграл, задовольняє рівняння (4.1), але не задовольняє граничним умовам (4.2). Отже,

$$\Delta\Delta w_1 = f. \quad (4.4)$$

Для того, щоб задовольнити граничним умовам, формулюємо таку задачу:

$$\Delta\Delta w_2 = 0, \quad (4.5)$$

$$w|_{\Gamma} = (\varphi - w)|_{\Gamma}, \quad \left. \frac{dw}{dn} \right|_{\Gamma} = \left(\psi - \frac{\partial w_1}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma}, \quad (4.6)$$

де при формуванні крайових умов (4.6) треба знайти різницю значень функцій φ , ψ , $w_1(x, y)$ та її нормальної похідної на границі Γ відповідно. Для знаходження функції $w_1(x, y)$ та її нормальної похідної треба обчислити відповідні подвійні інтеграли по області прямокутної форми, що охоплює контур Γ . Цю область покриваємо прямокутною сіткою. Далі задача (4.5)–(4.6) аналогічна задачі (2.1)–(2.2), детально викладеній в параграфі 2. Як і в параграфі 3, розв'язком задачі (4.1)–(4.2) буде

$$w = w_1 + w_2,$$

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi D} \iint_{\Omega} r^2 \ln r f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} (r^2 \ln r) \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} -r(2 \ln r + 1) \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta),$$

де $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, а (x, y) — внутрішня точка області Ω .

5. Висновок

Аналіз одержаних даних свідчить про обчислювальну ефективність алгоритму розв'язку задачі. При його реалізації використовувались різні модельні функції і досить складні форми областей. При цьому точність результатів у розглянутих модельних задачах становить понад 99 %, що підтверджує об'єктивність досліджень і даних обчислювального експерименту. Результати можуть бути базою для постановки і розв'язування складних задач оптимізації, крайових задач рівнянь математичної фізики в нелінійній постановці з побудовою різних схем ітераційних процесів та дослідження їх збіжності.

Бібліографічні посилання

1. Арсенін В. Я. Методи математичної фізики і спеціальні функції / В. Я. Арсенін. М. : Наука, 1984.
2. Боборикін В. Г. Про розв'язування задачі пружного згину пластини зі змішаними граничними умовами / В. Г. Боборикін // International applied mechanics, 2006. Т. 42, № 5. С. 104–111.
3. Волошко Л. В. Обчислювальна ефективність бігармонічного потенціалу / Л. В. Волошко, Л. С. Коряшкіна // Тези доп. VII міжнар. наук.-практ. конф. "Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2009)". — Дніпропетровськ, Дніпропетр. нац. ун-т ім. О. Гончара, 25–27 листопада 2009 року. С.132–133.

4. *Волошко Л. В.* Розв'язок граничної задачі для бігармонічного рівняння у випадку складної форми області / Л. В. Волошко, В. Д. Ламзюк, В. Л. Волошко // Тези доповідей 9-ї міжнар. міждисцип. наук.-практ. школи-конф. "Сучасні проблеми гуманізації і гармонізації керування". — Харків, Нац. ун-т ім. В. М. Каразіна, 1–8 листопада 2009 року. С. 269–271.
5. *Дмитрієв В. І.* Чисельні методи в програмуванні / В. І. Дмитрієв, Є. В. Захаров // 1968. Вип. 10, С. 49–51.
6. *Льїн І. О.* Аналітична геометрія / І. О. Льїн, Е. Г. Позняк. М. : Физматлит, 2004.— 224 с.
7. *Кисельова О. М., Шор Н. З.* Неперервні задачі оптимального розбиття множин: теорія, алгоритми, додатки / О. М. Кисельова, Н. З. Шор. К. : Наукова думка, 2005.— 564 с.
8. *Коряшкіна Л. С.* Розв'язок однієї задачі керування параболічною системою / Л. С. Коряшкіна // Проблеми керування і інформатики, 1998. С. 94–102.
9. *Кузьменко В. І.* Конспект лекцій з курсу "Некоректні задачі" / В. І. Кузьменко. Д.: РВВ ДНУ, 2009, 76 с.
10. *Самуль В. І.* Основи теорії пружності і пластичності / В. І. Самуль. М. : Вища школа, 1970.— 287 с.
11. *Melnikov Yu. A.* Influence Functions and Matrices / Yu. A. Melnikov. New York-Basel : Marcel Dekker, 1999.

Надійшла до редколегії 27.12.2010

УДК 517.91

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ С ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. А. Остапенко

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск, 49010.*

Рассматривается первая краевая задача для телеграфного уравнения на отрезке, один конец которого является подвижным. Разработан метод решения такой задачи и получено ее точное решение. Этот метод основан на интегральном представлении решений телеграфного уравнения и обобщении метода отражений применительно к областям с переменной границей. Рассмотрены варианты движения подвижного конца с дозвуковой, звуковой и сверхзвуковой скоростями, а также с произвольной скоростью.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, краевая задача, область с подвижной границей.

Введение

Основным математическим аппаратом, описывающим распространение волн различной физической природы в средах, обладающих сопротивлением, является телеграфное уравнение. Использование телеграфного уравнения позволяет учесть реально существующие сопротивления среды и выяснить характер затухания волн, вызванного этими сопротивлениями. Кроме того, область, в которой требуется найти решение телеграфного уравнения, может изменяться во времени. Такая ситуация возникает, например, при наматывании подъемного каната грузоподъемных механизмов на барабан. Дело в том, что при учете сил трения между канатом и барабаном упругие перемещения в той части каната, которая намотана на барабан, описываются телеграфным уравнением. Длина же каната, намотанного на барабан, изменяется со временем.

Такого рода краевые задачи для канатов переменной длины принципиально были поставлены рядом исследователей [1]. Однако их решение в предположении о малой скорости намотки каната на барабан отыскивалось в областях с неизменной границей. В настоящей статье строится решение такой задачи в области с переменной границей. С целью решения такого рода задачи в [2, 5] разработан метод интегрального представления решений телеграфного уравнения с помощью функции Римана. Для использования интегрального представления решения потребовалось разработать метод продолжения краевых условий на всю числовую ось [3, 4]. Наконец, был создан метод построения

отраженных волн от подвижного конца [6]. Сочетание перечисленных методов позволило получить решение рассматриваемой задачи в квадратурах.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая краевая задача: в области $0 < x < l + \nu(t)$, $t > 0$ найти решение телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + B \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + Cu(x, t) = 0, \quad (1.1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, 0) = 0; \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x > 0; \quad (1.2)$$

и краевым условиям первого типа

$$u(l + \nu(t), t) = \mu(t); \quad u(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (1.3)$$

Относительно функции $\nu(t)$, описывающей перемещение нижнего конца стержня, предполагается, что $\nu(0) = 0$ и из условия сохранения области интегрирования краевой задачи следует, что $\nu(t) > -l$ при $t > 0$.

Применительно к наматыванию каната на барабан эту задачу можно физически интерпретировать следующим образом. Канат рассматривается как гибкая нить. Ось x направлена вдоль центральной оси каната и начало координат расположено в точке прикрепления каната к барабану. Поэтому упругое перемещение в точке $x = 0$ $u(0, t) = 0$. В начальный момент времени длина каната, намотанного на барабан, равна l . Функция $\nu(t)$ описывает изменение длины каната на барабане. Точка контакта свисающей части каната с барабаном имеет координату $x = l + \nu(t)$. Первое краевое условие (1.3) задает упругое перемещение в этой точке каната. Начальные условия приняты нулевыми.

2. Решение задачи

Для применения разработанного в [2] интегрального представления решений телеграфного уравнения (1.1) необходимо определить краевые условия (1.3) на всей оси t . Так как в краевом условии (1.3) функция $\mu(t)$ определена лишь на полуоси, необходимо построить ее продолжение на всю ось t . Учитывая нулевые начальные условия (1.2), функцию $\mu(t)$ на всю ось t необходимо продолжать нулем. Поэтому продолжение функции $\mu(t)$ на всю ось t будет выглядеть следующим образом:

$$M(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Первое краевое условие (1.3) также продолжается на всю ось t :

$$u(l + \nu(t), t) = M(t). \quad (2.2)$$

Решение поставленной задачи основано на установленном в [2] факте, что в случае краевых условий первого типа решением дифференциального уравнения (1.1) является функция

$$u(x, t) = e^{\frac{Da-B}{2}x} \omega\left(t - \frac{x}{a}\right) + e^{-\frac{Da+B}{2}x} \omega\left(t + \frac{x}{a}\right) + \\ + ae^{-\frac{B}{2}x} \int_{t-\frac{x}{a}}^{t+\frac{x}{a}} \left[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} \omega(\eta) d\eta$$

с произвольной функцией $\omega(\eta)$. Учитывая, что по условиям постановки задачи волны в среде возбуждаются на правом конце отрезка и распространяются в среду в направлении отрицательных x , на начальном этапе решение задачи отыскивается в виде функции

$$u_0(x, t) = 2M_0\left(t + \frac{x}{a}\right) e^{-\frac{(Da+B)}{2}x} + \\ + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t+\frac{x}{a}} \left[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_0(\eta) d\eta \quad (2.3)$$

с неизвестной функцией $M_0(t)$. Здесь $J_0(z)$, $J_1(z)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно,

$$z = \sqrt{c_1[x^2 - a^2(t-\eta)^2]} ; \quad (2.4)$$

$$c_1 = C + \frac{D^2 a^2}{4} - \frac{B^2}{4} . \quad (2.5)$$

Функция (2.3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.1) при произвольной функции $M_0(t)$.

Подстановка формы решения (2.3) в краевое условие (2.2) приводит к равенству

$$2M_0\left(t + \frac{\nu(t)+l}{a}\right) e^{-\frac{(Da+B)}{2}(\nu(t)+l)} + \\ + 2ae^{-\frac{B}{2}(\nu(t)+l)} \int_0^{t+\frac{\nu(t)+l}{a}} \left[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1 \frac{\nu(t)+l}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_0(\eta) d\eta . \quad (2.6)$$

В (2.6)

$$z = \sqrt{c_1[(\nu(t)+l)^2 - a^2(t-\eta)^2]} ; \quad (2.7)$$

Таким образом, если функция M_0 будет решением интегрального уравнения (2.6), функция (2.3) будет удовлетворять первому краевому условию (1.3).

С целью получения возможности представления функции M_0 с различными аргументами введем в (2.6) преобразование переменной t :

$$\tau = t + \frac{\nu(t)+l}{a} . \quad (2.8)$$

Для того чтобы выполнение преобразования (2.8) в интегральном уравнении (2.6) было возможным, необходимо, чтобы существовала обратная к τ

функция t_0 . Поэтому необходимо рассмотреть различные варианты поведения функции $\nu(t)$.

2.1. Движение подвижного конца с дозвуковой скоростью

В случае, когда подвижный конец перемещается с дозвуковой скоростью, то есть выполняется условие

$$|\nu'(t)| < a, \tag{2.9}$$

из (2.8) следует:

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 + \frac{\nu'(t)}{a} > 0. \tag{2.10}$$

Это значит, что функция (2.8) будет строго монотонно возрастающей, и поэтому будет существовать обратная к ней функция t_0 , также строго монотонно возрастающая. При этом, так как $\tau(0) = l/a$, получаем, что $t_0(l/a) = 0$. Из неравенства (2.10) следует, что $\tau > l/a$ при $t > 0$. Так как функция $\nu(t)$ определена только при $t > 0$, функция $\tau(t)$ определена также только при $t > 0$. Соответственно и функция $t_0(\tau)$ будет определена только при $\tau > l/a$. В то же время в процессе построения решения рассматриваемой краевой задачи возникает необходимость знания поведения функции $M_0(\tau)$ также и при значениях аргумента τ , меньших l/a .

С этой целью необходимо выполнить продолжение функции $\nu(t)$ на всю ось t . Оказывается, что продолжение функции $\nu(t)$ на всю ось t можно выполнить произвольно, потребовав лишь существования производной этого продолжения на всей оси t и выполнения на всей оси t условия (2.9). Обозначим это продолжение функции $\nu(t)$ через $\nu_1(t)$. Тогда на всей оси t будет определена функция

$$N(t) = \begin{cases} \nu(t), & t > 0; \\ \nu_1(t), & t < 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Продолженную на всю ось t функцию $\tau(t)$ обозначим $T(t)$ и определим выражением

$$T(t) = t + \frac{N(t) + l}{a}. \tag{2.12}$$

Из этого выражения и (2.11) ясно, что при $t > 0$ $T(t) = \tau(t)$. Так как по условию функция $N(t)$ удовлетворяет неравенству

$$|N'(t)| < a, \tag{2.13}$$

при всех t , функция $T(t)$ будет строго монотонно возрастающей, и так как $\tau(0) = l/a$, при $t < 0$ будет справедливо $T(t) < l/a$.

В силу того, что функция $T(t)$ является строго монотонной при всех t , для нее существует обратная функция $T_0(T)$, причем при $T \geq l/a$ $T_0(T) = t_0(\tau)$

и $T_0(T)$ будет строго монотонно возрастающей функцией. Таким образом, функция $T_0(T)$ удовлетворяет условию

$$T_0(t) = \begin{cases} t_0(\tau) > 0, & T > l/a; \\ 0, & T = l/a; \\ < 0, & T < l/a. \end{cases} \quad (2.14)$$

Теперь после выполнения преобразования (2.12) интегральное уравнение (2.6) примет вид:

$$M_0(T)e^{-\frac{Da+B}{2}(l+N(T_0(T)))} + ae^{-\frac{B}{2}(l+N(T_0(T)))} \int_0^T \left[\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{l+N(T_0(T))}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2}{2}(T_0(T)-\eta)} M_0(\eta) d\eta = \frac{1}{2} M(T_0(T)). \quad (2.15)$$

В интегральном уравнении (2.15)

$$z = \sqrt{c_1[(l+N(T_0(T)))^2 - a^2(T_0(T) - \eta)^2]}. \quad (2.16)$$

Из интегрального уравнения (2.15), свойства (2.1) функции $M(t)$ и равенства (2.14) следует, что

$$M_0(T) = 0, \quad T < \frac{l}{a}. \quad (2.17)$$

В свою очередь, из свойства (2.17) функции $M_0(T)$ следует, что функция (2.3) удовлетворяет начальным условиям (1.2). Действительно, из формулы (2.3) непосредственно следует, что при $t = 0$ аргумент функции M_0 и верхний предел интегрирования становятся равными $\frac{x}{a}$. А так как при $t = 0$ $x < l$, это на основании свойства (2.17) функции $M_0(T)$ означает, что при $t = 0$ функция (2.3) будет равна нулю, то есть удовлетворяет первому начальному условию (1.2). Продифференцировав функцию (2.3) по t , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} = & 2M_0'(t + \frac{x}{a})e^{-\frac{Da+B}{2}x} + \\ & + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \left[\frac{B}{2} J_0(z_0) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z_0) \right] e^{-\frac{Da}{2}x} M_0(t + \frac{x}{a}) + \\ & + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t+\frac{x}{a}} \left\{ \frac{Da^2}{2} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z) \right] + \frac{B}{2} a^2 c_1 \frac{t-\eta}{z} J_1(z) - \right. \\ & \left. - a^2 c_1^2 \frac{x(t-\eta)}{z^2} (J_0'(z) - \frac{J_1'(z)}{z}) \right\} e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_0(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В формуле (2.18)

$$z_0 = \sqrt{c_1[x^2 - x^2]} = 0. \quad (2.19)$$

При вычислении производной (2.18) учтено, что в соответствии с (2.7)

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{c_1 a^2 (t-\eta)}{z}; \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial J_0(z)}{\partial t} = \frac{c_1 a^2 (t - \eta)}{z} J_1(z); \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{J_1(z)}{z} \right) = \frac{c_1 a^2 (t - \eta)}{z^2} (J_0''(z) - \frac{J_0'(z)}{z}), \quad (2.22)$$

Если в формуле (2.18) принять $t = 0$, то аргументы функций M_0 и M_0' , а также верхний предел интегрирования при $x < l$ станут меньшими, чем l/a . Поэтому на основании свойства (2.17) функции M_0 производная (2.18) при $t = 0$ обратится в нуль. А это означает, что функция (2.3) будет удовлетворять и второму начальному условию (1.2).

Таким образом, функция (2.2) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, кроме второго краевого условия (1.3). С целью проверки этого условия вычислим из (2.3):

$$u_0(0, t) = 2M_0(t) + 2a \int_0^t \frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{D a^2}{2}(t-\eta)} M_0(\eta) d\eta. \quad (2.23)$$

Из формулы (2.23) следует, что на основании свойства (2.17) функции M_0 функция (2.3) при $t < \frac{l}{a}$ будет удовлетворять также и второму краевому условию (1.3). С целью удовлетворения второму краевому условию (1.3) при $t > \frac{l}{a}$ решение краевой задачи станем искать в виде суммы двух функций

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t), \quad (2.24)$$

где

$$u_1(x, t) = 2e^{\frac{(D a - B)x}{2}} [-M_1(t - \frac{x}{a}) + M_0(t - \frac{x}{a})] + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t - \frac{x}{a}} [\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z)] e^{\frac{D a^2}{2}(t-\eta)} [M_1(\eta) - M_0(\eta)] d\eta. \quad (2.25)$$

Функция (2.25) удовлетворяет уравнению (1.1) с произвольными функциями M_0 и M_1 . Подставляя функцию (2.24) во второе краевое условие (1.3), получим:

$$2[-M_1(t) + 2M_0(t)] + 2a \int_0^t \frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{D a^2}{2}(t-\eta)} M_1(\eta) d\eta = 0,$$

откуда следует:

$$M_1(t) - a \int_0^t \frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{D a^2}{2}(t-\eta)} M_1(\eta) d\eta = 2M_0(t). \quad (2.26)$$

Таким образом, если функция M_1 будет решением интегрального уравнения (2.26), функция (2.24) будет удовлетворять второму краевому условию (1.3) при всех t . В уравнении (2.26)

$$z = a(t - \eta) \sqrt{-c_1}. \quad (2.27)$$

Из уравнения (2.26) и свойства (2.17) функции M_0 следует, что функция M_1 обладает свойством

$$M_1(T) = 0, \quad T < \frac{l}{a}. \quad (2.28)$$

Пользуясь свойствами (2.17) и (2.28) функций M_0 и M_1 , так же, как и для функции $u_0(x, t)$ можно проверить, что функция (2.24) удовлетворяет начальным условиям (1.2).

Для того чтобы функция (2.24) удовлетворяла первому краевому условию (1.3), необходимо, чтобы функция $u_1(x, t)$ удовлетворяла краевому условию

$$u_1(l + \nu(t), t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.29)$$

Вычислим значение функции $u_1(x, t)$ в точке $x = l + \nu(t)$. Получим:

$$\begin{aligned} u_1(l + \nu(t), t) = & 2e^{\frac{D_0 a - B}{2}(l + \nu(t))} \left[-M_1 \left(t - \frac{l + \nu(t)}{a} \right) + M_0 \left(t - \frac{l + \nu(t)}{a} \right) \right] + \\ & + 2ae^{-\frac{B}{2}(l + \nu(t))} \int_0^{t - \frac{l + \nu(t)}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{l + \nu(t)}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{D_0 a^2}{2}(t - \eta)} \times \\ & \times [M_1(\eta) - M_0(\eta)] d\eta. \quad (2.30) \end{aligned}$$

Из свойств (2.17) и (2.28) функций M_0 и M_1 и равенства (2.30) следует, что краевое условие (2.29) будет удовлетворено при

$$t < \frac{\nu(t) + 2l}{a}. \quad (2.31)$$

Действительно, при значениях t , удовлетворяющих неравенству (2.31), аргументы функций M_0 и M_1 и верхний предел интегрирования в формуле (2.30) будут меньше, чем $\frac{l}{a}$, и поэтому правая часть равенства (2.31) обратится в нуль. При $t > \frac{\nu(t) + 2l}{a}$ для удовлетворения первому краевому условию (1.3) в решение (2.24) необходимо вводить поправку. Ввести такую поправку методами, применяемыми для областей с неподвижными границами, как показано в [6] для случая волнового уравнения, невозможно. Поэтому для введения поправки используется подход, разработанный в [6, 7]. С этой целью заметим, что в течение интервала времени, определяемого условием $t = \frac{\nu(t) + 2l}{a}$, передний фронт волны, излученной подвижным концом, начиная от момента времени $t = 0$, дойдет до конца $x = 0$, отразится от него и встретится с подвижным концом. Длина этого интервала времени определится как наименьший положительный корень τ_1 уравнения

$$at = \nu(t) + 2l. \quad (2.32)$$

Левая часть уравнения (2.32) при $t = 0$ меньше правой части. В то же время на основании условия (2.9) при $t > 0$ левая часть этого уравнения растет быстрее правой части. Следовательно, положительный корень уравнения (2.30) существует. Из проведенных рассуждений ясно также, что функция

(2.30) будет равна нулю при $t < \tau_1$. Действительно, при $t = 0$ неравенство $t < \frac{\nu(t)+2l}{a}$ справедливо, так как $\nu(0) = 0$. В то же время τ_1 является наименьшим положительным числом, при котором это неравенство обращается в равенство (2.32). Поэтому поправочная функция $u_2(x, t)$, являющаяся по существу волной, отраженной от подвижного конца, строится как решение вспомогательной краевой задачи: в области $0 < x < l + \nu(t)$, $t > \tau_1$ найти решение телеграфного уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, \tau_1) = 0; \quad u_t(x, \tau_1) = 0, \quad 0 < x < l + \nu(\tau_1); \quad (2.33)$$

и краевым условиям

$$u(l + \nu(t), t) = -u_1(l + \nu(t), t); \quad u(0, t) = 0, \quad t > \tau_1. \quad (2.34)$$

Решение этой вспомогательной краевой задачи строится в виде функции, являющейся решением уравнения (1.1) при произвольной функции M_2 :

$$\begin{aligned} u_2(x, t) = & 2M_2\left(t + \frac{x}{a}\right)e^{-\frac{(Da+B)}{2}x} + \\ & + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t+\frac{x}{a}} \left[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_2(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Подставив функцию (2.35) в первое краевое условие (2.34), получим:

$$\begin{aligned} 2M_2\left(t + \frac{l + \nu(t)}{a}\right)e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(t))} + 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))} \int_0^{t+\frac{l+\nu(t)}{a}} \left[\frac{B}{2}J_0(z) - \right. \\ \left. - c_1 \frac{l + \nu(t)}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_2(\eta) d\eta = -u_1(l + \nu(t), t). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Таким образом, если функция M_2 будет решением интегрального уравнения (2.36), то функция

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) \quad (2.37)$$

будет удовлетворять второму краевому условию (1.3) при всех t . Выполнив в уравнении (2.36) преобразование (2.12), получим:

$$\begin{aligned} 2M_2(T)e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(T_0(T)))} + 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(T_0(T)))} \int_0^T \left[\frac{B}{2}J_0(z) - \right. \\ \left. - c_1 \frac{l + \nu(T_0(T))}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2}{2}(T_0(T)-\eta)} M_2(\eta) d\eta = \\ = -u_1(l + \nu(T_0(T)), T_0(T)). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Так как правая часть интегральных уравнений (2.36) и (2.38) равна нулю при $t < \tau_1$, функция $M_2(T)$ также будет равна нулю при $t < \tau_1$. Выясним, при каких значениях T функция $M_2(T)$ будет равна нулю. Поскольку функция $T(t)$ строго монотонно возрастает, будет справедливо неравенство

$$T(t) < T(\tau_1) \quad \text{при } t < \tau_1. \quad (2.39)$$

Используя в этом неравенстве определение (2.12) функции $T(t)$ и значение τ_1 из (2.32), получим:

$$T < \tau_1 + \frac{\nu(\tau_1) + l}{a} = \frac{3l + 2\nu(\tau_1)}{a}.$$

Таким образом, функция $M_2(T)$ обладает следующим свойством:

$$M_2(T) = 0, \quad T < \frac{3l + 2\nu(\tau_1)}{a}. \quad (2.40)$$

Если теперь положить в равенстве (2.35) $t = 0$, то аргумент функции M_2 и верхний предел интегрирования в этой формуле примут значение $\frac{x}{a}$. Учитывая, что при $t = 0$ $x < l$, будем иметь, что $\frac{x}{a} < \frac{l}{a}$. Но так как $l > \nu(\tau_1)$, получим, что

$$\frac{l}{a} < \frac{3l + 2\nu(\tau_1)}{a}. \quad (2.41)$$

Это значит, что при $t = 0$ функция (2.35) обратится в нуль, то есть будет удовлетворять первому начальному условию (1.2).

Вычислив производную функции (2.35) по t , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} &= 2M_2'(t + \frac{x}{a})e^{-\frac{Da+B}{2}x} + \\ &+ 2ae^{-\frac{B}{2}x} \left[\frac{B}{2} J_0(z_0) - c_1 \frac{x}{z_0} J_1(z_0) \right] e^{-\frac{Da}{2}x} M_2(t + \frac{x}{a}) + \\ &+ 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t+\frac{x}{a}} \left\{ \frac{Da^2}{2} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z) \right] + \frac{B}{2} a^2 c_1 \frac{t-\eta}{z} J_1(z) - \right. \\ &\left. - a^2 c_1^2 \frac{x(t-\eta)}{z^2} (J_0'(z) - \frac{J_0'(z)}{z}) \right\} e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_2(\eta) d\eta. \quad (2.42) \end{aligned}$$

Здесь z_0 определяется равенством (2.19). При $t = 0$ аргументы функций M_2 и M_2' , а также верхний предел интегрирования в формуле (2.42) примут значение $\frac{x}{a}$. Следовательно, как показано выше, в области отыскания решения при таких значениях аргумента функции M_2 и M_2' будут равны нулю. Поэтому и производная функции $u_2(x, t)$ по t при $t = 0$ будет равна нулю. А это значит, что функция $u_2(x, t)$ удовлетворяет также и второму начальному условию (1.2).

Таким образом, функция (2.37) удовлетворяет всем условиям постановки основной краевой задачи, кроме второго краевого условия (1.3). Для того чтобы это краевое условие выполнялось, необходимо, чтобы было справедливым равенство

$$u_2(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.43)$$

Положив в формуле (2.35) $x = 0$, получим:

$$u_2(0, t) = 2M_2(t) + 2a \int_0^t \frac{B}{2} J_0(z_0) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_2(\eta) d\eta. \quad (2.44)$$

Как следует из свойства (2.40) функции M_2 , выражение (2.44) обратится в нуль, то есть будет удовлетворять краевому условию (2.43) только при выполнении неравенства $t < \frac{3l+2\nu(\tau_1)}{a}$. Для выполнения второго краевого условия при больших t в решение (2.37) вводится поправка $u_3(x, t)$, то есть решение представляется в виде:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t), \quad (2.45)$$

где

$$u_3(x, t) = 2e^{\frac{(Da-B)}{2}x}[-M_3(t - \frac{x}{a}) + M_2(t - \frac{x}{a})] + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t-\frac{x}{a}} [\frac{B}{2}J_0(z) - c_1 \frac{x}{z}J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}[M_3(\eta) - M_2(\eta)] d\eta. \quad (2.46)$$

Функция $u_3(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) при произвольных функциях M_2 и M_3 и должна обеспечить выполнение краевого условия

$$u_2(0, t) + u_3(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.47)$$

Подстановка функций (2.35) и (2.46) в краевое условие (2.47) приводит к равенству

$$2[-M_3(t) + 2M_2(t)] + 2a \int_0^t \frac{B}{2}J_0(z)e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_3(\eta) d\eta = 0,$$

откуда следует:

$$M_3(t) - a \int_0^t \frac{B}{2}J_0(z)e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)}M_3(\eta) d\eta = 2M_2(t). \quad (2.48)$$

Таким образом, если функция M_3 будет решением интегрального уравнения (2.48), функция (2.45) будет удовлетворять второму краевому условию (1.3) при всех t . Из свойства (2.40) функции M_2 следует, что функция M_3 будет обладать следующим свойством:

$$M_3(t) = 0, \quad t < \frac{3l + 2\nu(\tau_1)}{a}. \quad (2.49)$$

Точно так же, как это сделано для функции $u_2(x, t)$, можно показать, что функция $u_3(x, t)$ будет удовлетворять начальным условиям (1.2). Таким образом, функция (2.45) удовлетворяет всем условиям постановки основной краевой задачи, кроме первого краевого условия (1.3). Для того, чтобы это краевое условие выполнялось, необходимо, чтобы было справедливым равенство

$$u_3(l + \nu(t), t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.50)$$

Положив в формуле (2.46) $x = l + \nu(t)$, получим:

$$u_3(l + \nu(t), t) = 2e^{\frac{(Da-B)}{2}(l+\nu(t))} \left[-M_3 \left(t - \frac{l + \nu(t)}{a} \right) + M_2 \left(t - \frac{l + \nu(t)}{a} \right) \right] + \\ + 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))} \int_0^{t - \frac{l+\nu(t)}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{l + \nu(t)}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} \times \\ \times [M_3(\eta) - M_2(\eta)] d\eta. \quad (2.51)$$

На основании свойств (2.40) и (2.49) функций M_2 и M_3 заключаем, что правая часть равенства (2.51) будет равна нулю, если аргумент функций M_2 и M_3 и верхний предел интегрирования в формуле (2.51) будут удовлетворять неравенству

$$t - \frac{\nu(\tau_1) + l}{a} < \frac{3l + 2\nu(\tau_1)}{a},$$

откуда следует

$$t < \frac{4l + 2\nu(\tau_1) + \nu(t)}{a}. \quad (2.52)$$

Следовательно, при t , удовлетворяющих неравенству (2.52), краевое условие (2.50) будет выполнено. Неравенство (2.52) неудобно для использования, так как от t зависят его левая и правая части. С целью более удобного использования этого неравенства рассмотрим уравнение

$$t = \frac{4l + 2\nu(\tau_1) + \nu(t)}{a}. \quad (2.53)$$

и обозначим через τ_2 его наименьший положительный корень. При $t = 0$ правая часть уравнения (2.53) больше левой. В то же время в силу условия (2.9) правая часть уравнения (2.53) возрастает быстрее левой его части, поэтому положительный корень уравнения (2.53) существует. Следовательно, число τ_2 является наименьшим положительным числом, при котором неравенство (2.52) обращается в равенство. Поэтому неравенство (2.52) эквивалентно неравенству

$$t < \frac{4l + 2\nu(\tau_1) + \nu(\tau_2)}{a} = \tau_2. \quad (2.54)$$

Заметим, что по физическому смыслу краевой задачи в момент времени $t = \tau_2$ передний фронт волны, излученной подвижным концом, дважды отразившись от неподвижного конца и один раз отразившись от конца подвижного, повторно встретится с подвижным концом. При $t > \tau_2$ функция $u_3(x, t)$ уже не будет удовлетворять краевому условию (2.50). Поэтому при $t > \tau_2$ решение основной краевой задачи отыскивается в виде:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t), \quad (2.55)$$

где функция $u_4(x, t)$ строится как решение следующей вспомогательной краевой задачи. В области $0 < x < l + \nu(t)$, $t > \tau_2$ найти решение телеграфного уравнения (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, \tau_2) = 0; \quad u_t(x, \tau_2) = 0, \quad 0 < x < l + \nu(\tau_2); \quad (2.56)$$

и краевым условиям

$$u(l + \nu(t), t) = -u_3(l + \nu(t), t); \quad u(0, t) = 0, \quad t > \tau_2. \quad (2.57)$$

Решение этой вспомогательной краевой задачи строится в виде функции, являющейся решением уравнения (1.1) при произвольной функции M_4 :

$$u_4(x, t) = 2M_4\left(t + \frac{x}{a}\right)e^{-\frac{(Da+B)}{2}x} + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t+\frac{x}{a}} \left[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1 \frac{x}{z}J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_4(\eta) d\eta. \quad (2.58)$$

Подставив функцию (2.58) в первое краевое условие (2.57), получим:

$$2M_4\left(t + \frac{l + \nu(t)}{a}\right)e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(t))} + 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))} \int_0^{t+\frac{l+\nu(t)}{a}} \left[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1 \frac{l + \nu(t)}{z}J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_4(\eta) d\eta = -u_3(l + \nu(t), t). \quad (2.59)$$

Таким образом, если функция M_4 будет решением интегрального уравнения (2.59), то функция (2.55) будет удовлетворять второму краевому условию (1.3) при всех t . Выполнив в уравнении (2.59) преобразование (2.12), получим:

$$2M_4(T)e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(T_0(T)))} + 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(T_0(T)))} \int_0^T \left[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1 \frac{l + \nu(T_0(T))}{z}J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2}{2}(T_0(T)-\eta)} M_4(\eta) d\eta = -u_3(l + \nu(T_0(T)), T_0(T)). \quad (2.60)$$

Так как правая часть интегральных уравнений (2.59) и (2.60) равна нулю при $t < \tau_2$, функция $M_4(T)$ также будет равна нулю при $t < \tau_2$. Выясним, при каких значениях T функция $M_4(T)$ будет равна нулю. Поскольку функция $T(t)$ строго монотонно возрастает, будет справедливо неравенство

$$T(t) < T(\tau_2) \quad \text{при } t < \tau_2. \quad (2.61)$$

Используя в этом неравенстве определение (2.12) функции $T(t)$ и значение τ_2 из (2.53), получим:

$$T < \tau_2 + \frac{\nu(\tau_2) + l}{a} = \frac{5l + 2\nu(\tau_1) + 2\nu(\tau_2)}{a}.$$

Таким образом, функция $M_4(T)$ обладает следующим свойством:

$$M_4(T) = 0, \quad T < \frac{5l + 2\nu(\tau_1) + 2\nu(\tau_2)}{a}. \quad (2.62)$$

Точно так же, как это сделано для функции $u_2(x, t)$, можно показать, что функция $u_4(x, t)$ будет удовлетворять начальным условиям (1.2). Таким

образом, функция (2.55) удовлетворяет всем условиям постановки основной краевой задачи, кроме второго краевого условия (1.3). Этому краевому условию функция $u_4(x, t)$ будет удовлетворять лишь при некоторых $t > \tau_2$. Для того чтобы получить решение основной краевой задачи при больших t , в функцию (2.55) нужно вводить дополнительную поправку.

Продолжив процесс введения поправок в решение, получим, что функция

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 2M_{2n} \left(t + \frac{x}{a} \right) e^{-\frac{(Da+B)}{2}x} + \right. \\ & + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t+\frac{x}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_{2n}(\eta) d\eta \Big\} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 2e^{\frac{(Da-B)}{2}x} \left[-M_{2n+1} \left(t - \frac{x}{a} \right) + M_{2n} \left(t - \frac{x}{a} \right) \right] + \right. \\ & + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} [M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)] d\eta \Big\}. \quad (2.63) \end{aligned}$$

будет решением рассматриваемой краевой задачи. Здесь функция M_0 является решением интегрального уравнения (2.15), а остальные функции M_n являются решениями следующих интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} 2M_{2n}(T) e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(T_0(T)))} + 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(T_0(T)))} \int_0^T \left[\frac{B}{2} J_0(z) - \right. \\ \left. - c_1 \frac{l+\nu(T_0(T))}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2}{2}(T_0(T)-\eta)} M_{2n}(\eta) d\eta = \\ = -u_{2n-1}(l+\nu(T_0(T)), T_0(T)). \quad (2.64) \end{aligned}$$

$$M_{2n+1}(t) - a \int_0^t \frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_{2n+1}(\eta) d\eta = 2M_{2n}(t). \quad (2.65)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_{2n-1}(l+\nu(t), t) = 2e^{\frac{(Da-B)}{2}(l+\nu(t))} \left[-M_{2n-1} \left(t - \frac{l+\nu(t)}{a} \right) + \right. \\ \left. + M_{2n-2} \left(t - \frac{l+\nu(t)}{a} \right) \right] - 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))} \int_0^{t-\frac{l+\nu(t)}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - \right. \\ \left. - c_1 \frac{l+\nu(t)}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} [M_{2n-1}(\eta) - M_{2n-2}(\eta)] d\eta. \end{aligned}$$

При этом функции M_n обладают следующими свойствами:

$$M_{2n} = M_{2n+1}(t) = 0, \quad t < \frac{(2n+1)l + 2 \sum_{i=1}^n \nu(\tau_i)}{a} \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.66)$$

где τ_n — наименьший положительный корень уравнения

$$t = \frac{2nl + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \nu(\tau_i) + \nu(t)}{a}. \quad (2.67)$$

В силу этих свойств при каждом фиксированном $t = H$ в формуле (2.63) отличным от нуля будет конечное число слагаемых. В самом деле, в суммах в формуле (2.63) каждое из слагаемых при выполнении условий (2.62) становится равным нулю, если аргумент функции M_n и верхний предел интегрирования меньше правой части неравенства (2.66). Для первой суммы в формуле (2.63) такое условие при $t = H$ имеет вид:

$$H + \frac{x}{a} < \frac{(2n+1)l + 2 \sum_{i=1}^n \nu(\tau_i)}{a},$$

откуда следует:

$$n > \frac{1}{2l} [Ha + x - l - 2 \sum_{i=1}^n \nu(\tau_i)].$$

А так как в области отыскания решения выполняется неравенство

$$0 < x < l + \nu(H), \tag{2.68}$$

получаем, что при всех n , удовлетворяющих условию

$$n > \frac{1}{2l} [Ha + \nu(H) - 2 \sum_{i=1}^n \nu(\tau_i)], \tag{2.69}$$

все слагаемые в первой сумме формулы (2.63) будут равны нулю. Иными словами, суммирование в первой сумме формулы (2.63) нужно производить в этом случае не до бесконечности, а до $N-1$, где N — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (2.69).

Для второй суммы в формуле (2.63) условие того, что аргумент функции M_n и верхний предел интегрирования меньше правой части неравенства (2.66) при $t = H$ имеет вид: $H - \frac{x}{a} < \frac{(2n+1)l + 2 \sum_{i=1}^n \nu(\tau_i)}{a}$, откуда следует: $n > \frac{1}{2l} [Ha - x - l - 2 \sum_{i=1}^n \nu(\tau_i)]$. Поэтому на основании неравенства (2.69) получаем, что при всех n , удовлетворяющих условию

$$n > \frac{1}{2l} [Ha - l - 2 \sum_{i=1}^n \nu(\tau_i)], \tag{2.70}$$

все слагаемые во второй сумме формулы (2.63) будут равны нулю. Иными словами, суммирование во второй сумме формулы (2.63) нужно производить в этом случае не до бесконечности, а до N_1-1 , где N_1 — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (2.70)). Все слагаемые в формуле (2.63) являются решениями уравнения (1.1). А так как для каждого фиксированного t число слагаемых в формуле (2.63) конечно, дифференцирование в формуле (2.63) можно выполнять почленно. Поэтому функция (2.63) является решением уравнения (1.1).

Из формулы (2.63) непосредственно следует, что при $t = 0$ и $0 < x < l$ верхние пределы интегрирования всех интегралов и аргументы функций M_k становятся меньшими, чем l/a . Значит, на основании свойств (2.66) функций

M_k получаем из (2.63): $u(x, 0) = 0$. Таким образом, функция (2.63) удовлетворяет первому начальному условию (1.2).

Продифференцируем функцию (2.63) по t . Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 2M'_{2n}\left(t + \frac{x}{a}\right) e^{-\frac{Da+B}{2}x} + \right. \\ & + 2ae^{-\frac{Da+B}{2}x} \left[\frac{B}{2} J_0(z_0) - c_1 \frac{x}{z_0} J_1(z_0) \right] M_{2n}\left(t + \frac{x}{a}\right) + \\ & + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t+\frac{x}{a}} \left\{ \frac{Da^2}{2} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z) \right] + \frac{B}{2} a^2 c_1 \frac{t-\eta}{z} J_1(z) - \right. \\ & \left. - a^2 c_1^2 \frac{x(t-\eta)}{z^2} \left(J'_0(z) - \frac{J'_0(z)}{z} \right) \right\} e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_{2n}(\eta) d\eta \Big\} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 2e^{\frac{Da-B}{2}x} \left[-M'_{2n+1}\left(t - \frac{x}{a}\right) + M'_{2n}\left(t - \frac{x}{a}\right) + a \left(\frac{B}{2} J_0(z_0) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - c_1 \frac{x}{z_0} J_1(z_0) \right) \left(M_{2n+1}\left(t - \frac{x}{a}\right) - M_{2n}\left(t - \frac{x}{a}\right) \right) \right] + \\ & + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left\{ \frac{Da^2}{2} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z) \right] + \frac{B}{2} a^2 c_1 \frac{t-\eta}{z} J_1(z) - \right. \\ & \left. - a^2 c_1^2 \frac{x(t-\eta)}{z^2} \left(J'_0(z) - \frac{J'_0(z)}{z} \right) \right\} e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} [M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)] d\eta \Big\}. \quad (2.71) \end{aligned}$$

Из формулы (2.71) получаем, что при $t = 0$ и $0 < x < l$ верхние пределы интегрирования всех интегралов и аргументы функций M_k и M'_k становятся меньшими, чем l/a . Значит, на основании свойств (2.66) функций M_k получаем из (2.71) $u_t(x, 0) = 0$. Таким образом, функция (2.63) удовлетворяет и второму начальному условию (1.2).

Положив в формуле (2.63) $x = l + \nu(t)$, получим:

$$\begin{aligned} u(l + \nu(t), t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 2M_{2n}\left(t + \frac{l + \nu(t)}{a}\right) e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(t))} + \right. \\ & + 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))} \int_0^{t+\frac{l+\nu(t)}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - \right. \\ & \left. - c_1 \frac{l + \nu(t)}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_{2n}(\eta) d\eta \Big\} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 2e^{\frac{(Da-B)}{2}(l+\nu(t))} \left[-M_{2n+1}\left(t - \frac{l + \nu(t)}{a}\right) + M_{2n}\left(t - \frac{l + \nu(t)}{a}\right) \right] + \right. \\ & + 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))} \int_0^{t-\frac{l+\nu(t)}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{l + \nu(t)}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} \times \\ & \left. \times [M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)] d\eta \right\}. \quad (2.72) \end{aligned}$$

В формуле (2.72) запишем первое слагаемое первой суммы (при $n = 0$) отдельно, а во второй сумме заменим индекс суммирования n на $s = n + 1$. Получим:

$$\begin{aligned}
 u(l + \nu(t), t) = & 2M_0(t + \frac{l + \nu(t)}{a})e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(t))} + \\
 & + 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))} \int_0^{t+\frac{l+\nu(t)}{a}} [\frac{B}{2}J_0(z) - c_1 \frac{l + \nu(t)}{z} J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_{2n}(\eta) d\eta + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \{2M_{2n}(t + \frac{l + \nu(t)}{a})e^{-\frac{(Da+B)}{2}(l+\nu(t))} + \\
 & + 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))} \int_0^{t+\frac{l+\nu(t)}{a}} [\frac{B}{2}J_0(z) - \\
 & - c_1 \frac{l + \nu(t)}{z} J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_{2n}(\eta) d\eta \} + \\
 & + \sum_{s=1}^{\infty} \{2e^{\frac{(Da-B)}{2}(l+\nu(t))} [-M_{2s-1}(t - \frac{l + \nu(t)}{a}) + M_{2s-2}(t - \frac{l + \nu(t)}{a})] + \\
 & + 2ae^{-\frac{B}{2}(l+\nu(t))} \int_0^{t-\frac{l+\nu(t)}{a}} [\frac{B}{2}J_0(z) - c_1 \frac{l + \nu(t)}{z} J_1(z)]e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} \times \\
 & \times [M_{2s-1}(\eta) - M_{2s-2}(\eta)] d\eta \}.
 \end{aligned}$$

Первые два слагаемых в этой формуле представляют собой левую часть интегрального уравнения (2.6) и поэтому равны $M(t)$. Слагаемые в первой сумме последней формулы представляют собой левые части интегральных уравнений (2.64). Слагаемые во второй сумме представляют собой функции u_{2n-1} . Поэтому все слагаемые под знаками Σ в последней формуле обратятся в нуль. Следовательно,

$$u(l + \nu(t), t) = M(t) = \mu(t), \quad t > 0 .$$

А это означает, что функция (2.63) при $t > 0$ удовлетворяет первому краевому условию (1.3).

Положив в формуле (2.63) $x = 0$, получим:

$$\begin{aligned}
 u(0, t) = & \sum_{n=0}^{\infty} \{2M_{2n}(t) + 2a \int_0^t \frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_{2n}(\eta) d\eta \} + \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} \{2[-M_{2n+1}(t) + M_{2n}(t)] + 2a \int_0^t \frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} [M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)] d\eta \}.
 \end{aligned}$$

Объединив в последней формуле слагаемые, получим:

$$u(0, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \{-M_{2n+1}(t) + a \int_0^t \frac{B}{2} J_0(z) e^{\frac{Da^2}{2}(t-\eta)} M_{2n+1}(\eta) d\eta + 2M_{2n}(t)\}.$$

В силу интегральных уравнений (2.65) все слагаемые под знаком суммы обращаются в нуль. А это значит, что функция (2.63) удовлетворяет второму краевому условию (1.3).

Таким образом, показано, что функция (2.63) удовлетворяет всем условиям постановки основной краевой задачи, то есть является ее решением.

2.2. Движение подвижного конца со звуковой или сверхзвуковой скоростью

В этом варианте перемещение нижнего конца стержня в любой момент времени $t > 0$ осуществляется со скоростью звука или сверхзвуковой скоростью, то есть выполняется условие

$$|\nu'(t)| \geq a, \quad t > 0. \quad (2.73)$$

Из условия (2.73) следует, что в общем случае $\nu'(t)$ не может быть непрерывной. Поэтому здесь предполагается только, что $\nu'(t)$ определена почти всюду на положительной полуоси t . Предполагается также, что положительная полуось t может быть покрыта не более чем счетным множеством чередующихся подынтервалов, на каждом из которых выполняется одно из неравенств

$$\nu'(t) \geq a, \quad t > 0. \quad (2.74)$$

или

$$\nu'(t) \leq -a, \quad t > 0. \quad (2.75)$$

Предположим вначале, что при всех $t: 0 < t < T$, справедливо неравенство (2.75). В силу условия $\nu(t) < l$ необходимо $T < t_1$, где t_1 — наименьший положительный корень уравнения $\nu(t) + l = 0$. Так как нижний конец стержня, являясь единственным источником возмущения, движется в этом случае по направлению к верхнему концу со скоростью не меньше звуковой, решением рассматриваемой задачи в этом случае будет функция

$$u(x, t) = \begin{cases} \mu(t), & x = l + \nu(t); \\ 0, & 0 \leq x < l + \nu(t). \end{cases} \quad (2.76)$$

При $t = T$ неравенство (2.75) перестанет быть справедливым, и при некоторых $t > T$ станет справедливым неравенство (2.74). Таким образом оказывается, что если движение нижнего конца стержня начинается в этом варианте в сторону стержня, то стержень, за исключением его нижнего конца, останется в состоянии равновесия и покоя. То есть, независимо от того, двигался ли на начальном интервале времени нижний конец или нет, на интервале $t > T$ снова возникает краевая задача, не отличающаяся по существу от рассматриваемой с самого начала.

Это соображение показывает, что, не нарушая общности рассуждений, следует полагать, что нижний конец стержня на начальном интервале времени движется по направлению от стержня. Поэтому разбиение полуоси t на

подынтервалы осуществляется следующим образом: для интервала $0 < t < T_1$ выполнено неравенство (2.74), для $T_1 < t < T_2$ – неравенство (2.75), для $T_2 < t < T_3$ – неравенство (2.74) и так далее.

В этом случае функция (1.1), очевидно, уже не будет строго монотонной при любых t . Однако на каждом из интервалов (T_{i-1}, T_i) , где i – произвольное нечетное натуральное число, благодаря условию (2.74), эта функция будет строго монотонно возрастающей. Поэтому на интервале (τ_{ai}, τ_{ai-1}) , где $\tau_{ai} = T_1 + \frac{\nu(T_i) + l}{a}$, будет существовать обратная к функции $\tau(t)$ функция $\xi_i(\tau)$, непрерывно дифференцируемая и строго монотонно возрастающая на этом интервале. Продолжим каждую из функций $\xi_i(\tau)$ на всю ось τ как непрерывно дифференцируемую и строго монотонно возрастающую. Обозначим такое продолжение через $E_i(\tau)$. Ясно, что для функций $E_i(\tau)$ на интервале (τ_{ai}, τ_{ai-1}) , или, что то же самое, на интервале $T_{i-1} < t < T_i$, будет справедливо тождество

$$E_i(t + \frac{\nu(t) + l}{a}) = t. \tag{2.77}$$

Вне интервала $[T_{i-1}, T_i]$ тождество (2.77) в общем случае не будет справедливым.

Тогда на интервале $[0, T_1]$, в силу существования на этом интервале обратной к (2.8) функции, решение будет иметь принципиально такой же вид, как и в случае движения подвижного конца с дозвуковой скоростью. Отличие здесь будет состоять лишь в том, что в силу справедливости на этом интервале неравенства (2.74), уравнение (2.32) не будет иметь положительных корней. Это по существу означает, что волна, отраженная от верхнего конца стержня, движущаяся со звуковой скоростью, не сможет догнать нижний конец стержня, движущийся от области отыскания решения со звуковой или сверхзвуковой скоростью. Следовательно, волна, отраженная от подвижного конца стержня, не сможет возникнуть, и поэтому решение задачи на всем интервале $[0, T_1]$ будет иметь вид, подобный выражению (2.24), то есть

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t). \tag{2.78}$$

Необходимо только учесть, что при построении функций $u_0(x, t)$ и $u_1(x, t)$ по формулам (2.3) и (2.25) соответственно в этих формулах и дополнительно в формуле (2.26) в качестве функции M_0 следует брать решение интегрального уравнения (2.15), причем в правой части этого уравнения функцию M следует заменить функцией M_{01} :

$$M_{01}(t) = \begin{cases} \mu(t), & T_{i-1} < t < T_i; \\ 0, & t < T_{i-1}; t > T_i. \end{cases} \tag{2.79}$$

$i = 1, 2, \dots$, причем $T_0 = 0$. Определение функции (2.79) эквивалентно определению

$$M_{01}(\tau(t)) = \begin{cases} \mu(\tau(t)), & \tau(T_{i-1}) < t < \tau(T_i); \\ 0, & \tau(t) < \tau(T_{i-1}); \tau(t) > \tau(T_i), \end{cases} \tag{2.80}$$

где функция $\tau(t)$ определена выражением (2.8), и, как следует из (2.8),

$$\tau(T_0) = \tau(0) = l/a.$$

На интервале (T_1, T_2) вследствие перемещения нижнего конца стержня на среду со звуковой или сверхзвуковой скоростью часть волн, движущихся в стержне, будет поглощена подвижным верхним концом. Действительно, на интервале (T_1, T_2) , двигаясь в общем случае со сверхзвуковой скоростью, нижний конец догонял и поглощал как часть волн, излученных этим же нижним концом ранее, так и часть волн, отраженных от верхнего конца. Учесть в решении это поглощение можно следующим образом. Задний фронт волны $u_0(x, t)$, излученной подвижным концом, начиная от момента времени $t = 0$, при $t = T_1$ будет находиться в точке $x = l + \nu(T_1)$. При $t > T_1$ он будет продолжать движение в направлении отрицательных x со звуковой скоростью, и его координата будет равна $x_b(t) = l + \nu(T_1) - a(t - T_1)$. Координата же подвижного конца стержня при $t > T_1$ станет равной $x_k(t) = l + \nu(t)$.

Следовательно, срезка заднего фронта волны $u_0(x, t)$ произойдет на длине

$$\begin{aligned} x_b(t) - x_k(t) &= l + \nu(T_1) - a(t - T_1) - (l + \nu(t)) = \\ &= [aT_1 + l + \nu(T_1)] - [at + l + \nu(t)] = a[\tau(T_1) - \tau(t)]. \end{aligned}$$

Поэтому для данного случая функция M_{01} при вычислении функции $u_0(x, t)$ должна быть отличной от нуля не при $\tau < \tau(T_1)$, а при $\tau < \tau(T_1) - (\tau(T_1) - \tau(t)) = \tau(t)$. Иными словами, на интервале (T_1, T_2) функцию $u_{01}(x, t)$ следует вычислить по формуле (2.3). Однако в этой формуле при вычислении функции M_0 из интегрального уравнения (2.15) в правой части этого уравнения функцию M следует заменить функцией M_{011} , где

$$M_{011}(\tau) = \begin{cases} \mu(\tau), & \frac{l}{a} < \tau < \tau(t) = t + \frac{l + \nu(t)}{a}, \\ 0, & \tau < \frac{l}{a}; \tau > \tau(t) = t + \frac{l + \nu(t)}{a}. \end{cases} \quad (2.81)$$

Движущийся со звуковой или сверхзвуковой скоростью подвижный нижний конец может также срезать часть волны $u_1(x, t)$, отраженной от верхнего конца и движущейся навстречу подвижному концу. При этом, если $t < l/a$, отражение волны $u_0(x, t)$ от верхнего конца не произойдет, и при таких t решением задачи на интервале (T_1, T_2) будет функция $u_{01}(x, t)$. Если же $t > l/a$, то отраженная волна $u_1(x, t)$ будет существовать, и поэтому может произойти ее срезка набегающим нижним концом. В этом случае координата переднего фронта волны $u_1(x, t)$ будет равна $x_f(t) = at - l$. Координата же подвижного конца стержня при $t > T_1$ по-прежнему будет равна $x_k(t) = l + \nu(t)$. Если при этом $x_f(t) < x_k(t)$, то есть $at - (l + \nu(t)) < l$, то волна $u_1(x, t)$ не будет срезана. Однако если $x_f(t) > x_k(t)$, то есть $at - (l + \nu(t)) > l$, то срезка волны $u_1(x, t)$ произойдет на интервале длиной $x_f(t) - x_k(t) = at - \nu(t) - 2l = a(t - \frac{\nu(t) + 2l}{a})$. Поэтому в данном случае функцию M_{01} для вычисления волны $u_1(x, t)$ следует принимать равной нулю не при $\tau < l/a$, а при $\tau < \tau(t - \frac{\nu(t) + 2l}{a})$. Таким

образом, при вычислении волны $u_1(x, t)$ в формулах (2.25) и (2.26) в качестве функции M_0 , как решения интегрального уравнения (2.15) в правой части этого уравнения функцию M следует заменить функцией M_{013} , где

$$M_{013}(\tau) = \begin{cases} \mu(\tau), & y < \tau < \tau(T_1), \\ 0, & \tau < y, \tau > \tau(T_1). \end{cases} \quad (2.82)$$

Здесь

$$y = \begin{cases} \tau \left(t - \frac{\nu(t) + 2l}{a} \right), & at - l - \nu(t) > l; \\ 0, & at - l - \nu(t) < l. \end{cases} \quad (2.83)$$

Обозначим такую волну через $u_{11}(x, t)$. Создается впечатление, что волны $u_{01}(x, t)$ и $u_{11}(x, t)$ должны вычисляться по формулам (2.3) и (2.25) с разными функциями M_{011} и M_{013} соответственно. Это недопустимо, так как эти функции могут удовлетворять второму краевому условию (1.3) только при одинаковых функциях типа M_0 . Однако следует дополнительно учесть, что волна $u_{01}(x, t)$ срезана на интервале определения функции M_{011} при $\tau(t) < \tau < \tau(T_1)$. Следовательно, на этом интервале значений τ эта волна не будет создавать отраженной от верхнего конца стержня волны. Поэтому при вычислении волны $u_{11}(x, t)$ можно использовать функцию

$$M_{012}(\tau) = \begin{cases} \mu(\tau), & y < \tau < \tau(t); \\ 0, & \tau < y; \tau > \tau(t), \end{cases} \quad (2.84)$$

в которой y по-прежнему вычисляется по формуле (2.83). По этой же формуле можно вычислять на интервале (T_1, T_2) и функцию M_{011} , так как на этом интервале волна $u_{01}(x, t)$ уже породила волну $u_{11}(x, t)$, и при $\tau < y$ произошла ее срезка.

Таким образом, решением задачи при $t > l/a$ будет функция

$$u_{01}(x, t) + u_{11}(x, t), \quad (2.85)$$

где $u_{01}(x, t)$ вычисляется по формуле (2.3), а $u_{11}(x, t)$ – по формуле (2.25), причем при вычислении обеих этих функций в упомянутых формулах в качестве функции M_0 как решения интегрального уравнения (2.15) в правой части этого уравнения функцию M следует заменить функцией M_{012} .

Переходя к решению задачи на интервале (T_2, T_3) , необходимо заметить, что построение решения на этом интервале во многом аналогично построению решения на интервале $(0, T_1)$. Отличие будет состоять в том, что, во-первых, на этом интервале будут существовать остаточные волны, возникшие на двух предыдущих интервалах. Эти остаточные волны будут представлены выражением

$$u_{011}(x, t) + u_{111}(x, t), \quad (2.86)$$

где функции $u_{011}(x, t)$ и $u_{111}(x, t)$ вычисляются по формулам (2.3) и (2.25) соответственно. Только в этих формулах и дополнительно в формуле (2.26) в

качестве функции M_0 следует брать решение интегрального уравнения (2.15), в правой части этого уравнения функцию M следует заменить функцией \bar{M}_{012} :

$$\bar{M}_{012}(\tau) = \begin{cases} \mu(\tau), & y < \tau < \tau(T_2); \\ 0, & \tau < y; \tau > \tau(T_2). \end{cases} \quad (2.87)$$

Здесь

$$y = \begin{cases} \tau \left(T_2 - \frac{\nu(T_2) + 2l}{a} \right), & aT_2 - l - \nu(T_2) > l; \\ 0, & aT_2 - l - \nu(T_2) < l. \end{cases} \quad (2.88)$$

Во-вторых, это отличие будет состоять в том, что начальная длина стержня на этом интервале будет равна не l , а $l + \nu(T_2)$. Поэтому на рассматриваемом интервале решение задачи будет представлено в виде:

$$u_{03}(x, t) + u_{13}(x, t) + u_{011}(x, t) + u_{111}(x, t), \quad (2.89)$$

где функции $u_{03}(x, t)$ и $u_{13}(x, t)$ вычисляются по формулам (2.3) и (2.25) соответственно. Только в этих формулах и дополнительно в формуле (2.26) в качестве функции M_0 следует брать решение интегрального уравнения (2.15), в правой части этого уравнения функцию M следует заменить функцией M_{03} , определенной равенством (2.80).

Такого же рода аналогии с уже описанными процессами построения решений прослеживаются при построении решений на последующих интервалах.

2.3. Перемещение подвижного конца с произвольной скоростью

В этом случае функция $\nu(t)$ изменяется произвольно, являясь непрерывно дифференцируемой при всех $t > 0$. Для решения поставленной задачи положительную полуось t разобьем на подынтервалы, на каждом из которых выполняется одно из неравенств

$$\nu'(t) \leq -a \quad (2.90)$$

или

$$\nu'(t) \geq -a. \quad (2.91)$$

Ясно, что границы каждого из таких подынтервалов будут определяться положительными корнями уравнения

$$\nu'(t) + a = 0, \quad (2.92)$$

причем интервалы, на которых будет выполняться неравенство (2.90), будут замкнутыми, а интервалы, на которых будет выполняться неравенство (2.91), открытыми.

Если на интервале $[T_0, T_1]$, где $T_0 = 0$, выполняется неравенство (2.90), то, как показано при рассмотрении варианта движения подвижного конца со

звуковой или сверхзвуковой скоростью, этот случай легко приводится к случаю, когда на начальном интервале времени выполнено неравенство (2.90). Поэтому, не нарушая общности рассуждений, будем полагать, что на интервалах (T_{i-1}, T_i) выполнено неравенство (2.91), а на интервалах $[T_i, T_{i+1}]$ — неравенство (2.90), $i = 1, 3, 5, \dots$

В силу неравенства (2.90) на каждом из подынтервалов (T_{i-1}, T_i) , $i = 1, 3, 5, \dots$ будет существовать строго монотонно убывающая и непрерывно дифференцируемая обратная к (2.8) функция $\xi_i(\tau)$. Точно так же, как в предыдущем варианте, строится строго монотонно убывающее продолжение этих функций $E_i(\tau)$ на всю ось τ и функции $M_{0i}(\tau)$, определяемые равенствами (2.80). Тогда оказываются справедливыми все рассуждения, использованные для построения решения в варианте движения конца с дозвуковой скоростью, и поэтому на интервале (T_0, T_1) решением задачи будет функция

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ 2M_{2n} \left(t + \frac{x}{a} \right) e^{-\frac{(D_0+B)}{2}x} + \right. \\
 & + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t+\frac{x}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{D_0^2}{2}(t-\eta)} M_{2n}(\eta) d\eta \Big\} + \\
 & + \sum_{n=0}^{N_1-1} \left\{ 2e^{\frac{(D_0-B)}{2}x} \left[-M_{2n+1} \left(t - \frac{x}{a} \right) + M_{2n} \left(t - \frac{x}{a} \right) \right] + \right. \\
 & + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{D_0^2}{2}(t-\eta)} [M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)] d\eta \Big\}, \quad (2.93)
 \end{aligned}$$

где N — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (2.69), а N_1 — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (2.70). Здесь функции M_{2n} и M_{2n+1} должны последовательно вычисляться как решения интегральных уравнений (2.15), (2.64) и (2.65), причем в интегральном уравнении (2.15) функцию M в правой части этого уравнения следует заменить функцией M_{01} из формулы (2.80). При этом если на интервале (T_0, T_1) нижний конец будет все время двигаться со звуковой или сверхзвуковой скоростью, каждая из сумм в формуле (2.93) будет содержать не более чем по одному слагаемому.

Переходя к решению задачи на интервале $[T_1, T_2]$, напомним, что на этом интервале нижний конец движется в сторону стержня со звуковой или сверхзвуковой скоростью. Поэтому отражение волн от нижнего конца становится невозможным. Нетрудно видеть, что между числами N и N_1 возможно только одно из двух следующих соотношений:

$$N = N_1 \quad \text{или} \quad N = N_1 + 1. \quad (2.94)$$

Если выполнено равенство (2.94)₁, это значит, что волна $u_{2(N-1)}(x, t)$ уже отразилась от верхнего конца, породив отраженную волну $u_{2(N-1)+1}(x, t)$. Но эта отраженная волна уже не сможет, в свою очередь, отразиться от нижнего конца. Поэтому новые волны на интервале $[T_1, T_2]$ не могут образоваться. То

есть в формуле (2.93) уже присутствуют все волны, которые могли возникнуть на интервалах (T_0, T_1) и $[T_1, T_2]$. Следовательно, решение на интервале $[T_1, T_2]$ будет выглядеть точно так же, как решение (2.93). Нужно только учесть, что это решение будет справедливо на более узком интервале значений x , чем при $t = T_1$. Запишем решение (2.93) в более компактном виде:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} u_{2n}(x, t) + \sum_{n=0}^{N_1-1} u_{2n+1}(x, t). \quad (2.95)$$

Здесь

$$u_{2n}(x, t) = 2M_{2n}\left(t + \frac{x}{a}\right)e^{-\frac{(D_0+B)}{2}x} + \\ + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t+\frac{x}{a}} \left[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{D_0^2}{2}(t-\eta)} M_{2n}(\eta) d\eta;$$

$$u_{2n+1}(x, t) = 2e^{\frac{(D_0-B)}{2}x} \left[-M_{2n+1}\left(t - \frac{x}{a}\right) + M_{2n}\left(t - \frac{x}{a}\right)\right] + \\ + 2ae^{-\frac{B}{2}x} \int_0^{t-\frac{x}{a}} \left[\frac{B}{2}J_0(z) - c_1 \frac{x}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{D_0^2}{2}(t-\eta)} [M_{2n+1}(\eta) - M_{2n}(\eta)] d\eta.$$

Если выполнено равенство (2.94)₂, это значит, что волна $u_{2(N-1)}(x, t)$ еще не отразилась от верхнего конца. Но эта волна может отразиться от верхнего конца и породить отраженную волну $u_{2(N-1)+1}(x, t)$. Поэтому последнюю волну следует включить в формулу (2.93). Иными словами, решение и в этом случае будет представлено формулой (2.95). Следует отметить, что срезка волн движущимся на среду нижним концом проявляется только в сокращенной области определения решения (2.95). На интервале (T_2, T_3) дело обстоит следующим образом. Во-первых, в стержне останутся срезанные волны (2.95). Так как на этом интервале область отыскания решения увеличивается, необходимо определить характер поведения этих остаточных срезанных волн в расширенной области. Сделать это можно следующим образом. Конечная область, в которой существовало решение (2.95), определяется условиями:

$$0 < x < l + \nu(T_2); \quad t = T_2. \quad (2.96)$$

Волны в первой сумме формулы (2.95) являются волнами аргумента $t + x/a$. Поэтому с учетом соотношений (2.96) получаем следующую область ненулевых значений таких волн:

$$T_2 < t + \frac{x}{a} < T_2 + \frac{l + \nu(T_2)}{a}.$$

В свою очередь, волны во второй сумме формулы (2.95) являются функциями аргумента $t - x/a$. Поэтому с учетом соотношений (2.96) получаем, что ненулевые значения эти волны будут иметь в следующей области:

$$T_2 + \frac{l + \nu(T_2)}{a} < t - \frac{x}{a} < T_2.$$

Следовательно, если ввести функции

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{2n}(\tau(t)) &= \begin{cases} u_{2n}(x, t), & T_2 < t + \frac{x}{a} < T_2 + \frac{l + \nu(T_2)}{a}; \\ 0, & t + \frac{x}{a} < T_2; \quad t + \frac{x}{a} > T_2 + \frac{l + \nu(T_2)}{a}, \end{cases} \\ \tilde{u}_{2n+1}(\tau(t)) &= \begin{cases} u_{2n+1}(x, t), & T_2 + \frac{l + \nu(T_2)}{a} < t - \frac{x}{a} < T_2; \\ 0, & t - \frac{x}{a} < T_2 + \frac{l + \nu(T_2)}{a}; \quad t - \frac{x}{a} > T_2, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.97)$$

то остаточные волны на интервале (T_2, T_3) будут представлены выражением

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{u}_{2n}(x, t) + \sum_{n=0}^{N_1-1} \tilde{u}_{2n+1}(x, t). \quad (2.98)$$

Эти остаточные волны, продолжая движение, будут порождать на интервале (T_2, T_3) новые отраженные волны. Обозначим такие отраженные волны через $\tilde{u}^{(2n)}(x, t)$. Кроме того, появятся волны, генерируемые функцией $M_{03}(t)$, которая определена равенством (2.47). Эти волны обозначим через $u_i^{(3)}(x, t)$. Таким образом, решение задачи на интервале (T_2, T_3) будет представлено формулой

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{u}_{2n}(x, t) + \sum_{n=0}^{N_1-1} \tilde{u}_{2n+1}(x, t) + \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^{N_3-1} \tilde{u}_{2i}^{(2n)}(x, t) + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=0}^{N_3-1} \tilde{u}_{2i+1}^{(2n)}(x, t) \right] + \sum_{n=0}^{N_1-1} \left[\sum_{i=0}^{N_3-1} \tilde{u}_{2i}^{(2n+1)}(x, t) + \sum_{i=0}^{N_3-1} \tilde{u}_{2i+1}^{(2n+1)}(x, t) \right] + \\ &+ \sum_{i=0}^{N_3-1} u_{2n}^{(3)}(x, t) + \sum_{i=0}^{N_3-1} u_{2n+1}^{(3)}(x, t). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Здесь функции $u_{2n}^{(3)}(x, t)$ и $u_{2n+1}^{(3)}(x, t)$ строятся принципиально так же, как и функции $u_{2n}(x, t)$ и $u_{2n+1}(x, t)$ при дозвуковом режиме движения нижнего конца. Только при их построении в правой части интегрального уравнения (2.15) следует вместо функции $M(t)$ использовать функцию $M_{03}(t)$. Отраженные волны $\tilde{u}_{2i}^{(2n)}(x, t)$, $\tilde{u}_{2i+1}^{(2n)}(x, t)$, $\tilde{u}_{2i}^{(2n+1)}(x, t)$ и $\tilde{u}_{2i+1}^{(2n+1)}(x, t)$ строятся по методике построения отраженных волн, описанной выше. В формуле (2.99) N_3 определяется как наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству типа (2.69):

$$n > \frac{1}{2l} [T_3 a + \nu(T_3) - 2 \sum_{i=1}^n \nu(\tau_{ii})]. \quad (2.100)$$

в котором τ_{ii} — корни уравнений типа (2.67):

$$t = \frac{2nl + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \nu(\tau_{ii}) + \nu(t)}{a}. \quad (2.101)$$

Далее построение решения на интервале $[T_3, T_4]$ осуществляется так же, как и на интервале $[T_1, T_2]$, а на интервале (T_4, T_5) — так же, как и на интервале (T_2, T_3) . Такого же типа аналогия справедлива для всех последующих интервалов.

3. Выводы

Совместное применение интегрального представления решения телеграфного уравнения, метода продолжений и методов отражения от неподвижного и подвижного концов позволило получить в квадратурах решение первой краевой задачи для области с переменной границей. Построенное точное решение краевой задачи для стержней переменной длины позволяет получить более правильную концепцию относительно распространения волн и распределения напряжений в исследованной среде. Характер отражения волн от подвижного конца существенно отличается от характера отражения от неподвижного конца.

Библиографические ссылки

1. *Горошко О. А.* Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины / О. А. Горошко, Г. Н. Савин. К. : Наукова думка. — 1971. — С. 224.
2. *Остапенко В. А.* Краевая задача без начальных условий для телеграфного уравнения. / В. А. Остапенко // Диференціальні рівняння та їх застосування, Днепропетровск, 2008. — С. 3–17.
3. *Остапенко В. А.* Первая краевая задача для телеграфного уравнения в полубесконечной области / В. А. Остапенко // Дифференциальные уравнения и их приложения, Днепропетровск, 2008. — С. 18–20.
4. *Остапенко В. А.* Вторая краевая задача для телеграфного уравнения в полубесконечной области / В. А. Остапенко // Вест. Днепропетр. ун-та, т. 17, № 8, 2009, серия Моделирование, вып. 1. — С. 89–92.
5. *Остапенко В. А.* Первая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области / В. А. Остапенко // Вест. Днепропетр. ун-та, т. 17, № 8, 2009, серия Моделирование, вып. 1. — С. 149–161.
6. *Остапенко В. А.* Первая краевая задача для области с подвижной границей / В. А. Остапенко // Дифференциальные уравнения и их приложения в физике, Днепропетровск, 1989. — С. 4–14.
7. *Ostapenko V. A.* Exact solution of the problem for dynamic field of displacements in rods of variable length / V. A. Ostapenko // Archives of Applied Mechanics, Hamburg, Springer-Verlag, 77, 2007 — P. 313–324.

Надійшла до редколегії 30.11.2010

УДК 681.31

ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ РОЗВ'ЯЗКІВ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

І. Г. Баланенко*, П. І. Когут**

* Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010, Дніпропетровськ, E-mail: balanenko-ig@gambler.ru

** Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, кафедра диференціальних рівнянь, вул. Козакова, 18/14, ДНУ, 49010, Дніпропетровськ, E-mail: p.kogut@i.ua

Розглядаються питання класифікації розв'язків початково-крайових задач для вироджених лінійних параболічних рівнянь та дається деяке їх застосування до теорії оптимальних систем.

Ключові слова: вироджені параболічні рівняння, слабкі розв'язки, варіаційні розв'язки, вагові простори Соболева, теореми існування.

1. Вступ

Основним об'єктом дослідження даної роботи виступає початково крайова задача з однорідною умовою Дирихле на межі області для лінійного параболічного рівняння. Характерною рисою означеної задачі є той факт, що умова рівномірної еліптичності для головного оператора не виконується. У зв'язку з цим залучення класичних результатів до проблеми розв'язності таких задач стає неможливим. Виходячи з міркувань, які наведені в працях [5, 6], дається класифікація розв'язків таких задач у просторі Соболева $L^2(0, T; W_0^{1,1}(\Omega))$. Зокрема, вводяться такі поняття як слабкі розв'язки, V -розв'язки та варіаційні розв'язки початково крайових задач для вироджених параболічних рівнянь. Встановлено, що слабкі розв'язки, як правило, є не єдиними, на відміну від V -розв'язків. Ця обставина, як показано на прикладі однієї задачі оптимального керування в коефіцієнтах, привносить досить несподівану додаткову інформацію про якісні характеристики множини оптимальних розв'язків.

2. Основні позначення та попередні факти

Нехай \mathbb{R}^N — N -вимірний евклідів простір; $x = (x_1, \dots, x_N)$ — довільний його представник; Ω — обмежена відкрита підмножина \mathbb{R}^N з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$; $\bar{\Omega}$ — замикання множини Ω , тобто $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Символом $D^\alpha y(x)$, де $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ — невід’ємний мультиіндекс, будемо позначати відповідну похідну функції $y = y(x)$, тобто

$$D^\alpha y(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_N} \right)^{\alpha_N} y(x).$$

Нехай $C_0^m(\Omega)$ — банахів простір, який утворений m разів неперервно диференційовними в Ω функціями з компактними в Ω носіями і норма в якому задається правилом

$$\|y\|_{C_0^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha y(x)|,$$

де $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$. Надалі через $C_0^\infty(\Omega)$ будемо позначати локально опуклий простір усіх нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями в Ω і називати його простором фінітних або тестових функцій.

Для довільного $p \leq 1$ через $L^p(\Omega)$ будемо позначати банахів простір усіх вимірних на Ω функцій, які інтегровні на Ω в степені p (тут вимірність та інтегровність розуміються в сенсі Лебега). Зауважимо, що фінітні функції $C_0^\infty(\Omega)$ утворюють щільну підмножину в $L^p(\Omega)$ при всіх p : $1 \leq p < +\infty$.

Нехай $y, v \in L^1(\Omega)$ — довільна пара функцій. Кажуть, що $v \in L^1(\Omega)$ є слабкою похідною порядку α функції $y \in L^1(\Omega)$, і позначають її як $D^\alpha y = v$, якщо

$$\int_{\Omega} y D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Надалі, якщо вектор $\vec{v} = [v_1, \dots, v_N] \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ є градієнтом функції $y \in L^1(\Omega)$ у слабкому сенсі (або, що аналогічно, у сенсі розподілень), будемо позначати його як $\nabla y(x)$.

Нехай $1 \leq p < +\infty$ та $k \geq 0$ є довільними фіксованими величинами. Тоді через $W^{k,p}(\Omega)$ будемо позначати простір Соболева, утворений усіма функціями $y \in L^p(\Omega)$, для яких є скінченною норма

$$\|y\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha y(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (2.1)$$

У випадку, коли $p = 2$, будемо залучати позначення $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ ($k = 0, 1, \dots$). При цьому зауважимо, що $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Тут залучення літери H продиктоване тим, що $H^k(\Omega)$ є гільбертовим простором відносно операції скалярного добутку

$$(y_1, y_2)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha y_1(x) D^\alpha y_2(x) dx.$$

Зауважимо також, що простори Соболева є сепарабельними банаховими просторами відносно норми (2.1), які до того ж є рефлексивними, якщо $1 < p < +\infty$.

Через $W_0^{k,p}(\Omega)$ будемо позначати замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. Нехай $H_0^p(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$. Отже, якщо $y \in H_0^p(\Omega)$, то $y|_{\partial\Omega} = 0$, де останню рівність слід розуміти як значення оператора сліду на межі області Ω .

3. Вагові простори Соболева

Нехай при кожному $i \in \{0, \dots, N\}$ ρ_i — невід'ємна функція на $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ така, що $\rho_i > 0$ майже скрізь (м.с.) на Ω , і при цьому

$$\rho_i \in L^1(\Omega), \quad \rho_i^{-1} \in L^1(\Omega). \tag{3.1}$$

Означення 3.1. Будемо казати, що $\rho_i(x)$ є виродженою ваговою функцією на Ω , якщо: $\rho_i(x) > 0$ м.с. на Ω , $\rho_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умову (3.1) і при цьому $\rho_i + \rho_i^{-1} \notin L^\infty(\Omega)$.

Покладемо $\rho(x) = (\rho_0(x), \dots, \rho_N(x))$, де ρ_i — вироджені вагові функції у сенсі означення 3.1. Утотожнимо кожну функцію ρ_i з мірою Радона на Ω , тобто для довільної вимірної множини $E \subset \Omega$ покладемо $\rho_i(E) = \int_E \rho_i(x) dx$. Нагадаємо, що невід'ємною мірою Радона на Ω називають невід'ємну міру Бореля, яка є скінченною на кожній компактній множині. Простір усіх невід'ємних мір Радона на Ω будемо позначати як $\mathcal{M}_+(\Omega)$. Як відомо, $\mathcal{M}_+(\Omega)$ можна утотожнити з дуальним простором до простору $C_0(\Omega)$, в якому Ω — відкрита обмежена множина.

З кожним значенням $i \in \{0, \dots, N\}$ пов'яжемо ваговий гільбертів простір $L^2(\Omega, \rho_i dx)$ вимірних функцій $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, для яких

$$\|f\|_{L^2(\Omega, \rho_i dx)}^2 = (f, f)_{L^2(\Omega, \rho_i dx)} = \int_\Omega f^2 \rho_i dx < +\infty.$$

Через $W^{1,2}(\Omega; \rho dx)$ (скорочено W_ρ), де $\rho = (\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_N)$, позначимо множину усіх функцій $y \in W^{1,1}(\Omega)$, для яких виконуються умови:

$$\rho_0 y^2 \in L^1(\Omega), \quad \rho_i |D_i y|^2 \in L^1(\Omega), \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

де $D_i y = \partial y / \partial x_i$ є похідними в сенсі розподілень. Нехай відображення $\|\cdot\|_\rho : W_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ означене за правилом

$$\|y\|_\rho = \left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |D_i y(x)|^2 \rho_i(x) dx + \int_\Omega y^2(x) \rho_0(x) dx \right)^{1/2} \quad \forall y \in W_\rho. \tag{3.2}$$

Оскільки, за нерівністю Коші – Буняковського, мають місце оцінки

$$\left(\int_\Omega |y(x)| dx \right)^2 \leq \int_\Omega y^2(x) \rho_0(x) dx \int_\Omega \rho_0^{-1}(x) dx, \tag{3.3}$$

$$\left(\int_\Omega |D_i y(x)| dx \right)^2 \leq \int_\Omega |D_i y(x)|^2 \rho_i(x) dx \int_\Omega \rho_i^{-1}(x) dx \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \tag{3.4}$$

то $\|\cdot\|_\rho$ є нормою в W_ρ . При цьому, як безпосередньо випливає з (3.3), простір W_ρ є повним відносно норми $\|\cdot\|_\rho$. Надалі W_ρ будемо називати ваговим простором Соболева.

Оскільки типовим представником вироджених вагових функцій є функція $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, де

$$\rho(x) = \begin{cases} |x|, & \text{якщо } x_1 x_2 < 0, \\ |x|^{-1}, & \text{якщо } x_1 x_2 \geq 0, \end{cases} \quad \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|_{\mathbb{R}^2} < 1\},$$

то легко бачити, що має місце включення

$$y(\cdot) = \eta(\cdot)u(\cdot) \in W_\rho, \quad (3.5)$$

де $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta(0) = 1$, а функція $u = u(x)$ в полярних координатах задається правилом

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_1 > 0, x_2 > 0, \\ \sin \theta, & \text{якщо } x_1 < 0, x_2 > 0, \\ 0, & \text{якщо } x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \cos \theta, & \text{якщо } x_1 > 0, x_2 < 0. \end{cases}$$

Разом з тим функція (3.5) в довільному околі точки $(0, 0)$ набирає різні значення з боку першого та третього ортантів. Отже, функцію (3.5) не можна наблизити в W_ρ жодною з функцій класу $C_0^\infty(\Omega)$. Наведене зауваження свідчить про те, що клас $C_0^\infty(\Omega)$ не є щільним у просторі W_ρ відносно норми $\|\cdot\|_\rho$. У зв'язку з цим означимо ще один ваговий простір Соболева $H_\rho = H(\Omega; \rho dx)$ як замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|\cdot\|_\rho$. Ясно, що, за попередніми міркуваннями (див. оцінку (3.3)), множина H_ρ є банаховим простором відносно норми, індукованої нормою $\|\cdot\|_\rho$. Покладемо

$$C_\rho = \max_{0 \leq i \leq N} \left(\int_\Omega \rho_i^{-1}(x) dx \right)^{1/2}.$$

Тоді, виходячи з оцінок типу (3.3) та компактності вкладення $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, легко перевірити справедливність наступного результату:

Теорема 3.1. *Нехай $\rho(x) = (\rho_0(x), \rho_1(x), \dots, \rho_N(x))$ утворює набір вироджених вагових функцій в сенсі означення 3.1. Тоді:*

(i) *має місце включення $H_\rho \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ і при цьому*

$$\|y\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq C_\rho \|y\|_\rho \quad \forall y \in H_\rho;$$

(ii) *якщо $y_k \rightarrow y$ слабо в H_ρ , тобто*

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_\Omega y_k \varphi \rho_0 dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^N D_i y_k \varphi_i \rho_i dx \right] = \\ = \int_\Omega y \varphi \rho_0 dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^N D_i y \varphi_i \rho_i dx \quad \forall \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_N \in C_0^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

то $y_k \rightarrow y$ сильно в $L^1(\Omega)$;

(iii) справедливо $H_\rho \subseteq W_\rho$, і при цьому H_ρ та W_ρ є гільбертовими просторами відносно операції скалярного добутку

$$(y, v)_\rho = (y, v)_{L^2(\Omega; \rho_0 dx)} + \sum_{i=1}^N (D_i y, D_i v)_{L^2(\Omega; \rho_i dx)}. \quad (3.6)$$

В силу рефлексивності просторів H_ρ та W_ρ , маємо $(H_\rho^*)^* = H_\rho$, $(W_\rho^*)^* = W_\rho$, де дуальний простір H_ρ^* можна утотожити з простором $W^{-1,2}(\Omega, \rho^* dx)$.

$$\rho^* = (\rho_0^{-1}, \rho_1^{-1}, \dots, \rho_N^{-1}). \quad (3.7)$$

При цьому типовим представником простору H_ρ^* є наступний функціонал $F \in \mathcal{L}(H_\rho, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \langle F, y \rangle_{H_\rho^*, H_\rho} &= \int_\Omega f_0 y dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i D_i y dx \leq \\ &\leq \left(\int_\Omega f_0^2 \rho_0^{-1} \right)^{1/2} \|y\|_{L^2(\Omega; \rho_0 dx)} + \sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega f_i^2 \rho_i^{-1} \right)^{1/2} \|D_i y\|_{L^2(\Omega; \rho_i dx)} \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^N \left(\int_\Omega f_i^2 \rho_i^{-1} \right)^{1/2} \|y\|_\rho, \end{aligned}$$

де $(f_0, f_1, \dots, f_N) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega; \rho_i^{-1} dx)$. З іншого боку, за теоремою Рітца про подання лінійних неперервних функціоналів в гільбертових просторах, дуальний простір H_ρ^* можна охарактеризувати так: якщо $g \in H_\rho^*$, то знайдеться вектор-функція $g = (g_0, g_1, \dots, g_N) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega; \rho_i dx)$ така, що

$$\langle F, y \rangle_{H_\rho^*, H_\rho} = \int_\Omega g_0 y \rho_0 dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega g_i D_i y \rho_i dx \quad \forall y \in H_\rho. \quad (3.8)$$

При цьому

$$\|F\|_{H_\rho^*} = \inf \left\{ \left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |g_i|^2 \rho_i dx \right)^{1/2} : \text{де } g_i \text{ забезпечують подання (3.8)} \right\}.$$

Зауваження 3.1. Теорему 3.1 можна уточнити в такій редакції (див., напр., [3, с. 46]): нехай $\rho_0 \equiv 1$ майже скрізь на Ω та існує число $\nu \in (N/2, +\infty)$ таке, що $\rho^{-\nu} \in L^1(\Omega)$. Тоді умови (3.1) гарантують справедливість наступних тверджень:

- (i) правило $\|y\|_\rho = \left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega \rho_i |D_i y|^2 dx \right)^{1/2}$ визначає норму на H_ρ , яка еквівалентна нормі $\|\cdot\|_\rho$;
- (ii) вкладення $H_\rho \hookrightarrow L^2(\Omega)$ є неперервним і компактним.

4. Класи функцій зі значеннями у вагових просторах

Нехай вагова вектор-функція $\rho(x) = (\rho_0(x), \dots, \rho_N(x))$ задовольняє умови:

- (i) $\rho_i > 0$ м.с. на $\Omega \quad \forall i = 0, 1, \dots, N$;
- (ii) $\rho_i \in L^1(\Omega) \quad \forall i = 0, 1, \dots, N$;
- (iii) існує число $\nu \in (\frac{N}{2}, +\infty)$ таке, що $\rho_i^{-\nu} \in L^1(\Omega) \quad \forall i = 0, 1, \dots, N$.

Оскільки

$$\int_{\Omega} |\rho_i(x)|^{-1} dx \leq \left(\int_{\Omega} |\rho_i(x)|^{-\nu} \right)^{1/\nu} \left(\int_{\Omega} dx \right)^{1/\nu^*}, \quad (4.1)$$

де $\nu^* = \nu/(\nu - 1)$, то з умов (i)–(iii) та $N \geq 2$ випливає, що

$$\rho_i^{-1} \in L^1(\Omega) \quad \forall i = 0, 1, \dots, N.$$

Отже, $\rho_i(x)$ є виродженими ваговими функціями на Ω в сенсі означення 3.1.

Як було зазначено вище, простір $C_0^\infty(\Omega)$ не є в загальному випадку щільним у ваговому просторі Соболева W_ρ , що означає $H_\rho \subseteq W_\rho$, $W_\rho \setminus H_\rho \neq \emptyset$. Нехай V_ρ ($H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho$) — довільний проміжний простір. Для його побудови досить скористатися таким правилом: обрати довільний елемент $g \in W_\rho \setminus H_\rho$ і покласти V_ρ як замикання лінійної оболонки, натягнутої на $H_\rho \cup \{g\}$, відносно норми індукованої $\|\cdot\|_\rho$. Ясно, що V_ρ є гільбертовим простором і для будь-якого $F \in V_\rho^*$, за теоремою Рітца, знайдеться набір

$$(f_0, \dots, f_N) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega; \rho_i dx)$$

такий, що $\langle F, y \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} = (f_0, y)_{L^2(\Omega; \rho_0 dx)} + \sum_{i=1}^N (f_i, D_i y)_{L^2(\Omega; \rho_i dx)}$,

$$\|F\|_{V_\rho^*} = \left(\sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2(\Omega; \rho_i dx)}^2 \right)^{1/2}.$$

Зауваження 4.1. Зазначимо, що з кожним розподіленням $f \in L^2(\Omega; \rho_i dx)$ можна пов'язати елемент $\tilde{f}_i \in L^2(\Omega; \rho_i^{-1} dx)$ такий, що

$$\|\tilde{f}_i\|_{L^2(\Omega; \rho_i^{-1} dx)} = \|f_i\|_{L^2(\Omega; \rho_i dx)} \quad \forall i = 0, 1, \dots, N.$$

Справді, поклавши $\tilde{f}_i = f_i \rho_i$, маємо:

$$\int_{\Omega} (\tilde{f}_i)^2 \rho_i^{-1} dx = \int_{\Omega} (f_i \rho_i)^2 \rho_i^{-1} dx = \int_{\Omega} f_i^2 \rho_i dx.$$

Отже, набору $(f_0, \dots, f_N) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega; \rho_i dx)$ відповідає вектор-функція $F^* = (\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_N) \in \prod_{i=0}^N L^2(\Omega; \rho_i^{-1} dx)$ така, що

$$\langle F, y \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} = \left(\tilde{f}_0, y \right)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left(\tilde{f}_i, D_i y \right)_{L^2(\Omega)} \quad \forall y \in V_\rho.$$

Наведене співвідношення означає, що дуальний простір V_ρ^* можна утотожити з деякою непорожньою підмножиною простору $W^{-1,2}(\Omega; \rho^* dx)$ (див. (3.7)).

Пов'яжемо з кожним простором V_ρ множину функцій $u = u(t, x)$, де $t \in [0, T]$, $x \in \Omega$ і кожна з яких майже скрізь на $[0, T]$ набирає значення із вагового простору V_ρ . Таким чином, означені функції можна розглядати як функції скалярного аргумента t із значеннями в V_ρ :

$$u : [0, T] \rightarrow V_\rho.$$

У зв'язку з цим всюди далі будемо писати $u(t)$ та $\dot{u}(t)$ замість $u(t, x)$ та $\frac{\partial}{\partial t} u(t, x)$, відповідно. Це означає, що на означений клас функцій можна поширити основні поняття теорії інтегровності за Бохнером. Зокрема, нехай $\{E_i\}_{i=1}^n$ — довільне диз'юнктивне розбиття відрізка $[0, T]$, тобто

$$[0, T] = \bigcup_{i=1}^n E_i; \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j$$

де E_i — вимірні за Лебегом множини. Тоді, функцію $u : [0, T] \rightarrow V_\rho$ називатимемо простою, якщо знайдеться набір елементів $u_1, u_2, \dots, u_n \in V_\rho$ таких, що

$$u(t) = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}(t) u_i, \tag{4.2}$$

де через $\chi_{E_i}(t)$ позначено характеристичні функції множин $E_i \subseteq [0, T]$.

Означення 4.1. Будемо казати, що $u : [0, T] \rightarrow V_\rho$ є вимірною функцією, якщо знайдеться послідовність простих функцій $\{u_k : [0, T] \rightarrow V_\rho\}_{k=1}^\infty$ така, що

$$\|u(t) - u_k(t)\|_{V_\rho} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \text{ м. с. на } [0, T].$$

Ясно, що для будь-якої вимірної функції $u : [0, T] \rightarrow V_\rho$ та довільного елемента $y^* \in V_\rho^*$, відображення $t \mapsto \langle y^*, u(t) \rangle_{V_\rho^*; V_\rho}$ є вимірним за Лебегом на $[0, T]$. До того ж, для довільної простої функції $u : [0, T] \rightarrow V_\rho$ можна покласти $\int_0^T u(t) dt = \sum_{i=1}^n |E_i| u_i$. В результаті приходимо до наступного поняття:

Означення 4.2. Будемо казати, що функція $f : [0, T] \rightarrow V_\rho$ є інтегрованою на $[0, T]$, якщо знайдеться послідовність простих функцій $\{u_k : [0, T] \rightarrow V_\rho\}_{k=1}^\infty$ така, що

$$\int_0^T \|f(t) - u_k(t)\|_{V_\rho} dt \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

При цьому інтеграл від $f(t)$ на $[0, T]$ можна означити як

$$\int_0^T f(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T u_k(t) dt.$$

Тепер, у повній аналогії до відомої теореми Бохнера, можна встановити наступний результат:

Теорема 4.1. *Вимірна функція $f : [0, T] \rightarrow V_\rho$ є інтегрованою на $[0, T]$ тоді і тільки тоді, коли є інтегрованою за Лебегом на $[0, T]$ скалярна функція $t \mapsto \|f(t)\|_{V_\rho}$. При цьому*

$$\left\| \int_0^T f(t) dt \right\|_{V_\rho} \leq \int_0^T \|f(t)\|_{V_\rho} dt, \quad (4.3)$$

$$\left\langle y^*, \int_0^T f(t) dt \right\rangle_{V_\rho^*; V_\rho} = \int_0^T \langle y^*, f(t) \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} dt \quad \forall y^* \in V_\rho^*. \quad (4.4)$$

Позначимо через $L^p(0, T; V_\rho)$ множину всіх вимірних функцій $y : [0, T] \rightarrow V_\rho$ таких, що

$$\|y\|_{L^p(0, T; V_\rho)} = \left(\int_0^T \|y(t)\|_{V_\rho}^p dt \right)^{1/p} \quad \text{при } 1 \leq p \leq +\infty,$$

$$\|y\|_{L^\infty(0, T; V_\rho)} = \text{vrai sup}_{t \in [0, T]} \|y(t)\|_{V_\rho} \quad \text{при } p = \infty.$$

Тоді $L^p(0, T; V_\rho)$ утворюють банахові простори при $1 \leq p \leq +\infty$ відносно наведених норм (див. [2]), а простір $L^2(0, T; V_\rho)$ є гільбертовим відносно операції скалярного добутку

$$(y, f)_{L^2(0, T; V_\rho)} = \int_0^T (y(t), f(t))_{V_\rho} dt$$

Введемо поняття похідної в сенсі розподілень для функцій $y : [0, T] \rightarrow V_\rho$.

Означення 4.3. Будемо казати, що $\dot{y} \in L^1_{loc}(0, T; V_\rho^*)$ є слабкою похідною функції $y \in L^1_{loc}(0, T; V_\rho)$, якщо для всіх $\varphi \in C^\infty_0(0, T)$ та $u \in V_\rho$ має місце рівність

$$\int_0^T \varphi(t) \langle \dot{y}(t), u \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} dt = - \int_0^T \dot{\varphi}(t) \langle y(t), u \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} dt. \quad (4.5)$$

Розглянемо наступний функціональний простір

$$\mathcal{W}(0, T; V_\rho, V_\rho^*) = \{y \in L^2(0, T; V_\rho) : \dot{y} \in L^2(0, T; V_\rho^*)\}. \quad (4.6)$$

У випадку, коли V_ρ^* в (4.5)–(4.6) можна замінити на V_ρ , будемо писати $\mathcal{W}(0, T; V_\rho, V_\rho^*) = H^1(0, T; V_\rho)$ і називати $H^1(0, T; V_\rho)$ простором Соболева функцій $y \in L^2(0, T; V_\rho)$, чії похідні належать $L^2(0, T; V_\rho)$. Тоді, беручи до уваги зауваження 3.1 та теорему II.1.3 з [2], приходимо до наступного результату:

Теорема 4.2. Нехай $\rho_0(x) \equiv 1$ і існує стала $\nu \in (N/2, +\infty)$ така, що $\rho_i^{-\nu} \in L^1(\Omega)$ при всіх $i = 1, 2, \dots, N$. Нехай y — довільний представник простору $\mathcal{W}(0, T; H_\rho, H_\rho^*)$, де $H_\rho^* = W^{-1,2}(\Omega; \rho^* dx)$. Тоді:

(a) $y \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ і при цьому

$$\max_{t \in [0, T]} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left[\|y(t)\|_{L^2(\Omega; H_\rho)} + \|\dot{y}(t)\|_{L^2(\Omega; H_\rho^*)} \right];$$

(b) якщо $u \in \mathcal{W}(0, T; H_\rho, H_\rho^*)$, то є справедливою наступна формула інтегрування за частинами:

$$\begin{aligned} \int_s^t \left[\langle \dot{y}(\gamma), u(\gamma) \rangle_{H_\rho^*, H_\rho} + \langle y(\gamma), \dot{u}(\gamma) \rangle_{H_\rho, H_\rho^*} \right] d\gamma = \\ = (y(t), u(t))_{H_\rho} - (y(s), u(s))_{H_\rho} \quad \forall s, t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Зауваження 4.2. Оскільки вкладення $V_\rho \hookrightarrow L^2(\Omega; \rho_0 dx)$, в загальному випадку, не є компактними, то питання про неперервність вкладення вагового простору $\mathcal{W}(0, T; V_\rho, V_\rho^*)$ в простір неперервних функцій $C([0, T]; L^2(\Omega; \rho_0 dx))$ залишається відкритим і не дослідженим на сьогодні.

5. Класифікація розв'язків початково-крайових задач для вироджених параболічних рівнянь

Нехай $T > 0$ — фіксований момент часу, Ω — обмежена відкрита область в \mathbb{R}^N з неперервною за Ліпшицом межею $\partial\Omega$. Покладемо $Q_T = (0, T) \times \Omega$, $S_T = [0, T] \times \partial\Omega$. Нехай α, β ($\beta > \alpha > 0$) — задані дійсні числа. Позначимо через $M_\alpha^\beta(\Omega)$ множину усіх вимірних симетричних матриць $A = A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1,N}$ таких, що

$$\alpha \|\xi\|_{\mathbb{R}^N}^2 \leq (A(x)\xi, \xi)_{\mathbb{R}^N} \leq \beta \|\xi\|_{\mathbb{R}^N}^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (5.1)$$

Нехай $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ — вагова функція, для якої виконуються припущення (i)–(iii) параграфу 4. Нехай $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ та $y_0 \in L^2(\Omega)$ — задані функції. Розглянемо в циліндрі Q_T наступну початково-крайову задачу Дирихле:

$$y_t - \operatorname{div} (A(x)\rho(x)\nabla y) + y = f \quad \text{в } Q_T, \quad (5.2)$$

$$y(0, x) = y_0(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (5.3)$$

$$y(t, x) = 0 \quad \text{на } S_T. \quad (5.4)$$

За аналогією з попередніми параграфами, пов'яжемо з функцією ρ наступні вагові простори:

$$W_\rho = \left\{ y \in W_0^{1,1}(\Omega) : \|y\|_\rho := \left(\int_\Omega y^2 dx + \int_\Omega |\nabla y|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx \right) < +\infty \right\}, \quad (5.5)$$

$$H_\rho = \operatorname{cl}_{\|\cdot\|_\rho} C_0^\infty(\Omega). \quad (5.6)$$

Всюди далі функцію $y : [0, T] \rightarrow W_\rho$ будемо позначати як функцію одного аргумента $y = y(t)$.

Означення 5.1. Функцію $y \in L^2(0, T; W_\rho)$ будемо називати слабким розв'язком задачі (5.2)–(5.4), якщо виконуються такі умови:

- (а) для кожного $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та довільних $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ справджується інтегральна тотожність

$$(y(t), v)_{L^2(\Omega)} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} [y(t), v]_\rho^A dt = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), v)_{L^2(\Omega)} dt; \quad (5.7)$$

- (б) при кожному $v \in C_0^\infty(\Omega)$ має місце рівність

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (y(t), v)_{L^2(\Omega)} = (y_0, v)_{L^2(\Omega)}. \quad (5.8)$$

Тут через $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ позначено операцію скалярного добутку в $L^2(\Omega)$, а

$$[u, v]_\rho^A = \int_\Omega [(A(x)\nabla u, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} \rho + uv] dx, \quad \forall u, v \in W_\rho.$$

Зауваження 5.1. Оскільки функція y як слабкий розв'язок задачі (5.2)–(5.4) належить простору $L^2(0, T; W_\rho)$ і при цьому мають місце оцінки

$$[y(t), v]_\rho^A \leq 2 \max\{1, \beta\} \|v\|_\rho \|y(t)\|_\rho, \quad (5.9)$$

$$\left| (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \right| \leq \|v\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (5.10)$$

то, як випливає з рівності (5.7), відображення $(y(\cdot), v)_{L^2(\Omega)} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервним. Отже, $y(\cdot) : [0, T] \rightarrow W_\rho$ — слабо неперервна функція і така, що (див. (5.8))

$$y|_{t=0} = y_0 \quad \text{як елементи простору } L^2(\Omega).$$

Зауваження 5.2. Насправді співвідношення (5.7) можна тлумачити в сенсі розподілень на $\mathcal{D}(0, T)$. Справді, нехай $y \in L^2(0, T; W_\rho)$ є слабким розв'язком задачі (5.2)–(5.4). Оскільки

$$\begin{aligned} |\operatorname{div}(A\rho\nabla y(t)) [v]| &\leq \int_\Omega |(A(x)\nabla y(t, x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N}| \rho(x) dx \leq \\ &\leq \|A\|_{L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})} \|\nabla y(t)\|_{L^2(\Omega; \rho dx)^N} \|v\|_\rho \leq C \|v\|_\rho \quad \forall v \in W_\rho, \end{aligned}$$

то $\operatorname{div}(A\rho\nabla y(t)) \in W_\rho^* \forall t \in (0, T)$. Отже, як випливає з рівняння (5.2), маємо: $\dot{y} \in L^2(0, T; W_\rho^*)$. Покажемо, що для кожного $v \in W_\rho$ функція $w(t) = \langle \dot{y}(t), v \rangle_{W_\rho^*; W_\rho}$ є розподіленням в $\mathcal{D}'(0, T)$, тобто

$$\langle \dot{y}(t), v \rangle_{W_\rho^*; W_\rho} = \frac{d}{dt} (y(t), v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{в } \mathcal{D}'(0, T), \quad (5.11)$$

або інакше, що для довільного $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ виконується рівність

$$\int_0^T \langle \dot{y}(t), v \rangle_{W_\rho^*; W_\rho} \varphi(t) dt = - \int_0^T (y(t), v)_{L^2(\Omega)} \dot{\varphi}(t) dt.$$

Справді, оскільки $y(t) \in W_\rho$ і $y \in L^2(0, T; W_\rho)$, то за теоремою Божнера (див. теорему 4.1) можемо записати:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \dot{y}(t), v \rangle_{W_\rho^*; W_\rho} \varphi(t) dt &= \left\langle \int_0^T \dot{y}(t) \varphi(t) dt, v \right\rangle_{W_\rho^*; W_\rho} = \\ &= \left\langle - \int_0^T y(t) \dot{\varphi}(t) dt, v \right\rangle_{W_\rho^*; W_\rho}. \end{aligned}$$

Проте, $\int_0^T y(t) \dot{\varphi}(t) dt \in W_\rho$. Отже,

$$\begin{aligned} \left\langle - \int_0^T y(t) \dot{\varphi}(t) dt, v \right\rangle_{W_\rho^*; W_\rho} &= - \left(\int_0^T y(t) \dot{\varphi}(t) dt, v \right)_{L^2(\Omega)} = \\ &= - \int_0^T (y(t), v)_{L^2(\Omega)} \dot{\varphi}(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T). \end{aligned}$$

Таким чином, $w(t) := \langle \dot{y}(t), v \rangle_{W_\rho^*; W_\rho} \in L^1_{loc}(0, T) \subset \mathcal{D}'(0, T)$ і має місце рівність (5.11).

Як наслідок наведеного аналізу маємо наступний висновок: рівняння (5.7) можна подати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (y(t), v)_{L^2(\Omega)} + [y(t), v]_\rho^A &= (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{в } \mathcal{D}'(0, T), \\ \text{при всіх } v \in W_\rho, \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

що і потрібно було встановити.

Зауваження 5.3. Слабкий розв'язок $y \in L^2(0, T; W_\rho)$ задачі (5.2)–(5.4), в загальному випадку, не є єдиним. Справді, припустивши існування двох різних слабких розв'язків y_1 та y_2 ($y_1 \neq y_2$), маємо:

$$\left. \begin{aligned} (y_1(t) - y_2(t), v)_{L^2(\Omega)} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} [y_1(t) - y_2(t), v]_\rho^A dt &= 0; \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} (y_1(t) - y_2(t), v)_{L^2(\Omega)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

для всіх $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Проте простір фінітних функцій $C_0^\infty(\Omega)$ не є щільним у W_ρ , тобто може не існувати послідовності $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такої, що

$$v_k \rightarrow y_1(t) = y_2(t) \quad \text{за нормою } \|\cdot\|_\rho.$$

Таким чином, виконання умови (5.13) при всіх $v \in C_0^\infty(\Omega)$ не гарантує рівність $y_1(t) = y_2(t)$ м.с. на Ω .

Беручи до уваги наведені зауваження, введемо наступне поняття:

Означення 5.2. Нехай V_ρ – довільний проміжний простір, $H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho$. Будемо казати, що функція $y \in L^2(0, T; W_\rho)$ є V_ρ -розв'язком задачі (5.2)–(5.4), якщо тотсжності (5.7)–(5.8) виконуються при всіх $v \in V_\rho$.

Як буде показано далі, для будь-якого проміжного простору V_ρ існування V_ρ -розв'язків є наслідком відомої теореми про розв'язність абстрактних еволюційних рівнянь з монотонними операторами, а єдиність таких розв'язків забезпечується умовою строгої монотонності

$$(A(x)\xi - A(x)\eta, \xi - \eta)_{\mathbb{R}^N} > 0 \quad \forall \xi \neq \eta \in \mathbb{R}^N \text{ м. с. на } \Omega,$$

яка, у свою чергу, є наслідком властивості $A \in M_\alpha^\beta(\Omega)$ (див. (5.1)). У зв'язку з цим нагадаємо наступний результат (див., напр., [2, с. 75]):

Теорема 5.1. *Нехай V — рефлексивний сепарабельний банахів простір, який неперервно вкладений в гільбертів простір H , і нехай V^* — дуальний до V простір. Нехай $\mathcal{A} : V \rightarrow V^*$ — обмежений демінеперервний коерцитивний монотонний оператор. Тоді задача*

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) + \mathcal{A}y(t) &= f \quad \text{в } \mathcal{D}'(0, T), \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

має єдиний розв'язок $y \in \mathcal{W}(0, T)$ при кожних $f \in L^2(0, T; V^*)$ та $y_0 \in H$, де

$$\mathcal{W}(0, T) = \{y \in L^2(0, T; V) : \dot{y} \in L^2(0, T; V^*)\},$$

такий, що

$$\begin{aligned} (y(t), v)_H \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \langle \mathcal{A}y(t), v \rangle_{V^*, V} dt &= \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t), v \rangle_{V^*, V} dt \quad \forall 0 \leq t_1 < t_2 \leq T, \\ \lim_{t \rightarrow 0+} \langle y(t), v \rangle_{V^*, V} &= \langle y_0, v \rangle_{V^*, V} = (y_0, v)_H. \end{aligned}$$

для довільного $v \in V$.

Тут властивості монотонності, демінеперервності та коерцитивності оператора $\mathcal{A} : V \rightarrow V^*$ розуміються в такому сенсі:

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v \rangle_{V^*, V} \geq 0 \quad \forall u, v \in V; \quad (5.14)$$

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \langle \mathcal{A}(u + tv), w \rangle_{V^*, V} \text{ неперервне при всіх } u, v, w \in V; \quad (5.15)$$

$$\lim_{\|v\|_V \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}v, v \rangle_{V^*, V} \|v\|_V^{-1} = +\infty. \quad (5.16)$$

Теорема 5.2. *Нехай V_ρ — довільний проміжний простір, $H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho$. Тоді при заданих $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ та $y_0 \in L^2(\Omega)$ задача (5.2)–(5.4) має єдиний V_ρ -розв'язок $y \in \mathcal{W}(0, T; V_\rho, V_\rho^*)$ (див (4.6)).*

Доведення. Покажемо, що в цьому випадку виконуються усі передумови теореми 5.1. Справді, поклавши в теоремі 5.1 $V = V_\rho$ і $H = W_\rho$, пов'яжемо з задачею (5.2)–(5.4) лінійний оператор $\mathcal{A} : V_\rho \rightarrow V_\rho^*$, який означимо за правилом:

$$\langle \mathcal{A}y, v \rangle_{V_\rho^*, V_\rho} = [y, v]_\rho^A \quad \forall y, v \in V_\rho. \quad (5.17)$$

Тоді в силу оцінки (5.9) та умови $A \in M_\alpha^\beta(\Omega)$, білінійна форма $[y, v]_\rho^A$ при кожному фіксованому $y \in V_\rho$ є неперервною за аргументом v . Отже, оператор $A : V_\rho \rightarrow V_\rho^*$ в (5.17) є лінійним і обмеженим. При цьому зауважимо, що властивості (5.14)–(5.16) є очевидним наслідком (5.9) та умови $A \in M_\alpha^\beta(\Omega)$. Таким чином, за теоремою 5.1 задача (5.2)–(5.4) має єдиний V_ρ -розв'язок у просторі $\mathcal{W}(0, T; V_\rho, V_\rho^*)$, що і потрібно було встановити. \square

Наведемо ще одну характеристику V_ρ -розв'язків задачі (5.2)–(5.4), яка буде залучена далі.

Означення 5.3. Будемо казати, що трійка просторів

$$V_\rho \subseteq L^2(\Omega) \subseteq V_\rho^* \tag{5.18}$$

є еволюційною, якщо простір V_ρ неперервно та щільно вкладається в $L^2(\Omega)$.

Зауважимо, що виходячи з умов (i)–(ii) параграфу 4 та зауваження 4.1, трійка (5.18) є еволюційною принаймні для $V_\rho = H_\rho$.

Твердження 5.1. Нехай функція $y \in L^2(0, T; V_\rho)$ є V_ρ -розв'язком задачі (5.2)–(5.4) і нехай при заданому V_ρ трійка просторів (5.18) є еволюційною. Тоді $y \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ і при цьому для будь-яких $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ виконується енергетична рівність:

$$\frac{1}{2} \|y(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (\|y(t)\|_\rho^A)^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), y(t))_{L^2(\Omega)} dt, \tag{5.19}$$

де позначено

$$\|y(t)\|_\rho^A = \left(\int_\Omega [(A(x)\nabla y(t), \nabla y(t))_{\mathbb{R}^N} \rho + y^2(t)] dx \right)^{1/2}.$$

Доведення. Перепишемо тотожність (5.7) у вигляді:

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}(t), v \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} dt + \int_{t_1}^{t_2} [y(t), v]_\rho^A dt = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), v)_{L^2(\Omega)} dt,$$

де v є довільною функцією з V_ρ . Оскільки $\langle \dot{y}(t), v \rangle_{V_\rho^*; V_\rho}$ є розподіленням у $\mathcal{D}'(0, T)$, то з попереднього отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}(t), v\varphi(t) \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} dt + \int_{t_1}^{t_2} [y(t), v\varphi(t)]_\rho^A dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), v\varphi(t))_{L^2(\Omega)} dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Оскільки функції $\{v\varphi(t)\}$ утворюють щільну підмножину в $L^2(0, T; V_\rho)$, співвідношення (5.20) залишиться в силі, якщо покласти замість $v\varphi(t)$ функцію

$y(t)$. Тепер скористаємося формулою інтегрування за частинами

$$\begin{aligned} (y(t), u(t))_{L^2(\Omega)} \Big|_{t_1}^{t_2} &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\langle \dot{y}(t), u(t) \rangle_{V_\rho^*, V_\rho} + \langle \dot{u}(t), y(t) \rangle_{V_\rho^*, V_\rho} \right] dt \\ &\forall u, y \in \mathcal{W}(0, T; V_\rho, V_\rho^*), \end{aligned} \quad (5.21)$$

справедливість якої гарантована вихідними припущеннями щодо еволюційності трійки просторів (5.18) (див. [2, с. 15]). В результаті енергетична рівність (5.19) є наслідком співвідношень (5.20)–(5.21) при $u(t) = y(t)$. Для завершення доведення досить скористатися наступним відомим результатом (див. [4]): якщо $V \subseteq H \subseteq V^*$ — еволюційна трійка просторів, де H — гільбертів простір, то вкладення $\mathcal{W}(0, T; V, V^*) \hookrightarrow C([0, T]; H)$ є неперервним. \square

Зауваження 5.4. Якщо в умовах твердження 5.1 не вимагати, аби простори (5.18) утворювали еволюційну трійку, то енергетична рівність (5.19) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\langle \dot{y}(t), y(t) \rangle_{V_\rho^*, V_\rho} + (\|y(t)\|_\rho^A)^2 \right] dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), y(t))_{L^2(\Omega)} dt \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} : 0 \leq t_1 < t_2 \leq T. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Як легко бачити, рівність (5.22) не залежить явно від вибору простору V_ρ . Отже, в певному сенсі її можна вважати визначальною. У зв'язку з цим прийmemo за основу наступне поняття:

Означення 5.4. V_ρ -розв'язок $y \in L^2(0, T; V_\rho)$ задачі (5.2)–(5.4) будемо називати варіаційним, якщо він задовольняє енергетичну рівність (5.19).

Зауважимо, що варіаційні розв'язки не вичерпують усієї множини слабких розв'язків. Для уточнення сказаного наведемо наступний результат.

Твердження 5.2. Нехай функції y_1 та y_2 є варіаційними розв'язками задачі (5.2)–(5.4) і такими, що $y_1 \neq y_2$. Тоді функція $(y_1 + y_2)/2$ є слабким, проте не варіаційним розв'язком тієї ж задачі.

Доведення. Справді, для півсуми $(y_1 + y_2)/2$, як легко бачити, інтегральні тотожності (5.7)–(5.8) залишаються в силі. Проте, що стосується енергетичної рівності (5.19), то в силу оцінки

$$\left[\frac{y_1(t) + y_2(t)}{2}, \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2} \right]_\rho^A < \frac{1}{2} \left([y_1(t), y_1(t)]_\rho^A + [y_2(t), y_2(t)]_\rho^A \right)$$

її виконання стає неможливим. Твердження доведено. \square

Наступний результат можна вважати центральним у даному розділі.

Теорема 5.3. Слабкий розв'язок $y \in L^2(0, T; V_\rho)$ задачі (5.2)–(5.4) є її V_ρ -розв'язком тоді і тільки тоді, коли він варіаційний.

Доведення. Імплікація "V_ρ-розв'язок ⇒ слабкий розв'язок" є очевидною внаслідок означень 5.4 та 5.1. Нехай y* ∈ L²(0, T; V_ρ) є тим слабким розв'язком, який задовольняє енергетичну рівність (5.19). Покажемо, що в цьому випадку має місце обернена імплікація "слабкий розв'язок ⇒ V_ρ-розв'язок" при деякому V_ρ (H_ρ ⊆ V_ρ ⊆ W_ρ).

Утворимо простір L²(0, T; V_ρ) за правилом:

$$L^2(0, T; V_\rho) = \text{Li} \{y^*, L^2(0, T; H_\rho)\},$$

де через = Li {A, B} позначено лінійну оболонку множин A та B. Отже, L²(0, T; V_ρ) є найменшим за включенням підпростором простору L²(0, T; W_ρ), який містить y* та L²(0, T; H_ρ). В результаті, для довільного елемента y ∈ L²(0, T; V_ρ) має місце декомпозиція

$$y = \alpha y^* + \beta \tilde{y}, \tag{5.23}$$

де $\tilde{y} \in L^2(0, T; H_\rho)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Оскільки y* ∈ L²(0, T; W_ρ) є слабким розв'язком, то за означенням 5.1 повинна виконуватися інтегральна тотожність:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}^*(t), v\varphi(t) \rangle_{W_\rho^*; W_\rho} dt + \int_{t_1}^{t_2} [y^*(t), v\varphi(t)]_\rho^A dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), v\varphi(t))_{L^2(\Omega)} dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T). \end{aligned} \tag{5.24}$$

при всіх v ∈ C[∞](Ω) та φ ∈ C[∞](0, T). Оскільки функції

$$\{v\varphi(t) : v \in C_0^\infty(\Omega), \varphi \in C_0^\infty(0, T)\}$$

утворюють щільну множину в L²(0, T; H_ρ), то тотожність (5.24) можна поширити до вигляду

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}^*(t), \tilde{y}(t) \rangle_{W_\rho^*; W_\rho} dt + \int_{t_1}^{t_2} [y^*(t), \tilde{y}(t)]_\rho^A dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), \tilde{y}(t))_{L^2(\Omega)} dt, \end{aligned} \tag{5.25}$$

де \tilde{y} — довільний елемент простору L²(0, T; H_ρ).

Беручи до уваги, що H_ρ ⊆ V_ρ ⊆ W_ρ, маємо: W_ρ* ⊆ V_ρ* ⊆ H_ρ*. Отже, співвідношення (5.25) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \langle \dot{y}^*(t), \tilde{y}(t) \rangle_{V_\rho^*; V_\rho} dt + \int_{t_1}^{t_2} [y^*(t), \tilde{y}(t)]_\rho^A dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), \tilde{y}(t))_{L^2(\Omega)} dt \quad \forall \tilde{y} \in L^2(0, T; H_\rho). \end{aligned} \tag{5.26}$$

Для завершення доведення досить показати, що співвідношення (5.26) залишиться в силі для довільної функції $\tilde{y} \in L^2(0, T; V_\rho)$. Для цього скористаємося енергетичною рівністю (5.19) і перепишемо її у вигляді:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\langle \dot{y}^*(t), y^*(t) \rangle_{V_\rho^*, V_\rho} + [y^*(t), y^*(t)]_\rho^A \right] dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), y^*(t))_{L^2(\Omega)} dt \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq T. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Тоді, залучаючи декомпозицію (5.23) та рівності (5.26) і (5.27), приходимо до співвідношення

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\langle \dot{y}^*(t), y(t) \rangle_{V_\rho^*, V_\rho} + [y^*(t), y(t)]_\rho^A \right] dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), y(t))_{L^2(\Omega)} dt \quad \forall y \in L^2(0, T; V_\rho). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\langle \dot{y}^*(t), v \rangle_{V_\rho^*, V_\rho} + [y^*(t), v]_\rho^A \right] \varphi(t) dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0, T), \forall v \in V_\rho. \end{aligned}$$

Таким чином, y^* є V_ρ -розв'язком задачі (5.2)–(5.4), що і потрібно було встановити. \square

6. Про деякі застосування в теорії оптимальних систем

Нехай, як і вище, Ω є обмеженою відкритою множиною в \mathbb{R}^N ($N \geq 1$) з достатньо гладкою межею $\partial\Omega$. Нехай ξ_1 та ξ_2 — задані елементи простору $L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)$ з наступними властивостями:

$$0 < \xi_1(x) \leq \xi_2(x) \text{ майже скрізь в } \Omega, \quad \xi_1^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^N). \quad (6.1)$$

Нехай $m \in \mathbb{R}_+$ — додатна величина така, що $\|\xi_1\|_{L^1(\Omega)} \leq m \leq \|\xi_2\|_{L^1(\Omega)}$.

Для заданих $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ та $y_d \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ розглянемо наступну задачу оптимального керування:

$$I(A, \rho, y) = \zeta \int_\Omega |y(x) - y_d(x)|^2 dx + \int_\Omega \|\nabla y(x)\|_{\mathbb{R}^N}^2 \rho dx \longrightarrow \inf \quad (6.2)$$

за таких обмежень:

$$y' - \operatorname{div} A(x)\rho(x)\nabla y + y = f \quad \text{в } Q^T, \quad (6.3)$$

$$y(0, x) = y_0(x) \quad \text{в } \Omega, \quad (6.4)$$

$$y(t, x) = 0 \quad \text{на } S_T. \quad (6.5)$$

Будемо казати, що пара $(A, \rho) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times L^1(\Omega)$ є допустимим керуванням для початково-крайової задачі (6.3)–(6.5), якщо $A = [\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_N] \in M_\alpha^\beta(\Omega)$ і $\rho \in \mathcal{R}_{ad}$, де позначено

$$\mathcal{R}_{ad} = \left\{ \rho \in L^1(\Omega) : \int_\Omega \rho dx = m, \xi_1(x) \leq \rho(x) \leq \xi_2(x) \text{ м. с. в } \Omega \right\}. \quad (6.6)$$

Наступне поняття є ключовим для даної задачі:

Означення 6.1. Будемо казати, що трійка функцій (A, ρ, y) є допустимою для задачі оптимального керування (6.2)–(6.6), якщо $(A, \rho) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times L^1(\Omega)$ є допустимим керуванням, а елемент

$$y \in L^2(0, T; W_\rho) = \left\{ g \in L^2(0, T; W_0^{1,1}(\Omega)) : \int_0^T \int_\Omega (g^2 + \rho |\nabla g|^2) dx dt < +\infty \right\} \quad (6.7)$$

є слабким розв'язком задачі (6.3)–(6.5) в сенсі означення 5.1, тобто для кожного $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та довільних $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ функція $y = y(A, \rho)$ задовольняє інтегральну тотожність (5.7) та умову (5.8).

Позначимо через Ξ множину усіх допустимих розв'язків наведеної вище задачі оптимального керування. Зрозуміло, що проблема єдиності слабого розв'язку тісно пов'язана з проблемою щільності простору $C_0^\infty(\Omega)$ у ваговому просторі Соболева W_ρ . Проте, як показано у праці [5], існують приклади вироджених вагових функцій ρ , при яких означена вище властивість щільності простору $C_0^\infty(\Omega)$ в W_ρ порушується. Отже, в цьому випадку для задачі (6.3)–(6.5) при фіксованій парі $(A, \rho) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times L^1(\Omega)$ може існувати декілька, загалом незалежних, слабких розв'язків. Проте в силу лінійності вихідного об'єкта керування, при кожному допустимому наборі (A, ρ) відповідна множина слабких розв'язків задачі (6.3)–(6.5) є опуклою і замкненою. До того ж, залучаючи аргументи праці [5] та теорему 5.2, легко показати, що для кожної допустимої пари (A, ρ) початково-крайова задача (6.3)–(6.5) допускає принаймні один слабкий розв'язок у сенсі означення 5.1. Таким чином, $\Xi \neq \emptyset$, а отже, задача оптимального керування (6.2)–(6.6) є регулярною.

Означення 6.2. Будемо казати, що набір функцій

$$(A^0, \rho^0, y^0) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times L^1(\Omega) \times L^2(0, T; W_\rho)$$

є слабким оптимальним розв'язком задачі (6.2)–(6.6), якщо (A^0, ρ^0, y^0) є мінімізантом наступної задачі

$$\left\langle \inf_{(A, \rho, y) \in \Xi} I(A, \rho, y) \right\rangle.$$

У зв'язку з цим зауважимо, що існування слабких оптимальних розв'язків задач керування для вироджених параболічних рівнянь є на сьогодні новою і не дослідженою в повному обсязі проблемою. Основними причинами такої ситуації є такі: по-перше, для слабких розв'язків початково-крайової задачі (6.3)–(6.5) немає зручних апріорних оцінок у нормі простору $\|\cdot\|_{L^2(0,T;W_\rho)}$. По-друге, недослідженими залишаються такі топологічні властивості множини допустимих слабких розв'язків Ξ як замкненість та компактність. По-третє, що є характерним лише для задач означеного вище класу, кожна допустима трійка (A, ρ, y) належить відповідному (тобто строго асоційованому з нею) простору $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times L^1(\Omega) \times L^2(0, T; W_\rho)$, а отже, множина Ξ утворена сукупністю об'єктів, які належать різним функціональним просторам.

За аналогією з попередніми параграфами, для кожного допустимого керування (A, ρ) , позначимо через H_ρ замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ за $\|\cdot\|_\rho$ -нормою. Нехай V_ρ — довільний проміжний простір, $H_\rho \subseteq V_\rho \subseteq W_\rho$. Тоді, залучаючи аргументи з [6], легко переконатися в справедливості наступного результату, який є характерним для означеного класу задач.

Твердження 6.1. Нехай (A, ρ) — допустиме керування, і нехай $V_{1,\rho}$ і $V_{2,\rho}$ — пов'язані з ним проміжні простори такі, що $(V_{1,\rho} \neq V_{2,\rho})$. Нехай $y_1 = y_1(A, \rho)$ та $y_2 = y_2(A, \rho)$ є відповідними V_ρ -розв'язками початково-крайової задачі (6.3)–(6.5) в сенсі означення 5.2. Припустимо, що $y_1 \neq y_2$. Тоді будь-який елемент їх опуклої оболонки

$$\text{conv}\{y_1, y_2\} = \{\eta y_1 + (1 - \eta)y_2 : \forall \eta \in (0, 1)\}$$

є лише слабким, проте не еволюційним, розв'язком вихідної задачі (6.3)–(6.5).

Беручи даний факт до уваги, покажемо, що для задачі (6.2)–(6.6) має місце результат, який не є характерним для теорії лінійно-квадратичних задач оптимального керування.

Твердження 6.2. Нехай $(A^0, \rho^0, y^0) \in \Xi$ є слабким, проте не варіаційним, оптимальним розв'язком задачі (6.2)–(6.6). Припустимо, що множина

$$E = \left\{ x \in \Omega : A^0(x) > \alpha I, (A^0(x))^{-1} > \beta^{-1} I \right\} \quad (6.8)$$

має ненульову лебегову міру й існує матриця $A^* \in M_\alpha^\beta(\Omega)$ така, що для довільних $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ та $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ виконується рівність:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(A^*(x) \nabla y^0, \nabla \varphi \right)_{\mathbb{R}^N} \rho^0 dx dt = 0. \quad (6.9)$$

Тоді слабкі оптимальні розв'язки задачі (6.2)–(6.6) утворюють континуум.

Доведення. Оскільки $A^* \in M_\alpha^\beta(\Omega)$, то, як легко бачити, матриця

$$A_\theta(x) = A^0(x) + \theta \chi_E(x) A^*(x)$$

буде також належати множині $M_\alpha^\beta(\Omega)$ при всіх достатньо малих $|\theta|$. Тут через χ_E позначено характеристичну функцію множини E . В результаті, поєднуючи інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} & (y^0(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} [y^0(t), \varphi]_{\rho^0}^{A^0} dt - \int_{t_1}^{t_2} (f(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt := \\ & := (y^0(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [(A^0(x) \nabla y^0, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} \rho^0 + y^0 \varphi] dx dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} (f(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} : 0 \leq t_1 < t_2 \leq T \end{aligned}$$

з умовою (6.9), приходимо до співвідношення

$$\begin{aligned} & (y^0(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [(A_\theta(x) \nabla y^0, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} \rho^0 + y^0 \varphi] dx dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} (f(t), \varphi)_{L^2(\Omega)} dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} : 0 \leq t_1 < t_2 \leq T. \end{aligned}$$

Отже, трійка функцій (A_θ, ρ^0, y^0) є також слабким допустимим розв'язком задачі оптимального керування (6.2)–(6.6) при достатньо малих значеннях $|\theta|$, тобто $(A_\theta, \rho^0, y^0) \in \Xi \forall \theta \in (0, \theta^*)$ з деяким $\theta^* > 0$. Оскільки

$$I(A_\theta, \rho^0, y^0) \equiv I(A^0, \rho^0, y^0),$$

то пара (A_θ, ρ^0) є слабким оптимальним керуванням при всіх $\theta \in (0, \theta^*)$, що і потрібно було встановити. \square

Зауваження 6.1. Припущення щодо існування матриці $A^* \in M_\alpha^\beta(\Omega)$, яка б задовольняла умову (6.9), є прямим наслідком ефекту Лаврентьєва: для заданої виродженої вагової функції ρ^0 простір $C_0^\infty(\Omega)$ не є щільним у ваговому просторі Соболева W_{ρ^0} , а отже, $H_{\rho^0} \neq W_{\rho^0}$ (див. твердження 1.1 в [5]).

Бібліографічні посилання

1. Гаевский Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. — М. : Мир, 1978. — 337 с.
2. Иваненко В. И. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами / В. И. Иваненко, В. С. Мельник. — К. : Наукова думка, 1988. — 324 с.
3. Drabec P. Nonlinear elliptic equations, singular and degenerate cases / P. Drabec, A. Kufner, N. Nicolosi. — University of West Bohemia, 1996.
4. Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications / E. Zeidler. — ІА, ІІВ, Springer-Verlag, New York, 1990.
5. Zhikov V. V., Weighted Sobolev spaces / V. V. Zhikov. Sbornik: Mathematics, No. 8, Vol. 189, 1998, P. 27–58.
6. Zhikov V. V., Pastukhova S. E., Homogenization of degenerate elliptic equations / V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, Siberian Math. Journal, No. 1, Vol. 49, 2006, P. 80–101.

УДК 517.91

**ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО
УРАВНЕНИЯ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ**

В. А. Остапенко

*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск, 49010.*

Рассмотрена третья краевая задача для телеграфного уравнения в полуограниченной области. Получено решение этой задачи в квадратурах. Построение точного решения задачи основано на применении метода продолжений и на разработанном в [1] методе интегрального представления достаточно широкого класса решений телеграфного уравнения.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, краевая задача, полуограниченная область.

Введение

В физике достаточно часто используются математические модели, основой которых является телеграфное уравнение. Такого рода модели позволяют учесть реально существующие сопротивления среды и выяснить характер затухания волн, вызванного этими сопротивлениями. Однако до недавнего времени для телеграфного уравнения удалось получить только точное решение задачи Коши, обобщенной задачи Коши и задачи Гурса [4].

В [1] с помощью функции Римана разработан метод интегрального представления решений телеграфного уравнения. Сочетание такого интегрального представления с методом продолжений позволило получить точное решение третьей краевой задачи в полуограниченной области.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая краевая задача: в области $0 < x - x_n < l$, $t > t_n$ найти решение телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + B \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + C u(x, t) = 0, \quad (1.1)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, t_n) = 0; \quad u_t(x, t_n) = 0, \quad x > x_n \quad (1.2)$$

и краевому условию третьего типа

$$u_x(x_n, t) + h(x_n, t)u(x_n, t) = \kappa(t - t_n). \quad t > t_n. \quad (1.3)$$

2. Решение задачи

Для решения этой задачи применяется метод, разработанный в [3,4]. Решение поставленной задачи основано на установленном в [1] факте, что в случае краевых условий третьего типа решением дифференциального уравнения (1) является функция

$$u(x, t) = e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_{t-t_n+\frac{x-x_n}{a}}^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \omega(\eta) d\eta$$

с произвольной функцией $\omega(\eta)$. Здесь $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка,

$$z = \sqrt{c_1[(x-x_n)^2 - a^2((t-t_n)-\eta)^2]}; \quad (2.1)$$

$$c_1 = C + \frac{D^2 a^2}{4} - \frac{B^2}{4}. \quad (2.2)$$

Функция $\omega(\eta)$ должна быть определена на всей числовой оси. Так как в краевом условии (3) функция $\kappa(t)$ определена лишь на полуоси, необходимо построить ее продолжение на всю ось t . Учитывая нулевые начальные условия (2), функцию $\kappa(t)$ на всю ось t необходимо продолжать нулем. Поэтому продолжение функции $\kappa(t)$ на всю ось t будет выглядеть следующим образом:

$$K(t-t_n) = \begin{cases} \kappa(t-t_n), & t > t_n; \\ 0, & t < t_n. \end{cases} \quad (2.3)$$

Краевое условие (1.3) также продолжается на всю ось t :

$$u_x(x_n, t) + h(x_n, t)u(x_n, t) = K(t-t_n). \quad t > t_n. \quad (2.4)$$

Учитывая, что по условиям постановки задачи волны в среде возбуждаются на левом конце и распространяются в среду в направлении положительных x , решение задачи отыскивается в виде функции

$$u(x, t) = 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} K_0(\eta) d\eta \quad (2.5)$$

с неизвестной функцией $K_0(\eta)$. Здесь z и c_1 определяются формулами (2.1) и (2.2) соответственно.

Функция (2.5) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.1) при произвольной функции $K_0(t)$. Для анализа краевого условия (2.4) вычислим производную функции (2.5) по x . Получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = & -\frac{1}{a} e^{-\frac{B-Da}{2}(x-x_n)} K_0\left(t-t_n-\frac{x-x_n}{a}\right) + \\ & e^{-\frac{B}{2}(x-x_n)} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}} \left[-\frac{B}{2} J_0(z) - c_1 \frac{x-x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-t_n-\eta)} K_0(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

При вычислении этой производной учтено, что $\frac{\partial z}{\partial x} = c_1 \frac{x-x_n}{z}$, $\frac{\partial J_0(z)}{\partial x} = \frac{dJ_0(z)}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c_1(x-x_n)}{z} \frac{dJ_0(z)}{dz} = -\frac{c_1(x-x_n)}{z} J_1(z)$, так как $\frac{dJ_0(z)}{dz} = -J_1(z)$. Учтено также, что при $\eta = t - t_n - \frac{x-x_n}{a} z = 0$, а $J_0(0) = 1$.

Подставим теперь форму решения (2.5) в краевое условие (2.4) с учетом (2.6). Получим:

$$-\frac{1}{a} K_0(t-t_n) + \int_0^{t-t_n} [h(x_n, t) - \frac{B}{2}] J_0(z) e^{\frac{Da^2}{2}(t-t_n-\eta)} K_0(\eta) d\eta = K(t-t_n). \quad (2.7)$$

В равенстве (2.7) следует принимать $z|_{x=x_n} = a(t-t_n-\eta)\sqrt{-c_1}$.

Равенство (2.7) представляет собой интегральное уравнение для определения функции K_0 . Выполним в уравнении (2.7) преобразование $\tau = t - t_n$. Тогда уравнение (2.7) примет вид:

$$-\frac{1}{a} K_0(\tau) + \int_0^\tau [h(x_n, \tau + t_n) - \frac{B}{2}] J_0(a(\tau-\eta)\sqrt{-c_1}) e^{\frac{Da^2}{2}(\tau-\eta)} K_0(\eta) d\eta = K(\tau). \quad (2.8)$$

Из уравнения (2.8) и свойства (2.3) функции $K(\tau)$ следует, что функция $K_0(\tau)$ обладает следующим свойством:

$$K_0(\tau) \equiv 0, \quad \tau < 0. \quad (2.9)$$

В силу свойства (2.9) функции $N_0(\tau)$ функция (2.5) будет удовлетворять начальным условиям (1.2). Действительно, при $t = t_n$ из формулы (2.5) получаем: $u(x, t_n) = e^{-\frac{B}{2}(x-x_n)} \int_0^{-\frac{x-x_n}{a}} J_0(z) e^{-\frac{Da^2}{2}\eta} K_0(\eta) d\eta$.

При $x - x_n > 0$ верхний предел интегрирования в этой формуле отрицателен и, следовательно, на основании свойства (2.9) функции $K_0(\tau)$, $u(x, t_n) = 0$. Иными словами, функция (2.5) удовлетворяет первому начальному условию (1.2). Продифференцируем функцию (2.5) по t . Получим:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = e^{-\frac{B}{2}(x-x_n)} [e^{\frac{Da^2}{2}(x-x_n)} K_0\left(t-t_n - \frac{x-x_n}{a}\right) + \int_0^{t-t_n - \frac{x-x_n}{a}} \left[\frac{Da^2}{2} J_0(z) + c_1 a^2 \frac{t-t_n-\eta}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-t_n-\eta)} K_0(\eta) d\eta]. \quad (2.10)$$

При вычислении производной учтено, что $\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{c_1 a^2 (t-t_n-\eta)}{z}$,

$$\frac{\partial J_0(z)}{\partial t} = \frac{dJ_0(z)}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{c_1 a^2 (t-t_n-\eta)}{z} \frac{dJ_0(z)}{dz} = \frac{c_1 a^2 (t-t_n-\eta)}{z} J_1(z).$$

Из формулы (2.10) при $t = t_n$ получаем:

$$u_t(x, t_n) = e^{-\frac{B}{2}(x-x_n)} \left[e^{\frac{Da}{2}(x-x_n)} K_0 \left(-\frac{x-x_n}{a} \right) + \int_0^{-\frac{x-x_n}{a}} \left[\frac{Da^2}{2} J_0(z) - c_1 a^2 \frac{\eta}{z} J_1(z) \right] e^{-\frac{Da^2}{2}\eta} K_0(\eta) d\eta \right].$$

В правой части этой формулы при $x - x_n > 0$ верхний предел интегрирования и аргумент функции $K_0(\tau)$ отрицательны. Поэтому, на основании свойства (2.9) функции $K_0(\tau)$, $u_t(x, t_n) = 0$. А это значит, что функция (2.5) удовлетворяет второму начальному условию (1.2).

Таким образом, показано, что функция (2.5) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, то есть является ее решением.

3. Выводы

В результате применения комбинации интегрального представления решения и метода продолжений получено в квадратурах решение первой краевой задачи для телеграфного уравнения. Анализ формулы (2.5), представляющей решение задачи, показывает, что это решение имеет характер распространяющихся со скоростью a волн. В то же время в процессе распространения происходит искажение этих волн, зависящее от коэффициентов B и D при первых производных в уравнении (1.1). Разработанный метод может быть применен для решения других краевых задач подобного типа. В частности, с его помощью могут быть решены краевые задачи для полуограниченных областей с иными краевыми условиями. В дополнительной комбинации с методом отражений могут быть также получены решения краевых задач для ограниченных областей.

Библиографические ссылки

1. Остапенко В. А. Краевая задача без начальных условий для телеграфного уравнения / В. А. Остапенко // Диференціальні рівняння та їх застосування, Днепропетровск, 2008. — С. 3–17.
2. Остапенко В. А. Первая краевая задача для телеграфного уравнения в полубесконечной области / В. А. Остапенко // Дифференциальные уравнения и их приложения. РВВ ДНУ, Днепропетровск, 2008 — С. 18–20.
3. Остапенко В. А. Первая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области. / В. А. Остапенко // Вест. Днепропетр. ун-та, т. 17, № 8, 2009, Серия Моделирование, вып. 1. — С. 149–161.
4. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики. / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // — М. : Наука 1966. — С. 724.

УДК 532.5 + 517.958

**ПРО ВЗАЄМОДІЮ ПРОСТОРОВИХ ВИХОРІВ
ІЗ РІЗНИМИ ІНТЕНСИВНІСТЮ І КРУТКОЮ**

О. А. Мельник*, В. І. Перехрест**

* *Національна металургійна академія України,
Дніпропетровськ, 49005. E-mail: nmetan-melnik@mail.ru*** *Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ, 49050. E-mail: perekhrest@i.ua*

Розглядається кінематична взаємодія паралельних просторових вихорів одного напрямку обертання з різними інтенсивностями та закручуванням, яка зумовлює зміщення їх центрів та об'єднання в один вихор. Показано, що результати взаємодії просторових вихорів суттєво відрізняються від результатів накладання плоских течій, породжених комплексними потенціалами джерел і вихроджерел.

Ключові слова: планетарний вихор, резонансні умови і траєкторії, утворення супутників планет.

1. Вступ

У праці [3] отримано та детально вивчено окремий розв'язок рівнянь Ейлера, який являє собою одиничний вихор-шнур у просторі. Це своєрідне вихроджерело є просторовим аналогом відповідних вихроджерел у плоскій задачі гідродинаміки [1, 2]. Відомо [1], що при накладанні течій, породжених комплексними потенціалами типу джерел і вихроджерел, моделюються складні взаємодії вихорів та обтікання плоских тіл. При цьому центри складених джерел – особливі точки різних типів – при взаємодії не зміщуються. Таким чином конструюються відомі моделі вихрових ниток, вихрових ланцюжків, доріжок Кармана та ін. Нижче досліджуються моделі взаємодії просторових вихорів [3] із паралельними осями; показано, що при таких взаємодіях центри вихорів завжди зміщуються [4, 5], а у випадках одного напрямку закручування об'єднуються [4] при певних, «критичних» відстанях.

2. Побудова моделі взаємодії двох вихорів

Випишемо осесиметричне поле швидкостей одиничного вихрового шнура з віссю Oz у циліндричній системі координат (r, φ, z) :

$$\begin{aligned} V_y^{(0)} = 0; \quad V_z^{(0)} = A_0 \left(1 - \frac{y^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right); \\ V_\varphi^{(0)} = A_0 y \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $y = C_0 r/2$ – безрозмірна радіальна змінна, $A_0 = C_0^2 A/4$ – константа, C_0 , A – довільні сталі, причому C_0 визначає інтенсивність закручування вихора і одночасно є масштабним множником радіальної безрозмірної координати y . Зі збільшенням цього параметра вихрове збурення-шнур стискується до осі одночасно із зростанням амплітуд швидкостей та його енергії. Течія (2.1) є просторовим гвинтом, де поєднується суто вертикальний рух уздовж осі Oz зі швидкістю A_0 з чисто обертальним рухом циліндра $y = \sqrt{2}$ зі швидкістю A_0/e . Траєкторіями руху на проміжних циліндрах є просторові гвинтові лінії зі змінним кроком. При цьому в області власне шнура $0 \leq y \leq \sqrt{2}$ течія є висхідною з витоком поля $Q_z = 2\pi A/e$ і не залежить від величини закручування C_0 . Зовні шнура маємо низхідну течію з тим же витоком протилежного напрямку. Запишемо це поле, як у праці [5], у глобальній циліндричній системі координат, з початком координат, у якій вісь шнура (2.1) має координати (y_0, φ_0) .

У подальшому застосуємо формули переходу між місцевими координатами $(\bar{y}, \bar{\varphi})$ та глобальними координатами (y, φ) довільної точки простору

$$\begin{aligned} \bar{y}^2 &= y_0^2 - 2y_0y \cos(\varphi - \varphi_0) + y^2, \\ \sin \bar{\varphi} &= \frac{y}{\bar{y}} \sin(\varphi - \varphi_0), \quad \cos \bar{\varphi} = \frac{1}{\bar{y}}(y \cos(\varphi - \varphi_0) - y_0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Перетворимо з допомогою (2.2) поле (2.1) до глобальних координат (y, φ) :

$$\begin{aligned} V_y &= -A_0 y_0 \sin(\varphi - \varphi_0) \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{y}^2\right), \\ V_z &= A_0 \left(1 - \frac{\bar{y}^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{\bar{y}^2}{2}\right), \\ V_\varphi &= A_0 (y_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - y) \exp\left(-\frac{1}{2}\bar{y}^2\right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Прямою підстановкою неважко перевірити, що рівняння нерозривності у глобальних координатах [4, 5]:

$$\frac{\partial}{\partial y}(yV_y) + \frac{\partial}{\partial z}(yV_z) + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.4)$$

поле (2.3) задовольняє тотожно при будь-яких y_0, φ_0 . Знайдемо функцію течії поля (2.3), переписавши це поле у вигляді диференціальних рівнянь руху в координатах (y, φ, z) :

$$\frac{dy}{dt} = V_y, \quad \frac{dz}{dt} = V_z, \quad y \frac{d\varphi}{dt} = V_\varphi. \quad (2.5)$$

Комбінуючи ці рівняння, маємо наступне диференціальне рівняння у фазовій площині (y, φ) :

$$\frac{dy}{d\varphi} = y_0 \frac{\sin(\varphi - \varphi_0)}{y(y_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - y)}, \quad (2.6)$$

або $[y(y_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - y)] dy - y_0 \sin(\varphi - \varphi_0) d\varphi = 0$. Останнє рівняння за допомогою інтегрального множника $\mu = \exp\left(-\frac{y_0^2 + y^2}{2}\right)$ зводиться до рівняння у повних диференціалах і має інтеграл вигляду $\Psi(y, \varphi) = \Psi_0$, де

$$\Psi = \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \quad (2.7)$$

Неважко встановити, що швидкості (2.3) виражаються через функцію течії (2.7) такими залежностями [1–3]: $V_y = \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}$, $V_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$, $V_z = V_z(y, \varphi)$. Поле тиску для одиничного вихрового шнура знайдено у праці [4] у формі безрозмірного тиску $P = p/p_\infty$, $P = 1 - q(y)$, $q(y) = \chi^2 \exp(-\tilde{y}^2/2)$, де $q(y)$ – безрозмірне падіння тиску, p_∞ – тиск на нескінченності, $\chi = \frac{AC_0^2}{4V_0}$, а $V_0 = \sqrt{2p_\infty/\rho}$ – швидкісний напір на нескінченності для даного середовища. Величину χ доцільно назвати узагальненим коефіцієнтом інтенсивності шнура.

3. Дослідження взаємодії вихорів

Переходячи до розгляду взаємодії двох паралельних вихрових шнурів одного напрямку обертання [5], для зручності розташуємо центри цих вихорів на однакову відстань y_0 від початку координат $y = 0$ на променях $\varphi_0 = 0$ та $\varphi_0 = \pi$. Для другого (правого) вихору (рис. 1) покладемо $\varphi_0 = 0$, тоді формули переходу координат (2.2) набудуть такого вигляду:

$$\tilde{y}^2 = y_0^2 - 2y_0y \cos \varphi + y^2. \quad (3.1)$$

Щодо поля швидкостей (2.3), то з цих формул вилучимо параметр φ_0 .

Для першого (лівого) вихору (рис. 1) покладемо $\varphi_0 = \pi$ і врахуємо, що даний вихор має іншу закрутку та інтенсивність, ніж перший. Для цього введемо коефіцієнти відношення для інтенсивності $\alpha = \frac{A_1}{A}$ і $\kappa = \frac{C_{0,1}^2}{C_0^2}$ для закручування. Всі параметри першого вихору спочатку переведемо в реальні координати, а потім зведемо до безрозмірних координат другого вихору. Такі перетворення зведуть формулу (2.2) до вигляду: $\tilde{y}^2 = (y_0^2 + 2y_0y \cos \varphi + y^2) \kappa^2$, поле швидкостей (2.3) перетвориться до вигляду:

$$\begin{aligned} V_y^{(1)} &= \tilde{A}_0 y_0 \sin \varphi \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{y}^2\right) \alpha \kappa^3, \\ V_z^{(1)} &= \tilde{A}_0 \left(1 - \frac{\tilde{y}^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{2}\right) \alpha \kappa^2, \\ V_\varphi^{(1)} &= \tilde{A}_0 (y - y_0 \cos \varphi) \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{y}^2\right) \alpha \kappa^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

адже для першого вихору маємо: $\tilde{A}_0 = C_{0,1}^2 A_1 / 4 = \alpha \kappa^2 C_0^2 A / 4 = \alpha \kappa^2 A_0$, $\tilde{y}_0 = \kappa y_0$. При накладанні полів швидкостей двох даних вихрових шнурів будуть складатися відповідні компоненти полів швидкостей обох вихорів:

$$V_y^{(s)} = V_y^{(1)} + V_y^{(2)}, \quad V_z^{(s)} = V_z^{(1)} + V_z^{(2)}, \quad V_\varphi^{(s)} = V_\varphi^{(1)} + V_\varphi^{(2)}. \quad (3.3)$$

Це невісесиметричне поле як сума полів типу (2.3) через лінійність рівняння нерозривності (2.4) буде тотожно його задовольняти, тобто кінематично сумарне поле (3.3) може існувати. Неважко бачити, що воно є неперервним в усьому просторі, оскільки при $y \rightarrow +\infty$ маємо [5]: $\lim_{y \rightarrow +\infty} V_y^{(s)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} V_\varphi^{(s)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} V_z^{(s)} = 0$. Функція течії даного поля (3.3) знаходиться також складанням функцій течії двох даних вихорів, і являє собою інтеграл вигляду

$$\Psi = \alpha \kappa^2 \exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{2}\right). \quad (3.4)$$

Як ми бачимо, фактично функція течії сумарного поля (3.3) є сумою функцій течій кожного вихору, записана у спільних координатах (y, φ) . Швидкості (3.3) виражаються через функцію течії (3.4) такими залежностями:

$$V_y^{(s)} = \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad V_\varphi^{(s)} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V_z^{(s)} = V_z^{(s)}(y, \varphi), \quad (3.5)$$

в силу чого рівняння нерозривності (2.4) завжди задовольняється. Інтеграл (3.4) дає сім'ю циліндричних поверхонь течії з напрямними лініями (рис. 1). На рисунку 1 ліворуч знаходиться вихор зі зміненими параметрами, якому відповідає перша експонента з формули (3.4) і, відповідно, праворуч ми помістили вихор з параметрами $\alpha = 1, \kappa = 1$. Надалі виконаємо дослідження взаємодії цих вихорів за допомогою просторового відображення ізоліній функції течії (3.4).

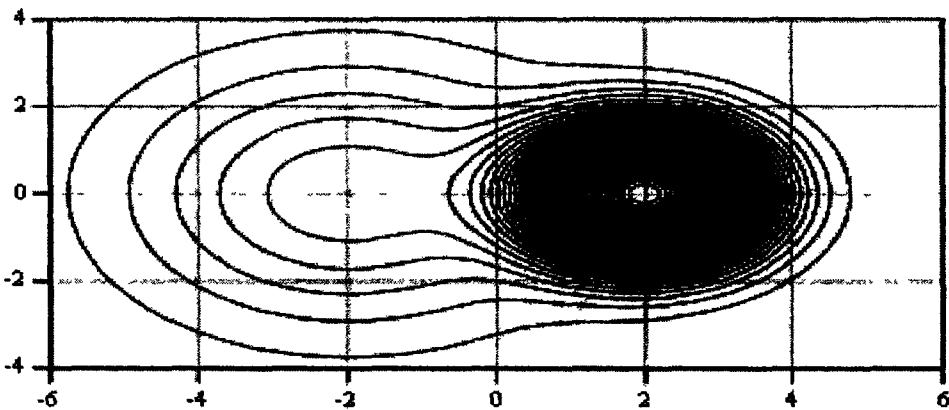


Рис. 1. Лінії течії

Рисунок 1 показує лінії течії двох взаємодіючих вихорів в площині (y, φ) , при $\alpha = 1/2, \kappa = 1/2, y_0 = 2$ ($y_1 = -1,9478, y_2 = 1,9828, y^* = -0,7882$).

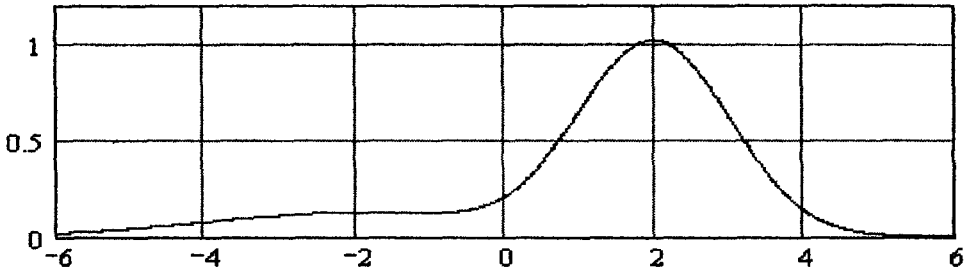


Рис. 2. Січна лінія

Рисунок 2 дає січну лінію поверхні функції течії, при $\alpha = 1/2$, $\kappa = 1/2$, $y_0 = 2$ ($y_1 = -1,9478$, $y_2 = 1,9828$, $y^* = -0,7882$).

Щоб працювати в декартовій системі координат $(x_1; y_1)$, було зроблено звичайний перехід від полярної (y, φ) : $\{x_1 = y \cos \varphi, y_1 = y \sin \varphi$, причому фіксована точка (y_0, φ_0) в декартовій системі координат буде мати наступні координати $(x_{01} = y_0 \cos \varphi_0, y_{01} = y_0 \sin \varphi_0)$ і, оскільки ми розташовуємо центри вихорів на одній лінії симетрично відносно початку координат, то для лівого вихору маємо $y_{01} = 0$, $\varphi_0 = \pi$, а для правого вихору маємо $y_{01} = 0$, $\varphi_0 = 0$. Отже, функцію течії (3.4) отримаємо у вигляді:

$$\Psi(x_1, y_1) = \alpha \kappa^2 A_0 \exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{2}\right) + A_0 \exp\left(-\frac{\bar{y}^2}{2}\right), \quad (3.6)$$

де $\tilde{y}^2 = (x_{01}^2 + 2x_{01}x_1 + x_1^2 + y_1^2) \kappa^2$, $\bar{y}^2 = x_{01}^2 - 2x_{01}x_1 + x_1^2 + y_1^2$.

Також для отримання осового перерізу поверхні течії (див. рис. 2) достатньо в (3.6) покласти $y_1 = 0$:

$$\Psi(x_1, 0) = \alpha \kappa^2 A_0 \exp\left(-\frac{\tilde{y}^2}{2}\right) + A_0 \exp\left(-\frac{\bar{y}^2}{2}\right), \quad (3.7)$$

де $\tilde{y}^2 = (x_{01}^2 + 2x_{01}x_1 + x_1^2) \kappa^2$, $\bar{y}^2 = x_{01}^2 - 2x_{01}x_1 + x_1^2$.

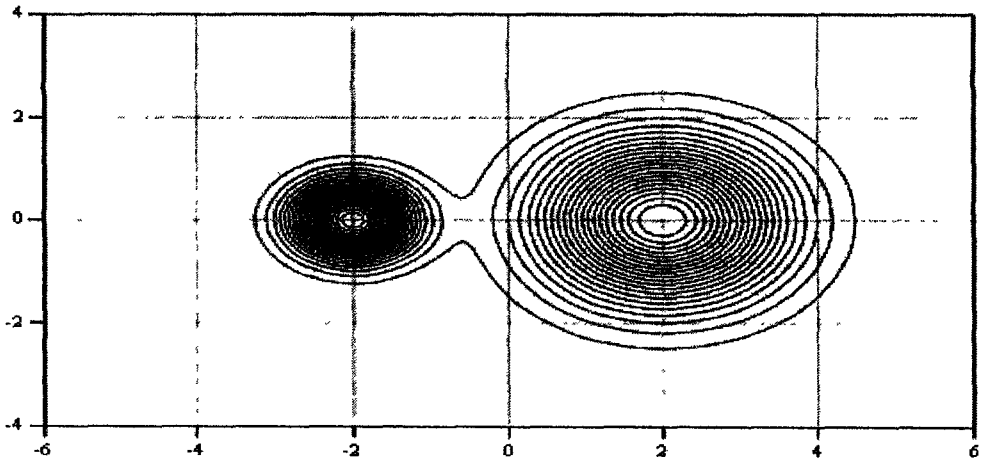


Рис. 3. Лінії течії

Рисунок 3 показує лінії течії двох взаємодіючих вихорів у площині (y, φ) , при $\alpha = 1/4, \kappa = 2, y_0 = 2$ ($y_1 = -1,9997, y_2 = 2,0, y^* = -0,5682$).

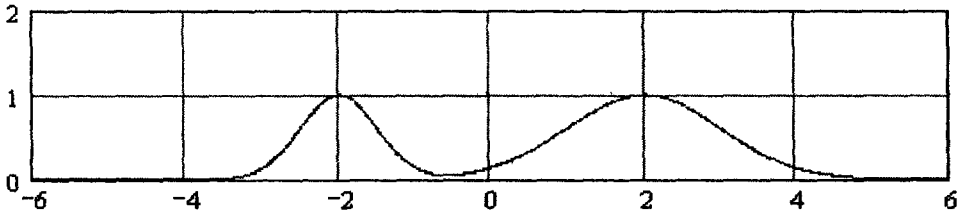


Рис. 4. Січна лінія

На рисунку 4 зображена січна лінія поверхні функції течії, при $\alpha = 1/4, \kappa = 2, y_0 = 2$ ($y_1 = -1,9478, y_2 = -1,9828, y^* = -0,7882$).

Згідно з рисунками 1 і 3 маємо три особливі точки, дві з яких є зміщеними центрами вихорів — точки типу центр і третя точка (вузлова) являє собою точку самоперетину сепаратриси, яка обходить навколо обох центрів. Цим точкам (див. рис. 2 і 4) відповідають два локальні максимуми і один локальний мінімум. Елементарні обчислення дозволяють скласти таблицю 1 критичних відстаней y_0^* , при яких відбувається злиття обох центрів з точкою самоперетину сепаратриси в точці y^* . Таблиця 2 містить ці ж критичні відстані y_0^* при заміні амплітудного параметра $\alpha \rightarrow 1/\alpha$ і параметра закручування $k \rightarrow 1/k$.

α	κ	y_0^*	y^*
1	2	0,877	0,707
1	3	0,670	0,570
1	5	0,456	0,407
3	1	1,422	1,010
5	1	1,539	1,170
7	1	1,609	1,260

Таблиця 1.

α	κ	y_0^*	y^*
1/7	1	1,609	-1,260
1/5	1	1,538	-1,170
1/3	1	1,422	-1,012
1	1/2	1,754	-1,414
1	1/3	2,010	-1,724
1	1/5	2,280	-2,034

Таблиця 2.

y_0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	1,6	1,4
y_1	-2,8	-2,5998	-2,3985	-2,1909	-1,9478			
y^*	-0,1842	-0,3567	-0,5535	-0,7882	-1,0993			
y_2	2,7965	2,5944	2,3915	2,1876	1,9828	1,7774	1,5718	1,3668

Таблиця 3. $\alpha = 1/2, \kappa = 2$

y_0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	1,6	1,4
y_1	-2,8	-2,6	-2,3992	-2,1955	-1,9765	-1,6608		
y^*	0,0606	-0,0944	-0,2705	-0,4775	-0,7369	-1,1393		
y_2	2,7929	2,5888	2,3829	2,175	1,9653	1,7542	1,5428	1,3327

Таблиця 4. $\alpha = 1$, $\kappa = 1/2$

Порівнюючи таблиці 4 і 3, а також 6 і 7, бачимо, що при однакових інтенсивностях на досить великих відстанях вихори не зазнають жодного зміщення центрів, але при поступовому наближенні центрів, більшого зміщення зазнає вихор, у якого більша закрутка. Також із таблиць 3, 4 та формули (3.4) бачимо, що зменшення закрутки, тобто зменшення k , майже так само гасить сам вихор і його вплив на інший вихор, як зменшення інтенсивності, тобто в деякому сенсі $\kappa^2 \approx \alpha$.

y_0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	1,6	1,4
y_1	-2,7995	-2,5955	-2,365					
y^*	-1,0097	-1,2881	-1,6238					
y_2	2,7952	2,5951	2,3952	2,1952	1,9954	1,7956	1,5958	1,3961

Таблиця 5. $\alpha = 1$, $\kappa = 1/5$

y_0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	1,6	1,4
y_1	-2,80	-2,60	-2,4	-2,1992	-1,9959	-1,7824	-1,5297	
y^*	-0,2249	-0,2481	-0,2772	-0,3153	-0,3676	-0,4456	-0,5812	
y_2	2,8	2,6	2,4	2,2	1,9996	1,7981	1,5935	1,3806

Таблиця 6. $\alpha = 1/3$, $\kappa = 1$

y_0	2,8	2,6	2,4	2,2	2,0	1,8	1,6	1,4
y_1	-2,8	-2,6	-2,3997	-2,1981	-1,9903	-1,7551		
y^*	-0,3987	-0,4399	-0,4921	-0,5607	-0,6571	-0,8097		
y_2	2,8	2,6	2,4	2,2	1,998	1,7992	1,5972	1,392

Таблиця 7. $\alpha = 1/7$, $\kappa = 1$

4. Висновки

Характеризуючи взаємний вплив такого роду вихорів, можна сказати, що дані вихори притягуються тим сильніше, чим більша закрутка обох вихорів, і чим ближче розташовані один до одного їх фактичні осьові центри. Так,

із таблиці 1 маємо, що із збільшенням закручування лише одного з вихорів у 3, 5, 7 разів критична відстань об'єднання зростає від 1,4 до 1,6. У разі дуже різних закруток більш закручений і сконцентрований вихор ніби проникає у широке поле дії другого вихору, наближається до його центра і потім об'єднується з ним у точці y^* (рис. 1, 3). Також слід зазначити, що в кожному конкретному випадку є своє критичне значення y_0 , при якому відбувається об'єднання точки перетину сепаратриси з центром одного із вихорів, після цього критичного y_0 той вихор, центр якого залишився, сам по собі поглинає іншого, за умови зменшення значення y_0 . Ця особливість взаємодії просторових вихорів принципово відрізняється від взаємодій плоских вихроджерел, центри яких при взаємодії не зміщуються.

Також зазначимо, що у силу симетрії в площині (y, φ) рух центрів вихорів відбувається по лінії їх початкового положення — саме по цій лінії ми зробили переріз (рис. 2, 4) функції течії (3.4), щоб виконати необхідні числові розрахунки. Центрам вихорів y_1, y_2 відповідають максимуми на цій лінії, а сідловій точці y^* перетину сепаратриси — точка мінімуму. Розрахунки були зроблені у середовищі MathCad.

Аналіз даних таблиць 1, 2 показує, що критичні відстані y_0^* та точка об'єднання вихорів y^* за параметрами α і $(1/\alpha)$ симетричні відносно нуля — це є наслідком лінійної залежності інтенсивності вихорів від цього параметра. Для параметра k такої симетрії не існує, бо параметр k входить у формули, що описують взаємодію, у квадратичній та експоненційній залежностях.

Бібліографічні посилання

1. *Васильев О. Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков / О. Ф. Васильев. М.-Л. : Госэнергоиздат, 1958. — 144 с.
2. *Милл-Томсон.* Теоретическая гидродинамика / Милл-Томсон. М. : Мир, 1964. — 655 с.
3. *Перехрест В. І.* Просторовий циліндричний вихровий шнур як точний розв'язок рівнянь Ейлера / В. І. Перехрест // Вісник ДНУ, Сер. Механіка, 2003. — Т. 1, № 7. — С. 46–53.
4. *Перехрест В. І.* Кінематика взаємодії двох паралельних вихрових шнурів одного напрямку обертання та інтенсивності / В. І. Перехрест, О. А. Мельник // Диференціальні рівняння та їх застосування: Зб. наук. пр. ДДУ. Дніпропетровськ, 2003. — С. 141–148.
5. *Перехрест В. І.* Про взаємодію просторових вихорів / В. І. Перехрест, О. А. Мельник (у друку).

Надійшла до редколегії 7.04.2010

УДК 517.95

ON OPTIMAL CONTROL PROBLEM IN COEFFICIENTS
FOR NONLINEAR ELLIPTIC VARIATIONAL
INEQUALITIES

O. P. Kogut

*Department of System Analysis and Control, National Mining University, Karl Marks
av., 19, 49027 Dnipropetrovsk, Ukraine E-mail: kogut_olga@bk.ru*

In this paper we study an optimal control problem for a nonlinear elliptic variational inequality with generalized solenoidal coefficients which we adopt as controls in $L^\infty(\Omega)$. We prove the existence of optimal solution of the stated problem.

Key words: monotone equations, elliptic variational inequalities, control in coefficients, Sobolev spaces.

1. Introduction

The aim of this paper is to prove an existence result for optimal control problem in coefficients of a nonlinear elliptic variational inequality using the direct method of calculus of variation and the compensated compactness lemma. As François Murat showed in 1970 (see [15]; [16]), the optimal control problems in coefficients have no solution in general even for linear elliptic equations. It turns out that this feature is typical for the majority of optimal control problems in coefficients. Besides, this fact is not just a mathematical problem, but it is also very restrictive in view of numerical applications.

Let Ω be a fixed non-empty open subset of \mathbb{R}^N with a smooth boundary. The optimal control problem we consider in this paper is to minimize the discrepancy between a given distribution $z_\partial \in L^p(\Omega)$ and the solution of a nonlinear elliptic variational inequality by choosing an appropriate matrix of coefficients

$$\mathcal{U} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}).$$

Namely, we consider the following minimization problem:

$$L(\mathcal{U}, y) = \int_{\Omega} |y(x) - z_\partial(x)|^p dx \rightarrow \inf \quad (1.1)$$

subject to

$$\mathcal{U} \in M_p^{\alpha, \beta}(\Omega), y \in K, \quad (1.2)$$

$$\langle -\operatorname{div}(\mathcal{U}(x)[(\nabla y)^{p-2}] \nabla y) + |y|^{p-2} y, v - y \rangle_V \geq \langle f, v - y \rangle_V \quad \forall v \in K, \quad (1.3)$$

where K is a closed convex subset of $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $f \in L^q(\Omega)$ is a fixed function, and the matrix $[\eta^{p-2}]$ is defined as follows

$$[\eta^{p-2}] = \text{diag}\{|\eta_1|^{p-2}, |\eta_2|^{p-2}, \dots, |\eta_N|^{p-2}\} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^N. \tag{1.4}$$

We seek a matrix of coefficients $\mathcal{U} \in M_p^{\alpha,\beta}(\Omega)$ such that the corresponding weak solution $y_{\mathcal{U},f}$ of (1.1)–(1.3) would be as close to the desired state z_∂ as possible.

Note that since the range of optimal control problems in coefficients is very wide, including as well the optimal shape design problems, optimization of certain evolution systems, some problems originating in mechanics and others, this topic has been widely studied by many authors. We mainly could mention Allaire [2], Buttazzo & Dal Maso [3], [4], Calvo-Jurado & Casado-Diaz [5], [6], [7], Lions [12], Linvinov [13], Lurie [14], Murat [16], Murat & Tartar [17], Raytum [18], Serovaïskii [19], Tiba [20], Mel’nik & Zgurovsky [21]. However, to the best knowledge of author, the existence of the optimal solutions in coefficients to variational inequalities has not been considered in literature.

As was mentioned above, the principal feature of such problems is the fact that there does not exist an optimal solution in general (see, e.g., [3], [5], [16], [18]). So here we have a typical situation for the general optimal control theory. Namely, the original control object is described by well-posed boundary value problem, but the associated optimal control problem is ill-posed and requires relaxation.

Taking this fact into account, we restrict the problem (1.1)–(1.3) by introducing the so-called solenoidal controls $\mathcal{U} \in U_{sol}$ (for comparison, see [9], [10]). Notice that this class of admissible controls does not belong to the Sobolev space $W^{1,\infty}(\Omega)$, but still is a uniformly bounded subset of $L^\infty(\Omega)$. We give the precise definition of such controls in Section 3 and prove that in this case the original optimal control problem admits at least one solution. Note that we do not involve the homogenization method and the relaxation procedure in this process.

2. Notation and Preliminaries

In this section we introduce some notation and preliminaries that will be useful later on.

For two real numbers $1 < p < +\infty$, $1 < q < +\infty$ such that $1/p + 1/q = 1$, the space $W_0^{1,p}(\Omega)$ is the closure of $C_0^\infty(\Omega)$ in the classical Sobolev space $W^{1,p}(\Omega)$, while $W^{-1,q}(\Omega)$ is the dual space of $W_0^{1,p}(\Omega)$.

For any vector field $\vec{v} \in \mathbf{L}^q(\Omega) = [L^q(\Omega)]^N$, the divergence is an element of the space $W^{-1,q}(\Omega)$ defined by the formula

$$\langle \text{div } \vec{v}, \varphi \rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} = - \int_{\Omega} (\vec{v}, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{2.1}$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ denotes the duality pairing between $W^{-1,q}(\Omega)$ and $W_0^{1,p}(\Omega)$, and $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^N}$ denotes the scalar product of two vectors in \mathbb{R}^N .

A vector field \vec{v} is said to be solenoidal, if $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. For any vector field $\vec{v} \in L^q(\Omega)$ the relations

$$(\operatorname{curl} \vec{v}, \varphi)_{W_0^{1,p}(\Omega)}^{i,j} = - \int_{\Omega} \left(v_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - v_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

define a skew-symmetric matrix $\operatorname{curl} \vec{v}$, with elements in $W^{-1,q}(\Omega)$. A vector field \vec{v} is said to be vortex-free, if $\operatorname{curl} \vec{v} = 0$. We say that a vector field $\vec{v} \in L^p(\Omega)$ is potential, if \vec{v} can be represented in the form $\vec{v} = \nabla u$, where $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Obviously, any potential vector is vortex-free.

Monotone operators. Let α and β be constants such that $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$. We define the class $M_p^{\alpha,\beta}(\Omega)$ as a set of all symmetric matrices $\mathcal{U}(x) = \{a_{ij}(x)\}_{1 \leq i,j \leq N}$ in $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ such that the following conditions of growth, monotonicity, and strong coercivity are fulfilled:

$$|a_{ij}(x)| \leq \beta \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \quad (2.2)$$

$$(\mathcal{U}(x)([\zeta^{p-2}]\zeta - [\eta^{p-2}]\eta), \zeta - \eta)_{\mathbb{R}^N} \geq 0 \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad \forall \zeta, \eta \in \mathbb{R}^N, \quad (2.3)$$

$$(\mathcal{U}(x)[\zeta^{p-2}]\zeta, \zeta)_{\mathbb{R}^N} = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) |\zeta_j|^{p-2} \zeta_j \zeta_i \geq \alpha |\zeta|_p^p \quad \text{a.e. in } \Omega, \quad (2.4)$$

where $|\eta|_p = \left(\sum_{k=1}^N |\eta_k|^p \right)^{1/p}$ is a Hölder norm of order p in \mathbb{R}^N and the matrix $[\zeta^{p-2}]$ is defined in (1.4).

Remark 2.1. It is easy to see that $M_p^{\alpha,\beta}(\Omega)$ is a nonempty subset of the space $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ and its typical representatives are diagonal matrices of the form

$$\mathcal{U}(x) = \operatorname{diag}\{\delta_1(x), \delta_2(x), \dots, \delta_N(x)\},$$

where $\alpha \leq \delta_i(x) \leq \beta$ a.e. in $\Omega \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$. Indeed, in this case the conditions (2.2) and (2.4) obviously hold. To verify the monotonicity property (2.3), let us fix two arbitrary vectors ζ and η in \mathbb{R}^N . Then

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}(x)([\zeta^{p-2}]\zeta - [\eta^{p-2}]\eta), \zeta - \eta)_{\mathbb{R}^N} &= ([\zeta^{p-2}]\mathcal{U}(x)\zeta, \zeta)_{\mathbb{R}^N} \\ &\quad - ([\zeta^{p-2}]\mathcal{U}(x)\zeta, \eta)_{\mathbb{R}^N} - ([\eta^{p-2}]\mathcal{U}(x)\eta, \zeta)_{\mathbb{R}^N} + ([\eta^{p-2}]\mathcal{U}(x)\eta, \eta)_{\mathbb{R}^N} \\ &= \sum_{i=1}^N \delta_i(x) |\zeta_i|^{p-2} \zeta_i^2 - \sum_{i=1}^N \delta_i(x) |\zeta_i|^{p-2} \zeta_i \eta_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \delta_i(x) |\eta_i|^{p-2} \zeta_i \eta_i + \sum_{i=1}^N \delta_i(x) |\eta_i|^{p-2} \eta_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \delta_i(x) |\zeta_i|^{p-2} \zeta_i (\zeta_i - \eta_i) - \sum_{i=1}^N \delta_i(x) |\eta_i|^{p-2} \eta_i (\zeta_i - \eta_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \delta_i(x) (|\zeta_i|^{p-2} \zeta_i - |\eta_i|^{p-2} \eta_i) (\zeta_i - \eta_i). \quad (2.5) \end{aligned}$$

As a result, the inequality (2.3) is a direct consequence of the well-known estimates

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a - b) \geq 2^{2-p}|a - b|^p, \quad p \geq 2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (2.6)$$

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a - b) \geq (|a| + |b|)^{p-2}|a - b|^2, \quad 1 < p \leq 2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (2.7)$$

Lemma 2.1. *For every fixed control $\mathcal{U} \in M_p^{\alpha, \beta}(\Omega)$ an operator $A_{\mathcal{U}} : V \rightarrow V^*$ defined as*

$$\langle A_{\mathcal{U}}(y), v \rangle_V = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \left(a_{ij}(x) \left| \frac{\partial y}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} |y|^{p-2} y v dx,$$

is strictly monotone, coercive and semicontinuous (here by the semicontinuity property we mean that the scalar function $t \rightarrow \langle A_{\mathcal{U}}(y + tv), w \rangle_V$ is continuous for all $y, v, w \in V$).

Proof. To begin with, we prove the coercivity property of the operator $A_{\mathcal{U}}$, i.e. we prove that $\frac{\langle A_{\mathcal{U}}(y), y \rangle_V}{\|y\|_V} \rightarrow +\infty$, as $\|y\|_V \rightarrow \infty$. Let $\mathcal{U} \in M_p^{\alpha, \beta}(\Omega)$ be a fixed matrix. Then

$$\langle A_{\mathcal{U}}(y), y \rangle_V = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \left(a_{ij}(x) \left| \frac{\partial y}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) \frac{\partial y}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} |y|^p dx = I_1 + I_2.$$

Due to (2.4) we have $I_1 \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla y|_p^p dx$. Therefore,

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &\geq \min\{\alpha, 1\} \int_{\Omega} (|y|^p + |\nabla y|_p^p) dx \\ &= \min\{\alpha, 1\} \|y\|_V^p = \gamma(\|y\|_V) \|y\|_V, \end{aligned} \quad (2.8)$$

where $\gamma(s) = \min\{\alpha, 1\} s^{p-1} \rightarrow \infty$ as $s \rightarrow \infty$. Hence, the operator $A_{\mathcal{U}}$ is coercive.

In order to prove the monotonicity of $A_{\mathcal{U}}$, we make use of the estimate (2.3) and the strict monotonicity of the term $f(y) = |y|^{p-2}y$ with respect to estimations (2.6) and (2.7). As a result, we have

$$\begin{aligned} \langle A_{\mathcal{U}}(y) - A_{\mathcal{U}}(v), y - v \rangle_V &= \int_{\Omega} (|y|^{p-2}y - |v|^{p-2}v) (y - v) dx \\ &+ \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \left(\left| \frac{\partial y}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial y}{\partial x_j} - \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx \\ &= \int_{\Omega} (\mathcal{U}(x) (|(\nabla y)^{p-2}| \nabla y - |(\nabla v)^{p-2}| \nabla v), \nabla y - \nabla v)_{\mathbb{R}^N} dx \\ &+ \int_{\Omega} (|y|^{p-2}y - |v|^{p-2}v) (y - v) dx \geq \int_{\Omega} (|y|^{p-2}y - |v|^{p-2}v) (y - v) dx > 0, \\ &\forall y \neq v \text{ a.e. in } \Omega. \end{aligned} \quad (2.9)$$

The semicontinuity property of $A_{\mathcal{U}}$ is a direct consequence of the continuity of the following functions

$$z_1(t) := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N (\mathcal{U}[\nabla(y+tv)^{p-2}] \nabla(y+tv), \nabla w)_{\mathbb{R}^N} dx = \int_{\Omega} \Phi_1(x, t) dx,$$

$$z_2(t) := \int_{\Omega} |y+tv|^{p-2} (y+tv) w dx = \int_{\Omega} \Phi_2(x, t) dx,$$

Since $|\Phi_1(x, t)| \leq \Phi_1^0(x)$ and $|\Phi_2(x, t)| \leq \Phi_2^0(x)$, by Hölder inequality it follows that $\Phi_1^0(x) \in L^1(\Omega)$ and $\Phi_2^0(x) \in L^1(\Omega)$.

As $t \rightarrow 0$, we have

$$\Phi_1(x, t) \rightarrow \Phi_1(x, 0) = \sum_{i,j=1}^N (\mathcal{U}[\nabla(y)^{p-2}] \nabla y, \nabla w) \text{ for a.e. } x,$$

$$\Phi_2(x, t) \rightarrow \Phi_2(x, 0) = |y|^{p-2} y w \text{ for a.e. } x,$$

$$\int_{\Omega} \Phi_1(x, 0) dx + \int_{\Omega} \Phi_2(x, 0) dx = \langle A_{\mathcal{U}}(y), w \rangle_V = z_1(0) + z_2(0).$$

Hence it is sufficient to cite Lebesgue's dominated theorem to obtain the required relations $\lim_{t \rightarrow 0} z_1(t) = z_1(0)$ and $\lim_{t \rightarrow 0} z_2(t) = z_2(0)$. The proof is complete. \square

Elliptic variable inequalities. Following Lions [11], let us cite some well known results concerning solvability and uniqueness and smoothness properties for non-linear variational inequalities which we use in the sequel.

Theorem 2.1. [11, Theorem 8.2] *Let V be a Banach space and $K \subset V$ be a closed convex subset. Suppose also that $A : K \rightarrow V^*$ is a nonlinear operator and $f \in V^*$ is a given element of the dual space. The following variational problem: to find an element $y \in K$ such that*

$$\langle A(y), v - y \rangle_V \geq \langle f, v - y \rangle_V, \quad \forall v \in K, \quad (2.10)$$

admits at least one solution provided the following conditions:

1. *operator A is pseudomonotone, i.e. it is bounded and if $y_k \rightarrow y$ weakly in V , $y_k, y \in K$ and $\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle A(y_k), y_k - y \rangle_V \leq 0$, then*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle A(y_k), y_k - v \rangle_V \geq \langle A(y), y - v \rangle_V, \quad \forall v \in V.$$

2. *operator A is coercive, i.e. there exists an element $v_0 \in K$ such that*

$$\frac{\langle A(y), y - v_0 \rangle_V}{\|y\|_V} \rightarrow +\infty \text{ as } \|y\|_V \rightarrow \infty, \quad y \in K$$

Theorem 2.2. [11, Theorem 8.3] *If the operator $A : K \rightarrow V^*$ in Theorem 2.1 is strictly monotone on K , then variational inequality (2.10) admits a unique solution.*

The pseudomonotonicity property plays the key role in solvability of the problem (2.10). The following result concerns with the sufficient conditions for fulfillment of this property.

Proposition 2.1. [11, Proposition 2.5] For a nonlinear operator $A : V \rightarrow V^*$ the following implication takes place: A is a bounded monotone semicontinuous operator $\Rightarrow A$ is a pseudomonotone operator.

Referring to Lions [11], we make use the following assumptions.

Hypothesis 1. There exists a reflexive Banach space X such that $X \subset V^*$, the imbedding $X \hookrightarrow V^*$ is continuous, and X is dense in V^* .

Hypothesis 2. There can be found a duality mapping $J : X \rightarrow X^*$ such that $\forall y \in K, \forall \varepsilon > 0$ there exists an $y_\varepsilon \in K$ such that $A(y_\varepsilon) \in X$ and $y_\varepsilon + \varepsilon J(A(y_\varepsilon)) = y$.

Theorem 2.3. [11, Theorem 8.7] Assume that the Hypotheses 1 and 2 hold true¹. Let operator $A : V \rightarrow V^*$ be monotone, semicontinuous, bounded and satisfy assumption 2 of Theorem 2.1. Then the inclusion $f \in X$ implies that any solution y of variational inequality (2.10) is such that $A(y) \in X$.

3. Setting of the optimal control problem

The optimal control problem we consider in this paper is to minimize the discrepancy between a given distribution $z_\partial \in L^p(\Omega)$ and the solution $y = y_{\mathcal{U},f}$ of the variational inequality (1.2)–(1.3) by choosing an appropriate matrix of coefficients $\mathcal{U} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$. Namely, we consider the minimization problem in the form (1.1)–(1.3).

Let ξ_1, ξ_2 be given functions of $L^\infty(\Omega)$ such that $0 < \xi_1(x) \leq \xi_2(x)$ a. e. in Ω . Let $\{Q_1, \dots, Q_N\}$ be a collection of nonempty compact subsets of $W^{-1,q}(\Omega)$.

To define the class of admissible controls, we introduce two sets

$$U_b = \left\{ \mathcal{U} = [a_{ij}] \in M_p^{\alpha,\beta}(\Omega) \mid \xi_1(x) \leq a_{ij}(x) \leq \xi_2(x) \right. \\ \left. \text{a.e. } x \in \Omega, \forall i, j = 1, \dots, N \right\}, \quad (3.1)$$

$$U_{sol} = \left\{ \mathcal{U} = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_N] \in M_p^{\alpha,\beta}(\Omega) \mid \operatorname{div} \bar{a}_i \in Q_i, \forall i = 1, \dots, N \right\}, \quad (3.2)$$

assuming that the intersection $U_b \cap U_{sol} \subset L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ is a nonempty set.

Definition 3.1. We say that a matrix $\mathcal{U} = [a_{ij}]$ is an admissible control to the variational inequality (1.2)–(1.3) if $\mathcal{U} \in U_{ad} := U_b \cap U_{sol}$.

¹(see also [11, Theorem 8.8].)

Remark 3.1. We suppose that the set of admissible controls U_{ad} is sufficiently rich, otherwise, the optimal control problem

$$L(\mathcal{U}, y) = \int_{\Omega} |y(x) - z_{\partial}(x)|^p dx \rightarrow \inf, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{U} \in U_{ad}, y \in K, \quad (3.4)$$

$$\langle -\operatorname{div}(\mathcal{U}(x)[(\nabla y)^{p-2}]\nabla y) + |y|^{p-2}y, v - y \rangle_V \geq \langle f, v - y \rangle_V \quad \forall v \in K, \quad (3.5)$$

becomes trivial. Notice also that this class of admissible controls does not belong to $W^{1,\infty}(\Omega)$ or to the Sobolev space $W^{1,q}(\Omega)$, but still is a uniformly bounded subset of $L^\infty(\Omega)$.

The existence of admissible controls is important both from a theoretical and an applicational point of view. Usually controls of this type arise in the optimization of materials (represented by the matrix \mathcal{U}). So this question is largely an open one, except for some special cases, and an affirmative answer is usually just put as a hypothesis (see [2], [6], [14]).

Taking this fact into account we can indicate the following set of admissible pairs to the optimal control problem (3.3)–(3.5):

$$\Xi = \{(\mathcal{U}, y) \in U_{ad} \times V \mid y \in K, (\mathcal{U}, y) \text{ are related by (1.3)}\}. \quad (3.6)$$

As an obvious consequence of Theorems 2.1, 2.2, Proposition 2.1 and Lemma 2.1, we have the following conclusion.

Proposition 3.1. For every control $\mathcal{U} \in M_p^{\alpha,\beta}(\Omega)$ and every $f \in L^q(\Omega)$ there exists a unique solution to the variational inequality (3.4)–(3.5).

Proof. Since the first assumption of Theorem 2.1 is obviously true, it remains to verify the condition 2 of that Theorem. Let us fix an arbitrary element $v_0 \in K$ and a matrix $\mathcal{U} \in M_p^{\alpha,\beta}(\Omega)$. For all $y \in K$ we have:

$$\begin{aligned} \langle A(\mathcal{U}, y), y - v_0 \rangle_V &= \langle A(\mathcal{U}, y), y \rangle_V - \langle A(\mathcal{U}, y), v_0 \rangle_V \\ &\geq \gamma(\|y\|_V) \|y\|_V - \langle A(\mathcal{U}, y), v_0 \rangle_V \geq \gamma(\|y\|_V) \|y\|_V - |\langle A(\mathcal{U}, y), v_0 \rangle_V|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Using the estimate (2.8), we obtain

$$\begin{aligned} |\langle A(\mathcal{U}, y), v_0 \rangle_V| &= \left| \int_{\Omega} (\mathcal{U}[(\nabla y)^{p-2}]\nabla y, \nabla v_0)_{\mathbb{R}^N} dx + \int_{\Omega} |y|^{p-2}y v_0 dx \right| \\ &\quad \{ \text{in view of (2.2)} \} \leq \beta \left| \int_{\Omega} ([(\nabla y)^{p-2}]\nabla y, \nabla v_0)_{\mathbb{R}^N} dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} |y|^{p-2}y v_0 dx \right| \leq \beta \|\nabla v_0\|_{L^p(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |[(\nabla y)^{p-2}]\nabla y|_q^q dx \right)^{1/q} \\ &\quad + \|v_0\|_{L^p(\Omega)} \left(\int_{\Omega} (|y|^{p-1})^q dx \right)^{1/q} = \{ \text{since } q = p/(p-1) \} \\ &\quad = \beta \|v_0\|_V \left(\int_{\Omega} |\nabla y|_p^p dx \right)^{1/q} + \|v_0\|_{L^p(\Omega)} \|y\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \\ &\quad \leq \max\{\beta, 1\} \|v_0\|_V \|y\|_V^{p-1}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Combining (3.7) and (3.8), we come to the required conclusion

$$\begin{aligned} \frac{\langle A(\mathcal{U}, y), y - v_0 \rangle_V}{\|y\|_V} &\geq \gamma(\|y\|_V) - \max\{\beta, 1\} \|v_0\|_V \|y\|_V^{p-2} \\ &= \|y\|_V^{p-1} \left(\min\{\alpha, 1\} - \frac{\max\{\beta, 1\} \|v_0\|_V}{\|y\|_V} \right) \rightarrow +\infty, \text{ as } \|y\|_V \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.9)$$

□

As was mentioned in proposition 3.1, the set Ξ is nonempty. So, we adopt the following concept:

Definition 3.2. We say that a pair $(\mathcal{U}^0, y^0) \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times V$ is an optimal solution to the problem (3.4)–(3.5) if $(\mathcal{U}^0, y^0) \in \Xi$ and $L(\mathcal{U}^0, y^0) = \inf_{(\mathcal{U}, y) \in \Xi} L(\mathcal{U}, y)$.

The main question to be answered on the problem (3.3)–(3.5) is about solvability: does an optimal pair (\mathcal{U}^0, y^0) in $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfying (3.3)–(3.5) exist? To begin with, we need the following result (see [9]):

Proposition 3.2. The set U_{ad} is sequentially compact with respect to the weak-* topology of $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$.

Proof. Let $\{\mathcal{U}_k = [\tilde{a}_{1k}, \dots, \tilde{a}_{Nk}]\}_{k \in \mathbb{N}} \subset U_{ad}$ be an arbitrary sequence of admissible controls. Since $U_{ad} \subset U_b$ and U_b is the sequentially weakly-* compact subset of $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$, we may suppose that there exist a matrix $\mathcal{U}_0 = [\tilde{a}_{10}, \dots, \tilde{a}_{N0}] \in U_b$ and elements $f_i \in Q_i$ $i = 1, \dots, N$ such that

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\tilde{a}_{ik}, \varphi)_{\mathbb{R}^N} dx &\rightarrow \int_{\Omega} (\tilde{a}_{i0}, \varphi)_{\mathbb{R}^N} dx, \text{ as } k \rightarrow \infty, \\ \forall \varphi \in \mathbf{L}^1(\Omega) &= [L^1(\Omega)]^N, \forall i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\text{and } \operatorname{div} \tilde{a}_{ik} \rightarrow f_i \text{ strongly in } W^{-1,q}(\Omega), \text{ as } k \rightarrow \infty \forall i = 1, \dots, N. \quad (3.11)$$

It remains to prove that $\operatorname{div} \tilde{a}_{i0} = f_i$ for all $i = 1, \dots, N$. To do this, we choose φ in (3.10) as a potential vector, that is, $\varphi = \nabla v$, where $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Then, the relation (3.11) implies $\int_{\Omega} (\tilde{a}_{ik}, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} dx = -\langle \operatorname{div} \tilde{a}_{ik}, v \rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} \rightarrow -\langle f_i, v \rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)}$, as $k \rightarrow \infty$, $\forall i = 1, \dots, N$. Using this and relation (3.10), we finally get

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\tilde{a}_{ik}, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} dx &= \int_{\Omega} (\tilde{a}_{i0}, \nabla v)_{\mathbb{R}^N} dx \\ &= -\langle \operatorname{div} \tilde{a}_{i0}, v \rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} = -\langle f_i, v \rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

As a result, we have $\mathcal{U}_0 = [\tilde{a}_{10}, \dots, \tilde{a}_{N0}] \in U_{sol}$. This concludes the proof. □

4. Existence of optimal solutions

In order to discuss the existence of solutions for the problem (3.3)–(3.5), we make use of the following result (for comparison see [22]).

Lemma 4.1. [9] Let $\{\vec{f}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^q(\Omega)$, $\{\vec{g}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{L}^p(\Omega)$ be the bounded sequences of vector-functions such that $\vec{f}_k \rightarrow \vec{f}_0$ in $\mathbf{L}^q(\Omega)$ and $\vec{g}_k \rightarrow \vec{g}_0$ in $\mathbf{L}^p(\Omega)$. If $\left\{ \operatorname{div} \vec{f}_k \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ is compact with respect to the strong topology of $W^{-1,q}(\Omega)$, and $\operatorname{curl} \vec{g}_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, then

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi \left(\vec{f}_k, \vec{g}_k \right)_{\mathbb{R}^N} dx = \int_{\Omega} \phi \left(\vec{f}_0, \vec{g}_0 \right)_{\mathbb{R}^N} dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (4.1)$$

Now we are in a position to study the topological properties of the set $\Xi \subset L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ of all admissible pairs to the optimal control problem (3.3)–(3.5). Let τ be the topology on the set $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ which we define as the product of the weak-* topology of $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ and the weak topology of $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Theorem 4.1. Assume that for the set K in problem (3.4)–(3.4) the hypothesis 2 holds true provided $X = L^q(\Omega)$. Then for every $f \in L^q(\Omega)$ the set Ξ is sequentially τ -closed.

Proof. Let $\{(\mathcal{U}_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Xi$ be any τ -convergent sequence of admissible pairs to the problem (3.3)–(3.5). Let (\mathcal{U}_0, y_0) be its τ -limit. Our aim is to prove that $(\mathcal{U}_0, y_0) \in \Xi$. Let us set

$$\begin{aligned} A(\mathcal{U}, y) &= -\operatorname{div} \left(\mathcal{U}(x) [(\nabla y)^{p-2}] \nabla y \right) + |y|^{p-2} y = A_1(\mathcal{U}, y) + A_2(\mathcal{U}, y), \\ A_1(\mathcal{U}, y) &= -\operatorname{div} \left(\mathcal{U}(x) [(\nabla y)^{p-2}] \nabla y \right) = -\operatorname{div} a(\mathcal{U}(x), \nabla y). \end{aligned}$$

By Proposition 3.2 and the initial assumptions, we have $\mathcal{U}_0 \in U_{ad}$. Therefore,

$$\mathcal{U}_k \rightarrow \mathcal{U}_0 = [\bar{a}_{10}, \dots, \bar{a}_{N0}] \text{ weakly-} * \text{ in } L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N \times N}), \quad (4.2)$$

$$\operatorname{div} \bar{a}_{i k} \rightarrow \operatorname{div} \bar{a}_{i 0} \text{ strongly in } W^{-1,q}(\Omega), \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (4.3)$$

$$y_k \rightarrow y_0 \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega). \quad (4.4)$$

Hence

$$\begin{aligned} \left\{ [(\nabla y_k)^{p-2}] \nabla y_k \right\}_{k \in \mathbb{N}} &\text{ is bounded in } \mathbf{L}^q(\Omega), \quad q = p/(p-1), \\ \left\{ |y_k|^{p-2} y_k \right\}_{k \in \mathbb{N}} &\text{ is bounded in } L^q(\Omega), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$y_k \rightarrow y_0 \text{ strongly in } L^p(\Omega), \quad y_k(x) \rightarrow y_0(x) \text{ a.e. in } \Omega. \quad (4.6)$$

Then, by (4.6) and monotonicity of the function $g(\zeta) = |\zeta|^{p-2} \zeta$, we have $|y_k|^{p-2} y_k \rightarrow |y_0|^{p-2} y_0$ almost everywhere in Ω . Using this and (4.5), we conclude (see [11]): $|y_k|^{p-2} y_k \rightarrow |y_0|^{p-2} y_0$ in $L^q(\Omega)$. Since $f \in L^q(\Omega)$, in view of theorem 2.3 we have $-\operatorname{div} \left(\mathcal{U}_k [(\nabla y_k)^{p-2}] \nabla y_k \right) + |y_k|^{p-2} y_k \in L^q(\Omega)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ and, hence, $-\operatorname{div} a(\mathcal{U}_k, \nabla y_k) \in L^q(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}$. The sequence $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded in the space $W_0^{1,p}(\Omega)$ due to the coercivity of the operator $A(\mathcal{U}, y)$ (see (3.9)). Therefore, the sequence $\{\mathcal{U}_k [(\nabla y_k)^{p-2}] \nabla y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded in $\mathbf{L}^q(\Omega)$. So, passing to a subsequence, we may assume that there exists a vector-function $\vec{\xi} \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ such that

$$a(\mathcal{U}_k, \nabla y_k) = \mathcal{U}_k [(\nabla y_k)^{p-2}] \nabla y_k =: \vec{\xi}_k \rightarrow \vec{\xi} \text{ in } \mathbf{L}^q(\Omega). \quad (4.7)$$

In view of this and the fact that

$$\begin{aligned} \langle -\operatorname{div} \vec{\xi}_k, \varphi \rangle_V &= \int_{\Omega} (\xi_k, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} dx \\ &\rightarrow \int_{\Omega} (\xi, \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} dx = \langle -\operatorname{div} \vec{\xi}, \varphi \rangle_V, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \end{aligned}$$

we have: $\operatorname{div} \vec{\xi}_k \rightarrow \operatorname{div} \vec{\xi}$ weakly in $W^{-1,q}(\Omega)$. The fact that $\operatorname{div} \vec{\xi}_k \in L^q(\Omega) \forall k \in \mathbb{N}$ implies (see [1]): $\|\operatorname{div} \vec{\xi}_k\|_{L^q(\Omega)} = \|\operatorname{div} \vec{\xi}_k\|_{W^{-1,q}(\Omega)}, \forall k \in \mathbb{N}$. Hence, the sequence $\{\operatorname{div} \vec{\xi}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded in $L^q(\Omega)$. Therefore, due to the compactness of the embedding $L^q(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega)$, we may suppose that the strong convergence in $W^{-1,q}(\Omega)$ of this sequence takes place. In what follows, we show that $\vec{\xi} = \mathcal{U}_0[(\nabla y_0)^{p-2}] \nabla y_0$. To do so, we consider the scalar function

$$v(x) = (z, x)_{\mathbb{R}^N}, \tag{4.8}$$

where z is a fixed element of \mathbb{R}^N . Since the operator A_1 is monotone, it follows that for every $z \in \mathbb{R}^N$ and every positive function $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, we have $\int_{\Omega} \varphi(x) (a(\mathcal{U}_k, \nabla y_k) - a(\mathcal{U}_k, \nabla v), \nabla y_k - \nabla v)_{\mathbb{R}^N} dx \geq 0$, or, taking into account (4.8), this inequality can be rewritten as

$$\int_{\Omega} \varphi(x) (a(\mathcal{U}_k, \nabla y_k) - a(\mathcal{U}_k, z), \nabla y_k - z)_{\mathbb{R}^N} dx \geq 0. \tag{4.9}$$

Our next intention is to pass to the limit in (4.9) as $k \rightarrow \infty$ using Lemma 4.1. Since

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div} a(\mathcal{U}_k, \nabla y_k) &\rightarrow -\operatorname{div} \vec{\xi} \text{ strongly in } W^{-1,q}(\Omega), \\ \operatorname{curl}(\nabla y_k - z) &= \operatorname{curl} \nabla y_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \right\} \tag{4.10}$$

it remains to show that the sequence $\{\operatorname{div} a(\mathcal{U}_k, z)\}_{k \in \mathbb{N}}$ is compact with respect to the strong topology of $W^{-1,q}(\Omega)$.

Indeed, for every $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, we have

$$\begin{aligned} \langle -\operatorname{div} a(\mathcal{U}_k, z), \varphi \rangle_V &= \int_{\Omega} (a(\mathcal{U}_k, z), \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} dx \\ &= \int_{\Omega} (\mathcal{U}_k [z^{p-2}] z, \nabla \varphi) dx = \int_{\Omega} \left(\left[\begin{array}{c} (\vec{a}_{1k}(x), [z^{p-2}] z)_{\mathbb{R}^N} \\ \dots \\ (\vec{a}_{Nk}(x), [z^{p-2}] z)_{\mathbb{R}^N} \end{array} \right], \nabla \varphi \right)_{\mathbb{R}^N} dx = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (\vec{a}_{ik}(x), [z^{p-2}] z)_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^k(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} |z_j|^{p-2} z_j dx = \\ &= \sum_{j=1}^N |z_j|^{p-2} z_j \int_{\Omega} (\vec{a}_{jk}(x), \nabla \varphi)_{\mathbb{R}^N} dx = \sum_{j=1}^N |z_j|^{p-2} z_j \langle -\operatorname{div} \vec{a}_{jk}, \varphi \rangle_V = J_k. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Then using (4.3), we get

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_k = \sum_{j=1}^n |z_j|^{p-2} z_j \lim_{k \rightarrow \infty} \langle -\operatorname{div} \tilde{a}_{j k}, \varphi \rangle_V = \sum_{j=1}^n |z_j|^{p-2} z_j \langle -\operatorname{div} \tilde{a}_{j 0}, \varphi \rangle_V. \quad (4.12)$$

Making the converse transformations with (4.12) as we did it in (4.11), we come to the relation

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle -\operatorname{div} a(\mathcal{U}_k, z), \varphi \rangle_V = \langle -\operatorname{div} a(\mathcal{U}_0, z), \varphi \rangle_V. \quad (4.13)$$

Since for every $i = 1, \dots, N$ the sequences $\{\operatorname{div} \tilde{a}_{i k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ are strongly convergent in $W^{-1, q}(\Omega)$, from (4.11)–(4.13) it follows that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle -\operatorname{div} a(\mathcal{U}_k, z), \varphi_k \rangle_V = \langle -\operatorname{div} a(\mathcal{U}_0, z), \varphi \rangle_V \quad (4.14)$$

for each sequence $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ such that $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $W_0^{1, p}(\Omega)$. Thus, summing up the above results, we obtain

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} a(\mathcal{U}_k, z) &\rightarrow \operatorname{div} a(\mathcal{U}_0, z) \quad \text{strongly in } W^{-1, q}(\Omega), \\ a(\mathcal{U}_k, z) &= \mathcal{U}_k [z^{p-2}] z \rightarrow \mathcal{U}_0 [z^{p-2}] z \quad \text{weakly-}^* \text{ in } L^\infty(\Omega). \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

As a result, combining properties (4.10) and (4.15), it has been shown that all suppositions of Lemma 4.1 are fulfilled. So, taking into account (4.4), (4.10), (4.15), and passing to the limit in inequality (4.9) as $k \rightarrow \infty$, we get

$$\int_{\Omega} \varphi(x) (\xi - a(\mathcal{U}_0, z), \nabla y_0 - z)_{\mathbb{R}^N} dx \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^N$$

for all positive $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. After localization, we have $(\xi - a(\mathcal{U}_0, z), \nabla y_0 - z)_{\mathbb{R}^N} \geq 0$, for a.a. $x \in \Omega$, $\forall z \in \mathbb{R}^N$.

Remark 4.1. The operator $a(\mathcal{U}, \cdot) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ is monotone and continuous. Indeed, for any sequence $\{u_k = [u_k^1, \dots, u_k^N]\} \subset \mathbb{R}^N$ such that $u_k \rightarrow u_0 = [u_0^1, \dots, u_0^N]$ in \mathbb{R}^N , it follows that $u_k^i \rightarrow u_0^i$ in \mathbb{R} , $\forall i = 1, \dots, N$. Then, it is easy to see that $|u_k^i|^{p-2} u_k^i \rightarrow |u_0^i|^{p-2} u_0^i$ in \mathbb{R} $\forall i = 1, \dots, N$ and, therefore, $[(u_k)^{p-2}] u_k \rightarrow [(u_0)^{p-2}] u_0$ in \mathbb{R}^N . Then the monotonicity property immediately follows from the estimate (2.3).

Further, since the operator $a(\mathcal{U}, \cdot) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ is monotone, and continuous, then in view of [8, Lemma III.1.3] it follows that

$$\xi = a(\mathcal{U}_0, \nabla y_0) = \mathcal{U}_0 [(\nabla y_0)^{p-2}] \nabla y_0, \quad \text{for a.a. } x \in \Omega. \quad (4.16)$$

Now, we can pass to the limit in the variational inequality

$$\langle A(\mathcal{U}_k, y_k), y_k - v \rangle_V \leq \langle f, y_k - v \rangle_V, \quad \forall v \in K, \quad (4.17)$$

using again for its left hand-side the Compensated Compactness Lemma 4.1.

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \langle A(\mathcal{U}_k, y_k), y_k - v \rangle_V \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \operatorname{div} a(\mathcal{U}_k, \nabla y_k), y_k - v \rangle_V + \lim_{k \rightarrow \infty} \langle |y_k|^{p-2} y_k, y_k - v \rangle_V \\ &= \langle \operatorname{div} a(\mathcal{U}_0, \nabla y_0), y_0 - v \rangle_V + \lim_{k \rightarrow \infty} \langle |y_k|^{p-2} y_k, y_k - v \rangle_V. \end{aligned}$$

Since $|y_k|^{p-2} y_k \rightharpoonup |y_0|^{p-2} y_0$ in $L^q(\Omega)$, in view of compactness of the embedding $L^q(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega)$ we have: $|y_k|^{p-2} y_k \rightarrow |y_0|^{p-2} y_0$ strongly in $W^{-1,q}(\Omega)$. Therefore, $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle |y_k|^{p-2} y_k, y_k - v \rangle_V = \langle |y_0|^{p-2} y_0, y_0 - v \rangle_V$. Passing to the limit in (4.17), we obtain $\langle A(\mathcal{U}_0, y_0), y_0 - v \rangle_V \leq \langle f, y_0 - v \rangle_V, \forall v \in K$. Hence, the τ -limit pair (A_0, y_0) is admissible to the problem (3.3)–(3.5), and this concludes the proof. \square

Now we can turn to the existence of optimal pairs.

Theorem 4.2. *Under the control admissibility hypothesis $(U_{ad} = U_b \cap U_{sol} \neq \emptyset)$, the optimal control problem (3.3)–(3.5) admits at least one solution $(\mathcal{U}^{opt}, y^{opt}) \in \Xi \subset L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ for every $f \in L^q(\Omega)$.*

Proof. The control admissibility condition ensures the existence of a minimizing sequence $\{(\mathcal{U}_k, y_k) \in \Xi\}_{k \in \mathbb{N}}$, i.e. $\lim_{k \rightarrow \infty} L(\mathcal{U}_k, y_k) = \inf_{(\mathcal{U}, y) \in \Xi} L(\mathcal{U}, y) < +\infty$. Since the sequence of admissible controls $\{\mathcal{U}_k \in U_{ad}\}_{k \in \mathbb{N}}$ is bounded in the space $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})$ and using the arguments of Theorem 4.1 one can easily show that the minimizing sequence is bounded in $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N}) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ and hence, within a subsequence, there exists a pair (\mathcal{U}^*, y^*) such that $\mathcal{U}_k \rightharpoonup \mathcal{U}^*$ weakly- $*$ in $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{N \times N})$, $y_k \rightharpoonup y^*$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$. By Theorem 4.1 the pair (\mathcal{U}^*, y^*) is admissible to the problem (3.3)–(3.5). Moreover, since the cost functional L is lower semicontinuous, we get $L(\mathcal{U}^*, y^*) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} L(\mathcal{U}_k, y_k) = \inf_{(\mathcal{U}, y) \in \Xi} L(\mathcal{U}, y)$.

Hence, (\mathcal{U}^*, y^*) is an optimal pair. \square

Remark 4.2. The arguments used in the proof of Theorem 4.2 is related to the so-called “direct method” of the Calculus of Variations which, roughly speaking, intends to construct a minimizing sequence $\{(\mathcal{U}_k, y_k) \in \Xi\}_{k \in \mathbb{N}}$.

References

1. Adams R. Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
2. Allaire G. Shape optimization by the homogenization method. Applied Mathematical Sciences, vol.146, Springer, New York, 2002.
3. Buttazzo G., Dal Maso G. Shape optimization for Dirichlet problems. Relaxed SIS and optimality conditions// Appl. Math. Optim., 23(1991), 17–49.
4. Buttazzo G., Dal Maso G., Garroni A., Malusa A. On the relaxed formulation of some shape optimization problems// Adv. Math. Sci. Appl., no.7, 1(1997), 1–24.
5. Calvo-Jurado C., Casado-Díaz J. Results on existence of solution for an optimal design problem// Extracta Mathematicae, no.3, 18(2003), 263–273.

6. Calvo-Jurado C., Casado-Díaz J. An existence result for control problems on the coefficients and the domain for nonlinear parabolic Dirichlet problems// Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 9(2004), 157–166.
7. Calvo-Jurado C., Casado-Díaz J. Optimization by the homogenization method for nonlinear elliptic Dirichlet problems// Mediterranean J. of Mathematic, 4(2007), 53–63.
8. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen, *Academie-Verlag*, Berlin, 1974.
9. D'Apice V., De Maio U., Kogut O. P. On shape stability of Dirichlet optimal control problems in coefficients for nonlinear elliptic equations// Advances in Differential Equations, no.7–8, 15(2010), 689–720.
10. Kapustjan V. Ye., Kogut O. P. Solenoidal controls in coefficients of nonlinear elliptic boundary value problems//Computer mathematics (C.M.), no.1, 12(2010), 138–143 (in Russian).
11. Lions J.-L. Some methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems. *Dunod-Gauthier-Villars*, Paris, 1969.
12. Lions J.-L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. *Springer Verlag*, New York, 1971.
13. Litvinov V. G. Optimization in Elliptic Boundary Value Problems with Applizations to Machanics. *Mir*, Moskow, 1987 (in Russian).
14. Lurie K. A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems. *Plenum Press*, NewYork, 1993.
15. Murat F. Un contre-exemple pour le problème de contrôle dans les coefficients// C.R.A.S. Paris, Sér. A 273(1971), 708–711.
16. Murat F. Théorèmes de non-existence pour des problèmes de contrôle dans les coefficients// C.R.A.S. Paris, Sér. A 274(1972), 395–398.
17. Murat F., Tartar L. On the control of coefficients in partial differential equations, in: A. Cherkaek, R. Kohn (Eds.), *Topics in the Mathematical Modelling of Composite Materials*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkhäuser, Boston, 1997, 139–173.
18. Raytun U. Ė. Optimal Control Problems for Elliptic Equations. *Zinatne*, Riga, 1989 (in Russian).
19. Serovaïskii S. Ya. Variational inequalities in nonlinear optimal control problems// Methods and Facilities of Mathematical Modeling. — Almaty (Alma Ata), 1977, 156–169 (in Russian).
20. Tiba D. Lectures on the Control of Elliptic Systems. In: *Lecture Notes*, 32, Department of Mathematics, University of Jyväskylä, Finland, 1995.
21. Zgurovski M. Z., Mel'nik V. S. Nonlinear Analysis and Control of Physical Processes and Fields. *Springer-Verlag*, Berlin, 2004.
22. Zhikov V. V., Kozlov S. M., Oleinik O. A. Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals. *Springer Verlag*, Berlin, 1994.

УДК 519.863:534

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ВИБРОСИСТЕМОЙ

В. Н. Богомаз*, И. В. Шаповал**

* *Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара,
Днепропетровск, 49050. E-mail: wbogomas@i.ua*

** *Днепропетровский национальный университет железнодорожного
транспорта им. академика В. Лазаряна,
Днепропетровск, 49010. E-mail: k irash@mail.ru*

Приведены достаточные условия разрешимости одной задачи оптимального управления вибросистемой, которая встроена в уплотняющую машину каткового типа. На основании идей метода штрафа и метода локальных вариаций получено численное решение задачи управления для вибросистемы с двумя дебалансами.

Ключевые слова: вибросистема, дебаланс, функция штрафа, метод локальных вариаций.

1. Введение

На сегодняшний день типичной составляющей методов математического моделирования в задачах проектирования новой техники являются методы оптимизации режимов работы. В связи с этим актуальной проблемой является разработка численных процедур решения задач оптимального управления механическими системами. В данной работе в качестве объекта управления выступает вибросистема, встроена в уплотняющую машину каткового типа. Ее конструкция была подробно описана в [1]. Для улучшения качества уплотнения одним из важных факторов является выбор величины и закона изменения возмущающей силы, возникающей в результате движения вибросистемы.

Основной целью данной работы является анализ кривой изменения вертикальной проекции возмущающей силы как функции времени, которая соответствует оптимальному управлению в задаче минимизации ее среднего значения на заданном промежутке времени.

2. Постановка задачи

В предыдущих работах одного из авторов [1, 2] составлена математическая модель работы вибросистемы с дебалансами, встроена в уплотняющую машину каткового типа, и поставлена задача оптимального управления данной системой.

В векторном виде задача имеет следующее представление:

$$L(u, x(u)) = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T B(x(u), \dot{x}(u)) dt \rightarrow \inf, \quad (2.1)$$

$$\dot{x} = f(u, x), \quad (2.2)$$

$$u \in U_{\partial}, \quad (2.3)$$

$$x \in K, \quad (2.4)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2.5)$$

Множества допустимых управлений и допустимых фазовых траекторий имеют вид:

$$U_{\partial} = \{u \in L_2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \mid m_{\min} \leq u_i(t) \leq m_{\max}, m_{\min} = -m_{\max}, \\ \forall i \in [1, n+1], \forall t \in [t_0, T]\}, \quad (2.6)$$

$$K = \{x \in H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2}) \mid \alpha_{\min} \leq x_i(t) \leq \alpha_{\max}, \alpha_{\min} = -\alpha_{\max}, \\ \forall i \in [n+2, 2n+2], \forall t \in [t_0, T]\}. \quad (2.7)$$

Исходными данными для вибросистемы данной конструкции являются:

n — количество дебалансов;

m_i — масса i -го дебаланса;

m_{izv} — масса i -го звена водила;

R_i — длина i -го звена водила;

E_i — радиус i -го дебаланса;

r_i — эксцентриситет i -го дебаланса.

Функционал качества представляет собой среднее значение вертикальной проекции суммарной возмущающей силы при движении системы на промежутке времени $[t_0, T]$ и имеет вид:

$$L(u, x(u)) = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T B(x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad (2.8)$$

где

$$B(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^n (m_i [x_{2n+2}^2 R_i \cos x_{n+1} + \\ + \dot{x}_{2n+2} R_i \sin x_{n+1} + x_{n+i+1}^2 r_i \cos x_i + \dot{x}_{n+i+1} r_i \sin x_i] + \\ + m_{izv} \frac{R_i}{2} [\dot{x}_{2n+2} \sin(x_{n+1} + \lambda(i-1)) + x_{2n+2}^2 \cos(x_{n+1} + \lambda(i-1))]).$$

Исключая \dot{x} из $B(x, \dot{x})$ через правые части дифференциальных уравнений $f(u, x)$, функционал (2.8) можно представить в виде:

$$L(u, x(u)) = \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \tilde{B}(u, x) dt. \quad (2.9)$$

При этом система (2.2) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_{n+2}; \\ \dots \\ \dot{x}_{n+1} = x_{2n+2}; \\ \dot{x}_{n+2} = \frac{1}{I_{1\theta}} [u_1 + k_1 \sin x_1 + C_1 \sin(x_{n+1} - x_1)x_{2n+2}^2]; \\ \dots \\ \dot{x}_{2n+1} = \frac{1}{I_{n\theta}} [u_n + k_n \sin x_n + C_n \sin(x_{n+1} + \lambda(n-1) - x_n) \times \\ \times x_{2n+2}^2]; \\ \dot{x}_{2n+2} = \frac{1}{M(x)} [x_{2n+2}^2 \sum_{i=1}^n C_i \sin(\beta_i - x_i) - \\ - 2x_{2n+2} \sum_{i=1}^n C_i \sin(\beta_i - x_i)x_{n+1+i} + u_{n+1} + \\ + \sum_{i=1}^n N_i \sin(\beta_i) + \sum_{i=1}^n P_i \{R_i \sin(\beta_i) + r_i \cdot \sin(x_i)\}], \end{array} \right. \quad (2.10)$$

где $x(\cdot) \in \mathbb{R}^{2n+2}$ — вектор состояния системы; $u(\cdot) \in \mathbb{R}^{n+1}$ — вектор управления; $\lambda = \frac{2\pi}{n}$ — угол между соседними звеньями водила (одинаковый для всех пар соседних звеньев); $I_{izv} = \frac{m_{izv}R_i^2}{3}$ — момент инерции i -го звена водила относительно оси вращения водила; $I_{i\theta} = \frac{m_i(E_i^2 - 2r_i^2)}{2}$ — момент инерции i -го дебаланса относительно центра его инерции; $\beta_i = x_{n+1} + \lambda(i-1)$ — угол поворота i -го звена водила; $L_i^2(x) = R_i^2 + r_i^2 + 2R_i r_i \cos(\beta_i - x_i)$ — квадрат расстояния от оси вращения водила до центра инерции i -го дебаланса.

Введем следующие обозначения: $C_i = m_i R_i r_i$, $k_i = m_i g r_i$, $N_i = m_{izv} g \frac{R_i}{2}$, $M(x) = \sum_{i=1}^n (I_{izv} + m_i L_i^2(x))$, $P_i = m_i g$.

Заметим, что особенностями поставленной задачи оптимального управления являются:

- 1) наличие ограничений на управления и на фазовые траектории;
- 2) система уравнений существенно нелинейна относительно фазовых координат и линейна относительно управлений;
- 3) функционал качества линейно зависит от управления.

3. Разрешимость поставленной задачи оптимального управления

Пусть $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1})$ — пространство управлений, а $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ — пространство фазовых траекторий. Достаточным условием существования решения системы (2.10) для любых $u \in U_\theta$ является выполнение условий Каратеодори для функций $f(u, x)$, что означает: для любого $u \in U_\theta$ в области $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{2n+2} | t \geq 0\}$ выполнены условия:

- 1) вектор-функция $f(u, x)$ при почти всех t определена и непрерывна по x ;

- 2) вектор-функция $f(u, x)$ измерима по t при любом x ;
 3) $|f(u(t), x(t))| \leq m(t)$ и функция $m(t)$ суммируема на $[t_0, T]$.

Теорема 3.1. (Каратеодори) [7] Пусть $u \in U_\partial$, $(t_0, x_0) \in D$ и $f(u, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть существует суммируемая функция $l(t)$ такая, что для любых точек (t, x) и (t, y) из области D выполняется неравенство $|f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leq l(t)|x - y|$. Тогда в области D существует единственное решение системы уравнений $\dot{x} = f(u, x)$.

Как следует из теоремы 1, система (2.10) имеет единственное решение в классе $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ для любого u из U_∂ .

Определение 3.1. Задачу (2.1)–(2.5) будем называть регулярной, если существует, по крайней мере, один элемент $v \in U_\partial$, при котором соответствующее решение $x(v)$ системы уравнений (2.2) удовлетворяет ограничению (2.4). При этом пару $(v, x(v))$ будем называть допустимой в задаче (2.1)–(2.5).

Поскольку объектом управления выступает реальная механическая вибросистема, то всюду далее будем предполагать, что задача (2.1)–(2.5) регулярна.

Представим систему уравнений (2.2) в виде:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(u(\tau), x(\tau)) d\tau, \quad (3.1)$$

где вектор-функция $f(u(\tau), x(\tau))$ определена правыми частями уравнений (2.10).

Очевидно, что для любого $t \in [t_0, T]$ выполняется следующее неравенство:

$$|x(t)| \leq |x(t_0)| + \int_{t_0}^t |f(u(\tau), x(\tau))| d\tau.$$

Из условий Каратеодори и линейности $f(u, x)$ относительно x следует существование константы $C > 0$ такой, что для почти всех $t \in [t_0, T]$ выполняется неравенство $|f(u(t), x(t))| \leq C \cdot |x(t)| + |u(t)|$.

Таким образом, получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x(t_0)| + C \int_{t_0}^t |x(\tau)| + |u(\tau)| d\tau \leq \\ &\leq (|x(t_0)| + \|u\|_{L^1(t_0, T, \mathbb{R}^{n+1})}) + C \int_{t_0}^t |x(\tau)| d\tau, \forall t \in [t_0, T]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Приведем один известный результат:

Лемма 3.1. (Гронолла – Беллмана) Пусть $g(t)$ и $s(t)$ при $t_0 < t < \infty$ – непрерывные функции и, кроме того, $g(t) > 0$ и $s(t) > 0$. Если выполнено неравенство

$$g(t) \leq c + \int_{t_0}^t g(\tau)s(\tau) d\tau,$$

где $c > 0$, то при всех $t \in [t_0, \infty)$ справедливо:

$$g(t) \leq c e^{\int_{t_0}^t s(\tau) d\tau}.$$

Согласно теореме вложения Соболева функция $x(t)$ как элемент пространства $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ непрерывна. Применяя лемму Гронуолла – Беллмана к неравенству (3.2), получаем следующую оценку:

$$|x(t)| \leq (|x(t_0)| + \|u\|_{L^1(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1})}) e^{C(t-t_0)} \leq A, \forall t \in [t_0, T], \quad (3.3)$$

где A — некоторая константа.

Откуда находим:

$$\|x\|_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})} \leq \int_{t_0}^T x^2(t) dt = A^2(T - t_0). \quad (3.4)$$

Для оценки производных от фазовых траекторий возведем обе части уравнений системы (2.10) в квадрат, проинтегрируем на отрезке $[t_0, T]$. Используя неравенство Минковского, получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|\dot{x}\|_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})} &= \sqrt{\int_{t_0}^T |\dot{x}(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\int_{t_0}^T (C|x(t)| + |u(t)|)^2 dt} \leq \\ &\leq C \sqrt{\int_{t_0}^T (|x(t)|)^2 dt} + \sqrt{\int_{t_0}^T (|u(t)|)^2 dt} \leq \\ &\leq C \|x\|_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})} + \|u\|_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1})} \leq B, \end{aligned}$$

где B — некоторая константа.

Таким образом, имеем следующую оценку:

$$\|x\|_{H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})} = \|x\|_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})} + \|\dot{x}\|_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})} \leq A + B. \quad (3.5)$$

Из оценки (3.5) следует, что для любого $u \in U_\partial$ соответствующее решение $x(u)$ системы (2.10) ограничено в пространстве $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$.

Введем для рассмотрения множество допустимых пар (u, x) в задаче (2.1)–(2.5):

$$\Xi = \{(u, x) \in L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2}) \mid \dot{x} = f(u, x), \\ x(t_0) = x_0, u \in U_\partial, x \in K\}.$$

Ввиду регулярности задачи (2.1)–(2.5), имеем: множество Ξ — непусто. Взяв во внимание то, что множество U_∂ ограничено в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1})$ и решение системы (2.10) ограничено в $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ для любого u из U_∂ , получим, что множество Ξ ограничено по норме $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$:

$$\|(u, x)\|_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})} = \|x\|_{H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})} + \|u\|_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1})} \leq S.$$

Поскольку пространство $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ является рефлексивным, то, используя теорему Банаха о слабой компактности ограниченного множества в рефлексивном пространстве, имеем: Ξ — секвенциально слабо компактное множество в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$.

Значит, из любой последовательности $\{(u_k, x_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \in \Xi$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность, что означает: существует такая пара $(u^*, x^*) \in L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$, что при $k \rightarrow \infty$ выполняется условие $(u_k, x_k) \rightarrow (u^*, x^*)$ (с точностью до подпоследовательности). Так как при каждом значении k выполняется $(u_k, x_k) \in U_\partial \times K$, а множество $U_\partial \times K$, согласно его определению (см. формулы (2.6), (2.7)) является слабо замкнутым, то, очевидно, что $(u^*, x^*) \in U_\partial \times K$. Покажем, что пара (u^*, x^*) удовлетворяет системе уравнений (2.10). Для этого заменим ее эквивалентной системой интегральных уравнений

$$x_k(t) = x_k(t_0) + \int_{t_0}^t (f(x_k(\tau)) + u_k(\tau)) d\tau. \quad (3.6)$$

Как известно, из $x_k \rightarrow x^*$ в $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ (теорема Релиха – Кондрашова и теорема о вложении Соболева) следует, что $x_k \rightarrow x^*$ в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ и $C(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$. Согласно определению слабой сходимости, при $k \rightarrow \infty$ имеем $(1, u_k)_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1})} \rightarrow (1, u^*)_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1})}$. Следовательно, переходя к пределу в правой и левой частях уравнений (3.6) при $k \rightarrow \infty$ и применяя теорему о предельном переходе под знаком интеграла, получим уравнение:

$$x^*(t) = x^*(t_0) + \int_{t_0}^t (f(x^*(\tau)) + u^*(\tau)) d\tau. \quad (3.7)$$

Следовательно, $(u^*, x^*) \in \Xi$, что и требовалось установить.

Тем самым получен следующий результат:

Следствие 3.1. *Множество допустимых пар в задаче (2.1)–(2.5) является секвенциально слабо компактным относительно слабой топологии в пространстве $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$.*

Определение 3.2. Функционал $L : L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ будем называть секвенциально полунепрерывным снизу относительно слабых топологий в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1})$ и $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$, если из того, что $U_\partial \ni u_k \rightarrow u$ в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1})$ и $K \ni x_k \rightarrow x$ в $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ вытекает неравенство

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} L(u_k, x_k) \geq L(u, x).$$

Как следует из представления (2.8), типичными составляющими функционала L выступают следующие выражения:

$$L_1(u, x) = C_1 \int_{t_0}^T x^2(t) \cos x(t) dt, \quad (3.8)$$

$$L_2(u, x) = C_2 \int_{t_0}^T \dot{x}(t) \sin x(t) dt, \quad (3.9)$$

где C_1, C_2 – константы, зависящие от параметров системы.

В силу компактности вложения $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ в $C(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ имеем, что $x_k^2(t) \cdot \cos x_k(t) \rightarrow x^{*2}(t) \cdot \cos x^*(t)$ равномерно при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, находим:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} L_1(u_k, x_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} C_1 \int_{t_0}^T x_k^2(t) \cos x_k(t) dt = \\ &= C_1 \int_{t_0}^T x^{*2}(t) \cos x^*(t) dt = L_1(u^*, x^*). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Отсюда следует, что $L_1(u, x)$ является непрерывным функционалом относительно слабой топологии в пространстве $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$.

Приведем известный из функционального анализа результат:

Лемма 3.2. Пусть в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ заданы последовательности: $\{v_k\}$ и $\{y_k\}$ такие, что $v_k \rightarrow v^*$ в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$, $y_k \rightarrow y^*$ в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$. Тогда $(y_k, v_k)_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})} \rightarrow (y^*, v^*)_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})}$ при $k \rightarrow \infty$.

Применяя лемму 2 и то, что вложение $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ компактно, имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} L_2(u_k, x_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} C_2 \int_{t_0}^T \dot{x}_k(t) \cos x_k(t) dt = \\ &= C_2 \int_{t_0}^T \dot{x}^*(t) \sin x^*(t) dt = L_2(u^*, x^*). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Тем самым получен следующий результат:

Следствие 3.2. Функционал качества (2.8) полунепрерывен снизу относительно слабой топологии в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$.

Представим задачу (2.1)–(2.5) в следующем виде:

$$\inf_{(u, x) \in \Xi} L(u, x), \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \Xi = \{ (u, x) \in L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2}) \mid \dot{x} = f(u, x), \\ x(t_0) = x_0, u \in U_\partial, x \in K \}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Воспользовавшись теоремой Вейерштрасса [4] о том, что секвенциально полунепрерывный снизу функционал относительно слабой топологии пространства, на котором он определен, на секвенциально слабо компактном множестве ограничен снизу и достигает своей нижней грани, получим, что задача (3.12)–(3.13) имеет решение.

Таким образом, приходим к следующему результату:

Теорема 3.2. Пусть множество U_∂ ограничено в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1})$, уравнения системы $\dot{x} = f(u, x)$ являются уравнениями Каратеодори, правые части которых удовлетворяют условию Липшица относительно x , функционал качества $L : L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$, элементы множества K поточечно ограничены. Тогда задача (3.12)–(3.13) разрешима в том и только в том случае, если она регулярна.

Доказательство. Обратное утверждение очевидно, поскольку из разрешимости задачи (3.12)–(3.13) следует, что множество допустимых пар Ξ непусто, а значит она регулярна. Прямое утверждение следует из разрешимости задачи (3.12)–(3.13). Теорема доказана. \square

Необходимым условием оптимальности для задачи (3.12)–(3.13) является принцип максимума Понтрягина для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями. Но при его реализации возникают существенные трудности, связанные с появлением в правых частях сопряженных уравнений слагаемых, зависящих от некоторой меры.

Таким образом, для упрощения реализации необходимых условий оптимальности предлагается заменить фазовые ограничения на некоторую функцию штрафа.

Введем для рассмотрения следующие множества:

$$\Xi_1 = \{(u, x) \in L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2}) | \dot{x} = f(u, x), \\ x(t_0) = x_0, u \in U_\partial\}.$$

$$\Xi_2 = \{(u, x) \in L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2}) | x \in K\}.$$

Очевидно, что $\Xi = \bigcap_{i=1}^2 \Xi_i$ — множество допустимых пар в задаче (3.12)–(3.13).

Пусть $\beta : H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_+$ — некоторая полунепрерывная снизу относительно слабой топологии в пространстве $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ функция такая, что $\beta(x) > 0$ при $x \notin K$ и $\beta(x) = 0$ для любого x из K .

Таким образом, задача (3.12)–(3.13) после замены фазовых ограничений функцией штрафа будет иметь вид:

$$\inf_{(u, x) \in \Xi_1} L_\varepsilon(u, x), \quad (3.14)$$

$$\Xi_1 = \{(u, x) \in L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2}) | \dot{x} = f(u, x), \\ x(t_0) = x_0, u \in U_\partial\}, \quad (3.15)$$

где $L_\varepsilon(u, x) = L(u, x) + \varepsilon^{-1}\beta(x)$.

Для задачи (3.14)–(3.15) приведем следующий результат:

Лемма 3.3. Для любого $\varepsilon > 0$ задача (3.14)–(3.15) разрешима. Последовательность пар $(u_\varepsilon, x_\varepsilon)$, которые являются решениями в задаче (3.14)–(3.15) при монотонно убывающих значениях параметра штрафа ε , слабо сходится к решению задачи (3.12)–(3.13) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. Согласно своему определению, множество Ξ_1 (см. формулу (3.15)) секвенциально слабо компактно в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$. Из следствия 3 следует, что функционал $L_\varepsilon(u, x)$ является ограниченным снизу на Ξ_1 в силу неотрицательности функции штрафа.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ в силу теоремы 2 существует пара $(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \in \Xi_1$ такая, что выполняется неравенство: $L_\varepsilon(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq L_\varepsilon(u, x)$, для любых $(u, x) \in \Xi_1$.

Очевидно, что для каждого $\varepsilon > 0$ пара $(u_\varepsilon, x_\varepsilon)$ является ограниченной в пространстве $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$. А поскольку $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ рефлексивно, то, переходя к подпоследовательностям и сохраняя обозначение нумерации, имеем $(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \rightarrow (u^*, x^*)$ в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Учитывая регулярность задачи (3.12)–(3.13) и то, что U_∂ слабо замкнуто в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1})$, имеем $(u^*, x^*) \in \Xi_1$.

Покажем, что $x^* \in K$ и пара (u^*, x^*) является оптимальным решением в задаче (3.12)–(3.13).

Пусть $(\omega, x(\omega)) \in \Xi_1$ – некоторая допустимая пара в задаче (3.12)–(3.13). Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ справедливо $L_\varepsilon(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \leq L_\varepsilon(\omega, x(\omega)) \leq L(\omega, x(\omega))$, поскольку имеет место равенство $\beta(x(\omega)) = 0$. В силу полунепрерывности снизу функционала $L_\varepsilon(u, x)$ выполняется неравенство

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} L_\varepsilon(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} L(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \geq L(u^*, x^*).$$

Отсюда следует, что $\beta(x_\varepsilon) \leq c \cdot \varepsilon$, где $c = const$. В силу полунепрерывности снизу функции $\beta(x)$ справедливо: $\beta(x^*) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \beta(x_\varepsilon) \leq 0$. Отсюда немедленно следует оптимальность управления u^* и то, что $x^* \in K$, т. е. $(u^*, x^*) \in \Xi$. Лемма доказана. \square

Для задачи (3.12)–(3.13) в качестве функции $\beta(x)$ выберем:

$$\beta(x) = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \left(\|\mu_1^+(x_k(t))\|_{L^2(t_0, T)}^2 + \|\mu_2^+(x_k(t))\|_{L^2(t_0, T)}^2 \right), \quad (3.16)$$

где $\mu_1^+(x_k(t)) = \max\{0, x_k(t) - \alpha_{max}\}$, $\mu_2^+(x_k(t)) = \max\{0, \alpha_{min} - x_k(t)\}$.

Покажем, что функция $\beta(x)$ является полунепрерывной снизу относительно слабой топологии в пространстве $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$.

Пусть $x_n \rightarrow x^*$ в $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$, тогда в силу компактности вложения $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$, имеем $x_n \rightarrow x^*$ в $L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ (теорема Релиха – Кондрашова). Отсюда следует, что выполняется следующее равенство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})} = \|x^*\|_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})},$$

значит норма пространства $L^2(\Omega; \mathbb{R}^{2n+2})$ непрерывна относительно слабой топологии в $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$.

Очевидно, что функции $\mu_1^+(x_k(t)), \mu_2^+(x_k(t))$ равномерно непрерывны по x_k . Используя компактность вложения $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$ в $C(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$, получим следующие равенства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_1^+(x_n)\|_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})} = \|\mu_1^+(x^*)\|_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_2^+(x_n)\|_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})} = \|\mu_2^+(x^*)\|_{L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})}.$$

Это дает основание утверждать, что функция $\beta(x)$ является непрерывной относительно слабой топологии в $H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2})$, а значит и полунепрерывной снизу. После замены фазовых ограничений функцией штрафа $\beta(x)$ задача (3.14)–(3.15) будет иметь вид:

$$\inf_{(u, x) \in \Xi_1} \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T \tilde{B}_\varepsilon(u, x) dt, \quad (3.17)$$

$$\Xi_1 = \{(u, x) \in L^2(t_0, T; \mathbb{R}^{n+1}) \times H^1(t_0, T; \mathbb{R}^{2n+2}) \mid \dot{x} = f(u, x), \\ x(t_0) = x_0, u \in U_\partial\}, \quad (3.18)$$

где $\tilde{B}_\varepsilon(u, x) = \tilde{B}(u, x) + \varepsilon^{-1} \sum_{k=n+2}^{2n+2} (|\mu_1^+(x_k(t))|^2 + |\mu_2^+(x_k(t))|^2)$; ε — параметр штрафа.

Применяя к задаче (3.17)–(3.18) лемму 3, получим следующий результат:

Следствие 3.3. *Последовательность пар $(u_\varepsilon, x_\varepsilon)$, которые являются решениями задачи (3.17)–(3.18) при различных монотонно убывающих значениях параметра штрафа ε , слабо сходится к решению задачи (3.12)–(3.13) при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

4. Необходимые условия оптимальности

Как известно, для задачи (3.17)–(3.18) при фиксированном $\varepsilon > 0$ необходимым условием оптимальности является принцип максимума Понтрягина.

Введем для рассмотрения функцию Понтрягина в виде:

$$H_\varepsilon(t, x, u, p, \lambda) = (p \mid f(u, x))_{\mathbb{R}^{2n+2}} - \lambda \tilde{B}_\varepsilon(u, x), \quad (4.1)$$

и функцию $\mathcal{H}_\varepsilon(t, x, p, \lambda)$ в виде:

$$\mathcal{H}_\varepsilon(t, x, p, \lambda) = \sup_{u \in U_\partial} H_\varepsilon(t, x, u, p, \lambda), \quad (4.2)$$

где $(\cdot \mid \cdot)_{\mathbb{R}^{2n+2}}$ — скалярное произведение в пространстве \mathbb{R}^{2n+2} .

Приведем принцип максимума Понтрягина:

Теорема 4.1. [3] Пусть $(u_\varepsilon(t), x_\varepsilon(t))$ – оптимальный процесс управления в задаче (3.17)–(3.18), определенный на множестве $[t_0, T]$. Тогда существуют не равные одновременно нулю число $\lambda > 0$, векторы $l_0 \in \mathbb{R}^{2n+2}$, $l_1 \in \mathbb{R}^{2n+2}$ и вектор-функция $p(t)$ такие, что:

1) вектор-функция $p(t)$ удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\dot{p} = -f_x^*(u_\varepsilon, x_\varepsilon) \cdot p + \lambda \tilde{B}_\varepsilon(u_\varepsilon, x_\varepsilon); \quad (4.3)$$

2) вектор-функция $p(t)$ удовлетворяет условию трансверсальности (поскольку правый конец фазовой траектории свободный)

$$p(T) = -h_{1x}^*(x(T)) \cdot l_1 = 0; \quad (4.4)$$

3) почти при всех $t \in [t_0, T]$ выполняется равенство

$$H_\varepsilon(t, x, u, p, \lambda) = \mathcal{H}_\varepsilon(t, x, p, \lambda). \quad (4.5)$$

Если $\lambda = 0$, то вследствие условия (4.4) все множители будут равны нулю, что исключено согласно принципу максимума. Тогда для определенности примем $\lambda = 1$.

Для задачи (3.17)–(3.18) функция Понтрягина имеет вид:

$$H_\varepsilon(t, x, u, p, \lambda) = \sum_{i=1}^{2n+2} p_i f_i(x) + \sum_{i=1}^n p_{i+n+1} \frac{u_i}{I_{1\theta}} + p_{2n+2} \frac{u_{n+1}}{M(x)} - \tilde{B}_\varepsilon(u, x), \quad (4.6)$$

где $f_i(x) = f_i(u, x)$, $\forall i \in [1, n+1]$, $f_i(x) = f_i(u, x) - \frac{u_i - n - 1}{I_i - n - 1\theta}$, $\forall i \in [n+2, 2n+1]$, $f_{2n+2}(x) = f_{2n+2}(u, x) - \frac{u_{n+1}}{M(x)}$, $\forall i \in [n+1, 2n+1]$.

Уравнения (4.3) имеют вид:

$$\dot{p} = \sum_{i=1}^{2n+2} p_i f_{ix_j}(x) + p_{2n+2} u_{n+1} \left(\frac{1}{M(x)} \right)_x + \tilde{B}_{\varepsilon x_j}(u, x), \forall j = \overline{1, 2n+2}. \quad (4.7)$$

Опуская элементарные вычисления, выражение (4.6) можно привести к виду:

$$H_\varepsilon(t, x, u, p, \lambda) = F_\varepsilon(x, p) + \sum_{i=1}^{n+1} u_i \varphi_i(t, x), \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x, p) = & \sum_{i=1}^{n+1} p_i x_{n+1+i} + \sum_{i=n+2}^{2n+2} (p_i (f_i(x)) - \sum_{i=1}^n (m_i [x_{2n+2}^2 R_i \cos x_{n+1} + \\ & + (f_{2n+2}(x)) R_i \sin x_{n+1} + x_{n+1+i}^2 r_i \cos x_i + (f_{i+n+1}(x)) r_i \sin x_i + \\ & + m_{izv} \frac{R_i}{2} [(f_{2n+2}(x)) \sin(x_{n+1} + \lambda(i-1)) + x_{2n+2}^2 \cos(x_{n+1} + \lambda(i-1))]) + \\ & + \varepsilon^{-1} \sum_{k=n+2}^{2n+2} (|\mu_1^+(x_k(t))|^2 + |\mu_2^+(x_k(t))|^2), \end{aligned}$$

$$\varphi_i(t, x) = \frac{1}{I_{i\theta}}(p_{i+n+1} - m_i r_i \sin x_i), \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(t, x) = \frac{1}{M(x)}(p_{2n+2} - \sin(x_{n+1}) \sum_{i=1}^n m_i R_i + \\ + \sum_{i=1}^n m_{izv} \frac{R_i}{2} \sin(x_{n+1} + \lambda(i-1))). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Таким образом, условие стационарности (4.5) в задаче (3.17)–(3.18) примет вид:

$$u_i = \alpha_{max} \operatorname{sign}[\varphi_i(t, x)], i = \overline{1, n+1}. \quad (4.11)$$

5. Численное решение задачи

Для численного расчета была рассмотрена вибросистема с двумя одинаковыми дебалансами и одинаковыми звеньями водила ($n = 2$). Динамика системы наблюдалась в течение промежутка времени $[0, 40]$ секунды. Масса одного дебаланса $m = 4$ кг, масса одного звена водила $m_{zv} = 2$ кг, длина звена каждого водила $R = 0,35$ м, радиус дебаланса $E = 0,12$ м, эксцентриситет дебаланса $r = 0,072$ м, предельно допустимая угловая скорость вращения дебалансов и водила $\alpha_{max} = -\alpha_{min} = 150$ рад/с, максимальный момент вращения приводов для дебалансов $m_{max} = 2$ Нм, а для водила $m_{max} = 1$ Нм, начальное состояние вибросистемы определяет вектор $x^0 = (\pi, \pi, 0, 0, 0, 0)^T$.

Замечание 5.1. Поскольку в рассматриваемом случае количество дебалансов четное, то подынтегральное выражение несколько упрощается из-за того, что возмущающие силы от вращения звеньев водила компенсируют друг друга.

Таким образом, функционал (2.8) для заданной вибросистемы будет иметь вид:

$$\begin{aligned} L(x(\cdot), u(\cdot)) = \frac{1}{40} \int_0^{40} [2mR(x_6^2 \cos x_3 + \dot{x}_6 \sin x_3) + \\ + mr(x_4^2 \cos x_1 + \dot{x}_4 \sin x_1 + x_5^2 \cos x_2 + \dot{x}_5 \sin x_2)] dt. \end{aligned}$$

Для численного решения задачи оптимального управления использовался метод локальных вариаций. Полученные законы оптимальных управлений u_1, u_2, u_3 имеют вид, представленный на рисунке 1.

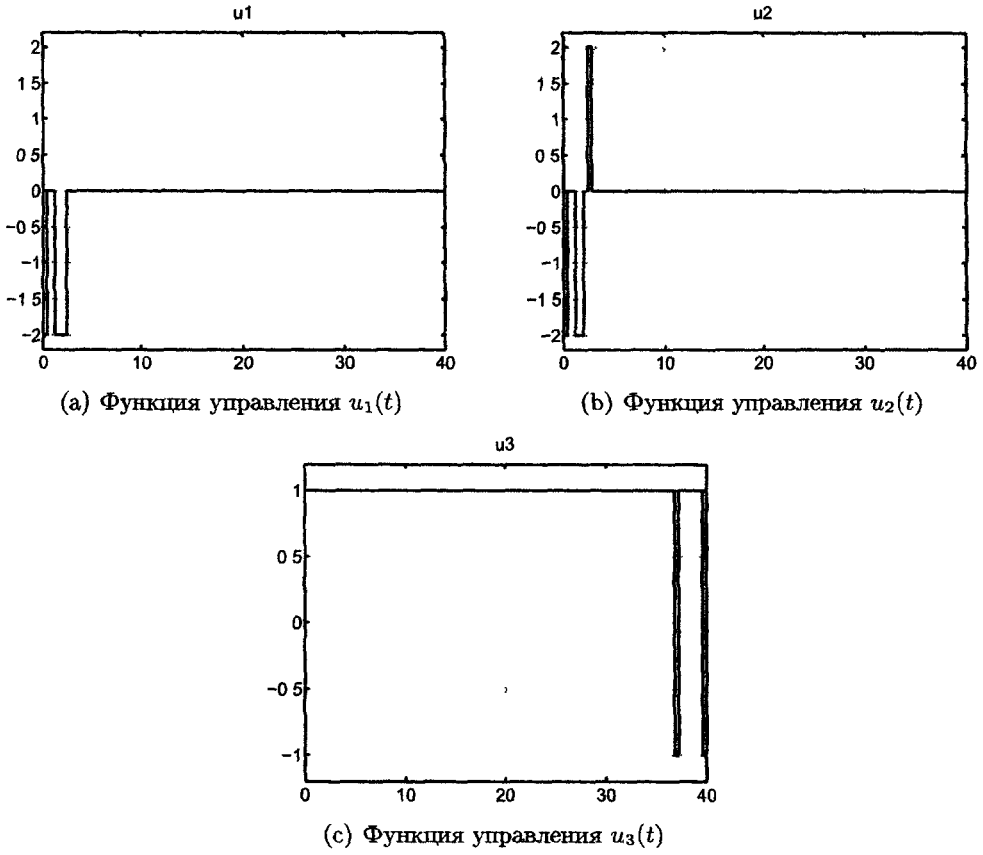


Рис. 1. Функции управления

Кривая изменения вертикальной возмущающей силы, соответствующая оптимальному управлению, приведена на рисунке 2. Функционал качества на оптимальном управлении равен $-26,95$ Н.

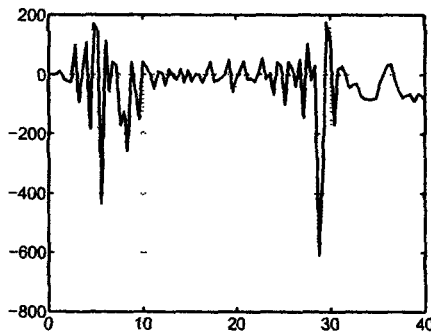


Рис. 2. Функция суммарной возмущающей силы $B(u, x)$

При действии на валы дебалансов и водила найденных моментов вращения u_1, u_2, u_3 фазовые координаты $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ изменяются по кривым, показанным на рисунке 3.

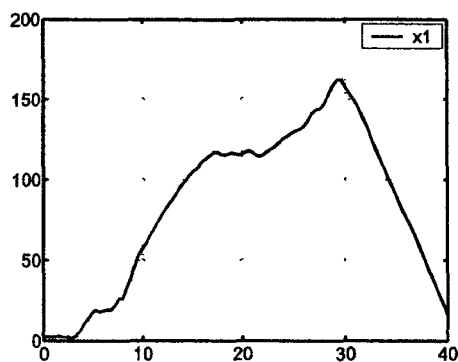
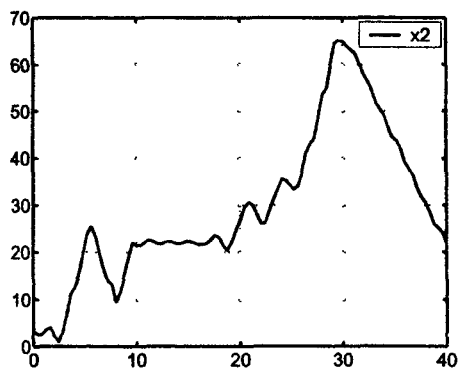
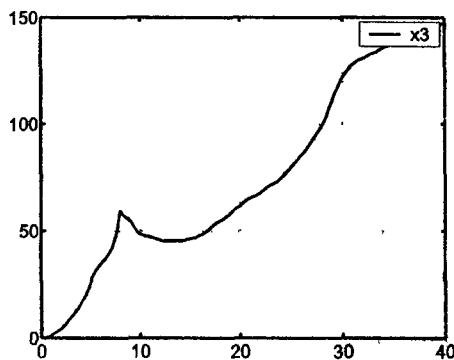
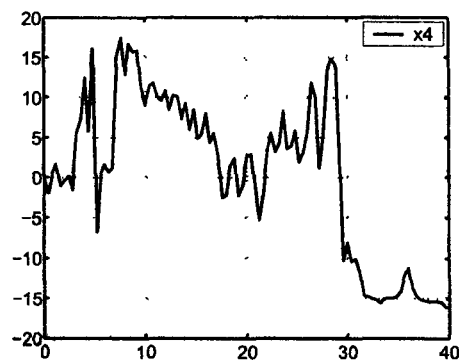
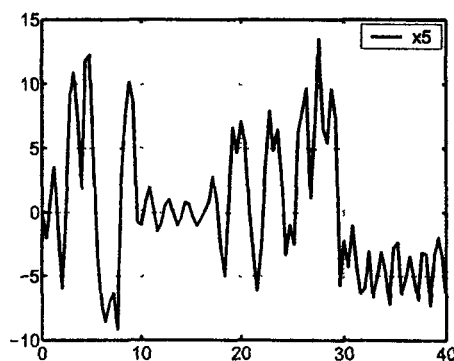
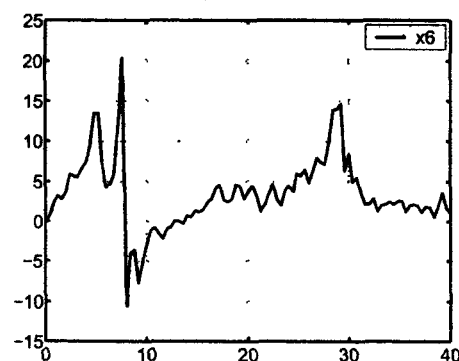
(a) Функция фазовой координаты $x_1(t)$ (b) Функция фазовой координаты $x_2(t)$ (c) Функция фазовой координаты $x_3(t)$ (d) Функция фазовой координаты $x_4(t)$ (e) Функция фазовой координаты $x_5(t)$ (f) Функция фазовой координаты $x_6(t)$

Рис. 3. Функции изменения углов поворота дебалансов и водила

Рассматривая кривую изменения суммарной возмущающей силы, приходим к выводу, что среднее ее значение на заданном промежутке времени отрицательно, однако, как видно из рисунка 2, существуют временные интервалы, где суммарная возмущающая сила положительная, т. е., давление ма-

шины на грунт становится меньше, что является нежелательным.

6. Выводы

В работе рассмотрена задача оптимального управления вибросистемой при наличии фазовых ограничений и ограничений на управления. С использованием идеологии метода штрафов получено аппроксимационное представление исходной задачи и показано, что решения аппроксимационных задач близки к оптимальному решению исходной.

Характерной чертой рассматриваемой задачи является тот факт, что законы оптимальных управлений принимают вид управлений типа bang-bang.

Рассмотрена численная реализация поставленной задачи в случае, когда вибросистема оснащена двумя дебалансами. На основании метода локальных вариаций получены законы оптимального управления в форме bang-bang управлений и соответствующие им оптимальные траектории движения динамической системы.

Примечательным является тот факт, что среднее значение возмущающей силы, представляющее собой функционал качества в исходной задаче, является отрицательным. Однако закон ее изменения во времени показывает наличие таких временных интервалов, где она принимает строго положительные значения. Это означает, что для достижения большего качества в управлении такой вибросистемой необходимо привлекать идеологию теории задач векторной оптимизации.

Библиографические ссылки

1. Богомаз В. Н. Об одной задаче оптимизации механической вибросистемы / В. Н. Богомаз // Питання прикладної математики та математичного моделювання, Зб. наук. праць.— Д. : ДНУ, 2010. — С. 23–40.
2. Богомаз В. Н. Необходимые условия экстремума в задаче оптимизации механической вибросистемы / В. Н. Богомаз // Вісник ДНУ, Сер. Моделювання — 2010. — Т.18, № 2. — С. 90–102.
3. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. М. : Наука, 1974.— 480 с.
4. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. / Ф. П. Васильев. М. : Наука, 1981.— 400 с.
5. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / А. И. Егоров. М. : Физматлит, 2003.— 384 с.
6. Иваненко В. И., Мельник В. С. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами / В. И. Иваненко, В. С. Мельник. К. : Наукова думка, 1988.— 288 с.
7. Филиппов А. И. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. И. Филиппов. М. : Наука, 1985.— 224 с.
8. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. М.: Наука, 1980.— 496 с.

УДК 517.9

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ КЕРУВАННЯ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ТРАНСПОРТНІЙ МЕРЕЖІ

Т. А. Божанова

*Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара,
Дніпропетровськ, 49050. E-mail: tamara-bozhanova@ukr.net*

Розглядається гідродинамічна модель для транспортного потоку на мережі. У припущенні, що транспортний потік на кожному ребрі мережі є об'єктом керування, ставиться задача його оптимізації у векторній формі. Виділено топологію на відповідному функціональному просторі, відносно якої множина допустимих розв'язків такої задачі є секвенційно компактною, та доведено існування ефективних розв'язків розглянутої задачі векторної оптимізації.

Ключові слова: гідродинамічна модель, транспортний потік на мережі, векторна оптимізація на мережі.

1. Вступ

У статті основним об'єктом дослідження виступає макроскопічна модель транспортного потоку на мережі, що складається зі скінченної сукупності доріг, які з'єднані деякими вузлами. На кожній окремо взятій дорозі припускається, що рух транспортних засобів підкоряється так званому гідродинамічному закону збереження, який приводить до розгляду нелінійної задачі Коші для рівняння у частинних похідних першого порядку. Дослідженню та аналізу таких задач присвячена досить обширна література (див. [1–6, 10, 11, 14, 15]).

Вважається, що на кожному ребрі мережі транспортний потік є керованим процесом. При цьому якість керування транспортним потоком на мережі визначається не скалярним відображенням у простір $L^2(\Omega_T)$, який упорядкований за конусом Λ додатних елементів. Доведено, що множина допустимих розв'язків такої задачі є секвенційно компактною відносно обраної топології. Далі доводиться існування ефективних розв'язків поставленої задачі векторної оптимізації на мережі.

2. Основні поняття та позначення

У цьому параграфі нагадаємо деякі відомі факти щодо функцій з обмеженою повною варіацією, векторнозначних відображень та частково впорядкованих нормованих просторів.

2.1. Функції з обмеженою повною варіацією

Нехай $J = (a, b)$ заданий інтервал в R . Розглянемо функцію $f : J \rightarrow R$ таку, що $f \in L^1(J)$. Тоді повною варіацією функції f називають

$$Tot. V_j(f) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| : m \in N, a < x_0 < x_1 < \dots < x_m < b \right\},$$

де $x_j \in J, j \in \{0, \dots, m\}$.

Означення 2.1. Будемо казати, що функція $f \in L^1(J)$ є функцією з обмеженою повною варіацією на J , якщо існує константа K така, що $Tot. J f \leq K$. Позначимо через $BV(J)$ множину всіх дійсних функцій $f \in L^1(J)$ з обмеженою повною варіацією на J .

Є еквівалентними такі твердження (див. [9]):

- (i): $f \in BV(\Omega)$;
- (ii): $f \in L^1(J)$ та $|Df| (J) := \sup \{ \int_J f \varphi' dx : \varphi \in C_0^1(J), |\varphi| \leq 1 \} < +\infty$;
- (iii): існує послідовність гладких функцій $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset C_0^\infty(R)$ таких, що $f_k \rightarrow f$ у $L^1(J)$ і $\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_J |f'_k| dx < +\infty$, де узагальнена похідна Df — це міра Радона, і $|Df| (J)$ збігається з повною варіацією функції f на J . Більше того, для функції $f \in BV(J)$ існують правосторонні та лівосторонні границі:

$$f(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s) ds, \quad f(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{x-h}^x f(s) ds$$

для $\forall x \in [a, b)$ та $\forall x \in (a, b]$, відповідно. І при цьому, $f(x^+) = f(x^-)$, якщо $|Df|(\{x\}) = 0$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.1. а) Простір $BV(J)$ є простором Банаха відносно норми

$$\|f\|_{BV(J)} = \|f\|_{L^1(J)} + |Df| (J);$$

- б) відображення $f \rightarrow |Df| (J)$ є напівнеперервним знизу відносно $L^1(J)$ -збіжності, тобто, якщо $f_k \rightarrow f$ у $L^1(J)$, то $|Df| (J) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} |Df_k| (J)$;
- в) якщо $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset BV(J)$ $\sup_{k \in N} \|f_k\|_{BV(J)} < +\infty$, то існує підпослідовність послідовності $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, яка сильно збігається до деякої функції $f \in BV(J)$.

Послідовність функцій $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset BV(J)$ називається слабко збіжною в $BV(J)$ (позначають $f_k \rightharpoonup f$), якщо

$$f_k \rightarrow f \text{ у просторі } L^1(J) \text{ і } \sup_{k \in N} |Df_k| (J) < +\infty.$$

Зауважимо, що у випадку, коли $f_k \rightharpoonup f$ у $BV(J)$, $f \in BV(J)$ і $Df_k \rightarrow Df$ як міри Радона.

2.2. Поняття транспортної мережі

Нехай Θ — це відкрита випукла підмножина простору R^2 і \mathfrak{F} — плоский граф на R^2 .

Означення 2.2. Будемо казати, що множина Ω є мережею доріг, якщо її можна подати у вигляді пари $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$, де

(а): \mathcal{I} — це скінченна сукупність ребер, котрі відповідають дорогам мережі та є відрізками $I_i = [a_i, b_i]$ в R , $i = 1, \dots, N$;

(б): \mathcal{J} — скінченна кількість вершин, які відповідають вузлам даної мережі.

Кожна вершина J є об'єднанням двох непорожніх підмножин $Inc(J)$ та $Out(J)$ таких, що:

- (i) кожна вершина $J \in \mathcal{I}$ є внутрішньою точкою Ω ;
- (ii) для $\forall J \neq J' \in \mathcal{J}$ та $Inc(J) \cap Inc(J') = \emptyset$ маємо: $Out(J) \cap Out(J') = \emptyset$;
- (iii) якщо $i \notin \cup_{J \in \mathcal{J}} Inc(J)$, тоді b_i відповідає деякій точці на $\partial\Omega$ (вихідна дорога з мережі), і якщо $i \notin \cup_{J \in \mathcal{J}} Out(J)$, тоді a_i відповідає деякій точці на $\partial\Omega$ (вхідна в мережу дорога). Крім того, ці два випадки взаємно виключні.

2.3. Деякі положення про частково впорядкований простір $L^2(\Omega)$

Нехай Ω — мережа. Пов'яжемо з цією множиною дійсний простір $L^2(\Omega)$. Надалі, приймаючи позначення $y \in L^2(\Omega)$, вважаємо, що $y = (y_1, \dots, y_N)$ та $y_k \in L^2(I_k)$ для $k = 1, \dots, N$. Будемо вважати, що $L^2(\Omega)$, як топологічний простір, наділений слабкою топологією. Для підмножини $S \subset L^2(\Omega)$ позначимо через $int_{\omega} S$ та $cl_{\omega} S$ відповідно її внутрішність та замикання відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$. Також припустимо, що $L^2(\Omega)$ є частково впорядкованим за конусом додатних елементів Λ , який визначається як:

$$\Lambda = \{f \in L^2(\Omega); f(x) \geq 0 \text{ майже скрізь на } \Omega\}. \quad (2.1)$$

Тоді для елементів $y, z \in L^2(\Omega)$ будемо записувати $y \leq_{\Lambda} z$ усякий раз, коли $z \in y + \Lambda$, і $y <_{\Lambda} z$, якщо $z - y \in \Lambda \setminus \{0\}$. Будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ є не зростаючою та використовувати позначення $y_k \downarrow$ усякий раз, коли для всіх $k \in N$ маємо: $y_{k+1} \leq_{\Lambda} y_k$. Також будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(\Omega)$ є обмеженою знизу, якщо існує елемент $y^* \in L^2(\Omega)$ такий, що $y^* \leq_{\Lambda} y_k$ для $\forall k \in N$.

Для того, щоб означити "оптимальні" елементи для підмножини S частково упорядкованого простору $L^2(\Omega)$, скористаємося таким поняттям:

Означення 2.3. [12] Елемент $y^* \in S \subset L^2(\Omega)$ будемо називати максимальним елементом множини S , якщо не існує $y \in S$ такого, що $y \geq_{\Lambda} y^*$, $y \neq y^*$, тобто

$$S \cup (y^* + \Lambda) = y^*.$$

Позначимо через $Max_{\Lambda}(S)$ сукупність усіх максимальних елементів множини S . Введемо два додаткові елементи $-\infty_{\Lambda}$ і $+\infty_{\Lambda}$ у $L^2(\Omega)$. Припустимо, що ці елементи задовольняють такі умови:

$$1) -\infty_{\Lambda} \leq y \leq +\infty_{\Lambda}, \forall y \in L^2(\Omega); \quad 2) +\infty_{\Lambda} + (-\infty_{\Lambda}) = 0.$$

Позначимо через Y^* частково розширений простір Банаха: $Y^* = L^2(\Omega) \cup \{-\infty_\Lambda\}$, припускаючи, що

$$\|-\infty_\Lambda\|_{L^2(\Omega)} = +\infty \text{ і } y + \lambda(-\infty_\Lambda) = -\infty, \forall y \in L^2(\Omega), \forall \lambda \in R_+.$$

Означення 2.4. Будемо казати, що множина E є ефективним супремумом множини $S \subset L^2(\Omega)$ відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$ за конусом Λ (або скорочено (Λ, ω) -супремумом), якщо E є сукупністю усіх максимальних елементів множини $cl_\omega S$ у випадку, коли ця множина не є порожньою, і E дорівнює $+\infty_\Lambda$ інакше.

Надалі, (Λ, ω) -супремум для множини E будемо позначати як $Sup^{\Lambda, \omega} S$. Таким чином, з огляду на попереднє означення, маємо:

$$Sup^{\Lambda, \omega} S := \begin{cases} Max_\Lambda(cl_\omega S), & Max_\Lambda(cl_\omega S) \neq \emptyset, \\ +\infty_\Lambda, & Max_\Lambda(cl_\omega S) = \emptyset. \end{cases}$$

Нехай X_∂ не порожня підмножина банахового простору X та $I : X_\partial \rightarrow L^2(\Omega)$ — деяке відображення. Зауважимо, що відображення $I : X_\partial \rightarrow L^2(\Omega)$ можна пов'язати з його розширенням $\hat{I} : X \rightarrow Y^*$ на весь простір X , де

$$\hat{I} = \begin{cases} I(x), & x \in X_\partial \\ -\infty_\Lambda, & x \notin X_\partial. \end{cases} \quad (2.2)$$

Будемо казати, що відображення $I : X_\partial \rightarrow Y^*$ є обмеженим зверху, якщо існує елемент $z \in L^2(\Omega)$ такий, що $z \geq_\Lambda I(x)$ для всіх $x \in X_\partial$.

Означення 2.5. Підмножину $A \in L^2(\Omega)$ будемо називати ефективним супремумом відображення

$$I : X_\partial \rightarrow L^2(\Omega)$$

відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$ і позначати $Sup_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} I(x)$, якщо A є (Λ, ω) -супремумом образу $I(X_\partial)$ із X_∂ на $L^2(\Omega)$, тобто,

$$Sup_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} I(x) = Sup^{\Lambda, \omega} \{I(x) : \forall x \in X_\partial\}.$$

Зауваження 2.1. Тепер зрозуміло, що якщо $a \in Sup_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} I(x)$, то

$$cl_\omega \{I(x) : \forall x \in X_\partial\} \cap (a + \Lambda) = \{a\}$$

за умови, що $Max_\Lambda[cl_\omega \{I(x) : \forall x \in X_\partial\}] \neq \emptyset$.

Нехай $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ послідовність у просторі $L^2(\Omega)$. Позначимо через $L^\omega \{y_k\}$ множину всіх точок замикання відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega)$, тобто $y \in L^\omega \{y_k\}$, якщо існує підпослідовність $\{y_{k_i}\}_{i=1}^\infty \subset \{y_k\}_{k=1}^\infty$ така, що $y_{k_i} \rightarrow y$ у $L^2(\Omega)$ при $i \rightarrow \infty$. Якщо ця множина не є обмеженою зверху, тобто $Sup^{\Lambda, \omega} L^\omega \{y_k\} = +\infty_\Lambda$, то припускаємо, що $\{+\infty_\Lambda\} \in L^\omega \{y_k\}$. Зафіксуємо

елемент $x_0 \in X_\partial$. Тоді для довільного відображення $I : X_\partial \rightarrow L^2(\Omega)$ введемо до розгляду такі множини:

$$L^{\sigma \times \omega}(I, x_0) := \bigcup_{\{x_k\}_{k=1}^\infty \in \mathfrak{M}_\sigma(x_0)} L^\omega \left\{ \hat{I}(x_k) \right\}, \quad (2.3)$$

$$L_{\max}^{\sigma \times \omega}(I, x_0) := L^{\sigma \times \omega}(I, x_0) \cap \text{Sup}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} I(x), \quad (2.4)$$

де $\mathfrak{M}_\sigma(x_0)$ — це множина всіх послідовностей $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset X$ таких, що $x_k \rightarrow x_0$ відносно σ -топології простору X .

Означення 2.6. Будемо казати, що підмножина $A \subset L^2(\Omega) \cup \{\pm\infty_\Lambda\}$ є Λ -нижньою секвенціальною границею відображення $I : X_\partial \rightarrow L^2(\Omega)$ у точці $x_0 \in X_\partial$ відносно топології добутку $\sigma \times \omega$ простору $X \times L^2(\Omega)$ і використовувати позначення $A = \limsup_{x \xrightarrow{\sigma} x_0}^{\Lambda, \omega} I(x)$, якщо

$$\limsup_{x \xrightarrow{\sigma} x_0}^{\Lambda, \omega} I(x) := \begin{cases} L_{\max}^{\sigma \times \omega}(I, x_0), & L_{\max}^{\sigma \times \omega}(I, x_0) \neq \emptyset, \\ \text{Sup}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} L^{\sigma \times \omega}(I, x_0), & L_{\max}^{\sigma \times \omega}(I, x_0) = \emptyset. \end{cases} \quad (2.5)$$

Зауваження 2.2. У скалярному випадку ($I : X_\partial \rightarrow R$) множини

$$\text{Sup}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} I(x) \text{ та } \text{Sup}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} L^{\sigma \times \omega}(I, x_0)$$

містять тільки один елемент. Тому, якщо $L_{\max}^{\sigma \times \omega}(I, x_0) \neq \emptyset$, то маємо:

$$\begin{aligned} L_{\max}^{\sigma \times \omega}(I, x_0) &= L^{\sigma \times \omega}(I, x_0) \cap \text{Sup}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} I(x) = \\ &= \text{Sup}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} L^{\sigma \times \omega}(I, x_0) \cap \text{Sup}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} I(x) = \text{Sup}_{x \in X_\partial}^{\Lambda, \omega} L^{\sigma \times \omega}(I, x_0). \end{aligned}$$

Отже, у цьому випадку правило (2.5) дає класичне означення нижньої границі.

3. Постановка задачі

Нехай $\Omega = (\mathcal{I}, \mathcal{J})$ — транспортна мережа, яка налічує N доріг. Для $i \in \{1, \dots, N\}$ дорога I_i відповідає відрізку $[a_i, b_i]$. Позначимо через $\rho_i = \rho_i(t, x)$ щільність машин на дорозі I_i в точці $x \in [a_i, b_i]$, $t \in [0, T]$; при цьому максимально можливу щільність на дорозі, котра відповідає появі затору на даній ділянці мережі, позначимо як $\rho_{\max, i}$. Припустимо, що дороги даної мережі відповідають ребрам графу \mathfrak{F} , обмеженого областю Ω , а вузли, які з'єднують дороги, — вершинам цього графу. Припускається, що на кожному ребрі мережі динаміка руху описується нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних першого порядку:

$$\partial_t \rho_i(t, x) + \partial_x f_i(\rho_i(t, x)) = u_i, \quad (t, x) \in (0, T) \times (a_i, b_i) \equiv \Omega_{i, T}, \quad (3.1)$$

з початковими умовами:

$$\rho_i(0, x) = \bar{\rho}_i(x), \quad \forall x \in (a_i, b_i), \quad (3.2)$$

де $f(\rho) = \rho v$ — транспортний потік (кількість машин, що проїжджають за одиницю часу), через $v(\rho)$ позначено швидкість машин, а u_i — функції керування. Слід зауважити, що $v(\rho)$ є спадною функцією щільності ρ . При цьому, f_i мають задовольняти такі умови (див. [8, 11]):

$$\begin{cases} f_i \text{ неперервно диференційовані на } [0, \rho_{\max, i}], \\ f_i(0) = f_i(\rho_{\max, i}) = 0, \\ f_i \text{ — строго угнуті функції,} \\ \exists \sigma \in (0, \rho_{\max, i}) : f'_i(\sigma_i) = 0 \text{ та } (\rho - \sigma_i)f'_i(\rho) < 0, \forall \rho \neq \sigma_i. \end{cases} \quad (3.3)$$

Як витікає з наведених вище умов, транспортний потік є додатним для $0 < \rho_i < \rho_{\max, i}$. Тут σ_i — оптимальна щільність, при якій транспортний потік досягає свого максимального значення.

Вважається, що у кожному вузлі J з n вхідними ребрами I_1, \dots, I_n та m вихідними ребрами I_{n+1}, \dots, I_{n+m} виконується умова балансу:

$$\sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(t, b_i)) = \sum_{i=n+1}^{n+m} f_i(\rho_i(t, a_i)). \quad (3.4)$$

Проте виконання цієї умови не є достатнім для визначення єдиного розв'язку задачі Коші (3.1)–(3.3) на мережі. Тому, залучаючи підхід Coclite, Gavêlo та Piccoli (див. [8]), припустимо, що у кожному вузлі J мережі задана так звана матриця розподілу руху $A(J) \in R^{n+m}$ така, що

$$A(J) = [\alpha_{ji}(J)], \quad j \in \{n+1, \dots, n+m\}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \alpha_{ji}(J) \neq \alpha_{j'i'}(J), \quad \forall i \neq i', \quad 0 < \alpha_{ji}(J) < 1, \\ \sum_{j=n+1}^{n+m} \alpha_{ji}(J) = 1 \text{ для кожного } i \in \{1, \dots, n\}. \end{cases} \quad (3.6)$$

та виконується ентропійна умова Кружкова (див. [13]) на мережі. За цих припущень можна гарантувати існування та єдиність слабого розв'язку задачі Коші в класі функцій з обмеженою повною варіацією, де під розв'язком цієї задачі будемо розуміти таке:

Означення 3.1. Нехай J — вузол з n вхідними дорогами I_1, \dots, I_n з кінцем у вузлі b_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) та m вихідними дорогами I_{n+1}, \dots, I_{n+m} з кінцем a_i ($i \in \{n+1, \dots, n+m\}$). Нехай задано функції $\bar{\rho}_i \in L^\infty(I_i) \cap BV(I_i)$, $i \in \{1, \dots, N\}$, які задають початкову щільність на мережі. Будемо казати, що сукупність функцій

$$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) : \prod_{i=1}^N ([0, T] \times I_i) \rightarrow R^N,$$

де

$$\rho_i \in L^\infty((0, T); BV(I_i)), \quad i \in \{1, \dots, N\},$$

є допустимим розв'язком задачі (3.1)–(3.6), якщо:

(а): $\rho_i : [0, T] \times I_i \rightarrow R$ є слабким ентропійним розв'язком задачі (3.1)–(3.2) на I_i , тобто

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i \partial_t \varphi + f_i(\rho_i) \partial_x \varphi) dx dt = \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} u_i dx dt, \quad (3.7)$$

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (|\rho_i - k| \partial_t \tilde{\varphi} + \operatorname{sgn}(\rho_i - k)(f_i(\rho_i) - f_i(k)) \partial_x \tilde{\varphi}) dx dt \geq 0 \quad (3.8)$$

для довільної гладкої функції $\varphi : [0, T] \times I_i \rightarrow R$ з компактним носієм на множині $(0, T) \times (a_i, b_i)$ для $k \in R$ та для довільної гладкої додатної функції $\tilde{\varphi} : [0, T] \times I_i \rightarrow R$ з компактним носієм на $(0, T) \times (a_i, b_i)$;

(б): $\rho_i(0, \cdot) = \bar{\rho}_i$ на I_i для $\forall i \in \{1, \dots, N\}$;

(в): $f_j(\rho_j(\cdot, \alpha_j +)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} f_i(\rho_i(\cdot, b_i -))$ для $\forall J \in \mathcal{J}, \forall j = n+1, \dots, n+m$;

(г): $L(J, u^k, \rho) := \sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(\cdot, b_i -))$ досягає максимального значення на парі (u^k, ρ) при обмеженнях (а)–(в).

Має місце наступна теорема, доведення якої можна знайти в [8]. При цьому під мережею доріг Ω будемо розуміти таке: $\Omega = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_N, b_N)$.

Теорема 3.1. *Зафіксуємо мережу доріг Ω , яка складається зі скінченної сукупності ребер та вузлів. Нехай $C > 0, T > 0$, тоді існує допустимий ентропійний розв'язок задачі Коші (3.1)–(3.6), визначений на $(0, T)$ для будь-яких початкових умов $\bar{\rho} \in cl\{\rho : TV(\rho) \leq \theta\}$, де через cl позначено замикання в L^1_{loc} , такий, що*

$$\|\rho_i(t)\|_{BV(I_i)} \leq C_1 (\|\bar{\rho}\|_{L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)} + \|u\|_{L^1(0, T; BV(\Omega))}) e^{C_2 t}, \quad \forall t \in (0, T), \quad (3.9)$$

при деяких $C_1 > 0$ та $C_2 > 0$ (див. [16]).

Пов'яжемо із задачею (3.1)–(3.6) наступну задачу векторної оптимізації:

$$\begin{cases} \text{знайти } u^* \in U_{ad} \text{ такі, що} \\ F(\rho(u^*), u^*) \in \operatorname{Sup}_{u \in U_{ad}}^{\Lambda, \omega} F(\rho, u), \end{cases} \quad (3.10)$$

де $F(\rho, u) = \sum_{i=1}^n |\rho_i(t, x) - \rho_{i,d}(x)|$, Λ — упорядкований конус додатних елементів у просторі $X = L^2(\Omega_{1,T}) \times \dots \times L^2(\Omega_{N,T})$, де ω — слабка топологія простору X , $u = (u_1, \dots, u_N)$ — функції керування транспортним потоком, які задані на ребрах мережі, та $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N)$ — відповідний ентропійний розв'язок задачі Коші (3.1)–(3.6).

Припускається, що функції керування $u_i, i = \{1, \dots, N\}$ належать множині $U = \prod_{i=1}^N L^\infty(\Omega_{i,T})$, і виконуються такі умови:

(A1): $f = (f_1, \dots, f_N) : R \rightarrow R^N$ — локально ліпшицева функція;

(A2): множиною допустимих керувань U_{ad} виступає обмежена підмножина в U , яка є замкненою в $L^1(\Omega_{1,T}) \times \dots \times L^1(\Omega_{N,T})$.

За таку множину допустимих керувань візьмемо множину функцій, які є обмеженими майже скрізь та мають обмежену повну варіацію, тобто

$$\tilde{U}_{ad} = \left\{ u \in \prod_{i=1}^N (L^\infty(\Omega_{i,T}) \cap BV(\Omega_{i,T})), \|u_i\|_{L^\infty(\Omega_{i,T})} \leq c_i, \|u_i\|_{BV(\Omega_{i,T})} \leq d_i \right\}. \quad (3.11)$$

Покажемо, що будь-яка послідовність $\{u^k = (u_1^k, \dots, u_n^k)\}_{k=1}^\infty \subset \tilde{U}_{ad}$ містить підпослідовність, яка збігається сильно до деякого $u^* \in \tilde{U}_{ad}$ в $L^1(\Omega_{1,T}) \times \dots \times L^1(\Omega_{N,T})$.

Для зручності введемо такі позначення:

$$v = (v_1, \dots, v_N), \quad \Omega_T = \Omega_{1,T} \times \dots \times \Omega_{N,T},$$

$$L^1(\Omega_T) = L^1(\Omega_{1,T}) \times \dots \times L^1(\Omega_{N,T}),$$

$$\|v\|_{L^1(\Omega_T)} = \sum_{i=1}^N \|v_i\|_{L^1(\Omega_{i,T})}.$$

Розглянемо послідовність $\{v^k\}_{k=1}^\infty \subset L^\infty(\Omega_T) \cup BV(\Omega_T)$ з наступними властивостями: $\|v_i^k\|_{L^\infty(\Omega_{i,T})} \leq c_i$, $\|v_i^k\|_{BV(\Omega_{i,T})} \leq d_i$ для $\forall i = \{1, \dots, N\}$. Тоді $\{v^k\}_{k=1}^\infty \subset L^1(\Omega_T)$, оскільки

$$\|v^k\|_{L^1(\Omega_T)} = \int_{\Omega_T} |v^k| \, dx \, dt \leq \sup_{x \in \Omega_T} |v^k| \int_{\Omega_T} dx \, dt = \|v^k\|_{L^\infty(\Omega_T)} \mu(\Omega_T) < \infty.$$

За критерієм компактності BV -функцій, маємо: $v^k \rightarrow v^*$ в $L^1(\Omega_T)$, тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v^k - v^*\|_{L^1(\Omega_T)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_T} |v^k - v^*| \, dx \, dt = 0.$$

З іншого боку, $\{v^k\}_{k=1}^\infty$ утворюють обмежену множину в $L^\infty(\Omega_T)$. Отже, за теоремою Банаха – Алаоглу, знайдеться елемент $v^0 \in L^\infty(\Omega_T)$ такий, що $v^k \overset{*}{\rightharpoonup} v^0$. Це означає, що для $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega_T} v^k \varphi \, dx \, dt = \int_{\Omega_T} v^0 \varphi \, dx \, dt,$$

тобто

$$\int_{\Omega_T} \varphi (v^k - v^0) \, dx \, dt \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

При цьому

$$\|v^0\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|v^k\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leq c_i.$$

Покажемо, що $v^k = v^0$. Маємо:

$$0 \leq \left| \int_{\Omega_T} (v^0 - v^*) \varphi \, dx \right| \leq \left| \int_{\Omega_T} (v^0 - v^k) \varphi \, dx \right| + \left| \int_{\Omega_T} (v^k - v^*) \varphi \, dx \right|.$$

Залучаючи (3.12) та той факт, що

$$\left| \int_{\Omega_T} (v^k - v^*) \varphi \, dx \right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega_T)} \int_{\Omega_T} |v^k - v^*| \, dx dt \rightarrow 0,$$

отримуємо:

$$\int_{\Omega_T} (v^0 - v^*) \varphi \, dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_T).$$

Отже, $v^0 = v^*$ майже скрізь на Ω_T , тобто $v^* \in L^\infty(\Omega_T)$. Покажемо, що $v^* \in BV(\Omega_T)$. Оскільки $\{v^k\}_{k=1}^\infty \in BV(\Omega_T)$ і $\|v^k\| \leq d_i$, то за критерієм компактності (див. теорему 1) існує елемент $\hat{v} \in BV(\Omega_T)$ такий, що $v^k \rightarrow \hat{v}$ сильно в $L^1(\Omega_T)$ і $\|\hat{v}\|_{BV(\Omega_T)} \leq d_i$. Звідси отримуємо, що $v^* = \hat{v} \Rightarrow v^* \in BV(\Omega_T)$ і

$$\|v^*\|_{BV(\Omega_T)} \leq d_i.$$

Означення 3.2. Будемо казати, що задача (3.10) є регулярною, якщо для заданої сукупності функцій потоку $f = (f_1, \dots, f_N)$ з властивостями (3.3) існує пара

$$(u, \rho) \in \tilde{U}_{ad} \times L^\infty((0, T); BV(\Omega)),$$

де $\rho = \rho(u)$ — відповідний розв'язок задачі (3.1)–(3.6) і такий, що $F(u, \rho) >_\Lambda z$ для деякого елемента $z \in L^2(\Omega_T)$.

Позначимо через Ξ множину всіх допустимих пар задачі (3.1)–(3.10). Очевидно, що $\Xi \subset \tilde{U}_{ad} \times C(0, T; L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega))$.

Означення 3.3. Допустиму пару $(u^{eff}, \rho^{eff}) \in \Xi$ будемо називати (Λ, ω) -ефективним розв'язком задачі (3.1)–(3.10), якщо пара (u^{eff}, ρ^{eff}) реалізує (Λ, ω) -супремум відображення $F : \Xi \rightarrow L^2(\Omega_T)$, тобто

$$F(u^{eff}, \rho^{eff}) \in \text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho) = \text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} \{F(u, \rho) : \forall (u, \rho) \in \Xi\}.$$

Позначимо через $Eff(\Xi; F; \Lambda)$ множину всіх (Λ, ω) -ефективних розв'язків задачі (3.1–3.10), тобто

$$Eff(\Xi; F; \Lambda) = \left\{ (u^{eff}, \rho^{eff}) \in \Xi : F(u^{eff}, \rho^{eff}) \in \text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho) \right\}.$$

Тепер дамо наступний результат стосовно топологічних властивостей множини допустимих пар Ξ задачі (3.10). Нехай τ — топологія на

$$Y = \tilde{U}_{ad} \times L^2(0, T; BV(\Omega)),$$

яка задана як добуток сильної збіжності в $L^1(\Omega_T)$ та слабкої топології в просторі $L^2(0, T; BV(\Omega))$. Тоді має місце теорема:

Теорема 3.2. Нехай $\{(u^k, \rho^k) \in \Xi\}_{k=1}^\infty$ довільна послідовність допустимих пар у задачі (3.1–3.10). Тоді знайдеться пара $(u^*, \rho^*) \in Y$ і підпослідовність даної послідовності (для якої збережемо попередні позначення) такі, що

$$(u^*, \rho^*) \in \Xi, \quad (u^k, \rho^k) \xrightarrow{\tau} (u^*, \rho^*),$$

тобто множина Ξ є секвенційно компактною відносно τ -збіжності.

Доведення. Нехай $\{(u^k, \rho^k)\}_{k=1}^\infty \subset \Sigma$ — довільна послідовність. Як випливає з (3.11) та наведеного вище аналізу, знайдеться елемент $u^* \in \tilde{U}_{ad}$ такий, що з точністю до підпослідовності маємо:

$$u^k \rightarrow u^* \text{ в } L^1(\Omega_T),$$

$$u^k \overset{*}{\rightharpoonup} u^* \text{ в } L^\infty(\Omega_T).$$

Далі, залучаючи априорну оцінку (3.9) та оцінки з (3.11), отримуємо, що послідовність $\{\|\rho^k\|_{L^\infty((0, T); BV(\Omega))}\}_{k \in N}$ є рівномірно обмеженою. Отже, за теоремою Банаха – Алаоглу та властивостей BV -просторів можемо вважати, що знайдеться елемент $\rho^* \in L^\infty((0, T); BV(\Omega))$ такий, що (з точністю до підпослідовності):

$$\rho^k \rightarrow \rho^* \text{ в } L^1(\Omega) \text{ майже скрізь на } (0, T)$$

та

$$\rho^k \overset{*}{\rightharpoonup} \rho^* \text{ в } L^\infty((0, T); L^1(\Omega)).$$

Покажемо, що $(u^*, \rho^*) \in \Sigma$. Оскільки $u^* \in \tilde{U}_{ad}$, то залишається показати, що пара (u^*, ρ^*) задовольняє співвідношення (3.7), (3.8) та умови (б)–(г) з означення (3.1). Тоді, в силу теореми існування (3.1), отримаємо, що

$$\rho^* = (\rho_1^*, \dots, \rho_N^*) : \prod_{i=1}^N ([0, T] \times I_i) \rightarrow R^N$$

буде єдиним ентропійним розв’язком задачі (3.1)–(3.6) в $L^\infty(0, T; BV(\Omega))$ при $u = u^*$. Розглянемо співвідношення 3.7), (3.8) та умови (б)–(г) з $u = u^k, \rho = \rho^k$ та вивчимо їх граничні властивості при $k \rightarrow \infty$. Оскільки функції потоку $f = (f_1, \dots, f_N)$ задовольняють умову (3.3), $v(\rho)$ неперервно спадна функція на $[0, \rho_{max,i}]$, $\rho^k \overset{*}{\rightharpoonup} \rho^*$ в $L^2(0, T; BV(\Omega))$ та $\rho^k(t, \cdot) \rightarrow \rho^*(t, \cdot)$ сильно в просторі $L^1(\Omega_T)$ для $\forall t \in [0, T]$, то, переходячи до границі у співвідношеннях

$$0 \leq v(\rho_i^k) \leq v_{max,i} \text{ для } \forall i \in \{1, \dots, N\}, \tag{3.13}$$

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_i^k \partial_t \varphi + f_i(\rho_i^k) \partial_x \varphi) dx dt = u_i^k, \forall \varphi \in C_0^\infty((0, T) \times (a_i, b_i)), \forall i \in \mathcal{J}, \tag{3.14}$$

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (|\rho_i^k - d| \partial_t \tilde{\varphi} + \text{sgn}(\rho_i^k - d)(f_i(\rho_i^k) - f_i(d)) \partial_x \tilde{\varphi}) dx dt \geq 0, \\ \forall d \in R, \forall \tilde{\varphi} \in C_0^\infty((0, T) \times (a_i, b_i)), \tilde{\varphi} \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, N\}, \end{cases} \tag{3.15}$$

$$\rho_i^k = \bar{\rho}_i(\cdot) \text{ на } I_i \text{ для } \forall i \in \{1, \dots, N\}, \tag{3.16}$$

$$f_j(\rho_j^k(\cdot, a_j+)) = \sum_{i=1}^n f_i(\rho_i^k(\cdot, b_i-)) \text{ для } \forall j = n+1, \dots, n+m, \tag{3.17}$$

при $k \rightarrow \infty$, отримаємо співвідношення (3.7), (3.8) та умови (б)–(г) з $u = u^*$, $\rho = \rho^*$. Тепер для довільного вузла $J \in \mathcal{J}$ доведемо, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(\rho_i^k(\cdot, b_i^-)) \right\} \text{ досягає } \max \text{ за умов (3.13)–(3.17)} = \\ = \sum_{i=1}^n f_i(\rho_i^*(\cdot, b_i^-)) \text{ досягає максимального значення на парі } (u^*, \rho^*) \quad (3.18)$$

за умов (3.7), (3.8), (б)–(г) та для $\forall J \in \mathcal{J}$. Для цього скористаємося варіаційними властивостями Γ -граничних функціоналів (див. [7]). Оскільки функція $\tilde{L}(J, u^k, \rho) := -\sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(\cdot, b_i^-))$ є замкнутою відносно τ -збіжності, тобто $\lim_{l \rightarrow \infty} \tilde{L}(J, u^l, \rho^l) = \tilde{L}(J, u, \rho)$ для довільної послідовності $\{(u^l, \rho^l)\}_{l=1}^\infty$, τ -збіжної до (u, ρ) , то звідси випливає, що ця функція замкнена відносно $\Gamma(\tau)$ -збіжності. Тому співвідношення (3.18) — це прямий результат варіаційних властивостей $\Gamma(\tau)$ -границь. Таким чином, τ -гранична пара (u^*, ρ^*) є допустимою парою задачі (3.1)–(3.10). Теорема доведена. \square

4. Теорема існування

Нехай $\hat{F} : [\tilde{U}_{ad} \times L^\infty(0, T; BV(\Omega))] \rightarrow Y^*$ — деяке розширення відображення $F : \Xi \rightarrow L^2(\Omega_T)$ на весь простір $\tilde{U}_{ad} \times L^2(0, T; BV(\Omega))$. Тут через Y^* позначено частково розширений простір Банаха $L^2(\Omega_T) \cup \{-\infty_\Lambda\}$.

Означення 4.1. Будемо казати, що відображення $F : \Xi \rightarrow L^2(\Omega_T) \in (\Lambda, \tau \times \omega)$ -півнеперервним зверху (($\Lambda, \tau \times \omega$)-нн. зв.) у точці $(u^0, \rho^0) \in \Xi$, якщо

$$F(u^0, \rho^0) \in \limsup_{(u, \rho) \xrightarrow{\tau} (u^0, \rho^0)}^{\Lambda, \omega} \hat{F}(u, \rho)$$

Відображення $F \in (\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв. на множині Ξ , якщо $F \in (\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв. на кожній парі з Ξ .

Твердження 4.1. Припустимо, що простір керування $L^2(\Omega_T)$ частково впорядкований за конусом додатних елементів Λ . Нехай Ξ непорожня підмножина з простору $\tilde{U}_{ad} \times L^2(0, T; BV(\Omega))$ і $F : \Xi \rightarrow L^2(\Omega_T)$ — задане відображення. Якщо $(u^0, \rho^0) \in \Xi$ є довільним (Λ, ω)-ефективним розв'язком задачі (3.1)–(3.10), то відображення $F : \Xi \rightarrow L^2(\Omega_T) \in (\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв. на цій парі.

Доведення. Нехай $(u^0, \rho^0) \in \text{Eff}_\omega(\Xi; F; \Lambda)$. Тоді $F(u^0, \rho^0) \in \text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho)$. З іншого боку, $F(u^0, \rho^0) \in L^{\tau \times \omega}(F, u^0, \rho^0)$, тому $F(u^0, \rho^0) \in L_{\max}^{\tau \times \omega}(F, u^0, \rho^0)$. Звідси, згідно з означенням (2.6), маємо: $F(u^0, \rho^0) \in \limsup_{(u, \rho) \xrightarrow{\tau} (u^0, \rho^0)}^{\Lambda, \omega} \hat{F}(u, \rho)$, що й доводить твердження. \square

Зауважимо, що конус додатних елементів Λ у просторі $L^2(\Omega_T)$ задовольняє так звану властивість Даніеля, яка означає, що кожна зростаюча та обмежена зверху послідовність (тобто якщо $i \leq j \Rightarrow y_i \leq_\Lambda y_j$) слабо збігається до свого (Λ, ω)-супремума.

Означення 4.2. Будемо казати, що непорожня підмножина $Y_0 \subset L^2(\Omega_T)$ з упорядкованим конусом Λ є напівобмеженою зверху, якщо кожна зростаюча послідовність $\{y_k\} \subset Y_0$ є обмеженою зверху.

Зауваження 4.1. Нехай Y_0 — напівобмежена зверху підмножина частково впорядкованого лінійного простору $\langle L^2(\Omega_T), \Lambda \rangle$. Тоді для довільного елемента $z \in Y_0$ перетин $Y_0^z = (\{z\} + \Lambda) \cap Y_0$ буде обмеженим зверху, тобто існує елемент $z^* \in L^2(\Omega)$ такий, що $z^* \leq_\Lambda y$ для всіх $y \in Y_0^z$. Отже, напівобмеженість зверху підмножини Y_0 означає напівобмеженість зверху її слабого замикання $cl_\omega Y_0$. З іншого боку, порівняно зі скалярним випадком для векторної оптимізаційної задачі (3.1)–(3.10) із секвенційно τ -компактною підмножиною Ξ та $(\Lambda, \tau \times \omega)$ -півнеперервним зверху цільовим відображенням $F : \Xi \rightarrow L^2(\Omega_T)$ множина образів $F(\Xi)$ може бути необмеженою зверху. Це означає, що у загальному випадку не існує елемента $y \in L^2(\Omega)$ такого, що $F(\Xi) \subset \{y^*\} - \Lambda$.

Тепер перейдемо до формулювання та доведення основного результату даної роботи.

Теорема 4.1. Припустимо, що задача векторної оптимізації (3.1)–(3.10) є регулярною. Нехай задано $(\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв. відображення $F : \Xi \rightarrow L^2(\Omega_T)$. Тоді задача (3.1)–(3.10) має непорожню підмножину (Λ, ω) -ефективних розв'язків.

Доведення. Крок 1. Покажемо, що множина образів $F(\Xi)$ є напівобмеженою зверху у сенсі означення (4.2). Припустимо протилежне, а саме: нехай існує послідовність $\{(u^k, \rho^k)\}_{k=1}^\infty \in \Xi$ така, що відповідна послідовність образів $\{y^k = F(u^k, \rho^k)\}_{k=1}^\infty \in F(\Xi)$ є зростаючою (тобто $y_k \leq_\Lambda y_{k+1}$ для $\forall k \in N$) та необмеженою зверху в просторі $L^2(\Omega_T)$. Тому $\infty_\Lambda \in L^\omega \{y_k\}$, де через $L^\omega \{y_k\}$ позначено множину всіх точок замикання відносно слабкої топології простору $L^2(\Omega_T)$. Згідно з теоремою (3.2), послідовність $\{(u^k, \rho^k)\}_{k=1}^\infty \in X_\emptyset$ є секвенційно τ -компактною. Тому можемо вважати, що $(u^k, \rho^k) \xrightarrow{\tau} (u^*, \rho^*)$ у $\tilde{U}_{ad} \times L^2(0, T; BV(\Omega_T))$, де (u^*, ρ^*) — деяка пара з множини Ξ . Оскільки послідовність $\{F(u^k, \rho^k)\}_{k=1}^\infty$ не обмежена зверху, то $\{\infty_\Lambda\} \in L^{\tau \times \omega}_{\max}(F, u^*, \rho^*)$. Тому, згідно з означенням (2.6), маємо: $\limsup_{(u, \rho) \xrightarrow{\tau} (u^0, \rho^0)}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho) = \{\infty_\Lambda\}$. З іншого боку, беручи до уваги $(\Lambda, \tau \times \omega)$ -півнеперервність зверху відображення F , отримаємо: $F(u^*, \rho^*) \in \limsup_{(u, \rho) \xrightarrow{\tau} (u^0, \rho^0)}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho)$, що суперечить попередньому припущенню. Крок 1 доведено.

Крок 2. Покажемо, що множина $\text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho)$ є непорожньою. Для цього покажемо, що існує принаймні одна зростаюча послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset F(\Xi)$ така, що $y_k \rightarrow y^*$ і

$$y^* \in \text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho) = \text{Sup}^{\Lambda, \omega} \{F(u, \rho) : \forall (u, \rho) \in \Xi\}.$$

Нехай y — довільний елемент множини $cl_\omega F(\Xi)$. Спочатку покажемо, що для довільного околу нуля v_ω у слабкій топології простору $L^2(\Omega_T)$ існує елемент

$y^\nu \in \text{cl}_\omega F(\Xi)$ такий, що

$$y \leq_\Lambda y^\nu \text{ та } (\{y^\nu\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\text{cl}_\omega F(\Xi) \setminus (\nu_\omega + \{y^\nu\})) = \emptyset. \quad (4.1)$$

Припустимо протилежне. Нехай існує послідовність $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset \text{cl}_\omega F(\Xi)$ така, що $y_1 \in F(\Xi)$, $y_{k+1} \in (\{y_k\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\text{cl}_\omega F(\Xi) \setminus (\nu_\omega + \{y_k\})) \quad \forall k \in N$. Оскільки $y_{k+1} \in \{y_k\} + \Lambda \setminus \{0\}$, то ця послідовність є спадною. Беручи до уваги зауваження (4.1), отримуємо, що множина $\text{cl}_\omega F(\Xi)$ є напівобмеженою зверху. Отже, існує елемент $y^* \in L^2(\Omega_T)$ такий, що $y_k \leq_\Lambda y^*$ для всіх $k \in N$. Тому, згідно з властивістю Даниеля, ця послідовність слабо збігається до свого (Λ, ω) -супремума: $y_k \rightharpoonup \tilde{y} \in L^2(\Omega_T)$. Проте це суперечить умові, що $y_{k+1} \in \text{cl}_\omega F(\Xi) \setminus (\nu_\omega + \{y^\nu\}) \quad k \in N$. Таким чином, вибір за допомогою правила (4.1) можливий для будь-якого околу ν_ω .

Нехай $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ — система слабких околів нуля у просторі $L^2(\Omega_T)$ така, що $\nu_{k+1} \subset \nu_k$ для всіх $k \in N$, і для будь-якого слабого околу $\nu(0)$ в $L^2(\Omega_T)$ існує номер $k^* \in N$ такий, що $\nu_{k^*} \subseteq \nu(0)$. Тоді, використовуючи вибране правило (4.1), можемо побудувати послідовність $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty \subset \text{cl}_\omega F(\Xi)$, де η_1 — це довільний елемент з множини $F(\Xi)$, таким чином:

$$\eta_{k-1} \leq_\Lambda \eta_k \text{ і } (\{\eta_k\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\text{cl}_\omega F(\Xi) \setminus (\nu_k + \{\eta_k\})) = \emptyset \quad \forall k \geq 2. \quad (4.2)$$

Тому, з огляду на властивість Даниеля, $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty \in \tau$ -збіжною зростаючою послідовністю. Звідси отримуємо, що існує елемент

$$\eta^* \in \text{Sup}^{\Lambda, \omega} \{\eta_k \in \text{cl}_\omega F(\Xi) : \forall k \in N\}$$

такий, що $\eta_k \rightarrow \eta^*$. Очевидно, що $\eta^* \in \text{cl}_\omega F(\Xi)$. Доведемо, що

$$\eta^* \in \text{Sup}^{\Lambda, \omega} \{F(u, \rho) : \forall (u, \rho) \in \Xi\}.$$

Припустимо, що існує елемент $q \in \text{Sup}^{\Lambda, \omega} \{F(u, \rho) : \forall (u, \rho) \in \Xi\}$ такий, що $\eta^* \leq_\Lambda q$. Оскільки $\eta_k \leq_\Lambda \eta^*$ для $\forall k \in N$, то отримуємо, що $\eta_k \leq_\Lambda q$ для $\forall k \in N$. Тоді умова (4.2) гарантує, що

$$(\{q\} + \Lambda \setminus \{0\}) \cap (\text{cl}_\omega F(\Xi) \setminus (\nu_k + \{\eta_k\})) = \emptyset \quad \forall k \in N. \quad (4.3)$$

Отже, з умови (4.3) та з того, що $q \in \text{cl}_\omega F(\Xi)$, випливає: $q \in \nu_k + \{\eta_k\}$ для $\forall k \in N$, тобто $\eta_k \rightarrow q$ у просторі $L^2(\Omega_T)$. Таким чином, $\eta^* = q$.

Крок 3. Покажемо, що множина всіх (Λ, ω) -ефективних розв'язків задачі (3.1)–(3.10) не є порожньою. Нехай ξ — будь-який елемент із множини $\text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho)$. Тоді, згідно з означенням (2.5), існує послідовність пар $\{y_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(\Omega_T)$ така, що $y_k \rightarrow \xi$ в $L^2(\Omega_T)$. Означимо послідовність $\{(u^k, \rho^k)\}_{k=1}^\infty \in \Xi$ як: $(u^k, \rho^k) = F^{-1}(y_k)$ для всіх $k \in N$. Оскільки множина Ξ є секвенційно τ -компактною (див. теорему 3.2), то будемо вважати, що існує пара $(u^0, \rho^0) \in \Xi : (u^k, \rho^k) \xrightarrow{\tau}$ в Y . Тому $\xi \in L^{\tau \times \omega}(F, u^0, \rho^0)$, і отримуємо, що $L^{\tau \times \omega}(F, u^0, \rho^0) \cap \text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho) \neq \emptyset$. Тоді, в силу $(\Lambda, \tau \times \omega)$ -нн. зв. відображення F на Ξ та означення (2.6), маємо:

$$F(u^0, \rho^0) \in \text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho) = L^{\tau \times \omega}(F, u^0, \rho^0) \cap \text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho).$$

Таким чином, з одного боку, $F(u^0, \rho^0) \in L^{\tau \times \omega}(F, u^0, \rho^0)$, звідки випливає рівність $F(u^0, \rho^0) = \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$. З іншого боку, $\xi \in \text{Sup}_{(u, \rho) \in \Xi}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho)$. Отже, $(u^0, \rho^0) \in \text{Eff}_{\omega}(\Xi; F; \Lambda)$. Теорема повністю доведена. \square

Бібліографічні посилання

1. Божанова Т. А. Об одной задаче Коши на транспортных сетях / Т. А. Божанова // 36. наук. праць "Питання прикладної математики і математичного моделювання". — ДНУ, 2009. — С. 51–63.
2. Bardos C., Leroux A. Y., Nedeles J. C. First-order quasilinear equations with boundary conditions // Communications in Partial Differential Equations — 4(1979). — p. 1017–1034.
3. Caascione A., D'Apice C., Piccoli B., Rarita L. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences // SIAM Journal on Mathematical Analysis — 17(2007). — № 10 — p. 1587–1617.
4. Caascione A., D'Apice C., Rarita L. Circulation of car traffic in congested urban areas // Preprint DIIMA— Università degli Studi di Salerno (2006). — № 22 — p. 1–31.
5. Coclite G. M., Piccoli B. Traffic Flows on a Road Network. — SISSA, Preprint. — 2002.
6. Coclite G. M., Garavello M., Piccoli B. Traffic Flow on Networks // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 36(2005). — p. 1862–1886.
7. Dal Maso G. An Introduction to Γ -Convergence, Birkhäuser, Boston, 1993.
8. Garavello M., Piccoli B. Traffic Flow on Networks // AIMS Series on Appl. Math. — Vol. 1 — 2006.
9. Guisti E. Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation. // Boston: Birkhäuser. — 1984.
10. Gugat M., Herty M., Klar A., Leugering G. Optimal Control for Traffic Flow Networks // Journal of optimization theory and applications. — 126(2005). — p. 589–616.
11. Holden H., Riserbo N. H. A mathematical model of traffic flow on a network of unidirectional roads // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 4(1995). — p. 999–1017.
12. Jahn J. Vector Optimization: Theory, Applications and Extensions. — Berlin: Springer-Verlag, 2004. — 400 p.
13. Kruzhkov S. First-order quasilinear equations in several independent variables // Math. USSR Sbornic. — 10(1970). — p. 217–243.
14. Lebecque J., Khoshyaran M. First-order macroscopic traffic models for network in the context of dynamic assignment // In Transportation Planning-State of the Art, M. Patriksson and K.A.P. Labbe, eds. — 2002.
15. Lighthill M. L., Whitham J. B. On kinetic waves // Proceedings of Royal Society of Edinburg. — 229A (1983). — p. 217–243.
16. Ulbrich S. Optimal Control of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws with Source Terms. // Fakultät für Mathematik. Technische Universität München. — 2001.

УДК 536.24

SOME NON-STANDARD STATEMENTS OF INVERSE PROBLEMS

Yu. L. Menshikov

*Mechanics and Mathematics Faculty of Dnipropetrovsk National University,
Dnepropetrovsk, 49010, Gagarina av. 72**E-mail: Menshikov2003@list.ru*

In this paper we study the inverse problems which can not be solved in the classical framework: Krylov inverse problem, early diagnostics of a rotor unbalance, the most probable solution. For obtaining the steady solutions of these problems some algorithms based on the method of Tikhonov regularization are offered. Krylov inverse problem in various statements has been considered and numerical calculation on real measurements has been executed. Non-standard statements of inverse problems extend of regularization method possibilities.

Key words: identification of parameters, determinate statement, steady model.

1. Introduction

Intensive development of methods of the solution of inverse problems had begun after fundamental works of A.N.Tikhonov and scientific school which was created by him [1,2]. It is difficult to find an area of scientific researches where the inverse problems would not be examined. The essential progress are available in tomography [3], in processing of the images [4], in the non-destroying control [5], in finance [6], in inverse problems for the wave equations [7] and many other areas [8]. As a result the inverse problems arise which can not be investigated in standard setting. We shall consider a wide class of inverse problems for which their solutions can be reduced to the solutions of the linear equation

$$A_p z = u_\delta, \quad (1.1)$$

where $z \in Z, u_\delta \in U; Z, U$ are functional spaces, $A_p : Z \rightarrow U$. The operator A_p is assumed to be compact. The function u_δ is obtained by an experimental measurements with the known error δ :

$$\| u_\delta - u_{ex} \|_U \leq \delta, \quad (1.2)$$

where u_{ex} is precise right part which corresponds to absolutely precise experimental measurements.

Let z_{ex} be a solution of the equation $A_{ex} z_{ex} = u_{ex}$, with A_{ex} precise given operator.

Let's consider the set of functions $Q_{\delta,p}$ each of which at substitution in the equation (1.1) gives inaccuracy which does not exceed an error of initial data. In further this set we call as the set of possible solutions. This set has the form

$$Q_{\delta,p} = \{z : \|A_p z - u_\delta\|_U \leq \delta\}. \quad (1.3)$$

It is clear that the set $Q_{\delta,p}$ is an unbounded set with respect to the norm of space Z provided A_p is compact operator [1].

However the solution z_{ex} does not belong to this set with guarantee if the operator A_p is given with some error.

In many inverse problems it is required to estimate the exact solution z_{ex} of the equation (1.1). Therefore set of the possible solutions should be constructed so that the exact solution z_{ex} belongs to this set indeed. To this end it is necessary to take into account an inaccuracy of the operator A_p .

Let's assume, that the following error estimate of the operator A_p is valid:

$$\|A_{ex} - A_p\|_{Z \rightarrow U} \leq h. \quad (1.4)$$

The set of possible solutions to the original equation has the form in this case:

$$Q_{h,\delta} = \{z : z \in Z, \|A_p z - u_\delta\|_U \leq \delta + h\|z\|_Z\}.$$

The set $Q_{h,\delta}$ is an unbounded set in norm of space Z too [1].

As for the calculation of the size h there are principal difficulties as the exact operator A_{ex} can not be constructed in principle. At the solution of practical problems it is possible to obtain only rough rating from above of this size [9, 10].

The theoretical questions of the solution of inverse problems with the approximately given operator by a regularization method are investigated in works [1, 4, 11-13]. Thus, the problem of solution to the original equation (1.1) is replaced by the following extreme value problem on set of the possible solutions $Q_{h,\delta}$:

$$\Omega[z^0] = \inf_{z \in Q_{h,\delta}} \Omega[z], \quad (1.5)$$

where $\Omega[z]$ is a stabilizing functional defined on Z_1 (Z_1 is an everywhere dense set in Z).

It is possible to interpret this solution as the lowest estimation of the exact solution in the sense of the chosen stabilizing functional $\Omega[z]$. But at the solution of practical problems the regularized solution z^0 coincides with the trivial solution even by with small size of h in such statement [9, 10, 13].

The success in removing the specified lacks resulted in development of a method of special mathematical models [9, 13]. Such approach has allowed considerably to increase accuracy of approximate regularized solution of problems with the approximately given operator, and also has allowed to exclude from calculations the size h . Briefly, the method of special mathematical models can be described as follows.

It is assumed that all operators A_p in equation (1.1) have identical structures and depend on vector parameters of mathematical model $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)^T$ of

researched process $p \in R^N$ ($(\cdot)^T$ is the mark of transposition). It is supposed that the parameters of mathematical model are determined inexactly with some error and by virtue of it they can accept values in the known limits $p_i^0 \leq p_i \leq p_i^1, i = 1, 2, 3, \dots, N$. Therefore, the vector parameters p has not been defined inexactly and that it can accept values in some closed area $p \in D \subset R^N$. The operator A_p in (1.1) will correspond to any vector-parameter $p \in D$ and they form some class of operators $K_A = \{A_p\}$.

According accepted assumptions, all operators A_p are completely continuous operators. The exact operator A_{ex} has the same structure as operators A_p and corresponds to some vector $p_{ex} \in D$.

Let us consider the union of sets $Q_{p,\delta}$ on all vectors $p \in D$

$$Q^U = \bigcup_{p \in D} Q_{p,\delta},$$

(\bigcup is the union).

This set belongs to set $Q_{h,\delta}$ for any $h > 0$ and any $\delta > 0$.

Further, the approached solution z_0 of an inverse problem (1) is found on the set Q^U [14, 15]:

$$\Omega[z_0] = \inf_{z \in Q^U \cap Z_1} \Omega[z] = \inf_{A_p \in K_A} \inf_{z \in Q_{p,\delta} \cap Z_1} \Omega[z],$$

where $\Omega[z]$ is a stabilizing functional, defined on Z_1 (Z_1 is an everywhere dense set in Z).

In some cases among the sets $Q_{p,\delta}$ it is possible to select the set (mathematical description or operator $A_{p_0} \in K_A$) with special properties [14, 15]. The use in calculations of such set allows to replace the set of the possible solutions Q^U with set $Q_{p_0,\delta}$. In other words, such approach allows to reduce a problem with approached operator to a problem with the fixed operator [14, 15]:

$$\Omega[z_0] = \inf_{z \in Q^U \cap Z_1} \Omega[z] = \inf_{A_p \in K_A} \inf_{z \in Q_{p,\delta} \cap Z_1} \Omega[z] = \inf_{z \in Q_{p_0,\delta} \cap Z_1} \Omega[z]. \quad (1.6)$$

The historical analysis of the first inverse problems (Leverier problem, Krylov problem [12], a problem of Newton about opening of the law of the world gravitation) shows that they were solved without the account of an error of the mathematical description of real physical process that is inadmissible. This contradiction can be removed if to assume that at the solution of the first inverse problems, probably intuitively, the special mathematical models were used. This method can be used at solution of an inverse problems in standard statement also.

2. Minimax Statement of Inverse Problems

In the process of solution of some inverse problems we face a situation when approximate regularized solution z_0 in statement (1.5) or (1.6) does not correspond to ultimate goals of research. One of such problems is the inverse Krylov's problem related to definition of the real pressure in compressors of ship guns [12].

But solution of this problem with help of classical method has not resulted in success.

Detailed description of this inverse problem and method of its solution are given in work [12]. Let us to introduce in brief the content of this problem which represents the certain methodological interest.

In January 1914 during the test of ready ship guns the diagrams of pressure in the cylinder of the compressor were recorded by a special Vickers indicator [12]. According to the records of this instrument the maximal pressure in the cylinder of the compressor surpassed 45 MPa with the permissible pressure 25 MPa. The replacement of a set of ready guns by new ones would require additional expenses of 2.5 millions gold roubles and the term of readiness of the ships would be delayed significantly. The research carried out by Krylov showed that Vickers indicator worked during the tests under conditions when the records of the instrument differed considerably from the real ones. During this research the following inverse problem was originally considered by Krylov: to determine the real pressure in the cylinder of the compressor using the curve of piston motion of Vickers indicator and the equation of mathematical model motion of the indicator (mass on a spring) [12].

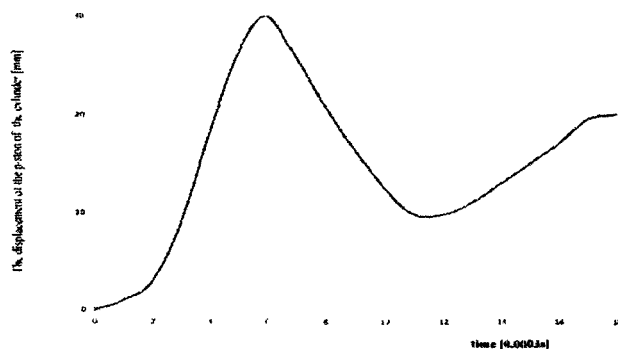


Fig. 1. The displacement of the piston of the cylinder during the test

The dependence of a piston motion of the indicator in time (Fig.1) was approximated by Krylov by means of three terms. This approximation was done so well, that the error in the uniform metrics did not surpass the thickness of a pencil line on the diagram of motion of the piston of the indicator. Using this information Krylov originally considered the following inverse problem: to determine the real pressure in the cylinder of the compressor $P(t)$, assuming that the known mathematical model of the moving piston on a spring performs the program of motion. As a result of the solution of such an inverse problem was obtained the discontinuous function of pressure [12]. Such result does not correspond to physical sense of the problem and Krylov rejected such a method of its solution.

Let's consider this problem from the position of the theory of unstable (incorrect) problems [12].

Mathematical model of piston motion on spring was chosen as following:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = z(t),$$

where m is the mass of piston, b is the coefficient of friction, c is the stiffness of the spring. Its solution can be reduced to the solution of the integral Volterra equation of the first kind such as (1.1):

$$\int_0^t \sin \omega_1(t - \tau) \exp(-b(t - \tau))z(\tau)d\tau = A_p z = u_\delta(t) = B_p x_\delta, \quad (2.1)$$

where

$$u_\delta(t) = \omega_1 x_\delta(t) - \exp(-bt)[x_\delta(0) \cos \omega_1 t + \frac{1}{\omega_1}(-bx_\delta(0) + \dot{x}_\delta(0)) \sin \omega_1 t],$$

$u_\delta(t) \in U$; $x_\delta(t) \in X$ is the function known from experiment; $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2}$; A_p — linear operator which depends on vector parameters of mathematical model p ; $A_p : Z \rightarrow U$; B_p — linear operator which depends on vector parameters of mathematical model p too; $B_p : X \rightarrow U$; $z \in Z$.

Let's assume, that $Z = C[0, T]$ ($[0, T]$ is the interval of time, on which the behavior of function $z(t)$ is being investigated), $U = L_2[0, T]$, $X = L_2[0, T]$.

The inaccuracy of the experimentally measured function $x_\delta(t)$ in relation to exact function $x_{ex}(t)$ is given and is equal $\|x_\delta(t) - x_{ex}(t)\|_X \leq 0.0011 = \delta$.

The possible variations of parameters of mathematical model of the piston motion on a spring are the following:

$$m^0 \leq m \leq \hat{m}, b^0 \leq b \leq \hat{b}, c^0 \leq c \leq \hat{c}.$$

Thus, vector parameters which corresponded to mathematical model of process has the form: $p = (m, b, c)^T$.

Let's assume that

$$m^0 = m = \hat{m} = 1, b^0 = 0.0, \hat{b} = 2, c^0 = \hat{c} = 103.$$

The size of the possible scattering of parameters determines the maximal size of an error of the operator A_p .

Let $p_m = (0.5(m^0 + \hat{m}), 0.5(b^0 + \hat{b}), 0.5(c^0 + \hat{c}))^T = (m_m, b_m, c_m)^T \in D$.

It is supposed that the exact operators A_{ex} and B_{ex} in the equation (2.1) satisfy to inequalities:

$$\|A_{ex} - A_{p_m}\|_{C \rightarrow L_2} \leq \sup_{p \in D} \|A_p - A_{p_m}\|_{C \rightarrow L_2} \leq h; \quad (2.2)$$

$$\|B_{ex} - B_{p_m}\|_{C \rightarrow L_2} \leq \sup_{p \in D} \|B_p - B_{p_m}\|_{C \rightarrow L_2} \leq d.$$

Let's estimate the maximal size of an inaccuracy of the operators A_p and B_p :

$$\|A_{ex} - A_{p_m}\|_{C \rightarrow L_2} \leq \sup_{\|z\|_C \leq 1} \|A_{ex}z - A_{p_m}z\|_{L_2} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{p \in D} \sup_{\|z\|_C \leq 1} \left\{ \int_0^T \left[\int_0^t K_1(t-\tau) z(\tau) d\tau \right]^2 dt \right\}^{0.5} \leq \\ &\leq \sup_{p \in D} \left\{ \int_0^T \left[\int_0^t |K_1(t-\tau)| d\tau \right]^2 dt \right\}^{0.5} = h, \end{aligned}$$

where

$$K_1(t-\tau) = \exp(-b_m(t-\tau)) \sin \omega_{1m}(t-\tau) - \exp(-b(t-\tau)) \sin \omega_1(t-\tau),$$

$$\omega_{1m} = \sqrt{\frac{c_m}{m_m} - b_m^2}, \omega_{1m} = \sqrt{\frac{c}{m} - b^2};$$

$$\| B_{ex} - B_{p_m} \|_{C \rightarrow L_2} \leq \sup_{\|x\|_C \leq 1} \| B_{ex}x - B_{p_m}x \|_{L_2} \leq$$

$$\leq \sup_{p \in D} \sup_{\|x\|_C \leq 1} \| B_{ex}x - B_{p_m}x \|_{L_2} \leq$$

$$\leq \sup_{p \in D} \sup_{\|x\|_C \leq 1} \left\{ \int_0^T [K_2(t-\tau) + K_3(t-\tau)]^2 dt \right\}^{0.5} = d,$$

where

$$\begin{aligned} K_2(t-\tau) &= \Delta \omega_1 x(t) - \exp(-b_m(t))(-b_m x(0) + \\ &+ \dot{x}(0) \sin \omega_{1m} t + \omega_{1m} x(0) \cos \omega_{1m} t), \end{aligned}$$

$$K_3(t-\tau) = \exp(-bt)(-bx(0) + \dot{x}(0)) \sin \omega_1 t + \omega_1 x(0) \cos \omega_1 t;$$

$$\Delta \omega_1 = \omega_{1m} - \omega_1.$$

Then

$$\omega_1 = 10.15, b_m = 1, \omega_{1m} = 10.05.$$

The calculation of h and d in the given problem was carried out by numerical methods with account that the maximal value of vector p is reached in a corner point of area D when $p = p^1$, and also when $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. As a result we obtain that $h = 0.09333$, $d = 0.1$. In the given problem we try to find the real pressure on the piston, which should be examined with account of an error of the operators A_p and B_p [1, 8, 9]. According to ideology of such problems the set of the possible solutions $Q_{h,d,\delta}$ of the equation (2.1) is defined in view of an error of the operators A_p and B_p (having in mind that p is accepted as p_m):

$$Q_{h,d,\delta} = \{ z : z \in Z, \|A_{p_m}z - B_{p_m}x_\delta\|_U \leq \delta_0 b_0 + d \|x_\delta\|_C + h \|z\|_C \},$$

where

$$b_0 = \sup_{p \in D} \| B_p \|, \| A_{ex} - A_{p_m} \|_{C \rightarrow L_2} \leq h, \| B_{ex} - B_{p_m} \|_{C \rightarrow L_2} \leq d.$$

The exact solution z_{ex} of the equation (2.1) belongs to the set $Q_{h,d,\delta}$ with guarantee. The functional $\Omega[z]$ is chosen as follows

$$\Omega[z^0] = \|z\|_{W_2^1[0,T]}^2 = \int_0^T (\dot{z}^2 + z^2) dt. \quad (2.3)$$

The solution z^0 of an extreme value problem (1.5) with the set of possible solutions $Q_{h,d,\delta}$ as a norm in $C[0, T]$ which equals 0.59 MPa. Such a result of the solution of an inverse problem can not give the answer to the question - whether it is necessary to accept or reject the ready ship guns?

The reason is, that in set $Q_{h,d,\delta}$ there are functions which do not give piston motion coinciding with the experimentally measured one with accuracy δ .

To eliminate the negative influence of such way of the account of inaccuracy size of the operators A_p, B_p in the equation (2.1) here is offered to use at calculations the special mathematical model of object [9, 10, 15].

Let's introduce into consideration the sets

$$X_\delta = \{x : x \in X, \|x_\delta - x\| \leq \delta\};$$

$$U_p = \{u : u \in U, u = B_p x, x \in X_\delta\};$$

$$Q_{\delta,p} = \{z : z \in Z; A_p z \in U_p\};$$

$$Q^* = \cup Q_{\delta,p},$$

where \cup is the union for all $p \in D, z_{ex} \in Q^*$.

It is obvious that $Q^* \subset Q_{h,d,\delta}$ for anyone $\delta > 0, d > 0$ and $h > 0$.

To increase the accuracy of the approximate solution it is offered to use an extreme value problem (1.5) which will replace extreme value problem suggested in [8, 9, 13]:

$$\Omega[z^*] = \inf_{z \in Q^* \cap W_2^1} \Omega[z] = \inf_{p \in D} \inf_{z \in Q_{\delta,p} \cap W_2^1} \Omega[z]. \quad (2.4)$$

where $W_2^1[0, T]$ is the Sobolev functional space.

The statement of Krylov's inverse problem as extreme value problem (2.4) is more suitable. In this case each function from the set of the possible solutions Q^* under substitution into the equation (2.1) gives discrepancy, which does not surpass δ with some possible parameters of mathematical model.

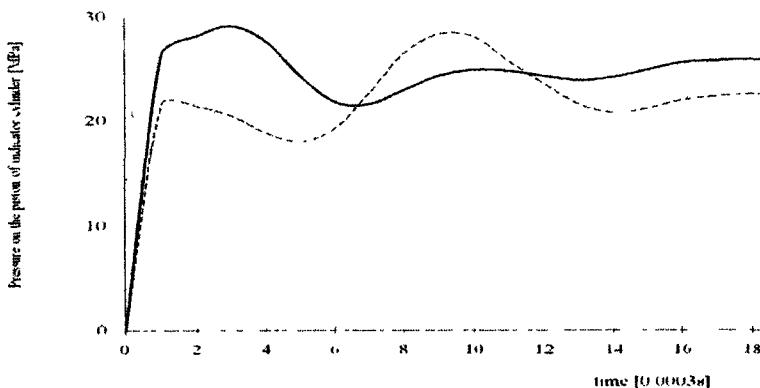


Fig. 2. Regularizing solutions of Krylov's inverse problem

The solution $[z^*]$ of an extreme value problem (2.4) with the set of possible solutions Q^* has 27MPa in the norm of $C[0, T]$ (dotted line on Fig.2).

However there is no guarantee that the function z^* corresponds to the most favorable parameters of mathematical model. It is quite possible that there exists vector parameters $p \in D$ and the set $Q_{\delta, p}$, where there will be the function which has the lowest norm in $C[0, T]$ larger than 30 MPa. In this case the set of ready ship guns should be rejected.

With this purpose a statement of the following extreme value problem will be more valid:

$$\Omega[z^s] = \sup_{p \in D} \inf_{z \in Q_{\delta, p} \cap W_2^1} \Omega[z] \quad (2.5)$$

If function z^s has the norm in $C[0, T]$ smaller than 30MPa then there is no objective base for the rejection of ship guns. With any set of parameters of mathematical model in a set of possible solutions Q^* there will be a function having the lowest amplitude bigger than 30MPa. In other words, with the most adverse variant of parameters of mathematical model in a set of possible solutions there will be a function with the minimal amplitude smaller than 30MPa.

Theorem 1. There exists a solution z^s of an extreme value problem (2.5) with functional $\Omega[z]$ such as (2.4).

Proof. It is known that the solution of an extreme value problem (2.5) exists for any vector $p \in D$ if functional $\Omega[z]$ is stabilizing [1]. Functional $\Omega[z]$ is the continuous function of a vector p at the fixed function $x(t) \in X$, i.e. $\Omega[z_p] = \Omega[p]$. By Weierstrass theorem a least upper bound of function $\Omega[p]$ is reached on closed limited finite-dimensional set D for a vector $p^1 \in D$. Then the function z^s will give the solution of an extreme value problem (2.5). The statement of the theorem is proved.

Theorem 2. If functional $\Omega[z]$ is stabilizing and if the equation $A_{ex}z = B_{ex}x_{ex}$ has unique solution z_{ex} , then at $h \rightarrow 0, d \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, x^s \xrightarrow{C[0, T]} z_{ex}$.

Proof. Let $\eta_k = (h_k, d_k, \delta_k)$ be a sequence converging to zero (h_k, d_k, δ_k independently to converge to zero at $k \rightarrow 0$). To everyone η_k there corresponds

an element $z_k \in W_2^1[0, T]$. Let $z_k \in Q_{p_0} \subset Q^*$. The set z_k is bounded in $W_2^1[0, T]$. Really, $\|z_k\|_{W_2^1[0, T]} \leq \|z_{ex}\|_{W_2^1[0, T]} = \Delta$. As far as the operator of imbedding $W_2^1[0, T]$ into $C[0, T]$ is completely continuous, the sequence z_k belongs to compact set N in $C[0, T]$ which is defined as: $N = \{z : \|z\|_{W_2^1[0, T]} \leq \Delta\} \subset C[0, T]$. Hence, from z_k it is possible to choose converging subsequence z_{k_l} such, that $z_{k_l} \xrightarrow{C[0, T]} z_0 \in [0, T]$ at $l \rightarrow \infty$. For convenience we shall save for elements of this sequence the same designations as for an initial sequence, i.e. let z_k converges on norm $C[0, T]$ to z_0 . We have

$$\begin{aligned} & \|A_{ex}z_0 - B_{ex}x_{ex}\|_U \leq \|A_{ex}z_0 - A_{p_m}x_0\|_U + \|A_{p_m}z_0 - A_{p_m}z_k\|_U + \\ & \quad + \|A_{p_m}z_k - B_{p_m}x_\delta\|_U + \|B_{p_m}x_\delta - B_p x_\delta\|_U + \\ & \quad + \|B_p x_\delta - B_p x_{ex}\|_U + \|B_p x_{ex} - B_{ex}x_{ex}\|_U \leq \|A_{ex} - A_{p_m}\| \|z_0\|_Z + \\ & \quad + \|A_{p_m}\| \|z_0 - z_k\|_Z + \|A_{p_m}z_k - A_{p_0}z_k\|_U + \|A_{p_0}z_k - B_{p_0}x_\delta\|_U + \\ & \quad + \|B_{p_0}x_\delta - B_{p_m}x_\delta\|_U + \|B_p - B_{p_m}\| \|x_\delta\|_X + \|B_p\| \delta_k + \|B_p - B_{ex}\| \|x_{ex}\|_X \\ & \leq h_k \|z_0\|_Z + \|A_{p_m}\| \|z_0 - z_k\|_Z + h_k \|z_k\|_Z + \\ & \quad + 2b_0\delta_k + 2d_k \|x_\delta\|_X + d_k \|x_\delta\|_X \leq \\ & \leq 2h_k\Delta + \|A_{p_m}\| \|z_0 - z_k\|_Z + 2b_0\delta_k + 3d_k \|x_{ex}\|_X + d_k\delta_k. \end{aligned}$$

From here, in view of continuity and bounded of the operator A_{p_m} at any h_k , convergence $\eta_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ and strong convergence $z_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z_0$, we receive

$$\|A_{ex}z_0 - B_{ex}x_{ex}\|_U = 0$$

By virtue of prospective uniqueness of the solution of the equation

$$A_{ex}z_{ex} = u_{ex} = B_{ex}x_{ex},$$

we have that $z_0 = z_{ex}$.

But $z_{ex} \in W_2^1[0, T] \subset C[0, T]$. So $z_k \xrightarrow{C[0, T]} z_{ex}$ at $k \rightarrow \infty$. As all terms of an initial sequence z_k have the bounded norm in $C[0, T]$ ($\|z_k\|_{C[0, T]} \leq \|z_k\|_{W_2^1[0, T]} \leq \|z_{ex}\|_{W_2^1[0, T]} = \Delta$), the initial sequence z_k also converges to z_{ex} at $k \rightarrow \infty$ in the norm $C[0, T]$. The theorem is proved.

By analogy of work [11,12] it is possible to show, that $z_k \xrightarrow{W_2^1[0,T]} z_{ex}$ as $k \rightarrow \infty$. Thus, the specified algorithm of the solution of an extreme value problem (2.5) is regularized [1]. For the solution of an extreme value problem (2.5) the method of special mathematical models is suggested. For this purpose it is necessary to choose among all possible mathematical models of system (operators A_p and B_p in (2.1)) the mathematical model (operators A_{p^1} , B_{p^1}) for which the inequality is carried out

$$\Omega[A_{p^1}^{-1}B_{p^1}x] \geq \Omega[A_p^{-1}B_px],$$

for any admissible function $x \in X_\delta$ and any vector $p \in D(A_p^{-1}$ is the inverse operator to A_p). We have in mind as the admissible function such function $x(t)$, at which $z(t) \in Z$. Mathematical model for vector parameters $p^1 \in D$ we shall name as a special maximal mathematical model in the given problem.

If the special maximal mathematical model exists then the problem (2.5) can be replaced by following more simple extreme value problem

$$\Omega[z^*] = \inf_{z \in Q_{\delta,p^1} \cap Z_1} \Omega[z] \quad (2.6)$$

Theorem 3. The solution of an extreme value problem (2.6) coincides with one of the solutions of an extreme value problem (2.5).

Theorem 4. In the inverse Krylov problem the special maximal mathematical model exists for any admissible function $x \in X_\delta$, and this model corresponds to the parameter p^1 .

Proof. Using the general results of the regularization method, we can affirm that the extreme value problem

$$\Omega[z_{\delta,p}] = \inf_{z \in Q_{\delta,p} \cap W_2^1[0,T]} \Omega[z]$$

has a solution for any vector $p \in D$, including $p^1 \in D$ (see [1]). For a fixed admissible function $x \in X$, the functional $\Omega[z]$ is a continuous function of the parameter p :

$$\Omega[\ddot{x}(t) + 2h\dot{x}(t) + \omega^2x(t)] = \Omega[p].$$

Furthermore,

$$\frac{d\Omega}{dp} = 4 \int_0^T (z\dot{x} + \dot{z}\ddot{x}) dt = 4p \int_0^T (\dot{x}^2 + \ddot{x}^2) dt +$$

$$+ 2\{\dot{x}^2(T) - \dot{x}^2(0) + \ddot{x}^2(0) + \omega^2[x^2(T) - x^2(0) + \dot{x}^2(T) - \dot{x}^2(0)]\}.$$

and the conditions $x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}^2 = 0$ hold. Therefore, $\frac{d\Omega}{dp} > 0$ for any admissible function $x(t)$. Obviously, the function $\Omega[p]$ has the global maximum at the point $p = p^1$. The theorem is proved.

The solution of the extreme value problem (2.5) has the norm in $C[0, T]$ which equals to 28.9 MPa (Fig.2. dotted line). The solution of the extreme value problem (2.6) has the norm in $C[0, T]$ which equals to 29.8 MPa (Fig.2. continuous line).

Thus there are no objective reasons for the rejection of guns as defective. The minimax statement of inverse problems as in (2.6) is admitted practically for any inverse problems. As the second example of such type of a inverse problem we shall consider a inverse problem of a estimation of a rotor unbalance by a method of identification [17, 18]. The motion of a rotor in two non rigid supports is described by system of the ordinary differential equations of 18th order [17, 18]. By analytical transformations three similar integral equations concerning three required characteristics of unbalance $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$ are obtained ($z_1(t) = m_r r \dot{\varphi}^2 \sin(\theta + \varphi), z_2(t) = m_r r \dot{\varphi}^2 \cos(\theta + \varphi), z_3(t) = h m_r r \dot{\varphi}^2 \sin(\theta + \varphi)$, r is the radius of rotor, m_r is the mass of unbalance reduced to a surface of rotor, $\dot{\varphi}$ is the angular velocity of rotation, h is unbalance arm, θ is angular deviation of the factor of unbalance with respect to correction plane):

$$\int_0^t K_i(t - \tau) z_i(\tau) d\tau = u_{i,\delta}(t)$$

or

$$Az_i = u_{i,\delta} = B_{i,p} x_\delta, z_i \in Z, u_\delta \in U, x_\delta \in X, i = 1, 2, 3; \quad (2.7)$$

where Z, U, X are functional spaces, $B_{i,p} : X \rightarrow U$. The vector-function x_δ is obtained from the experiment with the known error δ :

$$\|x_{ex} - x_\delta\|_U \leq \delta,$$

where x_{ex} is an exact response of object to real external load (or unbalance).

It is important to note, that for inverse problems of the investigated type it is necessary to take into account an error of the operator in (2.7). If this error is not taken into account, the solution of inverse problems will have another meaning.

Let's assume that the operators $B_{i,p}$ depend on vector parameters of mathematical model $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T, p \in R^n$. It is supposed that the parameters of mathematical model are determined inexactly with some error and by virtue of it they can accept values in the known limits $p_i^0 \leq p_i \leq \hat{p}_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$. Therefore, the vector parameters p has not been defined precisely and that it can accept values in some closed area $p \in D \subset R^n$. The operators $B_{i,p}$ in (13) will correspond to any vector parameter $p \in D$ and they form some class of operators $K_{i,B} = \{B_{i,p}\}$. Let's designate by d_i the sizes of the maximal deviation of the operators $B_{i,p}$ from $K_{i,B}$:

$$\|B_{i,ex} - B_{i,p}\|_{X \rightarrow U} \leq d_i.$$

It is supposed that the exact operators $B_{i,ex}$ have the structure similar to the structure of $B_{i,p}$ and that vector parameters of $B_{i,ex}$ also belongs to domain D .

In this cases the sets of possible solutions have the forms:

$$Q_{d_i,\delta} = \{z : z \in Z, \|Az - B_{i,p} x_\delta\|_U \leq \delta_0 b_{i,0} + d_i \|x_\delta\|_Z\},$$

where

$$b_{i,0} = \sup_{p \in D} \|B_{i,p}\|_{X \rightarrow U}, i = 1, 2, 3.$$

The sets $Q_{d,\delta}$ are an unbounded sets in norm of space Z when operator A is a completely continues operator [1]. Further, the method of Tikhonov regularization for equation with inexactly given operator is a possible way to obtain the steady solution of problem (2.7) [1]. Let $\Omega[z]$ is a stabilizing functional, defined on Z_1 (Z_1 is an everywhere dense set in Z). Let us denote by $z_{i,p}$ the regularized solutions of equations (2.7):

$$\Omega[z_{i,p}] = \inf_{z \in Q_{d,\delta} \cap Z_1} \Omega[z] \quad (2.8)$$

In some cases the problem (2.8) can be transformed to solution of the following problem [14,15]

$$\Omega[z_{i,p}^0] = \inf_{B_{i,p} \in K_{i,B}} \inf_{z \in Q_{i,\delta,p} \cap Z_1} \Omega[z] \quad (2.9)$$

where $Q_{i,\delta,p} = \{z : z \in Z, \|Az - B_{i,p}x_\delta\|_U \leq \delta b_{i,0}\}$. It is possible to interpret this solution as the lowest estimation of the exact solution in the sense of the chosen stabilizing functional $\Omega[z]$. However, in some inverse problems such interpretation of the approached solution has no sense. For example, the real unbalance characteristic z_i can distinct from zero and its estimation from below $z_{i,p}$ will be equal to zero. Let's consider minimax statement of an inverse problem of estimation of unbalance characteristics of a rotor. Instead of the extreme value problem solution (2.9) we shall examine the solutions of the following extreme value problems:

$$\Omega[z_{i,p}^s] = \sup_{B_{i,p} \in K_{i,B}} \inf_{z \in Q_{i,\delta,p} \cap Z_1} \Omega[z], i = 1, 2, 3 \quad (2.10)$$

It was shown in work [16] that for a inverse problem of unbalance definition there exists maximal special mathematical models. On basis of it the extreme value problem (2.10) can be replaced by more simple extreme value problems (2.6) with special mathematical models. If functions $z_{i,p}^s \neq 0$ then real unbalance is probably distinct from zero. If all functions $z_{i,p}^s = 0$, then the guaranteed conclusion about size of real unbalance cannot be take [16]. In traditional way such answer can not be received in principle. The result of its solution is the function which allows to carry out some early diagnostics of rotor unbalance. If this function is equal to zero then the unbalance of a rotor is absent with absolute guarantee. Rotor unbalance probably exists but without any guarantee if this function differs from zero solution. Probably such a statement of inverse problems has sense for problems of early technical, medical or other diagnostics.

3. The Most Probable Solution of Inverse Problems

Besides, there is a sufficiently wide class of inverse problems which differ from problems given in (1.5), (1.6). For example, for the equation (1.1) the inverse problem of finding the most probable solution can be considered in situation when all operators from the class K_A are equivalent. The following inverse problem in this case can be considered: to find function z_{tr} for which the following equality is valid

$$\|A_{a_{tr}} z_{tr} - u_\delta\|_U = \inf_{z \in Q_{D,\delta}} \sup_{A_a \in K_A} \|A_a z - u_\delta\|_U, a \in D. \quad (3.1)$$

where

$$Q_{D,\delta} = \{z_p : \Omega[z_p] = \inf_{z \in Q_{p,\delta} \cap Z_1} \Omega[z]\}.$$

The function z_{tr} gives the least deviation of the system response from the experiment for all operators simultaneously. So it can be considered as the most probable solution of an inverse problem.

Theorem 5. The function z_{tr} exists and steady with respect to small variations of initial data if $\Omega[z]$ is a stabilizing functional and the Frecher derivative of $\Omega[z]$ differs from zero. Proof of this theorem see in work [19].

Extreme problem (17) can be considered as problem of synthesis of model external load for class operators also (see [8, 15, 19]). In this case class K_A can consist of final number of the operators

$$K_A = A_1, A_2, \dots, A_N = A_i (i = 1, 2, 3, \dots, N).$$

Then extreme problem (17) is being reduced to following problem:

$$\begin{aligned} \inf_{z_j \in \hat{Q}_{D,\delta}} \sup_{A_i \in K_A} \|A_i z_j - u_\delta\|_U &= \|A_{un} z_{un} - u_\delta\|_U = \\ &= \min_j \max_i \|A_i z_j - u_\delta\|_U, \end{aligned}$$

where

$$\hat{Q}_{D,\delta} = \{z_j : \Omega[z_j] = \inf_{z \in Q_{j,\delta} \cap Z_1} \Omega[z]\}, Q_{j,\delta} = \{z : \|A_j z - u_\delta\|_U \leq \delta\}.$$

Function z_{un} was named as unitary model of the external load for class of operators (see [8]).

It is obvious, that the inequality is correct

$$\delta < \|A_{opt} z_{opt} - u_\delta\|_U.$$

As an example of the problem of synthesis of the unitary model for class of operators was examined the problem of synthesis of model of technological resistance moment on the part of metal on a working barrels of rolling mill [17, 18].

In this case functional spaces Z, U are chosen as the spaces of continuous functions with the uniform metrics ($Z[0, T] = U[0, T] = C[0, T]$). The size d is defined by an error of the measuring equipment and it is equal $\delta = 0.0665$ MNm. The operator A_p in this case looks like

$$A_p = \int_0^t \sin \omega(t - \tau) \exp(-b_1(t - \tau)) z(\tau) d\tau, \quad (3.2)$$

where $\omega = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{b^2}{4m}}$; $b_1 = \frac{-b}{2m}$; c, m, b are parameters of mathematical model of the object (c is rigidity on twisting, m is moment of inertia, b is coefficient of friction). Let class of the operators K_A consist of three operators A_1, A_2, A_3 , which have identical structure (3.2) and are defined by three sets of parameters

$p_1 = (c_1, m_1, b_1)^T, p_2 = (c_2, m_2, b_2)^T, p_3 = (c_3, m_3, b_3)^T$. For the chosen structure of the mathematical model of a rolling mill these parameters are equal:

$$\begin{aligned} c_1 &= 737.MNm^2/s^2, c_2 = 755.MNm^2/s^2, c_3 = 774.MNm^2/s^2, \\ m_1 &= 323KNm^2, m_2 = 336KNm^2, m_3 = 349KNm^2, \\ b_1 &= 194KNm^2/s, b_2 = 217KNm^2/s, b_3 = 245KNm^2/s. \end{aligned}$$

The maximal deviation of the operators $A_p \in K_A$ from one another is defined by an error of parameters of mathematical model of the rolling mill. The size of the maximal deviation of the operators $A_i \in K_A$ was obtained by numerical methods and it is appeared to be equal $h = 0.121$. As the characteristic of the stability of the solution the such functional $\Omega[z]$ is accepted

$$\Omega[z] = \int_0^T (z^2 + \dot{z}^2) dt.$$

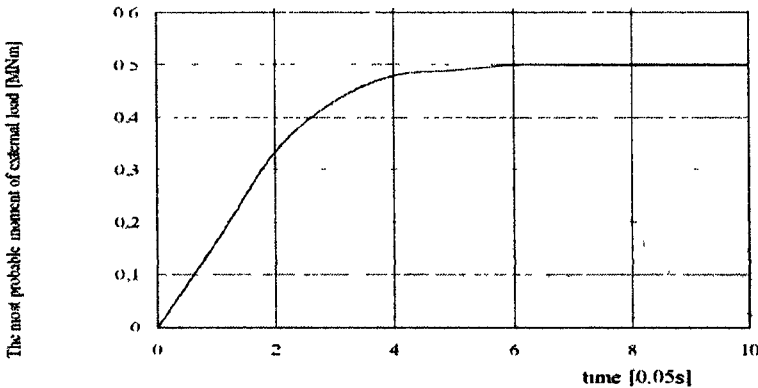


Fig. 3. The diagram of the most probable function z_{tr} of the moment of technological resistance on rolling-mill

In Fig. 3 the diagram of function z_{tr} for a typical case of rolling on a smooth working barrels (top) is submitted [17, 18]. For comparison the model of external load for a class of models K_A on the set of the possible solutions $Q_{h,\delta}$ is given. The function, which is the solution of inverse problem in this case has the maximal deviation from zero equal 0.04 MNm. Such function does not represent interest as far as it practically coincides with trivial function.

4. Conclusions

Nontraditional statements of inverse problems permit to solve new practical problems and also to extend the possibilities of regularization method.

References

1. *Tikhonov A. N. and Arsenin V. J.* (1979) *Methods of Solution of Incorrectly Posed Problems*, Moscow.

2. *Morozov V. A.* (1984) *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*, Berlin: Springer.
3. *Guillement J-P., Nikonov R. G.* (2004) In: *Inverse Problems*, 20, 1, pp.175-198.
4. *Goncharsky A. V., Popov V. V., Stepanov V.V.* (1991) *Introduction into Computational Optics*, Moscow, MSU.
5. *Bouchouev I., Isakov V.* (1999) In: *Inverse Problems*, 15, No. 3, pp.R95-R116.
6. *Yamamoto M.* (1996) In: *J. Math. Kyoto Univ.*, 36, p.825–856.
7. *Goetsch C. W.* (1993) *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Braunschweig: Vieweg.
8. *Menshikov Yu. L.* (2004). In: *Bulletin of the University of Kiev, Ser.: Physics and Mathematics*, Kiev, Ukraine, 2, p.310–315.
9. *Menshikov Yu. L.* (1997) In: *Progress in Indust. Mathematics at ECMI 96*. Technical University of Denmark, Lyngby/Copenhagen, Denmark, p.398–405.
10. *Goncharsky A. V., Leonov A. S., Yagola A. G.* (1973) In: *USSR Comput. Math. Math. Phys.*12 , No. 6, p.286–290.
11. *Goncharsky A. V., Leonov A. S., Yagola A. G.* (1974) In: *USSR Comput. Math. Math. Phys.*13 , No. 2, p.25–37.
12. *Menshikov Yu. L.* (2003). In: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, USA, vol.43, No.5, p. 633 – 640.
13. *Menshikov Yu. L.* (1997). In: *15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modelling and Applied Mathematics*, Berlin, 1997, Proc. v.VI, Berlin, p.577– 582.
14. *Menshikov Yu. L.* (2000). In: *Proc. of IMACS 2000, August 21-25 2000, Lausanne, Switzzeland*, S.128–134, 5p.
15. *Menshikov Yu.L., Reznichenko M. S.* (2003) In: *Differential Equations and them Applications*, Dnepropetrovsk, DNU, Ukraine, p.77–83.
16. *Menshikov Yu. L., Polyakov N. V.* (2004) In: *Proc. of ICTAM 2004, August 15-21, Warsaw, Poland*, 4p.
17. *Menshikov Yu. L., Reznichenko M. S.* (2001) In: *Proc. of IAMM NAS, Donezk, Ukraine*, 6, pp.86–89.
18. *Menshikov Yu. L., Reznichenko M. S.* (2001) In: *Computing and Mathematical Modeling in natural and technical Sciences*, Tambov, TSU, Russia, 7, p.40–44.
19. *Menshikov Yu. L., Nakonechny A. G.* (2005) In: *Journal of Automation and Information Sciences* , v.37, is. 7, 2005, p.20–29.

Надійшла до редколегії 03.12.2010

УДК 517.9: 519.46

**НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ НЕЛИНЕЙНОГО
ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ. I. НЕЛОКАЛЬНАЯ
ИНВАРИАНТНОСТЬ И РАЗМНОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ**

В. А. Тычинин*, О. Н. Тертышник**

* Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры,
Днепропетровск, 49005. E-mail: tychnin@ukr.net** Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры,
Днепропетровск, 49005. E-mail: OlesyaTNik@yandex.ru

На основе известной потенциальной симметрии построено конечное нелокальное интегро-дифференциальное преобразование, оставляющее инвариантным нелинейное телеграфное уравнение $u_{tt} - \partial_x(-u^{-1} + u^{-2}u_x) = 0$. Построены алгоритмы, по которым выполнено размножение его решений. В числе найденных присутствуют новые решения. В статье получены уравнения, связанные с данным посредством потенциальной системы. Для них исследованы лиевские симметрии и построены точные решения. Показано, что потенциальные симметрии представляют собой специальный частный случай нелокальных симметрий — конечные преобразования Ли — Бэклунда с интегральной переменной. Выведены характеристические уравнения, определяющие нелокальные симметрии уравнений, связанных потенциальной системой. Эти характеристические уравнения также использованы для отыскания точных решений указанных уравнений.

Ключевые слова: точечные симметрии Ли, закон сохранения, потенциальная симметрия, нелокальное преобразование, размножение решений.

1. Введение

Нелинейные волновые уравнения находят применение в обширном спектре прикладных задач [1–4]. К числу эффективных методов интегрирования уравнений нелинейной математической физики относятся методы, основанные на знании их (непрерывных точечных или нелокальных) симметрий [5–11]. Поэтому описание всех классов уравнений, включающих произвольные элементы и допускающих возможно более широкие симметрии, является актуальной задачей современных исследований и составляет задачу их симметричной классификации. Исследование точечных симметрий С. Ли уравнений класса

$$u_{tt} - \partial_x(C(u)u_x + K(x, u)) = 0$$

было выполнено в работах [13, 14]. Групповой анализ уравнений, принадлежащих классу

$$f(x)u_{tt} - \partial_x(C(u)u_x + K(u)) = 0,$$

был проведен в работе [15]. Расширить множество симметрий исследуемых классов уравнений оказалось возможным, введя понятие потенциальной симметрии [16, 17]. При этом исходное уравнение

$$F_1(x, t, u, u_1, \dots, u_k) = 0 \quad (1.1)$$

должно допускать представление в форме хотя бы одного закона сохранения

$$D_t \phi^t(x, t, u, u_1, \dots, u_r) + D_x \phi^x(x, t, u, u_1, \dots, u_r) = 0. \quad (1.2)$$

Здесь и далее приняты обозначения

$$u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu u, \quad u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \partial_\mu \partial_\nu u, \quad u_1 = \{u_\mu\}, \quad u_2 = \{u_{\mu\nu}\}. \\ \mu, \nu = 0, 1, \dots, n-1,$$

D_t и D_x — полные производные по переменным t и x , ϕ^t и ϕ^x — плотность и поток, соответственно. В случае двух независимых переменных $x_0 = t$, $x_1 = x$ пишем

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \partial_t u, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \partial_x u.$$

Известно [8, 16], что для уравнения (1.1), допускающего представление в форме закона сохранения (1.2), существует потенциальная функция $v(x, t)$, являющаяся решением вспомогательной потенциальной системы

$$\begin{aligned} v_x &= \phi^t(x, t, u, u_1, \dots, u_r), \\ v_t &= -\phi^x(x, t, u, u_1, \dots, u_r). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Теоретико-групповое исследование системы (1.3) позволяет в ряде случаев получить дополнительную информацию о симметрии уравнения (1.1).

Пусть система (1.3) допускает алгебру Ли инвариантности операторов вида

$$X = \xi_1(x, t, u, v) \partial_x + \xi_2(x, t, u, v) \partial_t + \eta_1(x, t, u, v) \partial_u + \eta_2(x, t, u, v) \partial_v.$$

Оператор точечной симметрии системы (1.3), у которого хотя бы одна из координат ξ_1 , ξ_2 , η_1 явно зависит от потенциальной переменной $v(x, t)$, определяет потенциальную симметрию уравнения (1.1), [16]. Ниже показано, что такие потенциальные симметрии представляют собой специальный частный случай нелокальных симметрий относительно конечных преобразований Ли — Бэклунда [18] с интегральной переменной.

Пусть одно из уравнений системы (1.3) представляет собой конечное нелокальное преобразование зависимой переменной $u(x, t)$. Если возможно исключить эту переменную из второго уравнения системы (1.3), тогда она становится преобразованием Бэклунда [4], связывающим исходное уравнение с другим уравнением для переменной $v(x, t)$:

$$F_2(x, t, v, v_1, \dots, v_m) = 0. \quad (1.4)$$

Нелинейное волновое уравнение

$$u_{tt} - \partial_x(C(u)u_x + K(u)) = 0, \tag{1.5}$$

допускающее представление потенциальной системой

$$\begin{aligned} v_x - u_t &= 0, \\ v_t - C(u)u_x - K(u) &= 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

представляет собой телеграфное уравнение двухпроводной линии передач, где функция $v(x, t)$ — сила тока в проводнике, $u(x, t)$ — напряжение между проводниками, $K(u)$ — утечка тока на единицу длины, $C(u)$ — переменное произведение самоиндукции на емкость на единицу длины провода, t — пространственная переменная, x — время.

Другое применение этой же системы встречается при описании движения (продольных колебаний) эластичного непрерывного стержня, площадь поперечного сечения которого изменяется вдоль стержня.

При этом $u(x, t)$ — величина продольного смещения относительно равновесного положения, $v(x, t)$ — скорость частицы, вызванная этим смещением, $C(u) = \lambda K'(u)$ — тензор напряжений для некоторой постоянной λ , t — время, [3].

В настоящей работе, исходя из потенциальной симметрии уравнения

$$u_{tt} - \partial_x(-u^{-1} + u^{-2}u_x) = 0, \tag{1.7}$$

мы получаем конечное интегро-дифференциальное преобразование, обеспечивающее его нелокальную инвариантность. Это преобразование положено в основу двух алгоритмов, с помощью которых выполнено размножение ряда точных решений уравнения (1.7).

В числе построенных присутствуют и новые решения. Кроме того, в работе выведены уравнения (1.4), связанные с телеграфным уравнением (1.7) посредством соответствующей потенциальной системы (1.6). Для этих уравнений исследованы точечные симметрии и получены точные решения.

В работе выведены характеристические уравнения, соответствующие известной потенциальной симметрии уравнения (1.7). Они определяют нелокальные симметрии исходного уравнения и уравнения (1.4) и использованы нами для построения точных решений этих уравнений.

2. Классические симметрии уравнения (1.7) и связанных с ним уравнений. Потенциальная симметрия и нелокальная инвариантность

2.1. Лиевские симметрии уравнений

Уравнение (1.7) принадлежит классу (1.5) и, как установлено в работе [17], обладает потенциальной симметрией. Выясним связь этой потенциальной симметрии с симметриями уравнений, определяемых соответствующей потенциальной системой. Заметим, что максимальная алгебра инвариантности уравнения (1.7) состоит из операторов

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, & X_2 &= \partial_x, & X_3 &= t\partial_t + u\partial_u, \\ X_4 &= e^{-x}\partial_x + e^{-x}u\partial_u. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Порожденная уравнением (1.7) потенциальная система

$$\begin{cases} v_x - u_t = 0, \\ v_t - u^{-2}u_x + u^{-1} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

обладает широкой лиевской симметрией, описываемой сложной системой определяющих уравнений, которую полностью решить не удастся. Отметим, что соответствующая алгебра инвариантности включает, в частности, операторы

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_v, \quad X_3 = t\partial_t + u\partial_u \quad (2.3)$$

и оператор

$$S = u^{-1}\partial_x - v\partial_t + \partial_u, \quad (2.4)$$

найденный в работе [17]. В соответствии с определением, этот оператор характеризует потенциальную симметрию уравнения (1.7).

2.2. Нелокальное преобразование инвариантности

Конечное точечное преобразование, отвечающее оператору S лиевской инвариантности системы (2.2), имеет вид:

$$r = \ln \frac{u + \varepsilon}{u} + x, \quad s = -\varepsilon v + t, \quad p(r, s) = u + \varepsilon, \quad q(r, s) = v. \quad (2.5)$$

Здесь $r, s, p(r, s), q(r, s)$ — новые независимые и зависимые переменные, ε — групповой параметр. Обратным для (2.5) является преобразование

$$x = r - \ln \frac{p}{p - \varepsilon}, \quad t = s + \varepsilon q, \quad u(x, t) = p - \varepsilon, \quad v(x, t) = q. \quad (2.6)$$

Очевидно, что преобразования (2.5), (2.6) переводят потенциальную систему в себя.

В пространстве независимых переменных r, s и зависимых переменных $p(r, s), q(r, s)$ воспользуемся равенством $q_r = p_s$ и заменим в формулах преобразования (2.6) переменную $q(r, s)$ интегралом $\int p_s(r, s) dr$. Теперь преобразование связывает переменные $x, t, u(x, t)$ с переменными $r, s, p(r, s), \int p_s(r, s) dr$

$$x = r - \ln \frac{p}{p - \varepsilon}, \quad t = s + \varepsilon \int p_s(r, s) dr, \quad u(x, t) = p - \varepsilon, \quad v(x, t) = q, \quad (2.7)$$

становясь интегро-дифференциальным. При $\varepsilon = 0$ оно превращается в тождественное преобразование. Таким образом, построенное преобразование (2.7) является элементом группы Ли – Бэклунда.

Теорема 2.1. *Интегро-дифференциальное преобразование (2.7) переводит уравнение (1.7) во множество его интегро-дифференциальных следствий, т. е. оставляет уравнение (1.7) нелокально-инвариантным.*

Доказательство теоремы 2.1. Для доказательства этого утверждения применим предыдущее преобразование к уравнению (1.7). Переходя в полученном результате на многообразии, которое задано интегро-дифференциальными следствиями уравнения (1.7), определяемыми соотношениями

$$\begin{aligned} p_{rr} &= p_{ss}p - p_r + 2p^{-1}p_r^2, & \int p_{ss}dr &= -p^{-1} + p^{-2}p_r, \\ \int p_{sss}dr &= p^{-3}(p_s - 2p_r p_s + pp_{rs}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

получаем ноль. Теорема доказана. □

2.3. Уравнение для потенциальной переменной

Дифференциальное уравнение для потенциальной переменной $v(x, t)$, соответствующее системе (2.2), может быть получено исключением из неё переменной $u(x, t)$. Проинтегрировав первое уравнение системы (2.2) по t и подставив результат $u = \int v_x dt$ во второе уравнение системы, получаем:

$$v_t \left(\int v_x dt \right)^2 - \int v_{xx} dt + \int v_x dt = 0.$$

Продифференцировав полученное выражение по переменной t , приходим к квадратному уравнению для интеграла $\int v_x dt$:

$$v_{tt} \left(\int v_x dt \right)^2 + 2v_t \int v_x dt - v_{xx} + v_x = 0. \quad (2.9)$$

Разрешив (2.9) относительно интегральной неизвестной и продифференцировав результат по t , получаем два дифференциальных уравнения для потенциальной переменной:

$$v_x + \partial_t \left(\frac{v_t v_x \pm \sqrt{v_t^2 v_x^2 + v_{tt}(v_{xx} - v_x)}}{v_{tt}} \right) = 0. \quad (2.10)$$

Исследовать точечные симметрии этих уравнений непосредственно не представляется возможным в силу их иррационального характера. Избавившись в каждом из этих уравнений от иррациональности, получаем одно и то же уравнение, которое ввиду громоздкости здесь не выписываем. Оно, как оказалось, допускает максимальную алгебру инвариантности, состоящую из операторов

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = t\partial_t, \quad X_4 = \partial_v, \quad X_5 = e^{-x}\partial_x. \quad (2.11)$$

2.4. Решения, построенные на основе симметрий С. Ли

Для построения решений уравнения (1.7) воспользуемся классическим методом Ли – Овсянникова [5]. По операторам алгебры Ли инвариантности (2.1) находим следующие решения:

$$\begin{aligned} 1) \quad u &= e^x(c_1 t + c_2), \quad 2) \quad u = \frac{t}{c_1 e^{-x} - c_2}, \\ 3) \quad (c_1^2 - 1) \ln|1 + c_1 u| + c_1 u - c_1^2 \ln|u| + c_1^2(x - t - c_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь и далее c_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, – произвольные постоянные. Третье решение уравнения (1.7), полученное нами в неявном виде, определяется приведенным выше уравнением.

Подставив каждое из найденных выражений для функции $u(x, t)$ в уравнения потенциальной системы (1.6) и решая ее, находим соответствующие выражения для потенциальной функции $v(x, t)$:

$$1) \quad v = c_1 e^x + c_3, \quad 2) \quad v = c_2 \ln|t| - c_2^{-1}(\ln|c_1 e^{-x} - c_2| + x) + c_3. \quad (2.13)$$

Подстановка в потенциальную систему неявной функции $u(x, t)$ из (2.12) имеет следствием равенство $v = -u + s(t)$. Уточнение произвольной функции $s(t)$ подстановкой v в уравнение (2.10) дает $s(t) = c_1 t + c_2$, откуда следует неявное выражение для потенциала, определенное уравнением

$$\begin{aligned} (c_1^2 - 1) \ln| -c_1 v + 1 + t c_1^2 + c_1 c_2| - c_1 v - \\ c_1^2 \ln| -v + c_1 t + c_2| + c_1^2(x - c_2) + c_1 c_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Пополнить семейство инвариантно-групповых решений можем, воспользовавшись оператором лиевской симметрии S , потенциальной системы (2.2). Решая систему характеристических уравнений, порожденных этим оператором,

$$u^{-1} u_x - v u_t - 1 = 0, \quad (2.15)$$

$$u^{-1} v_x - v v_t = 0, \quad (2.16)$$

находим два неявных решения системы

$$u = e^x G(t \pm u), \quad v = \pm 1$$

с $G(t \pm u)$ — произвольной гладкой функцией аргумента, и третье решение

$$u = \frac{t - c_3}{c_2 e^{-x} - c_1}, v = c_1.$$

В качестве еще одного простого примера выполним инвариантно-групповое размножение найденного выше первого лиевского решения потенциальной системы, в котором для простоты положим $c_1 = 1$ и $c_2, c_3 = 0$, т. е.

$$u = t e^x, v = e^x.$$

Воспользуемся для этого преобразованием (2.6). Решив полученные в результате преобразования уравнения относительно зависимых переменных и записав их в обозначениях $x, t, u(x, t), v(x, t)$, находим решение, зависящее от группового параметра ε :

$$u = \frac{1}{2} e^x \left(t - \varepsilon e^x \pm \sqrt{(\varepsilon e^x - t)^2 - 4\varepsilon^2} \right),$$

$$v = e^x + \frac{2\varepsilon}{\left(t - \varepsilon e^x \pm \sqrt{(\varepsilon e^x - t)^2 - 4\varepsilon^2} \right)}.$$

Полученные в данном разделе решения составляют основу для построения новых решений с помощью методов, которые используют уже нелокальные симметрии уравнений.

3. Характеристические уравнения и нелокальные симметрии, порожденные потенциальной системой

С оператором S (2.4) связаны два (лиевских) характеристических уравнения (2.15) и (2.16) в пространстве переменных системы (2.2). Каждое из этих уравнений зависит от обеих зависимых переменных. Покажем, что исключение соответствующей переменной из этих уравнений приводит к двум характеристическим уравнениям более высокого порядка, определяющим нелокальные симметрии уравнений, связанных потенциальной системой.

Решая первое уравнение системы (2.15), (2.16) относительно $v(x, t)$, находим:

$$v = \frac{u_x - u}{u u_t}.$$

Продифференцировав левую и правую части записанного выше равенства по t и воспользовавшись подстановкой $v_x = u_t$, приходим к выражению, упрощая которое, получаем характеристическое дифференциальное уравнение второго порядка для функции $u(x, t)$

$$u_t^3 u^2 - u u_t u_{xx} + u u_x u_{tx} - u^2 u_{tx} + u_t u_x^2 = 0. \tag{3.1}$$

Полученное характеристическое уравнение не может быть спроецировано на какое-либо дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, и, следовательно, описывает нелокальную симметрию исходного

уравнения (1.7). Поскольку интегрирование уравнения (3.1) не проще, чем исходного, для отыскания его частных решений воспользуемся лиевской симметрией. Операторы бесконечной алгебры инвариантности этого уравнения

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t + e^{-x} F_1(u e^{-x}) \partial_x + u e^{-x} F_1(u e^{-x}) \partial_u, \\ X_2 &= (e^{-x} F_2(u e^{-x}) + 1) \partial_x + u e^{-x} F_2(u e^{-x}) \partial_u, \\ X_3 &= t \partial_t + e^{-x} F_3(u e^{-x}) \partial_x + (e^{-x} F_3(u e^{-x}) + 1) \partial_u, \\ X_4 &= (e^{-x} F_4(u e^{-x}) + \ln|u e^{-x}|) \partial_x + (e^{-x} F_4(u e^{-x}) + \frac{1}{2u}) \partial_u \end{aligned} \quad (3.2)$$

зависят от четырех произвольных гладких функции $F_i(u e^{-x})$, $i = 1, \dots, 4$, аргумента $u e^{-x}$.

Рассмотрим несколько примеров применения алгебры (3.2) для построения нелиевских решений уравнения (1.7). Оператору X_1 алгебры (3.2) отвечает уравнение характеристики

$$e^{-x} F(u e^{-x}) u_x + u_t - u e^{-x} F(u e^{-x}) = 0. \quad (3.3)$$

Неявное лиевское решение этого уравнения

$$(t - F_1(u e^{-x})) F(u e^{-x}) - e^x = 0 \quad (3.4)$$

наряду с произвольной функцией, связанной с симметрией (3.2), содержит вторую произвольную функцию, появляющуюся в результате интегрирования. Найденное решение может быть выбрано в качестве нелокального анзаца для уравнения (1.7). Подставив его в уравнение и расщепляя результат по переменной t , приходим к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \omega(1 - \omega^2 F^2) \ddot{F} + 2\dot{F}(\omega^3 F \dot{F} + 1) &= 0, \\ \omega(\omega^2 - 1) F_1 \ddot{F} - 2\dot{F} F_1(\omega F + 1) - \omega F \ddot{F}_1(\omega^2 F^2 - 1) - 2\dot{F}_1(\omega \dot{F} + F) &= 0, \end{aligned}$$

которая допускает решения

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \pm \frac{1}{\omega}, \quad F_1(\omega) = F_1(\omega); \\ F(\omega) &= \frac{1}{2c_3 \omega} \left(-1 + \tanh \left(-\frac{1}{2} (\ln|\omega| - c_4) \sqrt{4c_3^2 + 1} \right) \sqrt{4c_3^2 + 1} \right), \\ F_1(\omega) &= c_1 + \omega + c_2 \left(\int \frac{1}{F(\omega)^2 \omega^2} d\omega \right). \end{aligned}$$

Здесь $\omega = u(x, t) e^{-x}$.

Теперь легко находятся соответствующие неявные решения (1.7)

$$-t + F_1(u e^{-x}) \pm u = 0,$$

$$(c_2 - \sqrt{2})u^4 + 2(c_1 - t)e^x u^3 + \left((c_2 - \sqrt{2})u + (c_1 - t)e^x \right) e^{3(x+c_4)} = 0.$$

Решая характеристическое уравнение, отвечающее второму из перечисленных операторов алгебры (3.2)

$$(e^{-x}F(u e^{-x}) + 1) u_x - u e^{-x}F'(u e^{-x}) = 0, \tag{3.5}$$

получаем заданный неявно нелокальный анзац для уравнения (1.7)

$$u + \int^u e^{-x} F(a) da + F_1(t) = 0.$$

Доопределив $F_1(t)$, подстановкой найденного анзаца в уравнение (1.7), приходим к неявному решению, которое зависит от произвольной достаточно гладкой функции $F(u e^{-x})$,

$$u + \int^u e^{-x} F(a) da + t + c_1 = 0.$$

Выбрав в качестве примера несколько частных случаев зависимости $F(u e^{-x})$, получаем соответствующие решения уравнения (1.7).

1. Функции $F(a) = a$ отвечают два решения

$$u = \left(-e^x \pm \sqrt{e^{2x} - 2t + c_1}\right) e^x.$$

2. Выбрав $F(a) = a^2$, находим:

$$u = \frac{1}{2}e^x \left(-12(t + c_1) \pm 4\sqrt{4e^{3x} + 9(t + c_1)^2}\right)^{\frac{1}{3}} - 2e^{2x} \left(-12(t + c_1) \pm 4\sqrt{4e^{3x} + 9(t + c_1)^2}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

3. Для зависимости $F(a) = \cos(a)$ получаем неявное решение:

$$u + \sin(u e^x) + t + c_1 = 0.$$

Замечание 3.1. Решая уравнение (3.1) методом разделения переменных, т. е. полагая $u = F_1(x)F_2(t)$, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{F}_2(t)^2 = \lambda, \quad \ddot{F}_1(x) = \lambda F_1(x)^3 + 2F_1(x)^{-1} \dot{F}_1(x)^2 - \dot{F}_1(x).$$

Нетрудно убедиться, что функции

$$u = (\sqrt{\lambda} t + c_1) e^{c_2+x+W(x)^2},$$

$$W(x) = \pm \operatorname{erf}(W(x))\sqrt{2\pi} - 2 \sqrt{\lambda} e^{c_2}(c_3 - e^x),$$

которые являются решениями характеристического уравнения (3.1), удовлетворяют уравнению (1.7) только при условии стационарности, т. е. когда обращается в ноль константа разделения λ :

$$u = \frac{c_1}{c_2 e^{-x} - c_3}.$$

Подобным образом может быть найдено характеристическое дифференциальное уравнение второго порядка для функции $v(x, t)$. Решая уравнение (2.16) относительно $u(x, t)$, получаем $u = v_x(vv_t)^{-1}$. Дифференцируя левую и правую части этого равенства по t и используя подстановку $v_x = u_t$, записываем его в форме

$$v_x = \partial_t(v_x(vv_t)^{-1}).$$

После упрощения полученное дифференциальное уравнение второго порядка приобретает вид:

$$-v^2 v_x v_t^2 + vv_t v_{tx} - v_x v_t^2 - vv_x v_{tt} = 0. \quad (3.6)$$

Оно определяет соответствующую нелокальную симметрию уравнений (2.10). Для отыскания частных решений этого уравнения воспользуемся его лиевской симметрией. Бесконечная алгебра инвариантности уравнения (3.6) описывается оператором

$$X = F_1(x)\partial_x + v^{-1}(F_4(x)v^2 e^{\frac{1}{2v^2}} + t(v^2 + 1)F_2(v) + v(t + F_3(v)))\partial_t + F_2(v)\partial_v, \quad (3.7)$$

в котором F_i , $i = 1, \dots, 4$ — произвольные гладкие функции соответствующих аргументов.

Полагая, например, $F_1(x) = 1, F_2(v) = F_3(v) = 0, F_4(x) = 0$, приходим к характеристическому уравнению для потенциала

$$v_x + t v_t = 0.$$

Общее решение последнего $v(x, t) = f(te^{-x})$ после подстановки в уравнение (2.10) и расщепления порождает переопределенную систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\omega \ddot{f}(\omega)(\dot{f}(\omega))^2 - 3\omega \dot{f}(\omega)(\ddot{f}(\omega))^2 - (\dot{f}(\omega))^2 \ddot{f}(\omega) = 0,$$

$$-(\omega \dot{f} \dot{f} + \omega^2 \dot{f}^4) \ddot{f}(\omega) + 2\omega \dot{f}(\omega)^3 + (2\omega^2 \dot{f}(\omega))^3 + \dot{f}(\omega) \ddot{f}(\omega)^2 + \omega \dot{f}^4 \ddot{f}(\omega) = 0$$

с решениями

$$v = c_1 t e^{-x} + c_2, \quad v = \pm \ln |t e^{-x} + \sqrt{(t e^{-x})^2 - c_1}| + c_2.$$

Еще одно решение уравнения (2.10) получим, выбрав для оператора (3.7) характеристическое уравнение в виде:

$$t((v + v^{-1}) + 1)v_t - 1 = 0.$$

Соответствующее решение уравнения (2.10) задается равенством

$$\ln|v| - \ln|t| + \frac{1}{2}v^2 + v + c_1 = 0.$$

Другие решения уравнений (1.7) и (2.10) могут быть построены подобным образом из произвольных линейных комбинаций операторов алгебр инвариантности (3.2) и (3.6) и с помощью группового многопараметрического разложения.

4. Размножение решений, использующее нелокальные симметрии уравнений

4.1. Размножение решений с помощью потенциальной системы

Выше было показано, что потенциальная система (2.2) связывает уравнения (1.7) и (2.10). Следовательно, ее уравнения можем рассматривать как преобразование Бэклунда названных уравнений. Воспользуемся этим обстоятельством для размножения решений уравнения (1.7). Процесс построения нового решения уравнения из данного может быть осуществлен двумя различными способами.

Алгоритм 4.1. Подставим известное решение уравнения (1.7) $u^I(x, t) = f_1(x, t)$ в первое уравнение системы (2.2), рассматривая его как нелокальное преобразование, связывающее уравнения (1.7) и (2.10). Решив полученное уравнение относительно $v(x, t)$, находим анзац $v^I(x, t) = \int f_1(x, t) dx + s_1(t)$. Для уточнения функции $s_1(t)$ подставим найденный анзац в уравнение (2.10). Полученное при этом дифференциальное выражение относительно функции $s_1(t)$ расщепляем, исходя из требования его редукции к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Получаем решение уравнения (2.10) $v^I(x, t) = \varphi(x, t)$. Повторно подставив построенное выше решение в первое уравнение системы (2.2) и решив его относительно функции $u(x, t)$, находим новое решение уравнения (1.7) $u^{II}(x, t) = f_2(x, t)$.

Алгоритм 4.2. Выполним все шаги алгоритма 4.1 вплоть до получения решения $v^I(x, t) = \varphi(x, t)$. Теперь подставим это решение во второе уравнение системы (2.2). Решив его относительно функции $u(x, t)$, находим новое решение уравнения (1.7) $u^{II}(x, t) = f_2(x, t)$.

Рассмотрим несколько примеров размножения решений уравнения (1.7) с помощью описанных алгоритмов.

Продемонстрируем действие алгоритмов, размножив простое исходное решение

$$u^I = t.$$

Первое уравнение потенциальной системы в этом случае имеет вид $v_x = 1$. Откуда находим:

$$v = x - \ln|t + c_2| + c_3. \quad (4.1)$$

Следуя первому алгоритму, подставим это выражение для $v(x, t)$ повторно в первое уравнение системы (2.2). Решение полученного уравнения относительно $u(x, t)$

$$u^{II} = t + f(x)$$

подставим в исходное уравнение (1.7). Решая полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{f} + \dot{f} = 0, \quad f\ddot{f} - 2\dot{f}^2 + f\dot{f} = 0,$$

находим $f(x) = c_1$ и решение уравнения (1.7)

$$u^{\text{II}} = t + c_1.$$

В соответствии со вторым алгоритмом выражение (4.1) подставим во второе уравнение потенциальной системы:

$$\partial_t(x - \ln|t + c_2| + c_3) - u^{-2}u_x + u^{-1} = 0.$$

Решение этого уравнения

$$u^{\text{III}} = \frac{t + c_2}{1 + (t + c_2)e^{-x}s(t)}$$

уточняем, подставив его в (1.7) и решая систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$s\ddot{s} - 2\dot{s}^2 = 0, \quad (t + c_2)^2\ddot{s} + 4(t + c_2)\dot{s} + 2s = 0.$$

Окончательно получаем:

$$u^{\text{III}} = \frac{t + c_2}{1 + c_3 e^{-x}}.$$

Подставим одно из найденных выше решений уравнения (1.7)

$$u^{\text{I}} = e^x(c_1 t + c_2)$$

в первое уравнение системы (2.2). Решая полученное уравнение относительно v , находим:

$$v = c_1 e^x + s(t).$$

Уточним функцию $s(t)$, подставив найденное выражение в уравнение (2.10). Получаем решение уравнения (2.10):

$$v = c_1 e^x - 4c_3(t + c_4)^{-1} + c_5. \quad (4.2)$$

Подставив построенное выше решение повторно в первое уравнение системы (2.2) и решив его относительно функции $u(x, t)$, получаем решение, совпадающее с исходным:

$$u^{\text{II}} = e^x(c_1 t + c_2).$$

Нетрудно убедиться, что подстановка решения (4.2) во второе уравнение системы (2.2) приводит вновь к исходному решению. Следовательно, выбранное нами исходное решение является неразмножаемым относительно предложенных алгоритмов.

Приведем другие примеры размножения решений уравнения (1.7) с помощью предложенных алгоритмов.

Подставив второе из построенных лиевским методом решений (2.12)

$$u^{\text{I}} = \frac{t}{c_1 e^{-x} - c_2}$$

в первое уравнение системы (2.2), получаем анзац:

$$v = -c_2^{-1}(\ln|c_1 e^x - c_2| + x) + s(t).$$

Уточнив выражение для $s(t)$ подстановкой в уравнение (2.10), находим:

$$u = -c_2^{-1}(\ln|c_1 e^x - c_2| + x) + c_2 c_3 (t + c_4)^{-1} + c_2 \ln|t + c_4| + c_5. \quad (4.3)$$

Подставляя найденное решение в первое уравнение системы (2.2) и решая ее, получаем анзац:

$$u^{\text{II}} = \frac{t}{c_1 e^{-x} - c_2} + g(x).$$

Уточнив произвольную функцию $g(x)$ с помощью уравнения (1.7), что оказывается возможным лишь при условии $c_4 = -c_3(c_1 - c_2)(c_1 + c_2)^{-1}$, приходим к решению

$$u^{\text{II}} = \frac{t}{c_1 e^{-x} - c_2} + \frac{c_3 e^{\frac{3x}{2}}}{(c_1 - c_2 e^x)^2} \left(\sinh(x/2) - \frac{(c_1 - c_2)}{c_1 + c_2} \cosh(x/2) \right).$$

Если воспользоваться вторым алгоритмом и подставить решение (4.3) во второе уравнение потенциальной системы, приходим к решению

$$u^{\text{II}} = \frac{t + c_4}{c_7 e^{-x} - c_2},$$

с точностью до констант совпадающему с исходным.

4.2. Размножение решений с помощью нелокального преобразования

Построенное интегро-дифференциальное преобразование (2.7), как было доказано в теореме 2.1, обеспечивает нелокальную инвариантность уравнения (1.7). Следовательно, выполнив это преобразование для известного решения, мы должны получить опять решение того же самого уравнения. В зависимости от того, каким образом исключать интегральную переменную из получающихся уравнений, существует два различных способа реализации этого механизма.

Алгоритм 4.3. Пусть известно решение уравнения (1.7), заданное неявно уравнением $\varphi_1(x, t, u^{\text{I}}(x, t)) = 0$. Выполним нелокальное преобразование (2.7) этого уравнения. Получаем:

$$\varphi_1 \left(p(r, s) - \varepsilon, r + \ln|1 - \varepsilon p(r, s)^{-1}|, s + \varepsilon \int p_s(r, s) dr \right) = 0.$$

Решив это уравнение относительно $\int p_s(r, s) dr$, находим интегро-дифференциальное уравнение:

$$\int p_s(r, s) dr = f(r, s, p(r, s), \varepsilon). \quad (4.4)$$

Продифференцировав обе части последнего равенства по r , получаем дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$F_1(r, s, p(r, s), p_r(r, s), p_s(r, s), \varepsilon) = 0. \quad (4.5)$$

Решим это уравнение. Переобозначив в найденном решении переменные, т. е. заменив переменные $(r, s, p(r, s))$ на $(x, t, u(x, t))$ соответственно, получаем неявный анзац:

$$\varphi(x, t, u^{\text{II}}(x, t), \varepsilon) = 0. \quad (4.6)$$

Для уточнения появляющейся в процессе решения произвольной функции подставим найденный анзац (4.6) в уравнение (1.7). Полученное при этом дифференциальное выражение для произвольной функции расщепляем исходя из требования его редукции к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Подставив найденное решение системы выражение произвольной функции в анзац (4.6), находим новое решение уравнения (1.7):

$$\varphi_2(x, t, u^{\text{II}}(x, t), \varepsilon) = 0.$$

Алгоритм 4.4. Выполним все шаги алгоритма 3 вплоть до получения уравнения (4.4). Продифференцируем обе части последнего равенства по s . Получаем уравнение:

$$\int p_{ss}(r, s) dr = \partial_s f(r, s, p(r, s), \varepsilon). \quad (4.7)$$

Поскольку для функции $p(r, s)$ справедливо уравнение (1.7), воспользуемся равенством

$$\int p_{ss}(r, s) dr = -p(r, s)^{-1} + \frac{p_r(r, s)}{p(r, s)^2}$$

и перепишем (4.7) иначе

$$-p(r, s)^{-1} + \frac{p_r(r, s)}{p(r, s)^2} = \partial_s f(r, s, p(r, s), \varepsilon). \quad (4.8)$$

Решив это уравнение и переобозначив в найденном решении переменные, получаем неявный анзац $\varphi(x, t, u^{\text{II}}(x, t), \varepsilon) = 0$. Последующие шаги данного алгоритма дословно повторяют соответствующую заключительную часть алгоритма 3.

Рассмотрим примеры размножения некоторых из построенных выше решений уравнения (1.7) с помощью преобразования (2.7). Воспользуемся для этого алгоритмом 3.

1) Первое инвариантно-групповое решение (2.12)

$$u^{\text{I}} = e^x(c_1 t + c_2)$$

переходит в

$$u^{\text{II}} = \frac{1}{2} e^x \left(c_3(c_1 \varepsilon e^x + t) + c_4 \pm \sqrt{(c_3(c_1 \varepsilon e^x + t) + c_4)^2 - 4c_1^2 \varepsilon^2} \right).$$

2) Второе инвариантно-групповое решение

$$u^I = \frac{t}{c_1 e^{-x} - c_2}$$

генерирует неявное решение, заданное равенством

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(c_2 - c_3^2) \ln |(c_1 e^{-x} - c_2)c_3 u^{II} + c_2 \varepsilon| + c_3 c_2 \varepsilon(t - (c_1 e^{-x} - c_2)u^{II}) + \\ + c_3^2 \varepsilon^2 (\ln |u^{II}| - x) + c_4 c_2 c_3^2 \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

3) Полученное нами ранее решение

$$u^I = \frac{t + c_3}{c_1 e^{-x} - c_2}$$

переходит в решение

$$\begin{aligned} u^{II} = \frac{1}{c_1 e^{-x} - c_4} \exp \left(-\frac{1}{2} \text{LambertW}(-G(x, t)) + \frac{1}{2} \ln |G(x, t)| \right), \\ G(x, t) = \exp(2(\ln |c_1 + c_4 e^x| + c_4 t + c_2 c_4)). \end{aligned}$$

4) Выбрав исходное решение в виде

$$u^I = \frac{c_1 t}{-c_2 e^{-x} + c_1},$$

находим неявное решение

$$\begin{aligned} (c_3^2 - 1) \ln |c_3(c_2 - e^x) u^{II} - e^x| - c_3^2 \ln |c_3(-1 + c_2 e^{-x}) u^{II}| + \\ c_3 u^{II}(1 - c_2 e^{-x}) - c_3^2 \ln |c_3(c_2 - e^x)| - c_3^2(x - t - c_4) + x = 0. \end{aligned}$$

В частности, решение $u^I = t$, получаемое из предыдущего при $c_2 = 0$, генерирует функцию

$$u^{II} = e^{-\text{LambertW}(e^{x+t} + x + t)}. \tag{4.9}$$

Приведем примеры размножения решений с использованием алгоритма 4.

1) Опять в качестве исходного выберем решение

$$u^I = \frac{c_1 t}{-c_2 e^{-x} + c_1}.$$

Размножив его в соответствии со вторым алгоритмом, приходим к решению

$$u^{II} = \varepsilon \exp \left(-\text{LambertW} \left(c_1^{-1}(-c_2 + c_1 e^x) e^{-\frac{c_3 - t}{\varepsilon}} \right) - \frac{c_3 - t}{\varepsilon} + x \right).$$

2) Размножить неявное решение из перечисленных в (2.12)

$$\frac{u^I}{c_1} + \ln |1 + c_1 u^I| - \frac{\ln |1 + c_1 u^I|}{c_1^2} - \ln |u^I| + x - t - c_2 = 0$$

удается, выбрав с целью упрощения расчетов $\varepsilon = 1$. При этом получаем:

$$(c_1 - 1)(c_1^2 - 1) \ln |1 + c_1 u^{II} - c_1| - c_1^2(t - x + c_1 x) + c_1^2 \ln |u^{II}|(c_1 - 1) + c_1(u^{II} - 1) = 0.$$

Замечание 4.1. Решение (4.9) уравнения (1.7) позволило построить ряд сравнительно несложных решений уравнения (2.10). Так, воспользовавшись первым уравнением потенциальной системы, находим решение:

$$v = \pm \left(e^{-\text{LambertW}(e^{x+t}+x+t)} - t \right) + c_1.$$

Второе уравнение потенциальной системы из этого же решения генерирует

$$v = \pm (\ln |\text{LambertW}(e^{x+t})| - x) + c_2.$$

Повторное использование первого, и, соответственно, второго уравнения потенциальной системы, т. е. завершение третьего и четвертого алгоритмов разложения, дает одно и то же решение:

$$u = \text{LambertW}(e^{x+t}).$$

5. Заключение и обсуждение полученных результатов

В предложенной статье показано, что потенциальная симметрия нелинейного телеграфного уравнения представляет собой частный случай нелокальной симметрии относительно конечного интегро-дифференциального преобразования Ли – Бäckлунда. Это преобразование положено в основу двух алгоритмов, с помощью которых выполнено разложение ряда точных решений уравнения. Отмеченная нелокальная симметрия определяется посредством характеристических уравнений второго порядка, выводимых из лиевского оператора, описывающего потенциальную симметрию уравнения. Лиевские инвариантно-групповые решения этих характеристических уравнений служат источником новых нелиевских решений уравнений, связанных потенциальной системой. Построены Ли инвариантно-групповые решения таких уравнений и алгоритмы, по которым выполнено их разложение. В числе найденных присутствуют новые решения.

В следующей статье мы строим конечное интегро-дифференциальное преобразование, линеаризующее рассмотренное нелинейное телеграфное уравнение и связанное с ним нелинейное уравнение для потенциала. С его помощью будут найдены новые потенциальные и нелокальные симметрии и построены новые точные решения.

Библиографические ссылки

1. *Ames W. F.* Nonlinear partial differential equations in engineering. Vol. 1. — New York: Academic press, 1965. — 511 p.
2. *Debnath L.* Nonlinear PDEs for scientists and engineers. — Birkhauser, 1997. — 600 p.
3. *Jeffrey A.* Applied partial differential equations. An introduction. — New York: Academic Press, 2003. — 408 p.
4. *Rogers C., Shadwick W. F.* Bäcklund transformations and their applications. — New York: Academic Press, 1982. — 321 p.

5. *Ovsiannikov L. V.* Group Analysis of Differential Equations. — New York: Academic Press, 1982. — 400 p.
6. *Olver P. J.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1993. — 639 p.
7. *Bluman G. W., Kumei S.* Symmetries and Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1989. — 354 p.
8. *Bluman G. W., Reid G. J., Kumei S.*, New classes of symmetries for partial differential equations, *J. Math. Phys.*, No. 4, Vol. 29, 1988, P. 806–811.
9. *Tychynin V. A.*, Non-local symmetry and generating solutions for Harry-Dym type equations, *J. Phys. A: Math. Gen.*, No. 14, Vol. 27, 1994, P. 2787–2797.
10. *Tychynin V. A., Petrova O. V., Tertyshnyk O. M.*, Symmetries and Generation of Solutions for Partial Differential Equations, *SIGMA*, No. 3, 2007, 0702033, 14 p.
11. *Reyes E. G.*, Nonlocal symmetries and the Kaup–Kupershmidt equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, No. 46, 2005, 073507, 19 p.
12. *Bluman G. W.*, Use and construction of potential symmetries, *Math. Comput. Modeling*, No. 10, Vol. 18, 1993, P. 1–14.
13. *Gandarias M. L., Torrisi M., Valenti A.*, Symmetry classification and optimal systems of a non-linear wave equation, *International Journal of Non-linear Mechanics*, No. 39, 2004, P. 389–398.
14. *Kingston J. G., Sophocleous C.*, Symmetries and form-preserving transformations of one-dimensional wave equations with dissipation, *International Journal of Non-linear Mechanics*, No. 36, 2001, P. 987–997.
15. *Huang D. J., Ivanova N.*, Group analysis and exact solutions of a class of variable coefficient nonlinear telegraph equation, *Journal of mathematical physics*, No. 48, 2007, 073507, 23 p.
16. *Bluman G. W., Doran-Wu P.*, The use of factors to discover potential systems or linearizations, *Acta Appl. Math.*, No. 41, 1995, P. 21–43.
17. *Bluman G. W., Temuerchaolu, Sahadevan R.*, Local and nonlocal symmetries for nonlinear telegraph equation, *Journal of mathematical physics*, No. 46, 2005, 023505, 12 p.
18. *Anderson R. L., Ibragimov N. H.* Lie-Backlund transformations in applications. — Philadelphia: SIAM, 1979. — 124 p.
19. *Lisle I. G.* Equivalence transformations for classes of differential equations. Thesis. University of British Columbia. 1992.
20. *Ivanova N. M., Popovych R. O., Sophocleous C., Vaneeva O. O.*, Conservation laws and hierarchies of potential symmetries for certain diffusion equations, *Physica A*, No. 388, 2008, P. 343–356.

УДК 681.31

Когут П. І. Про стійкість L^p -розв'язків інтегральних рівнянь Вольтерра (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 3–20.

Розглядаються питання стійкості лінійних інтегральних рівнянь Вольтерра з позицій другого методу Ляпунова. Характерною особливістю наведеного класу рівнянь є приналежність їх розв'язків класу локально p -інтегровних за Бохнером функцій $L^p_{loc}(0, \infty; X)$.

Бібліогр. 19 назв.

УДК 539.9

Волошко Л. В., Кисельова О. М., Ламзюк В. Д. Щодо розв'язування крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння для області складної форми (укр.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 21–29.

Отримано алгоритм саморегуляризації системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду і крайової задачі для бігармонічного рівняння.

Лл. 4. Табл. 2. Бібліогр. 11 назв.

УДК 517.91

Остапенко В. О. Перша крайова задача для телеграфного рівняння в області з рухомою границею. (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 30–54.

Розглянуто першу крайову задачу для телеграфного рівняння на відрізку, один кінець якого є рухомих. Розроблено метод розв'язку такої задачі і одержано її точний розв'язок. Цей метод ґрунтується на інтегральному представленні розв'язків телеграфного рівняння і узагальненні методу відбуття стосовно області зі змінною границею. Розглянуто варіанти руху рухомого кінця з дозвуковою, звуковою і надзвуковою а також із довільною швидкістю.

Бібліогр. 7 назв.

УДК 681.31

Баланенко І. Г., Когут П. І. Про класифікацію розв'язків початково-крайових задач для вироджених параболічних рівнянь (укр.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 55–73.

Розглядаються питання класифікації розв'язків початково-крайових задач для вироджених лінійних параболічних рівнянь та дається деяке їх застосування до теорії оптимальних систем.

Бібліогр. 6 назв.

УДК 517.91

Остапенко В. О. Третя крайова задача для телеграфного рівняння у напівобмеженій області (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 74–77.

Розглянуто третю крайову задачу для телеграфного рівняння у напівобмеженій області. Одержано розв'язок цієї задачі в квадратах. Побудова точного розв'язку ґрунтується на застосуванні методу продовжень і на розробленому раніше методі інтегрального представлення досить широкого класу розв'язків телеграфного рівняння.

Бібліогр. 4 назв.

УДК 532.5 + 517.958

Мельник О. А., Перехрест В. І. Про взаємодію просторових вихорів (укр.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 78–85.

Розглядається модель кінематичної взаємодії двох просторових вихорів одного напрямку, але різних за інтенсивністю та круткою.

Лл. 4. Табл. 7. Бібліогр. 5 назв."

УДК 517.95

Когут О. П. Про одну задачу оптимального керування в коефіцієнтах для нелінійних еліптичних варіаційних нерівностей (English) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 86–98.

Досліджено задачу оптимального керування для нелінійної еліптичної варіаційної нерівності з узагальнено соленоїдальними коефіцієнтами, що виступають як керування з класу $L^\infty(\Omega)$. Встановлено існування оптимального розв'язку даної задачі.

Бібліогр. 22 назв.

УДК 519.863:534

Богомаз В. М., Шаповал І. В. Чисельний розв'язок задачі оптимального керування механічною вібрисистемою (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 99–113.

Наведено достатні умови розв'язності задачі оптимального керування вібрисистемою, яка вбудована в ущільнювальну машину коткового типу. На основі методу штрафу та методу локальних варіацій отримано чисельний розв'язок для вібрисистеми із двома дебалансами.

Лл. 3. Бібліогр. 8 назв.

УДК 517.9

Божанова Т. А. Про одну задачу керування з розподіленими параметрами на транспортній мережі (укр.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 114–127.

Розглядається гідродинамічна модель для транспортного потоку на мережі. У припущенні, що транспортний потік на кожному ребрі мережі є об'єктом керування, ставиться задача його оптимізації у векторній формі. Виділено топологію на відповідному функціональному просторі, відносно якої множина допустимих розв'язків такої задачі є секвенційно компактною, та доведено існування ефективних розв'язків розглянутої задачі векторної оптимізації.

Бібліогр. 16 назв.

УДК 536.24

Меньшиков Ю. Л. Деякі нестандартні постановки обернених задач (English) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 128–142.

Розглядаються обернені задачі, які не можуть бути розв'язані у рамках класичної постановки: обернена задача Крилова, рання діагностика дисбалансу ротора, найбільш правдоподібний розв'язок. Для отримання стійкого розв'язку цих задач запропоновано алгоритми, які базуються на методі регуляризації Тихонова. Обернену задачу Крилова розглянуто в різних постановках та виконано чисельні розрахунки за реальними вимірами. Нестандартна постановка обернених задач дозволяє розширити можливості методу регуляризації.

Лл. 3. Бібліогр. 19 назв.

УДК 517.9: 519.46

Тичинін В. А., Тертишник О. М. Нелокальні симетрії нелінійного телеграфного рівняння. I. Нелокальна інваріантність та розмноження розв'язків. (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 143–159.

На основі відомої потенціальної симетрії побудовано скінченне нелокальне інтегродиференціальне перетворення, яке залишає інваріантним нелінійне телеграфне рівняння $u_{tt} - \partial_x(-u^{-1} + u^{-2}u_x) = 0$. Побудовано алгоритми, за якими виконано розмноження його розв'язків. Серед знайдених присутні нові розв'язки. В статті отримано рівняння, зв'язані з даним телеграфним рівнянням за допомогою потенціальної системи. Для них досліджено лівські симетрії та побудовано точні розв'язки. Показано, що потенціальні симетрії являють собою спеціальний частинний випадок нелокальних симетрій відносно скінченних перетворень Лі – Беклунда з інтегральною змінною. Із потенціальної симетрії вихідного рівняння виведено характеристичні рівняння, які визначають нелокальні симетрії рівнянь, зв'язаних потенціальною системою. Ці характеристичні рівняння також використано для побудови точних розв'язків зазначених рівнянь.

Бібліогр. 20 назв.

УДК 681.31

Когут П. И. К вопросу об устойчивости L^p -решений интегральных уравнений Вольтерра (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 3–20.

Рассматриваются вопросы устойчивости линейных интегральных уравнений Вольтерра с позиций второго метода Ляпунова. Характерной особенностью рассматриваемого класса уравнений есть принадлежность их решений классу локально p -интегрируемых по Бохнеру функций $L^p_{loc}(0, \infty; X)$.

Библиогр. 19 назв.

УДК 539.9

Волошко Л. В., Киселева Е. М., Ламзюк В. Д. О решении краевой задачи для неоднородного бигармонического уравнения для областей сложной формы (укр.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 21–29.

Получен алгоритм саморегуляризации системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода и граничной задачи для бигармонического уравнения.

Ил. 4. Табл. 2. Библиогр. 11 назв.

УДК 517.91

Остапенко В. А. Первая краевая задача для телеграфного уравнения в области с подвижной границей (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 30–54.

Рассматривается первая краевая задача для телеграфного уравнения на отрезке, один конец которого является подвижным. Разработан метод решения такой задачи и получено ее точное решение. Этот метод основан на интегральном представлении решений телеграфного уравнения и обобщении метода отражений применительно к областям с переменной границей. Рассмотрены варианты движения подвижного конца с дозвуковой, звуковой и сверхзвуковой скоростями, а также с произвольной скоростью.

Библиогр. 7 назв.

УДК 681.31

Баланенко И. Г., Когут П. И. О классификации решений начально-краевых задач для вырожденных параболических уравнений (укр.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 55–73.

Рассматриваются вопросы классификации слабых решений начально-краевых задач для вырожденных линейных параболических уравнений и дается некоторое их применение в теории оптимальных систем.

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.91

Остапенко В. А. Третья краевая задача для телеграфного уравнения в полуограниченной области (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 74–77.

Рассмотрена третья краевая задача для телеграфного уравнения в полуограниченной области. Получено решение этой задачи в квадратурах. Построение точного решения задачи основано на применении метода продолжений и методе интегрального представления достаточно широкого класса решений телеграфного уравнения.

Библиогр. 4 назв.

УДК 532.5 + 517.958

Мельник А. А., Перехрест В. И. О взаимодействии пространственных вихрей (укр.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 78–85.

Рассматривается модель кинематического взаимодействия двух пространственных вихрей одного направления, но разных по интенсивности и направлению кручения.

Ил. 4. Табл. 7. Библиогр. 5 назв.

УДК 517.95

Когут О. П. Об одной задаче оптимального управления в коэффициентах для нелинейных эллиптических вариационных неравенств (English) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 86–98.

Исследована задача оптимального управления для нелинейного эллиптического вариационного неравенства с обобщенно соленоидальными коэффициентами, которые выступают в качестве управлений из класса $L^\infty(\Omega)$. Доказано существование оптимального решения данной задачи.

Библиогр. 22 назв.

УДК 519.863:534

Богомаз В. Н., Шаповал И. В. Численный анализ задачи оптимального управления механической вибросистемой (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 99–113.

Приведены достаточные условия разрешимости одной задачи оптимального управления вибросистемой, которая встроена в уплотняющую машину каткового типа. На основе идей метода штрафа и метода локальных вариаций получено численное решение задачи управления для вибросистемы с двумя дебалансами.

Ил. 3. Библиогр. 8 назв.

УДК 517.9

Божанова Т. А. Об одной задаче управления с распределенными параметрами на транспортной сети (укр.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 114–127.

Рассмотрена гидродинамическая модель для транспортного потока на сети. В предположении, что транспортный поток на каждом ребре сети является управляемым процессом, ставится задача его оптимизации в векторной форме. Выделено топологию на соответствующем функциональном пространстве, относительно которой множество допустимых решений является секвенциально компактным. Доказано существование эффективных решений поставленной задачи векторной оптимизации.

Библиогр. 16 назв.

УДК 536.24

Меньшиков Ю. Л. Некоторые нестандартные постановки обратных задач (English) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вип. 3. — № 8. — С. 128–142.

Изучаются обратные задачи, которые не могут быть решены в рамках классической постановки: обратная задача Крылова, ранняя диагностика дисбаланса ротора, наиболее правдоподобное решение. Для получения устойчивого решения этих задач предложены алгоритмы, базирующиеся на методе регуляризации Тихонова. Обратная задача Крылова рассмотрена в различных постановках и выполнены численные расчеты по реальным

измерениям. Нестандартная постановка обратных задач расширяет возможности метода регуляризации.

Ил. 3. Библиогр. 19 назв.

УДК 517.9: 519.46

Тычинин В. А., ТЕРТЫШНИК О. Н. **Нелокальные симметрии нелинейного телеграфного уравнения. I. Нелокальная инвариантность и размножение решений** (рос.) // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — ДНУ, 2011. — Вып. 3. — № 8. — С. 143–159.

На основе известной потенциальной симметрии построено конечное нелокальное интегро-дифференциальное преобразование, оставляющее инвариантным нелинейное телеграфное уравнение $u_{tt} - \partial_x(-u^{-1} + u^{-2}u_x) = 0$. Построены алгоритмы, по которым выполнено размножение его решений. В числе найденных присутствуют новые решения. В статье получены уравнения, связанные с данным посредством потенциальной системы. Для них исследованы лиевские симметрии и построены точные решения. Показано, что потенциальные симметрии представляют собой специальный частный случай нелокальных симметрий — конечные преобразования Ли – Бэклунда с интегральной переменной. Выведены характеристические уравнения, определяющие нелокальные симметрии уравнений, связанных потенциальной системой. Эти характеристические уравнения также использованы для отыскания точных решений указанных уравнений.

Библиогр. 20 назв.

KOGUT P. I. **On stability of L^p -solutions of Volterra integral equations** (Russian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 3, No. 8, 3–20(2011).

The stability of linear Volterra integral equations are discussed from the Lyapunov Direct Method point of view. The characteristic feature of these equations is the fact that their solutions are not continuous functions. We consider the case when the solution class is the Bochner space $L^p_{loc}(0, \infty; X)$ of locally p -integrable functions.

Ref. 19.

VOLOSHKO L. V., KISELYOVA E. M., LAMZYUK V. D. **On solution of boundary value problem for non-homogenous biharmonic equation in domains of complicated shape** (Ukrainian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 3, No. 8, 21–29(2011).

An algorithm for self-regularization of Fredholm integral equations of first kind boundary value problem for biharmonic equation is obtained.

Fig. 4. Tbl. 2. Ref. 11.

OSTAPENKO V. A. **The first boundary-value problem for the telegraph equation in area with mobile border** (Russian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 3, No. 8, 30–54(2011).

The first boundary-value problem for the telegraph equation on an interval which one end is mobile is considered. The method of the solution of such problem is developed and its exact solution is obtained. This method is based on integrated representation of solutions of the telegraph equation and generalization of a method of reflections with reference to areas with variable border. Variants of movement of the mobile end with subsonic, sound and supersonic speeds, and also with arbitrary speed are considered.

Ref. 7.

BALANENKO I. G., KOGUT P. I. **On classification of weak solutions to initial-boundary value problems for degenerate parabolic equations** (Ukrainian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 3, No. 8, 55–73(2011).

The classification of the weak solutions to Dirichlet initial boundary value problem associated with a linear degenerate parabolic equation has been studied. Some applications to associated optimal control problems in coefficients are discussed.

Ref. 6.

OSTAPENKO V. A. **The third boundary-value problem for the telegraph equation in semi-bounded domain** (Russian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 3, No. 8, 74–77(2011).

The third boundary-value problem for the telegraph equation in semi-bounded domain is considered. The solution of this problem in quadratures is obtained. Construction of the exact solution to this problem is based on application of the method of extensions

and on development of the method of integral representation for rather wide class of solutions to the telegraph equation.

Ref. 4.

MELNIK A., PEREKHREST V. **On interaction of spatial whirlwinds** (Ukrainian). // *Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 3, No. 8, 78–85(2011).*

The spatial model of cinematical interaction of two spatial whirlwinds of one direction, but different with respect to the intensity and rotation is considered.

Fig. 4. Tbl. 7. Ref. 5.

KOGUT O. P. **On Optimal Control Problem in Coefficients for Nonlinear Elliptic Variational Inequalities** (English). // *Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 3, No. 8, 86–98(2011).*

We study an optimal control problem for a nonlinear elliptic variational inequality with the generalized solenoidal coefficients which we adopt as controls in $L^\infty(\Omega)$. We prove the existence of an optimal solutions to this problem.

Ref. 22.

BOGOMAS W. N., SHAPOVAL I. W. **Numerical analysis of task of optimal control the mechanical vibrosystem** (Russian). // *Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 3, No. 8, 99–113(2011).*

The sufficient optimality conditions of an optimal control by the vibrosystem which is a more compact machine of rolling type are obtained. Using the ideas of penalty method and method of local variations, the numeral solution of optimal control problem is presented for the vibrosystem with two debalances.

Fig. 3. Ref. 8.

BOZHANOVA T. A. **On the Control Problem on Traffic Network** (Ukrainian). // *Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 3, No. 8, 114–127(2011).*

We consider the traffic flow models in vector-valued optimization statement, where the flow is controlled on the edges of network. We study the topological properties of the set of all admissible pairs to the problem. The existence of efficient solutions of vector optimization problem for traffic flow on network are proved.

Ref. 16.

MENSHIKOV YU. L. **Some non-standard statements of inverse problems** (English). // *Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 3, No. 8, 128–142(2011).*

We study the inverse problems which can not be solved in the classical framework: Krylov inverse problem, early diagnostics of a rotor unbalance, the most probable solution. For obtaining the steady solutions of these problems some algorithms based on the method of Tikhonov regularization are offered. Krylov inverse problem in various statements has been considered and numerical calculation on real measurements has been

executed. Non-standard statements of inverse problems extend of regularization method possibilities.

Fig. 3. Ref. 19.

TYCHYNIN V. A , TERTYSHNIK O. N Nonlocal Symmetries of Nonlinear Telegraph Equation. I. Invariancy and Generating of Solutions. (Russian). // Visnyk DNU. Series: Mathematical Modelling, Dnipropetrovsk : DNU, Issue 3, No. 8, 143–159(2011).

On the basis of known potential symmetry the finite nonlocal integro-differential transformation leaving invariant the nonlinear telegraph equation $u_{tt} - \partial_x(-u^{-1} + u^{-2}u_x) = 0$ is constructed. The algorithms generating its solutions are obtained. New solutions are present there among generated. Equations connected with the given telegraph equation by means of potential system are received. Lie symmetries for them are investigated and exact solutions are constructed. It is shown, that potential symmetries are a special case of nonlocal symmetries – the invariance under finite Lie–Baklund transformations depending on integral variable. The characteristic equations corresponding to the potential symmetry of the telegraph equation are deduced. They define the nonlocal symmetries of equations connected by means of potential system. They also are used for searching of exact solutions of the specified equations.

Ref. 20.

Зміст

Когут П. И. К вопросу об устойчивости L^p -решений интегральных уравнений Вольтерра	3
Волошко Л. В., Кісельова О. М., Ламзюк В. Д. Щодо розв'язування крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння для області складної форми	21
Остапенко В. А. Первая краевая задача для телеграфного уравнения в области с подвижной границей.....	30
Баланенко І. Г., Когут П. І. Про класифікацію розв'язків початково-крайових задач для вироджених параболічних рівнянь	55
Остапенко В. А. Третья краевая задача для телеграфного уравнения в полуограниченной области	74
Мельник О. А., Перехрест В. І. Про взаємодію просторових вихорів	78
Kogut O. P. On optimal control problem in coefficients for nonlinear elliptic variational inequalities	86
Богомаз В. Н., Шаповал І. В. Численный анализ задачи оптимального управления механической вибросистемой	99
Божанова Т. А. Про одну задачу керування з розподіленими параметрами на транспортній мережі	114
Menshikov Yu. L. Some non-standard statements of inverse problems	128
Тычинин В. А., Тертышник О. Н. Нелокальные симметрии нелинейного телеграфного уравнения. I. Нелокальная инвариантность и размножение решений	143