

Міністерство освіти і науки України  
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гринчара

ВІСНИК ДНУ  
Серія МЕХАНІКА

Том 2

Дніпропетровськ  
ДНУ  
2009

Представлены новые результаты исследований в области механики деформируемого твердого тела, динамики и прочности конструкций. Большое внимание уделено вопросам прикладного характера, связанным с теоретическим и экспериментальным обоснованием технологических и проектных решений в современном машиностроении. Эффективность разработанных алгоритмов и методов расчета показана на примерах решения конкретных задач.

Для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов.

Наведені нові результати досліджень у галузі механіки деформівного твердого тіла, динаміки і міцності конструкцій. Велика увага приділяється питанням прикладного характеру, пов'язаним із теоретичним і експериментальним обґрунтуванням технологічних та проектних рішень у сучасному машинобудуванні. Ефективність розроблених алгоритмів і методів розрахунку показана на прикладах розв'язування конкретних задач.

Для науковців, інженерів, аспірантів та студентів старших курсів.

*Друкується за рішенням вченої ради  
Дніпропетровського національного університету  
згідно з затвердженим планом видань на 2009 р.*

#### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

д-р. техн. наук, проф. **А.П. Дзюба** (відп. редактор), д-р фіз.-мат. наук, проф. **В.В. Лобода** (заст. відп. редактора), канд. фіз.-мат. наук, доц. **О.О. Бобильов** (відп. секретар), д-р фіз.-мат. наук, проф. **О.Г. Гоман**, чл.-кор. НАН України, д-р техн. наук, проф. **В.С. Гудрамович**, д-р техн. наук, проф. **М.М. Дронь**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О.О. Кочубей**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В.І. Кузьменко**, д-р техн. наук проф. **Н.І. Ободан**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **А.В. Павленко**, д-р техн. наук, проф. **Є.С. Переверзєв**, д-р техн. наук, проф. **О.В. Пилипенко**, академік АН ВШУ, д-р фіз.-мат. наук, проф. **М.В. Поляков**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О.А. Приходько**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **С.О. Смірнов**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю.А. Черняков**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **М.Ю. Швайко**.

#### Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. **П.О. Стеблянко**  
д-р техн. наук, проф. **В.П. Пошивалов**

© Дніпропетровський національний  
університет імені Олеся Гончара, 2009

© Видавництво  
Дніпропетровського  
університету, 2009

УДК 539.3

А.И. Александров

*Запорожский национальный университет*

## О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ КУЛОНОВА ТРЕНИЯ

Отримана достатня умова єдності розв'язку контактної задачі про взаємодію лінійно-пружних тіл при наявності кулонового тертя між ними. Застосування нелінійних операторних рівнянь для моделювання контактної взаємодії тіл дало можливість визначити оригінальну числову характеристику лінійного оператора впливу поверхневих навантажень на поверхневі пружні зміщення. За допомогою цієї характеристики сформульована умова, при виконанні якої факт єдності розв'язку контактної задачі визначається пружними властивостями взаємодіючих тіл незалежно від зовнішніх умов їх навантаження.

**Ключові слова:** лінійно-пружні тіла, контактна взаємодія, кулонове тертя, нелінійні операторні рівняння.

Получено достаточное условие единственности решения контактной задачи о взаимодействии линейно-упругих тел при наличии кулонового трения между ними. Применение нелинейных операторных уравнений для моделирования контактного взаимодействия тел дало возможность определить оригинальную числовую характеристику линейного оператора влияния поверхностных нагрузок на поверхностные упругие перемещения. С помощью этой характеристики сформулировано условие, при выполнении которого факт единственности решения контактной задачи определяется упругими свойствами взаимодействующих тел независимо от внешних условий их нагрузки.

**Ключевые слова:** линейно-упругие тела, контактное взаимодействие, кулоново трение, нелинейные операторные уравнения.

A sufficient condition of the uniqueness of the solution of the contact problem, connected with the interaction between the linearly elastic bodies, where possible the Coulomb friction between them, has been obtained. The use of nonlinear operator equations for the simulation of the contact interaction between the bodies made it possible to determine the original numerical characteristic of a linear operator of the influence of surface loads on the surface elastic displacement. This characteristic gave an opportunity to formulate the conditions under which the fact of the uniqueness of the solution of the contact problem is defined by the elastic properties of the interacting bodies, regardless of external conditions of their loading.

**Key words:** linearly elastic bodies, contact interaction, Coulomb friction, nonlinear operator equations.

**Введение.** Известные случаи существования двух различных решений контактной задачи о взаимодействии упругих систем при наличии кулонова трения [1] делают актуальным поиск достаточных условий единственности решения такой контактной задачи. Эти условия нужны не только для изучения процессов механического взаимодействия упругих тел, сопровождающихся трением, но они полезны для разработки методов приближённого решения соответствующих контактных задач. Известные условия единственности решения таких задач [1 – 4] при использовании закона трения Кулона в классическом виде сводятся к малости коэффициента трения или близости значений одноимённых упругих постоянных тел без конкретных указаний границ этой малости и этой близости. Цель данной статьи заключается в получении нового достаточного условия единственности решения рассматриваемых контактных задач, которое основано на использовании нелинейных операторных уравнений для формулирования задач [5; 6].

**Операторное уравнение контактной задачи.** Рассмотрим трёхмерную статическую контактную задачу о взаимодействии двух линейно-упругих тел с учётом

трения Кулона при неизвестной поверхности контакта и неизвестной границе раздела зон проскальзывания и сцепления на этой поверхности. При определённых допущениях [5] эта задача сводится к решению операторного уравнения [5; 6]

$$p = G_\mu(p - E \cdot (A(p) - f)), \tag{1}$$

где  $p = (p_1, p_2, p_3)$  – неизвестная вектор-функция контактной нагрузки, отыскиваемая в гильбертовом пространстве  $L_2^3(\Omega)$  [6] вектор-функций, каждая из трёх компонент которых является элементом пространства  $L_2(\Omega)$  [7];  $f = (f_1, f_2, f_3)$  – заданный элемент  $L_2^3(\Omega)$ , который характеризует конфигурацию взаимодействующих тел и условия их нагружения;  $\mu$  – коэффициент трения;  $E$  – произвольная положительная константа, значения которой не влияют на множество решений уравнения (1) [6];  $\Omega$  – заданная ограниченная плоская область, содержащая в себе неизвестную заранее зону контакта тел. Входящий в правую часть уравнения (1) линейный ограниченный оператор влияния  $A : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  определён соотношениями:

$$\begin{cases} \tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3), \quad p = (p_1, p_2, p_3) \in L_2^3(\Omega), \\ \tilde{p} = A(p), \quad \tilde{p}_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij}(p_j) \quad \forall i = \overline{1,3}, \end{cases} \tag{2}$$

где  $A_{ij} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$  есть заданные линейные ограниченные операторы [7]. Непрерывный нелинейный оператор  $G_\mu : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ , входящий в правую часть уравнения (1), задан равенствами:

$$\begin{cases} y = (y_1, y_2, y_3), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in L_2^3(\Omega), \\ y = G_\mu(x), \\ y_1(s) = h(x_1(x)), \\ y_2(s) = q(x_2(s), x_3(s), \mu \cdot h(x_1(s))), \\ y_3(s) = q(x_3(s), x_2(s), \mu \cdot h(x_1(s))), \quad s \in \Omega, \end{cases} \tag{3}$$

в которых  $\mu$  есть коэффициент трения, а функции  $h$  и  $q$  имеют вид:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases} \tag{4}$$

$$q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ x \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{если } \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases} \tag{5}$$

В [8] показано, що, подібная рассмотренной выше, квазистатическая контактная задача при дискретном характере процесса нагружения сводится к решению нескольких уравнений вида (1)

$$p^{(i)} = G_\mu(p^{(i)} - E(A(p^{(i)}) - f^{(i)})), \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

соответствующих различным шагам нагружения. Каждое из уравнений (6) характеризуется своим элементом  $f = f^{(i)} \in L_2^3(\Omega)$  и может быть решено лишь после решения предыдущего уравнения. Решением квазистатической контактной задачи (6) естественно считать элемент  $p^{(n)} \in L_2^3(\Omega)$ , удовлетворяющий последнему из уравнений (6).

Таким образом, если получено достаточное условие единственности решения уравнения (1) в пространстве  $L_2^3(\Omega)$ , не зависящее от элемента  $f \in L_2^3(\Omega)$  (но зависящее от значения  $\mu$  и оператора  $A: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ ), то это условие будет гарантировать единственность решения как статической, так и квазистатической контактной задачи в рассматриваемом функциональном пространстве.

**Формула конечных приращений для оператора  $G_\mu$ .** Соотношения (3) – (5)

означают, что для элемента  $x = (x_1, x_2, x_3) \in L_2^3(\Omega)$  при фиксированном  $s \in \Omega$  трёхмерный вектор  $G_\mu(x(s)) \in R^3$  есть метрическая проекция вектора  $x(s) \in R^3$  на сечение конуса  $\{(y_1, y_2, y_3) \in R^3 \mid y_2^2 + y_3^2 \leq \mu^2 y_1^2\}$  плоскостью  $y_1 = \mu \cdot h(x_1)$ . Используя такую геометрическую интерпретацию оператора  $G_\mu: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ , можно показать, что для любых элементов  $p = (p_1, p_2, p_3)$ ,  $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3) \in L_2^3(\Omega)$  справедливо равенство

$$G_\mu(p) - G_\mu(\tilde{p}) = B(p - \tilde{p}), \quad (7)$$

в котором линейный ограниченный оператор  $B: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  определяется соотношениями:

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega), \\ y = B(x), \\ y_i(s) = \sum_{j=1}^3 b_{ij}(s) \cdot x_j(s) \quad \forall i = \overline{1, 3}; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} b_{11}(s) = c_1(s), \quad b_{12}(s) = b_{13}(s) = 0, \\ b_{21}(s) = c_1(s) \cdot a(s), \quad b_{31}(s) = c_1(s) \cdot b(s), \\ b_{22}(s) = c_2(s) \cdot \cos^2(\theta(s)) + c_3(s) \cdot \sin^2(\theta(s)), \\ b_{23}(s) = (c_2(s) - c_3(s)) \cdot \cos(\theta(s)) \cdot \sin(\theta(s)), \\ b_{32}(s) = b_{23}(s), \\ b_{33}(s) = c_2(s) \cdot \sin^2(\theta(s)) + c_3(s) \cdot \cos^2(\theta(s)) \end{cases} \quad (9)$$

почти всюду на  $\Omega$ .

В соотношениях (9) измеримые по Лебегу на  $\Omega$  [7] функции  $c_1(s)$ ,  $c_2(s)$ ,  $c_3(s)$ ,  $a(s)$ ,  $b(s)$ ,  $\theta(s)$  удовлетворяют условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq c_i(s) \leq 1 \text{ почти всюду на } \Omega \quad (i = \overline{1,3}), \\ 0 \leq \theta(s) \leq 2\pi \text{ почти всюду на } \Omega, \\ \sqrt{a^2(s) + b^2(s)} \leq \mu \text{ почти всюду на } \Omega, \\ c_3(s) \cdot (a^2(s) + b^2(s)) = 0 \text{ почти всюду на } \Omega, \end{array} \right. \quad (10)$$

и однозначно определяются элементами  $p$  и  $\tilde{p}$ , входящими в равенство (7).

Для фиксированного положительного числа  $\mu$  рассмотрим класс  $B_\mu$  всех таких линейных ограниченных операторов  $B: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ , каждый из которых задан соотношениями (8), (9), где измеримые по Лебегу на  $\Omega$  функции  $c_1(s)$ ,  $c_2(s)$ ,  $c_3(s)$ ,  $a(s)$ ,  $b(s)$ ,  $\theta(s)$  удовлетворяют условиям (10) и однозначно определяются оператором  $B$ . Последнее означает, что каждому оператору  $B \in B_\mu$  соответствует свой набор измеримых по Лебегу на  $\Omega$  функций  $c_1(s)$ ,  $c_2(s)$ ,  $c_3(s)$ ,  $a(s)$ ,  $b(s)$ ,  $\theta(s)$ , удовлетворяющих условиям (10) и входящих в формулы (9), (8), задающие этот оператор  $B$ .

Класс  $B_\mu$  построен таким образом, что для любых элементов  $p, \tilde{p} \in L_2^3(\Omega)$  существует зависящий от них оператор  $B \in B_\mu$ , удовлетворяющий равенству (7).

**Союзный спектр оператора влияния.** Положительное число  $\mu$  будем называть союзным числом линейного оператора  $A: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ , если существует такое положительное число  $E$ , что для любого оператора  $B \in B_\mu$  нельзя указать элемент  $x \in L_2^3(\Omega)$ , отличный от нулевого, который бы удовлетворял равенству

$$B(x - E \cdot A(x)) = x. \quad (11)$$

Множество всех союзных чисел линейного оператора  $A: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  будем называть союзным спектром этого оператора и обозначать символом  $US(A)$ .

Из приведённых определений следует, что положительное значение  $\mu \in US(A)$  тогда и только тогда, когда при некотором положительном значении  $E$  равенство

$$Ker(B \cdot (I - E \cdot A) - I) = \{\bar{\theta}\}$$

выполняется для каждого оператора  $B \in B_\mu$ . Здесь символом  $I$  обозначен тождественный оператор, действующий из  $L_2^3(\Omega)$  в  $L_2^3(\Omega)$ , символом  $\bar{\theta}$  – нулевой элемент пространства  $L_2^3(\Omega)$  и символом  $Ker(D)$  – линейное многообразие всех таких элементов  $x \in L_2^3(\Omega)$ , для которых  $D(x) = \bar{\theta}$  [7]. Отыскание союзного спектра линейного оператора  $A: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  является очень сложной задачей, связанной с построением спектра оператора  $B \cdot (I - E \cdot A): L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  для каждого  $E > 0$ ,

каждого  $\mu > 0$  и каждого оператора  $B \in B_\mu$ . Однако эта задача может быть решена в некоторых простых частных случаях. Например, для линейного оператора  $A: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ , задаваемого соотношениями

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); \\ y = \tilde{A}(x); \\ y_1(s) = x_1(s) + 2 \cdot x_2(s), \\ y_2(s) = 2 \cdot x_1(s) + 5 \cdot x_2(s), \\ y_3(s) = 5 \cdot x_3(s), \end{cases}$$

союзный спектр  $US(\tilde{A})$  совпадает с интервалом  $(0, 1/2)$ . В этом можно убедиться, определяя собственные значения числовых матриц вида  $B' \cdot (I' - E \cdot A')$ , где  $E$  – положительное число и числовые матрицы  $B', I', A'$  заданы равенствами

$$B' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad I' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

В первом из этих равенств  $b_{ij} = b_{ij}(s)$  для всех  $s \in \Omega$ , а постоянные функции  $b_{ij}(s)$  заданы соотношениями (9) при условии, что удовлетворяющие равенствам и неравенствам (10) функции  $c_1(s), c_2(s), c_3(s), a(s), b(s), \theta(s)$  принимают постоянные значения на всём множестве  $\Omega$ .

**Условие единственности решения контактной задачи.** Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть для линейного оператора влияния  $A: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  вида (2) множество  $US(A)$  не является пустым и число  $\mu \in US(A)$ . Тогда для любого элемента  $f \in L_2^3(\Omega)$  уравнение (1) не может иметь более одного решения в пространстве  $L_2^3(\Omega)$ .

**Доказательство.** Если предположить, что для некоторого элемента  $f \in L_2^3(\Omega)$  различные элементы  $p, \tilde{p} \in L_2^3(\Omega)$  удовлетворяют уравнению (1), то из очевидных равенств

$$\begin{aligned} p &= G_\mu(p - E \cdot (A(p) - f)), \\ \tilde{p} &= G_\mu(\tilde{p} - E \cdot (A(\tilde{p}) - f)), \end{aligned}$$

выполненных для любого положительного  $E$  [5; 6], вытекает равенство

$$(p - \tilde{p}) = B((I - E \cdot A)(p - \tilde{p})),$$

в котором оператор  $B \in B_\mu$  зависит от  $E$ . Таким образом, для любого положительного  $E$  найдётся такой зависящий от  $E$  оператор  $B \in B_\mu$ , при котором равенство (11) выполняется для ненулевого элемента  $x = p - \tilde{p} \in L_2^3(\Omega)$ . Но это означает, что  $\mu \notin US(A)$ . Поскольку полученное соотношение  $\mu \notin US(A)$  противоречит условию доказываемой теоремы, то утверждение этой теоремы верно.

Теорема 1 доказана.

Доказанная теорема означает, что при выполнении условия  $\mu \in US(A)$  квазистатическая задача (6) не может иметь более одного решения в пространстве  $L^3_2(\Omega)$  (если под решением задачи (6) понимать элемент  $p^{(n)} \in L^3_2(\Omega)$ , удовлетворяющий последнему из уравнений (6) и полученный после того, как в пространстве  $L^3_2(\Omega)$  решено каждое из предшествующих  $(n-1)$  уравнений (6)).

**Условие существования и единственности решения контактной задачи.** Рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения операторного уравнения

$$p = G_\mu(p - E \cdot (\varepsilon \cdot p + A(p) - f)), \tag{12}$$

получающегося из уравнения (1) заменой линейного оператора  $A : L^3_2(\Omega) \rightarrow L^3_2(\Omega)$  на близкий ему линейный оператор  $(\varepsilon \cdot I + A) : L^3_2(\Omega) \rightarrow L^3_2(\Omega)$ , где значение положительного параметра  $\varepsilon$  является малым. Для этого докажем вначале одно вспомогательное утверждение о союзном спектре линейного оператора.

**Теорема 2.** Для любого положительного значения  $\varepsilon$  и для любого линейного оператора  $A : L^3_2(\Omega) \rightarrow L^3_2(\Omega)$  справедливо соотношение

$$US(A) \subset US(\varepsilon \cdot I + A). \tag{13}$$

**Доказательство.** Если  $US(A) = \emptyset$ , то соотношение (13) очевидно. Пусть  $US(A) \neq \emptyset$  и  $\mu \in US(A)$ . Покажем, что  $\mu \in US(\varepsilon \cdot I + A)$ .

Действительно, если  $\mu \notin US(\varepsilon \cdot I + A)$ , то для любого положительного числа  $E$  найдутся такие операторы  $B_E$  и  $B_\mu$  и ненулевой элемент  $x_E \in L^3_2(\Omega)$ , что будет выполнено равенство

$$B_E(x_E - \varepsilon \cdot E \cdot x_E - E \cdot A(x_E)) = x_E.$$

В частности, для каждого  $E \in (0, 1/\varepsilon)$  будет выполняться равенство

$$(1 - E \cdot \varepsilon) \cdot B_E \left( x_E - \frac{1}{1 - E \cdot \varepsilon} \cdot A(x_E) \right) = x_E. \tag{14}$$

Поскольку множитель  $(1 - E \cdot \varepsilon)$  принадлежит интервалу  $(0, 1)$ , то из формул (8) – (10) следует, что оператор  $\tilde{B}_E = (1 - E \cdot \varepsilon) \cdot B_E \in B_\mu$  и равенство (14) можно записать в виде

$$\tilde{B}_E \left( x_E - \frac{1}{1 - E \cdot \varepsilon} \cdot A(x_E) \right) = x_E. \tag{15}$$

Поскольку  $\mu \in US(A)$ , то для некоторого  $E_1 > 0$  неравенство

$$\tilde{B}_E(x_E - E_1 \cdot A(x_E)) \neq x_E \tag{16}$$

будет выполняться при любом  $E \in (0, 1/\varepsilon)$ . При конкретном значении  $E = E_1/(1 + E_1 \cdot \varepsilon)$ , которое принадлежит интервалу  $(0, 1)$ , соотношения (15) и (16) запишутся в виде:



$$\begin{aligned} \tilde{B}_E(x_E - E_1 \cdot A(x_E)) &= x_E, \\ \tilde{B}_E(x_E - E_1 \cdot A(x_E)) &\neq x_E. \end{aligned}$$

Полученное противоречие свидетельствует о том, что  $\mu \in US(\varepsilon \cdot I + A)$ . Таким образом, соотношение (13) доказано.

Теорема 2 доказана.

Для доказательства существования и единственности решения уравнения (12) в гильбертовом пространстве  $L_2^3(\Omega)$  приведём известные соотношения [6; 7] для вычисления скалярного произведения элементов пространства  $L_2^3(\Omega)$ , нормы элементов этого пространства и нормы линейного ограниченного оператора  $D : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ :

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); \\ (x, y) &= \sum_{k=1}^3 \int_{\Omega} x_k(s) \cdot y_k(s) ds; \quad \|x\| = \sqrt{(x, x)}; \\ \|D\|_* &= \sup_{x \in L_2^3(\Omega) \setminus \{\bar{\theta}\}} \frac{\|D(x)\|}{\|x\|}. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, сформулируем и докажем следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть линейный оператор влияния  $A : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  является вполне непрерывным [7] и удовлетворяет условиям самосопряженности и неотрицательности

$$\begin{cases} (A(x), y) = (x, A(y)) \quad \forall x, y \in L_2^3(\Omega); \\ (A(x), x) \geq 0 \quad \forall x \in L_2^3(\Omega). \end{cases} \quad (17)$$

Тогда, если союзный спектр оператора  $A$  является непустым множеством, то для любого числа  $\mu \in US(A)$ , любого положительного  $\varepsilon$  и любого элемента  $f \in L_2^3(\Omega)$  операторное уравнение (12) имеет единственное решение в пространстве  $L_2^3(\Omega)$ .

**Доказательство.** Используя отображение  $Q_\mu : L_2^3(\Omega) \times L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  вида

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), \quad \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega); \\ y = Q_\mu(x, \tilde{x}); \\ y_1(s) = h(x_1(s)), \\ y_2(s) = q(x_2(s), x_3(s), \mu \cdot h(\tilde{x}_1(s))), \\ y_3(s) = q(x_3(s), x_2(s), \mu \cdot h(\tilde{x}_1(s))), \quad s \in \Omega; \end{cases} \quad (18)$$

запишем уравнение (12) в эквивалентной форме

$$p = Q_\mu(p - E(\varepsilon \cdot p + A(p) - f), p - \tilde{E}(\varepsilon \cdot p + A(p) - f)), \quad (19)$$

где  $E$  и  $\tilde{E}$  есть произвольные положительные числа. Задавая в (19) значения  $E$ ,  $\tilde{E}$  условиями

$$\tilde{E} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad 0 < E < \frac{1}{\|A\|_* + \varepsilon}, \quad (20)$$

запишем уравнение (19) в виде

$$p = Q_\mu(F_1(p), F_2(p)), \quad (21)$$

где операторы  $F_1, F_2 : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  определены соотношениями

$$\begin{cases} F_1(p) = p - E \cdot (\varepsilon \cdot p + A(p) - f), \\ F_2(p) = -\frac{1}{\varepsilon}(A(p) - f), \quad \forall p \in L_2^3(\Omega). \end{cases}$$

Очевидно, что оператор  $F_2 : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  является вполне непрерывным в силу полной непрерывности оператора  $A : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ . Из условий (17), (20) вытекает сжимаемость оператора  $F_1 : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ , которая может быть установлена при помощи следующих оценок [6]:

$$\begin{aligned} \|F_1(p) - F_1(\tilde{p})\| &= \|(I - E \cdot (\varepsilon \cdot I + A))(p - \tilde{p})\| \leq \|I - E \cdot (\varepsilon \cdot I + A)\|_* \cdot \|p - \tilde{p}\|; \\ \|(I - E \cdot (\varepsilon \cdot I + A))\|_* &= \sup_{\|x\|=1} (x - E \cdot (\varepsilon \cdot x + A(x)), x)(1 - E \cdot \varepsilon) < 1. \end{aligned}$$

Существование неподвижной точки оператора  $F : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ , задаваемого соотношением

$$F(p) = Q_\mu(F_1(p), F_2(p)) \quad \forall p \in L_2^3(\Omega), \quad (22)$$

равнозначно существованию решений уравнения (21) в  $L_2^3(\Omega)$  и эквивалентного ему уравнения (12) в том же пространстве. Из очевидных неравенств

$$\begin{aligned} |h(x_1)| &\leq |x_1|, \\ |q(x_2, x_3, h(z))| &\leq |x_2|, \\ |q(x_3, x_2, h(z))| &\leq |x_3|, \end{aligned}$$

справедливы для всех любых действительных чисел  $x_1, x_2, x_3, z$ , и соотношений (18) вытекает оценка

$$\|Q_\mu(F_1(p), F_2(p))\| \leq \|F(p)\| \quad \forall p \in L_2^3(\Omega),$$

которая означает, что оператор  $F : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  вида (22) отображает ограниченное замкнутое выпуклое множество  $U = \{x \in L_2^3(\Omega) \mid \|x\| \leq \|f\| / (E \cdot \varepsilon)\}$  пространства  $L_2^3(\Omega)$  в  $U$ . Принимая ещё во внимание вытекающие из равенств (4), (5), (18) очевидные оценки [5]:

$$\begin{aligned} \|Q_\mu(x, \tilde{x}) - Q_\mu(y, \tilde{x})\| &\leq \|x - y\| \quad \forall x, y, \tilde{x} \in L_2^3(\Omega), \\ \|Q_\mu(x, \tilde{x}) - Q_\mu(x, \tilde{y})\| &\leq \mu \cdot \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \quad \forall x, \tilde{x}, \tilde{y} \in L_2^3(\Omega), \end{aligned}$$

можно убедиться в том, что для гильбертова пространства  $L_2^3(\Omega)$ , рассматриваемых операторов  $F$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  множества  $U$  и отображения  $Q_\mu : L_2^3(\Omega) \times L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  вида (18) выполнены все условия теоремы о неподвижной точке оператора, порождаемого сжимающим и вполне непрерывным операторами [9] (см. теорему 2.9 на с. 47 в [9]). Из этой теоремы следует, что оператор  $F : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  вида (22) имеет неподвижную точку на множестве  $U$ . Ясно, что эта неподвижная точка будет удовлетворять уравнению (12). Таким образом, уравнение (12) имеет решение в пространстве  $L_2^3(\Omega)$ . Из хода доказательства теоремы видно, что факт существования решения уравнения (12) имеет место при любом  $\mu \in US(A)$ , любом  $\varepsilon > 0$  и любом элементе  $f \in L_2^3(\Omega)$ . Единственность этого решения вытекает из теорем 1 и 2.

Теорема 3 доказана.

### Библиографические ссылки

1. **Вовкушевский А.В.** Расчёт массивных гидротехнических сооружений с учётом раскрытия швов / А.В. Вовкушевский, Б.А. Шойхет. –М., 1981. 136 с.
2. **Панагиотопулос П.** Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии / П. Панагиотопулос. –М., 1989. –494 с.
3. **Кравчук А.С.** К теории контактных задач с учётом трения на поверхности соприкосновения / А.С. Кравчук. –ПММ. 1980. –Т. 44, вып. 1. –С. 122–129.
4. Demkowicz L., Oden J.T. On some existence and uniqueness results in contact problems with nonlocal friction // *Nonlinear Anal. Theory, Meth. Applic.* 1982. –V. 10. –P. 1075–1093.
5. **Александров А.И.** Решение задач контактного взаимодействия упругих тел с использованием нелинейных операторных уравнений / А.И. Александров. –Д., 1989. –74 с. (Препринт / АН УССР, Институт технической механики; 89-2).
6. **Александров А.И.** Вопросы существования решений некоторых нелинейных интегральных уравнений / А.И. Александров. –Д., 1991. –48 с.
7. **Колмогоров А.Н.** Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. –М., 1981. –544 с.
8. **Александров А.И.** Решение задачи о контактном взаимодействии упругих тел с кулоновым трением / А.И. Александров, И.Б. Бокий // *Вопросы механики деформирования и разрушения твёрдых тел.* –Д., 1995. –С. 115–120.
9. **Александров А.И.** Неподвижные точки непрерывных операторов в гильбертовом пространстве / А.И. Александров. –Запорожье, 2002. –77 с.

Надійшла до редколегії 22.09.09

УДК 539.3

Д.Е. Бобылев

*Криворожский государственный педагогический университет*

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО ВЫРАБОТКИ КРУГОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ С РАЗГРУЗОЧНОЙ ЩЕЛЬЮ

Досліджено напружено-деформований стан гірської виробки при її локальному розвантаженні. Для розв'язку задач застосований непрямий метод граничних елементів для кусково-однорідних тіл. Розроблено чисельний алгоритм розв'язання, створено прикладне програмне забезпечення та проведено числові експерименти, що демонструють можливості запропонованого алгоритму.

**Ключові слова:** напружено-деформований стан, гірська виробка, локальне розвантаження, непрямий метод граничних елементів.

Исследовано напряженно-деформированное состояние горной выработки при её локальной разгрузке. Для решения задач был использован непрямой метод граничных элементов для кусочно-однородных тел. Разработан численный алгоритм решения и прикладное программное обеспечение. Проведенные вычисленные эксперименты демонстрируют возможности предложенного алгоритма.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, горная выработка, локальная разгрузка, непрямой метод граничных элементов.

The stress-strain state of mine with of local unload method is investigate. The indirect boundary element method for zonally-homogeneous solids is applied to solving the problems. The numerical solution algorithm is elaborated, the application software is created, and numerical experiments demonstrating the capabilities the approach being proposed are carried out.

**Key words:** stress-strain state, mine, local unload, indirect boundary element method.

**Введение.** В связи с переходом к разработке месторождений на больших глубинах (600 – 1500 м) возникает проблема разгрузки контура выработки от повышенных напряжений. По мнению В.А. Полухина, В.Н. Остапенко и В.П. Самболя [2] эффективной есть разгрузка с помощью пустот, которые образуются с помощью взрывов с обеих сторон выработки на всю мощность пласта и заполняются разрушенной породой. Под действием горного давления порода деформируется в результате чего высокие напряжения перемещаются в глубь горного массива. Эти выводы авторы делают исходя из экспериментальных данных. В работе сделана попытка подтвердить их с помощью численного моделирования.

**Постановка задачи.** Сформулируем задачу по оценке концентрации напряжений в окрестности выработки в дополнительных напряжениях, представив искомое поле напряжений в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1,$$

где  $\sigma_{ij}^0$  – исходное поле напряжений;  $\sigma_{ij}^1$  – дополнительное поле напряжений,

обусловленное наличием концентратора напряжений;  $i, j$  соответствуют осям прямоугольных декартовых систем координат.

Исходное поле напряжений имеет вид  $\sigma_{xx}^0 = -\lambda\gamma H$ ,  $\sigma_{yy}^0 = -\gamma H$ ,  $\sigma_{xy}^0 = 0$ , где  $\lambda$  – коэффициент бокового распора;  $\gamma$  – удельный вес массива;  $H$  – глубина ствола. Следовательно, можем записать полное поле напряжений в следующем виде

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -\lambda \cdot \gamma \cdot h + \sigma_{xx}^1, \\ \sigma_{yy} = -\gamma \cdot h + \sigma_{yy}^1, \\ \sigma_{xy} = \sigma_{xy}^1. \end{cases}$$

Перейдем к относительным напряжениям. Окончательное поле напряжений запишем в виде

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^* = -\lambda + \sigma_{xx}^{*1}, \\ \sigma_{yy}^* = -1 + \sigma_{yy}^{*1}, \\ \sigma_{xy}^* = \sigma_{xy}^{*1}. \end{cases}$$

Граничные условия задачи представим следующим образом:

$$(\sigma_{ij})_{\Gamma} = 0,$$

где  $\sigma_{ij}$  – искомое поле напряжений;  $\Gamma$  – контур выработки.

При создании щель заполняется материалом коэффициент бокового распора которого меньше чем в других частях горного массива, то есть задача является кусочно-однородной.

**Численный метод решения.** Для расчёта напряжённого состояния окрестности выработки воспользуемся непрямой методом граничных элементов. Метод граничных элементов рассмотренный в [1; 4] предназначен для решения двумерных краевых задач в случае однородного изотропного линейно-упругого тела. Рассмотрим, как этот метод можно распространить на задачи, в которых рассматриваемая область является кусочно-однородной.

Задача теории упругости для кусочно-однородных тел основывается на рассмотрении тела  $\Omega$ , состоящего из фаз  $\Omega^{[n]}$ , так что  $\Omega = \bigcup_n \Omega^{[n]}$ ,

$\Sigma_{n,m} = \Omega^{[n]} \cap \Omega^{[m]}$  – поверхность раздела (контакта) фаз  $\Omega^{[n]}$  и  $\Omega^{[m]}$ .  $\Gamma^{[n]}$  – свободная граница фазы  $\Omega^{[n]}$ ,  $n, m = 1, \dots, M$ . Каждая из фаз считается однородной изотропной и линейно-упругой с упругими постоянными  $\nu_1, E_1$  и  $\nu_2, E_2$ . Описание напряжённо-деформированного состояния тела  $\Omega$  осуществляется вектором перемещения  $\vec{U}(u_x, v_y)$ , тензорами деформаций  $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$  и напряжений  $\sigma = (\sigma_{ij})$  для каждой фазы.

Уравнения равновесия и выражения для деформаций и напряжений тела  $\Omega$  записываются отдельно для каждой фазы.

Краевая задача для кусочно-однородного тела  $\Omega$  завершается заданием обычных условий для смещений и напряжений  $\sigma_{ij}n_j = t_i^0$  и  $u_i = u_i^0$  на «свободной» части контуров  $\Gamma^{[n]}$ , а также условий непрерывности смещений и усилий на поверхности контакта подобластей.

Если смежные фазы работают совместно, то условия непрерывности в произвольной точке  $Q$  поверхности  $\Sigma_{n,m}$  можно записать в виде

$$t_x^{[n]}(Q) = -t_x^{[m]}(Q), \quad t_y^{[n]}(Q) = -t_y^{[m]}(Q) \quad (1)$$

для усилий  $\vec{p} = (\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y)\vec{e}_x + (\sigma_{yy}n_y + \sigma_{xy}n_x)\vec{e}_y$ ,  $\vec{n} = (n_x, n_y)$  – нормаль в точке поверхности  $\Sigma_{n,m}$ .

Напряжения  $\sigma_{ij}$  во внутренней точке  $Q$  фазы  $\Omega^{[n]}$  представляются в интегральном виде

$$\sigma_{ij}^{[n]}(Q) = \int_{\partial\Omega^{[n]}} H_{ij;k}^{[n]}(Q, q_0) f_k^{[n]}(q_0) dl, \quad (2)$$

где  $H_{ij;k}^{[n]}(Q, q_0)$  – функция влияния Грина ( $i, j, k = x, y$ ), которая описывают напряжения и смещения во внутренней точке  $Q$   $n$ -ой фазы ( $Q \notin \Gamma^{[n]}, Q \notin \Sigma_{n,m}$ ), вызванные действием единичной силы, приложенной в точке  $q_0$  граничного или контактного контура  $\partial\Omega^{[n]}$ ,  $q_0 \in \partial\Omega^{[n]}$ ,  $\partial\Omega^{[n]} = \Gamma^{[n]} + \Sigma_{n,m}$ ,  $n, m = 1, 2, \dots, M$ . При этом граничные элементы, расположенные на стороне  $\Sigma_{n,m}^+$ , обращенной к фазе  $\Omega^{[n]}$ , и на стороне  $\Sigma_{n,m}^-$ , обращенной к смежной фазе  $\Omega^{[m]}$ , одного и того же контакта  $\Sigma_{n,m}$  совпадают друг с другом. Функции  $f_k^{[n]}(q_0)$  (фиктивные нагрузки), находятся из системы уравнений

$$\frac{1}{2} f_k^{[n]}(q) + \int_{\partial\Omega^{[n]}} H_{ij;k}^{[n]}(q, q_0) n_j(q) f_k^{[n]}(q_0) dl_{q_0} = t_k^{o[n]}(q), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} f_k^{[n]}(q) + \int_{\partial\Omega^{[n]}} H_{ij;k}^{[n]}(q, q_0) n_j(q) f_k^{[n]}(q_0) dl_{q_0} - \frac{1}{2} f_k^{[m]}(q) - \\ & - \int_{\partial\Omega^{[n]}} H_{ij;k}^{[m]}(q, q_0) n_j(q) f_k^{[m]}(q_0) dl_{q_0} = 0 \end{aligned}, \quad (4)$$

Уравнения (3) отвечает корректно заданным граничным условиям  $t_x^{o[n]}$ ,  $t_y^{o[n]}$  на внешней поверхности  $\Gamma^{[n]}$  фазы, а уравнение (4) является условием равновесия (1), которые записаны покомпонентно.

Гранично-элементное решение рассматриваемой задачи можно найти, разделяя контуры  $\partial\Omega^{[n]}$  фаз  $\Omega^{[n]}$  на прямолинейные отрезки, примыкающие друг к другу, и предполагая, что смещения и усилия в пределах каждого отрезка постоянны. С учётом частей контуров, которые представляют контакт, имеем  $N^{[n]}$  граничных элементов на контуре  $\partial\Omega^{[n]}$ . Элементы, расположенные на двух сторонах контакта, должны полностью совпадать друг с другом. Тогда с каждым элементом на этой поверхности связаны две неизвестные величины – компоненты усилия  $T_x, T_y$ . Условие непрерывности (1) даёт для каждого элемента области контакта ещё два соотношения, и таким образом задача оказывается разрешимой.

Тогда задачу можно представить как  $n$  отдельных краевых задач, по одной для каждой фазы  $\Omega^{[n]}$ . Эти задачи связаны условием непрерывности (1) на поверхностях контактов смежных фаз. Напряжения фазы  $\Omega^{[n]}$  зависят только от функций  $f_k^{[n]}$  на  $N^{[n]}$  элементах контура  $\partial\Omega^{[n]}$ ,  $k = x, y$ . Следовательно, задача состоит в нахождении функций  $f_k^{[n]}$  на каждом из  $\sum_{n=1}^M N^{[n]} = N$  граничных элементов так, чтобы удовлетворить граничным условиям и условиям непрерывности на контакте подобластей.

При построении системы алгебраических уравнений для составной задачи граничные элементы для фаз удобно нумеровать последовательно, начиная с фазы  $\Omega^{[1]}$ . Тогда элементы с номерами от 1 до  $N^{[1]}$  лежат на контуре  $\partial\Omega^{[1]}$ , а элементы с номерами от  $N^{[1]} + 1$  до  $N^{[2]}$  – на контуре  $\partial\Omega^{[2]}$  и т. д. Усилия на границе  $\partial\Omega^{[k]}$  фазы  $\Omega^{[k]}$  можно записать в виде ( $k = \overline{1, M}$ )

$$\left. \begin{aligned} t_{xi}^{o[k]} &= \sum_{j=1}^{N_k} \left( T_{xx}^{[k]}{}_{ij} f_{xj}^{[k]} \right) + \sum_{j=1}^{N_k} \left( T_{xy}^{[k]}{}_{ij} f_{yj}^{[k]} \right) \\ t_{yi}^{o[k]} &= \sum_{j=1}^{N_k} \left( T_{yx}^{[k]}{}_{ij} f_{xj}^{[k]} \right) + \sum_{j=1}^{N_k} \left( T_{yy}^{[k]}{}_{ij} f_{yj}^{[k]} \right) \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, N^{[k]}. \quad (5)$$

Выражение (5) можно использовать для образования системы  $2N$  алгебраических уравнений с  $2N$  неизвестными функциями  $f_{xi}$  и  $f_{yi}$  рассматриваемой задачи.

Представим эту систему в виде

$$\left. \begin{aligned} b_{xi} &= \sum_{j=1}^N A'_{ij} f_{xj} + \sum_{j=1}^N B'_{ij} f_{yj} \\ b_{yi} &= \sum_{j=1}^N C'_{ij} f_{xj} + \sum_{j=1}^N D'_{ij} f_{yj} \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, N, \quad (6)$$

Заметим, что типичный элемент  $i$  должен располагаться либо на свободной части одного из граничных контуров, либо на поверхности контакта двух подобластей. В первом случае  $i$ -е уравнение в (6) получается исходя из граничных

условий для рассматриваемого элемента, тогда как во втором случае они находятся путём использования условий непрерывности на поверхности контакта.

Предположим, что  $i$ -й элемент лежит на свободной части граничного контура  $\Gamma^{[k]}$ . Если предположить далее, что на этом элементе заданы усилия  $t_{xi}^{o[k]}$  и  $t_{yi}^{o[k]}$ , то (5) можно использовать для получения следующих выражений для величин  $b_{xi}$ ,  $b_{yi}$  и  $A'_{ij}$ ,  $B'_{ij}$ ,  $C'_{ij}$  и  $D'_{ij}$  в (6):

$$b_{xi} = t_{xi}^{o[k]}, \quad b_{yi} = t_{yi}^{o[k]},$$

$$A'_{ij} = \begin{cases} T_{xx}^{[k]}{}_{ij}, & j \in \partial\Omega^{[k]} \\ 0, & j \notin \partial\Omega^{[k]} \end{cases} \quad (7)$$

и аналогичных выражений для коэффициентов  $B'_{ij}$ ,  $C'_{ij}$  и  $D'_{ij}$ .

Рассмотрим случай, когда  $i$ -й элемент лежит на поверхности контакта двух фаз ( $\Omega^{[k]}$  и  $\Omega^{[r]}$ ). Как установлено ранее, элемент на поверхности контакта рассматривается фактически как два совпадающих граничных элемента, один для одного контура, один для другого (смежного). Таким образом, если  $i$ -й элемент принадлежит одной стороне поверхности контакта, существует парный ему элемент, скажем  $i^*$ -й, на другой стороне. На каждом элементе, лежащем на поверхности контакта, должны также удовлетворяться четыре условия. Два из них можно использовать при построении уравнений, относящихся к элементу на одной стороне поверхности контакта, а два других можно аналогично использовать для элемента на другой стороне. Например, если  $i$ -й элемент лежит на поверхности контакта со стороны контура  $\partial\Omega^{[k]}$ , два условия непрерывности усилий (4) можно записать в виде

$$t_x^{i[k]} + t_x^{i^*[r]} = 0, \quad t_y^{i[k]} + t_y^{i^*[r]} = 0. \quad (8)$$

Из (5) следует, что величины  $b_{xi}$ ,  $b_{yi}$  и  $A'_{ij}$ ,  $B'_{ij}$ ,  $C'_{ij}$  и  $D'_{ij}$  в (6) равны

$$b_{xi} = t_x^{i[k]} + t_x^{i^*[r]} = 0, \quad b_{yi} = t_y^{i[k]} + t_y^{i^*[r]} = 0,$$

$$A'_{ij} = \begin{cases} T_{xx}^{[k]}{}_{ij}, & j \in \partial\Omega^{[k]} \\ T_{xx}^{[r]}{}_{i^*j}, & j \in \partial\Omega^{[r]} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (9)$$

и аналогично для коэффициентов  $B'_{ij}$ ,  $C'_{ij}$  и  $D'_{ij}$ .

**Численные результаты.** Полевые точки брали на линии  $y = h / 2 + nd$ , при  $x \in [-4; -1,1] \cup [1,1; 4]$ ; где  $h$  – высота щели ( $h = 9$  см);  $d$  – средний размер граничного элемента ( $d = 2$  см). Показателем была выбрана разница между напряжениями в нетронутом горном массиве (Б) и напряжением над щелью (А).



$n$	$\sigma_{xx}^B - \sigma_{xx}^A$	$\sigma_{yy}^B - \sigma_{yy}^A$
2	0,4257	0,6619
4	0,4001	0,6615
6	0,3953	0,6603
8	0,3947	0,6597
10	0,3754	0,6548
12	0,3472	0,6537
14	0,2873	0,6534
16	0,2291	0,5718
18	0,2137	0,4594
20	0,2056	0,4352
22	0,1894	0,4263
24	0,1736	0,4187
26	0,1728	0,3999
28	0,1532	0,3996

Данные таблицы указывают на то, что рассматриваемый способ разгрузки позволяет переносить максимум напряжения в глубь горного массива.

**Выводы.** На основе непрямого метода граничных элементов разработана методика и алгоритм расчёта двумерных задач определения напряжённого состояния кусочно-однородных изотропных линейно-упругих задач горной механики. Расчеты подтвердили выводы про эффективность разгрузки выработки [2]. Для компьютерного моделирования НДС выработки использовался разработанный автором программный комплекс GM-LUMM, в котором реализован не прямой метод граничных элементов для кусочно-однородных тел

#### Бibliографические ссылки

1. **Бенерджи П.** Метод граничных элементов в прикладных науках: Пер. с англ. / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М., 1984. – 494с.
2. **Полухин В.А.** О разгрузке горных пород взрывополостным способом / В.А. Полухин, В.Н. Остапенко, В.П. Самболя // Уголь Украины, 1987. – № 11. – С. 25 – 26.
3. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела: Уч. пособ. для вузов / Ю.Н. Работнов. – 2-е изд., испр. – М, 1988. – 712 с.
4. **Угодчиков А.Г.** Метод граничных элементов в механике деформируемого твёрдого тела / А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский. – Казань, 1986. – 296 с.

Надійшла до редколегії 24.04.09

УДК 539.3

О. Г. Василенко, А. П. Дзюба

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара***ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ КОНСТРУКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ АГРЕСИВНОГО СЕРЕДОВИЩА**

Досліджується ефективність алгоритмів розв'язування задач оптимізації стрижневих конструкцій, які знаходяться в умовах одночасного впливу силових навантажень та агресивного середовища. Проведено порівняльний аналіз результатів розв'язування задач із використанням найбільш відомих математичних моделей корозійної деградації, які враховують вплив напружень на швидкість корозії, досліджено вплив зміни їх коефіцієнтів на властивості оптимальних проектів. Проаналізовано результати комп'ютерного моделювання задач оптимального проектування таких конструкцій.

**Ключові слова:** оптимізація, ефективний підхід, корозійна деградація.

Исследуется эффективность алгоритмов решения задач оптимизации стержневых конструкций, находящихся в условиях одновременного воздействия силовых нагрузок и агрессивной среды. Проведен сравнительный анализ результатов решения задач с использованием наиболее известных математических моделей коррозионной деградации, учитывающих влияние напряжений на скорость коррозии и исследовано влияние изменения их коэффициентов на свойства оптимальных проектов. Проанализированы результаты компьютерного моделирования задач оптимального проектирования таких конструкций.

**Ключевые слова:** оптимизация, эффективный подход, коррозионная деградация.

In the article is investigated the effectiveness of optimization cases solving algorithms applying for road constructions' which are under simultaneous external loads and aggressive environment influence. There is presented a comparing analyses of results of solving cases using the most well-known models for describing corrosion wear where influence of stress on corrosion speed is taken into account. There is presented of investigation the influence of changing parameters of these models on optimum projects properties and analyzed the results of computer modeling such cases.

**Key words:** optimization, effective approach, corrosion wear.

**Вступ.** Широке застосування у будівництві та багатьох галузях промисловості інженерних конструкцій, які працюють в умовах одночасного впливу агресивного середовища та термосилових навантажень, обумовлює актуальність та вагомість ряду проблем, пов'язаних з комп'ютерним моделюванням та оптимальним проектуванням такого типу конструкцій, зокрема, проблеми побудови адекватних моделей для вивчення поведінки реальних конструкцій в агресивному середовищі за допомогою комп'ютерного моделювання та розробки ефективних методів і алгоритмів їх оптимального проектування.

Виходячи з огляду доступної кількості публікацій [7 – 9], очевидно, що при розв'язуванні реальних задач, зазвичай, широко застосовуються різні припущення, спрощення та наближення, які приводять до того, що результати математичного моделювання, враховуючи, крім того, і похибки у призначенні коефіцієнтів моделей корозії, виявляються не завжди адекватними реальній досліджуваній конструкції. Оптимізація ж таких конструкцій стає ще більш проблематичною, оскільки традиційно в таких випадках використовуються пошукові алгоритми, які вимагають перевірку виконання обмежень довговічності, а отже і багаторазового інтегрування вибраної моделі корозії до кінцевого моменту часу, що потребує проведення прямого розрахунку всієї конструкції у вузлових точках інтегрування рівнянь прийнятої математичної моделі корозії на кожному кроці такого оптимізаційного алгоритму. При порушенні ж хоча б однієї з вимог доводиться виконувати наступний крок оптимізаційного пошуку, що може привести до суттєвого збільшення кількості іте-

рацій та, як наслідок, трудовитратності розв'язування задачі в цілому. Крім того, слід зазначити, що обчислювальні витрати стрімко зростають при збільшенні кількості варійованих змінних та ускладненні геометричної схеми конструкції. При цьому, внаслідок багаторазового інтегрування рівнянь математичної моделі часто відбувається суттєве накопичення обчислювальних похибок.

Альтернативою цьому традиційному підходу можна вважати запропонований у [5] алгоритм, суть якого полягає у отриманні оптимального проекту конструкції, що відповідає всім заданим обмеженням (як граничному стану) в кінцевий момент часу  $t_n$  та нарощуванні матеріалу певного «жертвовного» шару його поверхні за допомогою оберненого інтегрування в часі  $t_n \rightarrow t_0$  обраної математичної моделі корозійної деградації. Очевидно, що при використанні такого підходу кількість розрахунків суттєво скорочується, оскільки зникає необхідність перевірки виконання вимог довговічності для кожного елемента конструкції в моменти часу  $t_j$  ( $j=0, 1, \dots, n$ ), тому що воно вже забезпечене в кінцевий момент її функціонування  $t_n$ . Таким чином, і задача оптимізації в цьому випадку розв'язується лише один раз.

**Обґрунтування вірогідності запропонованого підходу.** Вірогідність альтернативного підходу [5], як приклад, демонструється для довільним чином навантаженої статично визначеної балки прямокутного поперечного перерізу з висотою  $h$  та шириною  $b$ . З метою проведення більш прозорих викладок, вважається, що ширина перерізів елементів конструкції є сталою, а варійованим параметром приймається висота.

Нехай цільовою функцією виступає мінімум ваги конструкції у початковий момент часу  $t_0$

$$V(t_0) \rightarrow \min, \quad (1)$$

а умови її функціонування вимагають виконання таких широко розповсюджених обмежень:

$$\begin{aligned} \sigma_{max}(x, h(x, t_0)) \leq [\sigma]; \quad (a) \quad w_{max}(x, h(x, t_0)) \leq \Delta; \quad (b) \\ h_{min}(t=t_0) \geq h_0; \quad h_{min}(t=t_n) \geq h_n \quad (c), \end{aligned} \quad (2)$$

де (2, a) – обмеження міцності; (2, b) – жорсткості; (2, c) – конструктивні вимоги;  $\sigma_{max}$ ,  $w_{max}$  – максимальні напруження і прогини, які виникають у перерізах  $x$  по довжині балки у початковий момент часу  $t_0$ ;  $[\sigma]$ ,  $\Delta$  – їх гранично припустимі значення, відповідно;  $h_0$ ,  $h_n$  – деякі сталі, які визначають мінімальні (конструктивні) обмеження на величину варійованих змінних у початковий та кінцевий моменти функціонування конструкції, відповідно.

Розглянемо раціональні конструкції, побудовані у початковий момент часу  $t=t_0$  окремо для кожного виду обмежень (2).

А) Прийmemo до розгляду задачу проектування конструкції при наявності лише вимог (1), (2, a). Очевидно, що для статично визначеної балки оптимальний розподіл матеріалу при  $t=t_0$  буде визначатись умовами рівномірності  $\sigma(x, t_0)=[\sigma]$ , звідки

$$h(x, t_0) = \sqrt{6M(x)/b[\sigma]}. \quad (3)$$

Здавалось би, що для того, щоб конструкція з конфігурацією (3) задовольняла обмеженням (2, a) і в кінцевий момент часу  $t=t_n$ , достатньо ввести деякий запас матеріалу у вигляді «жертвовного» шару, який може визначатися, наприклад, запасом міцності  $[\sigma^*] = [\sigma]/k_3^*$  (де  $k_3^*$  - коефіцієнт запасу,  $k_3^* \geq 1$ ), або пропорційно збільшити геометричні розміри перерізів (варійовані змінні)  $h(x, t_0)$  у початковий момент часу  $t=t_0$ .

У той же час, очевидно, що при такому підході в точках  $x^*$ , де згинаючий момент  $M(x^*)$ , а отже і напруження  $\sigma(x^*)$  близькі до нуля, з часом експлуатації відбувається порушення обмеження міцності в результаті зменшення (до нуля, чи навіть від'ємних значень у відповідності до обраної моделі корозії) геометричних розмірів перерізу (варійованих змінних  $h(x^*, t)$ ) в цих точках під дією агресивного середовища. Таким чином, конструкція, раціональна з точки зору витрат матеріалу в початковий момент часу, навіть із введеним таким чином «жертвним» шаром у вигляді запасу міцності не буде оптимальною.

З іншого боку можна було б збільшити варійовані змінні  $h(x, t_0)$  на деяку величину  $\Delta h$  у вигляді  $h^*(x, t_0) = h(x, t_0) + \Delta h$  чи використати конструктивні вимоги (2, c), застосування яких забезпечило б функціонування конструкції упродовж заданого терміну  $[t_0, t_n]$ . У той же час, раціональні значення величин  $\Delta h$  та  $h_0$ , залишаються при цьому невідомими. Більше того, очевидно, що ці параметри можуть бути різними для різних точок  $x^* \in [0, L]$  і їх встановлення можливе лише за допомогою перевірки виконання вимог (2) в таких точках  $x^*$  у кожний з моментів часу  $t$  від  $t_0$  до  $t_n$  включно, оскільки в процесі моделювання корозійної деградації поверхні конструкції варійовані змінні (висота перерізів) зменшуються відповідно обраній моделі корозії, що викликає перерозподіл (у бік збільшення) напружень і деформацій в її перерізах і, як наслідок, прискорення їх корозійного ураження. Очевидно, що для вирішення цієї проблеми і виникає необхідність інтегрування обраної математичної моделі корозії в часі до кінцевого моменту  $t_n$ .

Так, наприклад, при використанні широко відомої математичної моделі В. М. Долинського [7], яка враховує вплив напружень на швидкість корозійного ураження поверхні конструкції і має вигляд

$$\frac{d\bar{\delta}}{dt} = \varphi(t)(1 + k\bar{\sigma}), \quad (4)$$

а інтегрування в часі цієї математичної моделі може бути здійснене за допомогою, наприклад, методу Ейлера, який дозволяє знайти значення функції на  $j$ -му кроці за її значенням на  $(j - 1)$ -му

$$h^{j+1}(x_i, t_{j+1}) = h^j(x_i, t_j) - v_0(1 + k \cdot \sigma(x_i, t_j, h^j(x_i, t_j)))\Delta t, \quad (5)$$

то з вигляду залежностей (4), (5) видно, що з метою перевірки виконання накладених на конструкцію обмежень, необхідно проводити обчислення напружено-деформованого стану в кожній вузловій точці  $x_i$  ( $i = \overline{0, S}$ ) поверхні за довжиною  $L$  цієї конструкції з метою визначення  $\sigma_j(x_i, t_j)$ ,  $w_j(x_i, t_j)$ ,  $h^j(x_i, t_j)$  ( $j = \overline{0, n}$ ) у кожний момент часу  $t$  від  $t_0$  до  $t_n$  включно, тобто  $S \times n$  разів, що вимагає досить суттєвих обчислювальних витрат, особливо при збільшенні кількості варійованих змінних, обмежень та подовженні терміну її експлуатації.

Тут  $\bar{\delta}(t)$  – глибина шару зношування поверхні конструкції в момент часу  $t$ ;  $\bar{\sigma}(t, \bar{h}(t))$  – напруження, залежні від змінної в часі висоти перерізів елементів;  $\varphi(t)$  – у загальному випадку функція, яка визначає корозійний опір матеріалу ненапруженої конструкції (у статті вважається  $\varphi(t) = v_0 = const$ , де  $v_0$  – коефіцієнт, що характеризує зношувальність поверхні ненапруженого матеріалу);  $k$  – коефіцієнт, який виражає міру впливу напруження матеріалу на його корозійне зношування у певному агресивному середовищі;  $h^0(x_i, t) = h(x_i, t_0)$ ;  $x_i = x_0 + i \cdot \Delta x$ ;  $\Delta x = (x_S - x_0)/S$ ;  $x_0 = 0$ ;  $x_S = L$ .

В) Розглянемо далі задачу оптимізації конструкції (1) в момент часу  $t_0$  при наявності лише вимог (2, b). Очевидно, що, як і у випадку А, для статично визначе-

ної балки оптимальний розподіл матеріалу у початковий момент часу  $t=t_0$  може бути визначений шляхом розв'язування ізопериметричної задачі варіаційного числення [1; 4]

$$\max_x w(x, h(x, t_0)) = \Delta; \quad (a)$$

$$\int_0^L \left( bh(x) + \lambda \frac{12M_{x_p}(x)M_{x_1}(x)}{Ebh^3(x)} \right) dx \rightarrow \min, \quad (b)$$

а оптимальне значення варійованих параметрів у момент часу  $t_0$  буде мати вигляд

$$h_w(x) = \sqrt[4]{36\lambda M_{x_p}(x)M_{x_1}(x)/Eb^2}, \quad (7)$$

де  $M_{x_p}(x), M_{x_1}(x)$  – згинаючі моменти від зовнішнього навантаження та одиничної сили, прикладеної в місці максимального прогину, відповідно; а  $\lambda$  – множник Лагранжа, який визначається з умови виконання (6, a).

Слід зазначити, що, як і у випадку А, величини варійованих параметрів є функціями згинаючих моментів  $M_{x_p}(x), M_{x_1}(x)$ , і в точках  $x^*$ , де вони приймають нульові (або близькі до нуля) значення, відшукувані варійовані параметри (геометричні розміри перерізів), навіть із введенням «жертвовного» шару матеріалу, що, аналогічно попередньому, може бути визначений запасом жорсткості  $\Delta^* = \Delta/k_3^*$  ( $k_3^*$  – коефіцієнт запасу,  $k_3^* \geq 1$ ), з часом стають нульовими (або від'ємними) в результаті корозійного ураження, викликаного впливом першої складової другого доданку (5).

Таким же чином, використання сталого доданку  $\Delta h$  до геометричного розміру або введення конструктивних вимог  $h_0$ , яке забезпечило б збереження цілісності конструкції в таких точках  $x^*$  теж є досить проблематичним, оскільки визначення їх раціональних значень може бути здійснене лише за допомогою інтегрування зворотної математичної моделі корозії до кінцевого моменту визначеного періоду експлуатації  $[t_0, t_n]$  і перевіркою виконання обмежень (2, b) для кожної точки  $0 \leq x \leq L$ , що можливо лише шляхом багаторазового розрахунку всієї конструкції. Такі ж труднощі характерні і у випадку одночасного урахування всіх обмежень (2).

Отже, конструкція мінімальної ваги, спроектована з урахуванням виконання обмежень міцності і (або) жорсткості, накладених у початковий момент часу, не є оптимальною, оскільки вимоги довговічності можуть бути порушені для цілого ряду точок конструкції при  $t < t_n$ .

С) Проаналізуємо розв'язок задачі оптимізації статично визначеної балки (1) з обмеженнями (2), отриманий за допомогою запропонованої в [5] альтернативної методики, за якою оптимальний розподіл матеріалу конструкції для моменту часу  $t_0$  знаходиться шляхом оберненого інтегрування математичної моделі корозії для конструкції оптимальної конфігурації, одержаної в кінцевий момент часу  $t=t_n$ .

Очевидно, що при наявності, наприклад, лише вимог (2, a) в кінцевий момент часу  $t_n$ , раціональною для статично визначеної балки буде рівнонапружена конструкція. Покажемо, що одержана шляхом нарощування від  $t_n$  до  $t_0$  «жертвовного» шару конфігурація конструкції при  $t=t_0$  виявляється оптимальною.

Доведення побудуємо від супротивного. Нехай існує оптимальна конструкція, одержана із даної шляхом варіювання висоти перерізу в деякій точці  $x^* \in [0, L]$ . Розглянемо випадок, коли в  $x=x^*$  зміна варійованого параметра  $\delta h > 0$ . Очевидно, що таке збільшення висоти  $h(x^*, t_n)$  викличе зменшення напруження  $\delta \sigma < 0$  у відповідно-

му перерізі, але призведе до зростання (порівняно з раціональною  $V_p$ ) ваги  $\delta V > 0$  такої конструкції

$$\Delta h(x^*, t_n) > 0 \rightarrow \sigma(x^*, t_n) \leq [\sigma] \rightarrow V(x, t_0) > V_p.$$

Варіація ж  $\delta h < 0$  приводить до того, що об'єм такої конструкції зменшиться у порівнянні з  $V_p$ , але максимальне напруження у перерізі  $x=x^*$  перевищить гранично припустиму величину  $[\sigma]$  (оскільки  $\delta\sigma > 0$ ), що призведе до порушення обмеження міцності

$$\Delta h(x^*, t_n) < 0 \rightarrow V(x, t_0) < V_p \rightarrow \sigma(x^*, t_n) > [\sigma].$$

Звідси випливає, що оптимальною є конструкція, конфігурація якої отримана за підходом, описаним у [5], шляхом нарощення матеріалу «жертвовного» шару за допомогою оберненого інтегрування в часі ( $t_n \rightarrow t_0$ ) обраної математичної моделі корозії для деякої раціональної в кінцевий момент  $t_n$  конструкції.

Крім того, очевидно, що величина «жертвовного» шару, визначена за таким підходом, гарантує виконання одночасно всіх прикладених до конструкції обмежень (2) і для всіх  $t < t_n$ , оскільки варійовані параметри, знайдені в кінцевий момент її функціонування, для розглядуваного випадку статично визначеної балки, наприклад, за формулою

$$h(x_i, t_n) = \max\{h_\sigma(x_i, t_n), h_w(x_i, t_n), h_n\}, \quad (8)$$

при оберненому інтегруванні в часі математичної моделі (5) зростають, а отже напруження і прогини зменшуються і, вочевидь, зникає необхідність у перевірці виконання вимог (2) у перерізах отриманої конструкції в кожний момент часу  $t_j < t_n$  ( $j=n-1, n-2, \dots, 0$ ), оскільки їх виконання вже забезпечене розв'язуванням оптимізаційної задачі при  $t=t_n$ .

У формулі (8)  $h_\sigma(x_i, t_n)$ ,  $h_w(x_i, t_n)$  варійовані параметри висоти перерізу балки в точках  $x_i \in [0, L]$ , знайдені у відповідності до вимог міцності, жорсткості та значення  $h_n$  конструктивного обмеження на висоту перерізу в кінцевий момент часу  $t=t_n$ .

Взаємооднозначна відповідність між конфігурацією проектів  $h(x, t_n)$  і  $h(x, t_0)$  таких конструкцій легко встановлюється прямим і зворотнім інтегруванням у часі обраної математичної моделі корозійної деградації у вигляді (5), а одержані шляхом нарощування «жертвовного» шару матеріалу до раціональної в кінцевий момент часу  $t_n$  конфігурації балки є оптимальними і в момент  $t_0$ , оскільки виконання обмежень довговічності такими конструкціями гарантовано для будь-якого  $t_j$  ( $j=0, 1, \dots, n$ ).

Як підсумок, можна стверджувати, що конфігурація оптимальної конструкції, спроектованої в кінцевий момент часу  $t_n$ , матеріал якої був нарощений відповідно обраній моделі корозійної деградації до моменту  $t_0$  за допомогою оберненого інтегрування в часі ( $t_n \rightarrow t_0$ ), співпадає з конфігурацією оптимальної в момент  $t_0$  конструкції, яка має таку саму довговічність.

Слід зазначити, що розв'язування задачі (1), (2) традиційним шляхом [6 – 8] пов'язане з вимушеним багаторазовим прямим інтегруванням у часі рівняння математичної моделі для перевірки виконання накладених на конструкцію вимог, а обернене – з разовим нарощенням «жертвовного» шару матеріалу до конфігурації оптимальної конструкції, спроектованої з умов виконання цих вимог при  $t=t_n$ , тому різниця в трудовитратності двох процесів очевидна.

**Оцінювання ефективності альтернативного підходу.** Проведена в [2; 3; 5] апробація застосування запропонованого підходу [5] до проектування цілого ряду різних стрижневих конструкцій та аналіз отриманих чисельних результатів, показує

не тільки суттєве зменшення кількості ітерацій, необхідних для підбору раціональних величин варійованих параметрів, але і досить високу точність співпадіння результатів застосування альтернативного та традиційного підходів, що підтверджує ефективність та достовірність запропонованого підходу.

Демонстрація вірогідності та ефективності нової методики здійснюється шляхом застосування запропонованого підходу та розробленого на його основі програмного комплексу для задач оптимального проектування ряду силових конструкцій в умовах впливу агресивного середовища і подальшого порівняння отриманих результатів з результатами розв'язування цих же задач за допомогою відомої програмної системи Mathematica 7, в якій оптимізаційна задача розв'язується методом випадкового пошуку.

Як приклад, далі подані результати, отримані для випадку двострижневої шарнірної конструкції (рис.1), де через  $L_I, F_I$  та  $L_{II}, F_{II}$  позначені, відповідно, довжина та площа поперечного перерізу кожного з її стрижнів.

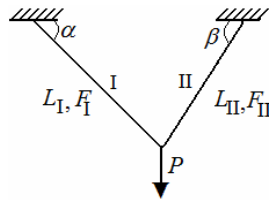


Рис. 1

Постановка задачі при використанні традиційного підходу в програмній системі Mathematica 7 формулюється наступним чином:

$$\min V(\bar{F}(\bar{N}, t_0)); \quad (9)$$

$$\sigma_{\max}(t, \bar{N}, \bar{F}(t)) \leq [\sigma]; \quad (10)$$

$$w_{\max}(t, \bar{N}, \bar{F}(t)) \leq \Delta; \quad (11)$$

$$\bar{F}(t_0) \geq F_0; \quad (a) \quad \bar{F}(t_n) \geq F_n; \quad (b) \quad (12)$$

$$t_0 \leq t \leq t_n, \quad (13)$$

де  $\bar{F}(t_0)$  – варійовані змінні (площі поперечних перерізів елементів конструкції) в момент часу  $t=t_0$ ;  $\bar{N}(t)$  – узагальнені зусилля у стрижнях;  $F_0, F_n$  – величина конструктивних обмежень у початковий момент часу  $t_0$  та момент  $t_n$  закінчення терміну експлуатації конструкції, відповідно; (9) – критерій оптимальності; (10) – (13) – відповідно, обмеження міцності, жорсткості, конструктивні вимоги та умови довговічності. Вважається, при цьому, що вичерпання несучої здатності конструкції настає при порушенні хоча б однієї з вимог (10), (11), (12, b) у момент часу з періоду (13).

Нагадаємо, що згідно традиційного алгоритму [6 – 8] оптимальність у момент часу  $t_0$  конструкцій, які знаходяться під впливом корозійного середовища, що описується, наприклад, моделлю (5), забезпечується шляхом мінімізації (9) та перевірки виконання вимог ((10) – (12)). При цьому, в разі порушення хоча б одного з обмежень у період часу  $t_0 \leq t \leq t_n$  знаходяться нові значення варійованих змінних у момент  $t_0$  і виконується наступна ітерація розв'язування задачі (9) – (13). Слід зазначити, що індекс  $i$  у рівнянні моделі (5) в даному випадку відповідає кількості варійованих параметрів розглядуваної конструкції.

Згідно ж альтернативного підходу [5] розв'язування задачі оптимального проектування у вигляді (9) – (13) з урахуванням впливу агресивного середовища

зводиться до знаходження варійованих змінних (площ кожного з стрижнів конструкції рис. 1) із умови мінімальності її ваги в кінцевий момент часу  $t_n$  та доповнюється задачею оберненого від  $t_n$  до  $t_0$  інтегрування прийнятої моделі корозії (4), у процесі якого відбувається нарощування матеріалу («жертвовного» шару) поверхні елементів конструкції відповідно до цієї моделі.

У найпростішому випадку статично визначеної ферми оптимальні значення  $F_i$  мають вигляд

$$F_i(\bar{N}, t_n) = \max\{F_{i,\sigma}(\bar{N}, t_n), F_{i,w}(\bar{N}, t_n), F_{i,n}\}, \quad (14)$$

де  $F_{i,\sigma}, F_{i,w}, F_{i,n}$  – площа перерізів кожного з  $S$  стрижнів конструкції, знайдена згідно з обмеженнями міцності, жорсткості та конструктивними вимогами в кінцевий момент  $t_n$ .

Тобто, постановка задачі може бути подана у вигляді:

$$\min V(\bar{F}(\bar{N}, t_n)); \quad (15)$$

$$\sigma_{\max}(t_n, \bar{N}, \bar{F}(t_n)) \leq [\sigma]; \quad (16)$$

$$w_{\max}(t_n, \bar{N}, \bar{F}(t_n)) \leq \Delta; \quad (17)$$

$$\bar{F}(t_0) \geq F_0; \quad (a) \quad \bar{F}(t_n) \geq F_n; \quad (b) \quad (18)$$

$$t_0 \leq t \leq t_n \quad (19)$$

та доповнена залежністю (5) для накопичення від  $t_n$  до  $t_0$  відповідного «жертвовного» шару матеріалу.

Для проведення чисельних експериментів приймалися наступні дані:  $\alpha=\pi/6, \beta=\pi/4, L=2 \text{ м}, E=2.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, P=80 \text{ кН}, \nu_0=0.001 \text{ м/рік}, k=0.003 \text{ МПа}^{-1}, [\sigma]=240 \text{ МПа}, t_n=5 \text{ років}, \Delta=0.002 \text{ мм}, F_0=0.0001 \text{ м}^2$ .

Результати розв'язування задач для конструкції, зображеної на рис.1, за допомогою традиційного методу в постановці (9) – (13) та альтернативного ((15) – (19)) позначені, відповідно, А і В та подані на рис. 2, де на рис.2, а показані зміни залежно від часу площ поперечних перерізів, на рис. 2, б – напружень та на рис. 2, с – прогинів відповідних стрижнів I, II.

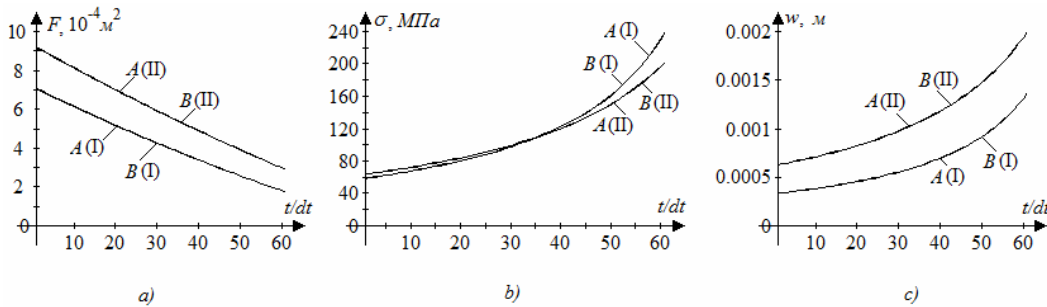


Рис. 2

Проведення порівняльного аналізу чисельних даних, а також наведених на рис. 2 кривих показує, що максимальна розбіжність між відповідними характеристиками проектів А, В складає менше 1 %, що пояснюється похибкою обчислень. Звідси можна стверджувати їх співпадіння. Крім того, виявляється, що знаходження оптимального розв'язку задачі (9) – (13) за допомогою програмної системи Mathematica 7 є досить трудовитратним навіть для конструкції, показаної на рис.1. Так, спроба визначення оптимальних величин варійованих параметрів за допомо-



гою методу випадкового пошуку з довільним початковим наближенням не дає результатів у межах розумної кількості обчислень; із вдалим (тобто близьким до оптимального) початковим наближенням знадобилося більше 1335 ітерацій на пошук оптимального проекту. При цьому, 49 з підібраних оптимальних у початковий момент варіантів не витримували вимог (10) – (11) одночасно, для ще у 40 з них порушувалися тільки вимоги (10). Приймаючи ж до уваги, що при побудові раціонального проекту за альтернативним підходом виконання вимог довговічності гарантоване в кінцевий момент  $t_n$ , тому немає потреби в їх перевірці, що зменшує кількість необхідних інтегрувань математичної моделі корозії, а значить і прямого розрахунку конструкції у відповідних вузлових точках порівняно з традиційним підходом, у даному випадку фактично у 89 разів. Отже, ефективність та доцільність використання нового підходу очевидна.

**Дослідження впливу параметрів моделі корозії на властивості оптимальних проектів.** Оскільки показано, що застосування запропонованого альтернативного підходу до оптимального проектування конструкцій в агресивному середовищі дозволяє з мінімальними обчислювальними витратами розв'язувати такі задачі, то, використовуючи цей підхід з'являється, нарешті, можливість проведення дослідження впливу параметрів моделі корозійної деградації на властивості оптимальних проектів, виконання якого при використанні традиційного підходу ((9) – (13)) залишалося практично неможливим.

Далі наведений порівняльний аналіз результатів оптимального проектування конструкції (рис.1.) за постановкою задачі (15) – (19) для послідовності з двохсот випадкових значень коефіцієнтів  $\nu_0, k$  моделі (4).

Чисельні дані для проведення порівняльного аналізу приймалися такими:  $\alpha=\pi/6, \beta=\pi/4, L=2 \text{ м}, E=2.1 \cdot 10^5 \text{ МПа}, P=80 \text{ кН}, [\sigma]=240 \text{ МПа}, t_n=5 \text{ років}, \Delta=0.002 \text{ мм}, F_0=0.0001 \text{ м}^2$ , а коефіцієнти  $\nu_0, k$  змінюються в межах відповідних проміжків  $\nu_0 \in [0.001, 0.003]$  та  $k \in [0.003, 0.005]$ .

Слід зазначити, що за постановкою задачі (15) – (19) оптимальні проекти знаходяться в кінцевий момент  $t_n$  функціонування конструкції, тому вплив параметрів математичної моделі на їх характеристики найпомітніше проявляється у початковий момент  $t_0$  і порівняльний аналіз найкраще проводити саме в цей момент.

На рис.3 зображені, відповідно, графіки залежності об'єму матеріалу  $V(t_0)$  оптимальних проектів у початковий момент та питомої енергії деформації  $\mathcal{E}=(\sigma_1^2+\sigma_2^2)/(2E)$  (для показаної на рис.1 конструкції) від параметрів  $\nu_0, k$ .

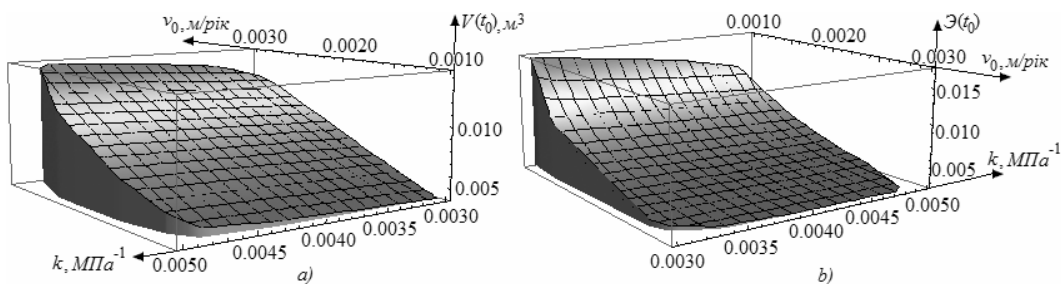


Рис. 3

Порівняльний аналіз чисельних даних показує, що зміна (збільшення) початкових значень коефіцієнтів  $\nu_0=0.001 \text{ м/рік}, k=0.003 \text{ МПа}^{-1}$  математичної моделі (4) лише на  $\Delta\nu_0=0.00005 \text{ м/рік}$  та  $\Delta k=0.0003 \text{ МПа}^{-1}$ , приводить до розбіжності між основними характеристиками (об'ємом матеріалу, потенційною енергією, прогинами) у початковий момент  $t_0$  у середньому 14.78 %, а при  $\Delta\nu_0=0.0003 \text{ м/рік}$  та  $\Delta k=0.0005 \text{ МПа}^{-1}$

така відмінність зростає вже до 25 % – 40 %. Крім того, з вигляду моделі (4) зрозуміло, що найбільш суттєво на результатах комп'ютерного моделювання позначається зміна параметра агресивності середовища. Так, варіювання значень коефіцієнтів  $k$  приводить до зміни в 3 % – 20 % у вихідних характеристиках проектів конструкції, а збільшення коефіцієнта  $v_0$  на 0.0003  $m/pik$  – до розбіжності 22 % між характеристиками проектів ферми в момент часу  $t_0$ . Результати ж, отримані за більшої похибки  $\Delta v_0 = 0.0015 \div 0.002$  та одночасному зростанні обох коефіцієнтів до границі  $v_0 = 0.003 m/pik$ ,  $k = 0.005 MPa^{-1}$  взагалі відрізняються в 2 ÷ 4 рази.

Таким чином, проведені чисельні експерименти підтвердили важливість підвищення точності визначення параметрів використовуваної моделі корозії та необхідність врахування впливу напружень для забезпечення відповідності результатів математичного моделювання реальній поведінці досліджуваної конструкції. При цьому, очевидно, що завищення значень коефіцієнтів моделі приводить до надмірних витрат на «жертвний» шар матеріалу оптимального проекту конструкції, при заниженні ж, навпаки виникає ризик порушення вимог довговічності у запланований період її функціонування.

**Порівняльний аналіз застосування деяких відомих моделей корозії.** Застосування запропонованого маловитратного підходу для вибору оптимальних значень варіюваних параметрів конструкції дозволяє провести порівняння різних моделей корозії. Далі приводяться результати порівняльного аналізу застосування трьох найбільш відомих математичних моделей корозійної деградації, які враховують вплив напружень на швидкість корозійного руйнування поверхні конструкцій [5]: моделі В. М. Долинського, І. Г. Овчинникова та Е. М. Гутмана:

$$d\delta/dt = \varphi(t) \cdot (1 + k\sigma); \quad (Д) \quad (20)$$

$$d\delta/dt = v_0 \cdot (1 + \zeta \cdot \mathcal{E}); \quad (О) \quad (21)$$

$$d\delta/dt = v(t) \cdot e^{\gamma \cdot \sigma}. \quad (Г) \quad (22)$$

Тут  $\varphi(t)$ ,  $v(t)$  – функції, які відображують вплив агресивного середовища на швидкість корозійної деградації матеріалу конструкції та приймаються у вигляді:

$$\varphi(t) = (a + b \cdot e^{(\beta t - 1)}) / e^{\beta t};$$

$$v(t) = \alpha e^{\eta t},$$

а  $\mathcal{E}$  – питома енергія деформації, яка обчислюється за формулою

$$\mathcal{E} = 1/(2 \cdot E) \cdot (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + 2 \cdot (1 + \mu)\sigma_{xy}^2),$$

де  $\mu$  – молярний об'єм речовини;  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_{xy}$  – напруження в напрямках відповідних осей.

Самі ж коефіцієнти моделей, подані в [7], мають значення  $a = 0.00044 m/pik$ ;  $b = 0.000153 m/pik$ ;  $\beta = 0.2 pik^{-1}$ ;  $k = 0.0089 MPa^{-1}$ ;  $v_0 = 0.000217 m/pik$ ;  $\zeta = 0.00047 MPa^{-1}$ ;  $\alpha = 0.00048 m/pik$ ;  $\eta = 0.091 pik^{-1}$ ;  $\gamma = 0.00588 MPa^{-1}$ ; там же відзначено, що похибка результатів математичного моделювання на цій базі відносно експериментальних даних за один рік складає 11 % для моделі (20), 14 % для (21) та 3 % для (22). Тобто, при заданій довговічності конструкції, наприклад,  $t_n = 5$  років, вплив таких похибок у визначенні параметрів моделі може виявитись досить суттєвим.

Результати розв'язування задачі оптимального проектування конструкції (рис.1) за альтернативним підходом (15) – (19) з чисельними даними:  $\alpha = \pi/6$ ,  $\beta = \pi/4$ ,  $L = 2 m$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^5 MPa$ ,  $P = 80 kH$ ,  $[\sigma] = 240 MPa$ ,  $t_n = 5 років$ ,  $\Delta = 0.002 mm$ ,  $F_0 = 0.0001 m^2$ , отримані для моделей (20) – (22), наведені нижче на графіках, де показані зміни в

часі площ поперечних перерізів стрижнів кожного з отриманих проектів, напружень у стрижнях та їх прогинів.

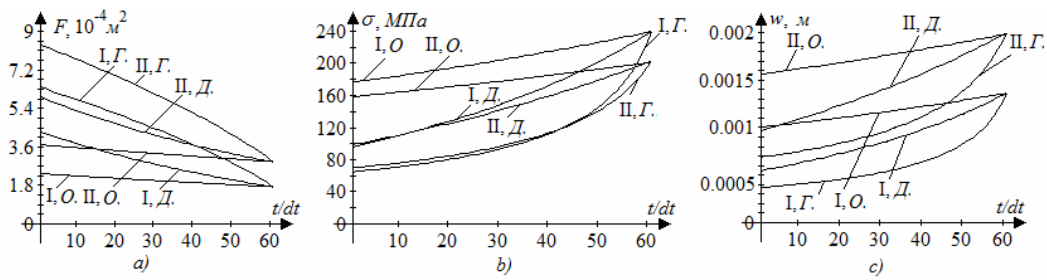


Рис. 4

Лініями I, Д., II, Д., I, О., II, О., I, Г., II, Г. на рис. 4 показані зміни в часі відповідно площ поперечних перерізів (рис. 4, а), напружень (рис. 4, б) та прогинів (рис. 4, с) у стрижнях I, II проектів конструкції (рис. 1), отриманих за моделями Д., О., Г. (див. (20) – (22)).

З аналізу приведених на рис. 4 чисельних даних, очевидно, що результати, отримані при застосуванні моделей корозійної деградації (20) – (22) з коефіцієнтами, значення яких подані у [7], суттєво відрізняються: середня величина відхилення за 5 років між результатами застосування моделі Е. М. Гутмана (22) та моделі В. М. Долинського (20) складає 41.9 %, а між результатами, отриманими за моделлю Е. М. Гутмана і І. Г. Овчинникова (19) вже 86.8 %. Така розбіжність пояснюється недостатньо точним визначенням коефіцієнтів, приведених у [7].

Авторами статті додатково був проведений чисельний експеримент по підборі параметрів моделей, застосування яких дозволило (при однакових з вище розглянутим випадком чисельних даних) знизити розбіжність між результатами застосування різних моделей до 9 % – 10.5 %. Знайдені коефіцієнти (20) – (21) мають значення:  $a=0.00082$  м/рік;  $b=0.00035$  м/рік;  $\beta=0.2$  (1/рік);  $k=0.0095$  (1/МПа);  $\nu_0=0.0011$  м/рік;  $\zeta=0.00112$  (1/МПа), коефіцієнти (22) залишені як у [7]. Результати розв'язування задачі (15) – (19) з такими чисельними даними наведені на рис.5, графіки та позначення на яких аналогічні поданим на рис. 4.

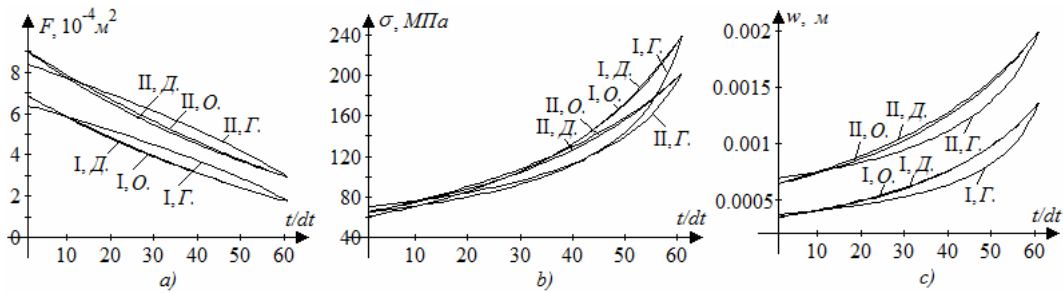


Рис. 5

Отже, зрозуміло, що точність результатів математичного моделювання поведінки конструкції в агресивному середовищі напряму залежить від коректності та адекватності математичної моделі корозії та її параметрів.

**Висновки.** У поданій статті продемонстрована вірогідність та ефективність запропонованого у [5] підходу. Відповідні порівняння результатів розв'язування задачі традиційним шляхом з використанням методу випадкового пошуку в

програмній системі Mathematica 7 та розробленого на основі запропонованого альтернативного підходу програмного комплексу вказують на співпадіння цих даних у межах похибки обчислень (у даному випадку менше 1 %). При цьому, показано, що обчислювальна трудовитратність при використанні нового підходу виявляється в десятки разів нижчою ніж при застосуванні традиційного.

Дослідження впливу зміни коефіцієнтів математичних моделей корозії на результати комп'ютерного моделювання, проведені в роботі, показали значний вплив похибок у значеннях коефіцієнтів рівнянь корозії та необхідність їх більш точного визначення з метою підвищення достовірності отримуваних результатів моделювання.

Проведено порівняльний аналіз застосування відомих моделей корозійної деградації (В. М. Долинського, І. Г. Овчинникова та Е. М. Гутмана) до розв'язування задач оптимального проектування в умовах впливу агресивного середовища.

### Бібліографічні посилання

1. **Брайсон А.** Прикладная теория оптимального управления / А. Брайсон, Хо Ю-Ши. – М., 1972. – 544 с.
2. **Василенко О. Г.** Оптимізація елементів фермових конструкцій з урахуванням спільної дії силових навантажень та агресивного середовища / О. Г. Василенко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Д., 2008. – Вип.12. – С. 20 – 33.
3. **Василенко О. Г.** Оптимізація статично невизначених стержневих систем з урахуванням взаємовпливу напруженого стану і корозії / О. Г. Василенко, А. П. Дзюба // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – Д., 2009. – Вип.10. – С. 48 – 57.
4. **Дзюба А. П.** Оптимальное проектирование конструкций на основе принципа максимума Понтрягина / А. П. Дзюба. – Д., 1984. – 136 с.
5. **Дзюба А. П.** Про один підхід до розв'язання задач оптимізації елементів конструкцій з урахуванням спільної дії силових навантажень та агресивного середовища / А. П. Дзюба, О. Г. Василенко, О. А. Дзюба // Методи розв'язання прикладних задач механіки твердого тіла. – Д., 2007. – Вип. 8. – С. 55–67.
6. **Зеленцов Д. Г.** Напряженно-деформированное состояние стержневых конструкций с нестационарными геометрическими характеристиками / Д. Г. Зеленцов, С. В. Кольчик // Методы решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела: Сб. научн. тр. – Д., 1997. – С. 37–42.
7. **Овчинников И. Г.** Тонкостенные конструкции в условиях коррозионного износа: расчет и оптимизация / И. Г. Овчинников, Ю. М. Почтман. – Д., 1995. – 192 с.
8. **Петров В. В.** Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой / В. В. Петров, И. Г. Овчинников, Ю. М. Шихов. – Саратов, 1987. – 285 с.
9. **Почтман Ю. М.** Методы расчета надежности и оптимального проектирования конструкций, функционирующих в экстремальных условиях / Ю. М. Почтман, М. М. Фридман. – Д., 1997. – 134 с.

*Надійшла до редколегії 01.10. 09*

УДК 539.3:519.6

Э. Л. Гарт, В. С. Гудрамович, С. А. Рябоконт  
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

## ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИНЫ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ОТВЕРСТИЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИТЕРАЦИОННЫХ СХЕМ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Розроблено алгоритм розв'язання задачі про пружно-пластичний напружено-деформований стан прямокутної пластини з прямокутним отвором на основі проекційно-ітераційного варіанта методу скінченних елементів. Для врахування пластичних деформацій застосовано метод змінних параметрів пружності. Проведено порівняльний аналіз одержаних розв'язків із відомими.

**Ключові слова:** пружно-пластична рівновага, прямокутний отвір, метод скінченних елементів, проекційно-ітераційні схеми.

Разработан алгоритм решения задачи упругопластического состояния прямоугольной пластины с прямоугольным отверстием на основе проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов. Для учета пластических деформаций применен метод переменных параметров упругости. Проведен сравнительный анализ полученных решений с известными.

**Ключевые слова:** упругопластическое равновесие, прямоугольное отверстие, метод конечных элементов, проекционно-итерационные схемы.

Algorithm for solution of elastoplastic problem for rectangular plate with rectangular hole on the basis of projective-iterative variant of finite elements method is developed. Plastic deformation of material was taken into account with use of the variable parameters of elasticity method. Comparative analysis for obtained results with known solutions is realized.

**Key words:** elastoplastic equilibrium, rectangular, circular holes, finite element method, projective-iterative schemes.

**Введение.** Расчет многих тонкостенных конструкций, элементами которых являются оболочки и пластины, должен проводиться с учетом пластических деформаций материала, которые возникают при высоких уровнях нагрузок. Это позволяет выявить дополнительные резервы веса (по сравнению с упругим расчётом) и в связи с этим определить реальные запасы прочности соответствующих конструкций.

Реальные пластинчато-оболочечные конструкции являются конструктивно-неоднородными, в частности, многие из них имеют вырезы [6; 10]. Это существенно усложняет соответствующие исследования напряженно-деформированного состояния, особенно усложняет исследования необходимость учета пластических деформаций материала. Некоторые вопросы исследований напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек с отверстиями при учёте пластических деформаций отражены, в частности, в [5; 12; 14]. Отметим, что соответствующие задачи имеют отношение к механике разрушения: разрушение начинается с образования нарушений сплошности, отверстия моделируют их.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии изотропной прямоугольной пластины, ослабленной центральным прямоугольным вырезом и находящейся под действием распределенной нагрузки  $P_1$ , приводящей к возникновению пластических деформаций (на рис. 1 изображена  $1/4$



В случае плоского напряжённого состояния для рассматриваемой задачи функционал (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{-a}^a \int_{-b}^b & \left[ \frac{\bar{G}}{1-\bar{\nu}} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\bar{G}}{1-\bar{\nu}} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{2\bar{G}\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{G}}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] dx_2 dx_1 - \int_{-b}^b P_1 u_1 dx_2, \end{aligned} \quad (3)$$

Приведем описание алгоритма решения упругопластической задачи для пластины на  $k$ -ом шаге последовательных приближений.

1. Для решения задачи минимизации функционала (3) применим проекционно-итерационный вариант МКЭ.

2. Для каждого конечного элемента находим интенсивность деформаций  $\varepsilon_i^e$

$$\varepsilon_i^e = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{1-\bar{\nu} + \bar{\nu}^2}{3(1-\bar{\nu})^2} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \frac{1}{4}\gamma_{12}^2}.$$

3. Если для текущего конечного элемента выполняется условие  $\varepsilon_i^e \leq \varepsilon_s$  (интенсивность деформации  $\varepsilon_i^e$  не превосходит интенсивности деформации  $\varepsilon_s$ , соответствующей условному пределу текучести), то параметры  $\bar{G}$  и  $\bar{\nu}$  не изменяются, при  $\varepsilon_i^e > \varepsilon_s$  переходим на шаг 4.

4. На диаграмме зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций (рис. 2, а) находим интенсивность напряжений  $\sigma_i$ , которая соответствует интенсивности деформаций  $\varepsilon_i^e$ .

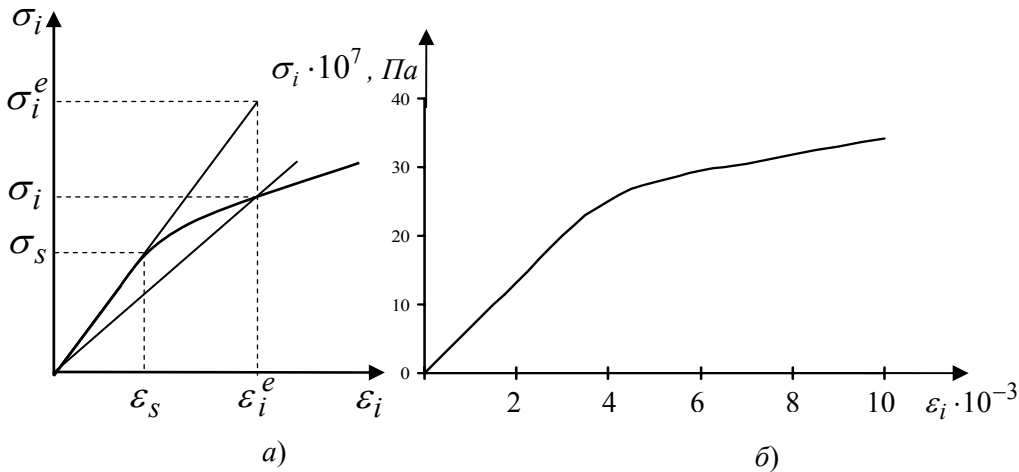


Рис. 2

5. Используя соответствующие значения  $\varepsilon_i^e$  и  $\sigma_i$ , определяем  $\bar{G}$  и  $\bar{\nu}$ :

$$\bar{G} = \frac{1}{2\psi}, \quad \bar{\nu} = \frac{E\psi - 1 + 2\nu}{2E\psi + 1 - 2\nu},$$

где  $\psi = 3\varepsilon_i^e / (2\sigma_i)$ .

6. Если  $k=1$ , то алгоритм повторяется для  $k=k+1$ . Для  $k>1$  выполняется проверка условия шага 7.

7. Если для каждого конечного элемента выполняется условие  $|\varepsilon_{i,k}^e - \varepsilon_{i,(k-1)}^e| < \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – заданная точность вычислений), то процесс вычислений прекращается, в противном случае – алгоритм повторяется для  $k=k+1$ .

**Численный анализ.** Расчёты проведены для пластины со сторонами  $2a = 2b = 0,2$  м, размерами отверстия  $0,08 \times 0,08$  м, материал пластины – алюминиевый сплав Д16Т с диаграммой  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$ , представленной на рис. 2, б. Сжимающие усилия  $P_1$  изменялись от  $8 \cdot 10^7$  Па до  $18 \cdot 10^7$  Па.

Решения, полученные на грубой сетке ( $21 \times 21$ ), хорошо согласуются с результатами, приведенными в [13].

Измельчение сеток в проекционно-итерационном процессе позволило получить более точное значение решения. При этом были использованы равномерные вложенные вдвое конечно-элементные сетки ( $21 \times 21$ ,  $41 \times 41$ ,  $81 \times 81$ ,  $161 \times 161$ ,  $321 \times 321$ ,  $641 \times 641$ ,  $1281 \times 1281$ ) из прямоугольных лагранжевых элементов первой степени.

В таблице 1 приведены результаты численной реализации проекционно-итерационного варианта МКЭ на ПК Turion 64x2 (2 GHz, 2x512 Kb L2 cache) с 2Gb оперативной памяти. Решение исходной задачи проекционно-итерационным вариантом МКЭ на последовательности 7-ми сеток было получено за 9 мин 55 с, исходя из нулевого начального приближения, задаваемого на самой грубой сетке ( $21 \times 21$ ). При решении этой задачи традиционным МКЭ на одной последней сетке ( $1281 \times 1281$ ) с нулевым начальным приближением решение было найдено за 46 мин 10 с, что в 4,5 раза дольше, чем проекционно-итерационным вариантом МКЭ.

Таблица 1

Номер сетки	Сетка	Время счёта задачи с упругими коэффициентами, с	Метод переменных параметров упругости		Суммарное время счёта, с
			Количество приближений	Время счёта, с	
1	21x21	0,07	11	0,28	0,35
2	41x41	0,17	10	2,5	2,74
3	81x81	0,45	11	25,2	25,89
4	161x161	1,33	11	191	193,02
5	321x321	4,1	9	618	624,12
6	641x641	14,7	8	202	222,82
7	1281x1281	61	8	513	595



На рис. 3 показаны эпюры величин  $\sigma_{11} / P_1$  в характерных сечениях пластины, обозначенных на рис. 1, при нагрузке  $P_1 = 18 \cdot 10^7 \text{ Па}$ , которые получены на последовательности 5-ти, 6-ти и 7-ми равномерных сеток. Наблюдается асимптотическая сходимость решений при измельчении сетки.

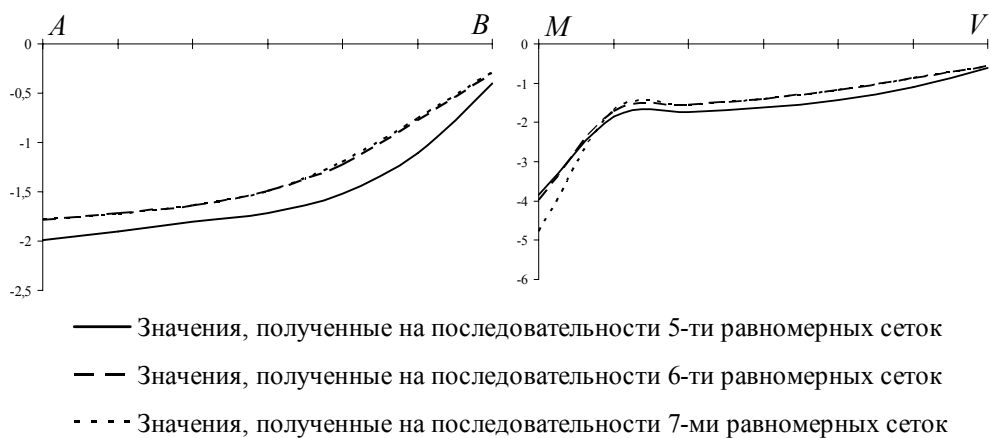


Рис. 3

На рис. 4 для сравнения показаны эпюры величин  $\sigma_{11} / P_1$  (а, в) и  $\sigma_{22} / P_1$  (б) в характерных сечениях пластины при нагрузке  $P_1 = 18 \cdot 10^7 \text{ Па}$ , где сплошные линии соответствуют упругому решению, пунктирные – упругопластическому.

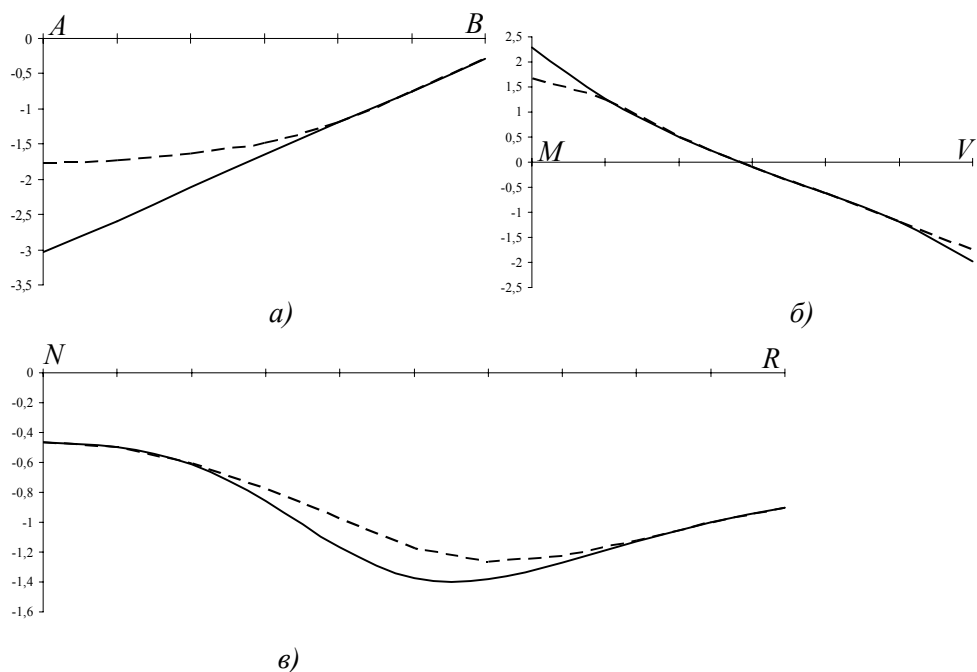


Рис. 4

На рис. 5 показано развитие зон пластичности (обозначены сеткой) в зависимости от величины нагрузки.

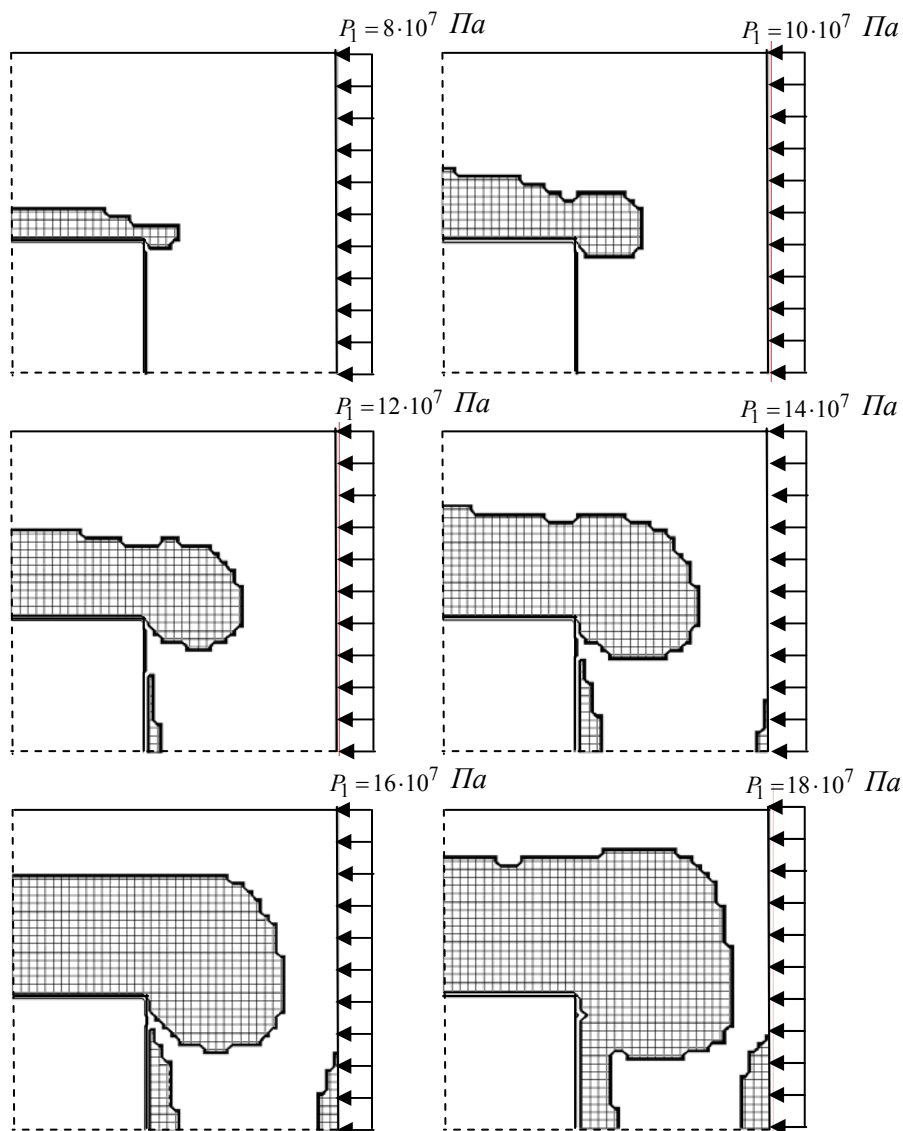


Рис. 5

**Выводы.** 1) Разработана методика решения плоской задачи об упругопластическом деформировании пластины с центральным прямоугольным вырезом на основе итерационных схем реализации МКЭ;

2) применение проекционно-итерационного варианта МКЭ для решения задач упругопластического напряженно-деформированного состояния для пластин с прямоугольными отверстиями имеет значительные преимущества по сравнению с обычным МКЭ (выигрыш по времени счёта составляет более 4 раз).

**Библиографические ссылки**

1. **Биргер И. А.** Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. – М., 1975. – С. 51–73.
2. **Гарт Э. Л.** Проекционно-итерационные модификации метода конечных элементов в краевых задачах теории упругости / Э. Л. Гарт // Доповіди НАН України. – 2008. – № 6. – С. 56–61.
3. **Гарт Э. Л.** Применение проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов к решению задачи Кирша / Э. Л. Гарт, В. С. Гудрамович, С. А. Рябоконт // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Д., 2008. – Вип. 12. – С. 34–42.
4. **Гудрамович В. С.** Устойчивость упруго-пластических оболочек / В. С. Гудрамович. – К., 1987. – 216 с.
5. **Гудрамович В. С.** Применение проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов к решению упруго-пластических задач для пластин с отверстиями / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, С. А. Рябоконт // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – Д., 2009. – Вип. 10. – С. 76–83.
6. **Гузь А. Н.** Теория оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, В. Н. Чехов. – К., 1980. – 692 с.
7. **Качанов Л. М.** Вариационные методы в теории пластичности / Л. М. Качанов // Механика твердого тела. Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. – М., 1966. – Вып. 3. – С. 177–190.
8. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М., 1969. – 420 с.
9. **Марчук Г. И.** Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М., 1981. – 416 с.
10. **Преображенский И. Н.** Вырезы в несущих конструкциях / И. Н. Преображенский, И. А. Цурпал. – М., 1984. – 112 с.
11. **Самарский А. А.** Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М., 1978. – 592 с.
12. **Сторожук Є. А.** Варіаційний векторно-різницевий метод розв'язання пружно-пластичних задач для багатозв'язних сферичних оболонок / Є. А. Сторожук, І. С. Чернишенко, І. Б. Руденко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Д., 2009. – Вип. 13. – С. 228–234.
13. **Угодчиков А. Г.** Некоторые методы решения на ЭЦВМ физически нелинейных задач теории пластин и оболочек / А. Г. Угодчиков, Ю. Г. Коротких. – К., 1971. – 220 с.
14. **Чернишенко І. С.** Чисельна методика дослідження пружнопластичного стану кінечної оболонки з двома круговими отворами / І. С. Чернишенко, Є. А. Сторожук, С. Б. Харенко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Д., 2009. – Вип. 13. – С. 257–263.

Надійшла до редколегії 17.09.09

УДК 539.3

В. Б. Говоруха

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

## ПРО ХАРАКТЕР ОСОБЛИВОСТІ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОГО ПОЛЯ В ОКОЛІ ВЕРШИНИ ЕЛЕКТРОІЗОЛЬОВАНОЇ МІЖФАЗНОЇ ТРИЩИННИ

Розглянута плоска задача електропружності для п'єзокерамічного біматеріалу з електроізолюваною міжфазною тріщиною. Побудовано точний аналітичний розв'язок задачі і проаналізовано можливість виникнення різних видів особливостей в околі вершини тріщини.

**Ключові слова:** п'єзоелектрична кераміка, електроізолювана міжфазна тріщина, сингулярність поля, коефіцієнти при особливостях, швидкість вивільнення енергії.

Рассмотрена плоская задача электроупругости для пьезокерамического биматериала с электроизолированной межфазной трещиной. Построено точное аналитическое решение задачи и проанализирована возможность возникновения различного вида особенностей в окрестности вершины трещины

**Ключевые слова:** пьезоэлектрическая керамика, электроизолированная межфазная трещина, сингулярность поля, коэффициенты при особенностях, скорость освобождения энергии.

An electrically impermeable interface crack between two semi-infinite piezoelectric spaces is considered. The exact analytical solution of the problem is found. The singular fields are investigated around interface crack tips

**Key words:** piezoelectric ceramics, electrically impermeable interface crack, type of singularity, stress intensity factor, energy release rate.

Руйнування композитних матеріалів здебільшого пов'язане з міжфазними тріщинами, які виникають на межі поділу їх компонентів. Тому дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкцій з урахуванням наявності в них дефектів у вигляді такого роду тріщин має дуже важливе практичне значення. У зв'язку з широким використанням п'єзоелектричних матеріалів у різних галузях машинобудування (завдяки внутрішньому ефекту взаємозв'язку між механічним та електричним полями) ця проблема стала актуальною і для п'єзоелектричних композитів. Однак розв'язування задач електропружності пов'язано з набагато більшими математичними труднощами, ніж розв'язування задач теорії пружності, оскільки вихідна система рівнянь для визначення електропружного стану суттєво ускладнюється у зв'язку з необхідністю врахування електромеханічних ефектів [4].

Плоска задача для міжфазної тріщини у п'єзоелектричному композитному матеріалі вперше була розглянута в [5]. Використовувалася модель тріщини з неперервними величинами електричного потенціалу та нормальної складової вектора електричної індукції на лінії тріщини (електропроникна тріщина). Було виявлено, що для цієї моделі міжфазної тріщини має місце осциляція напружень, електричної індукції та інших фізичних величин в околі вершини тріщини. Виходячи з того, що діелектрична проникність повітря, яке найчастіше заповнює тріщину, на декілька порядків нижча, ніж п'єзоелектрика, у [8; 9] розглянуто модель міжфазної тріщини, для якої бралися умови електричної ізоляції на берегах тріщини. Подальший розвиток модель електроізолюваної міжфазної тріщини дістала в [1; 3], де, за допомогою сингулярних інтегральних рівнянь були отримані числові та аналітичні розв'язки плоскої задачі електропружності для кусково-однорідної площини при різних видах зовнішнього навантаження. Контактна модель електроізолюваної міжфазної тріщини розглядалася в [2].

У даній роботі досліджено поведінку електромеханічного поля в околі вершини електроізолюваної міжфазної тріщини, яка може виникати в композитних конструкціях з трансверсально-ізотропної п'єзоелектричної кераміки. Особлива увага приділяється аналізу можливості виникнення різних видів особливостей в околі вершини тріщини залежно від властивостей матеріалу.

**Постановка задачі.** У прямокутній декартовій системі координат  $Ox_1x_2x_3$  розглянемо простір, складений з двох різних п'єзокерамічних півпросторів  $x_3 > 0$  та  $x_3 < 0$ . Матеріали цих півпросторів мають клас симетрії  $btm$  і попередньо поляризовані в напрямку осі  $Ox_3$ . Вважатимемо, що у смузі  $b_1 < x_1 < b_2$ ,  $x_3 = 0$  області розмежування півпросторів розташована електроізолювана ненавантажена тріщина, а поза тріщиною півпростори жорстко зчеплені між собою вздовж своєї межі  $x_3 = 0$ . На нескінченності задані однорідні поля механічних зусиль та електричної індукції (рис. 1). Будемо розглядати задачу для випадку плоскої деформації, тобто вважати, що всі електромеханічні характеристики не залежать від координати  $x_2$ .

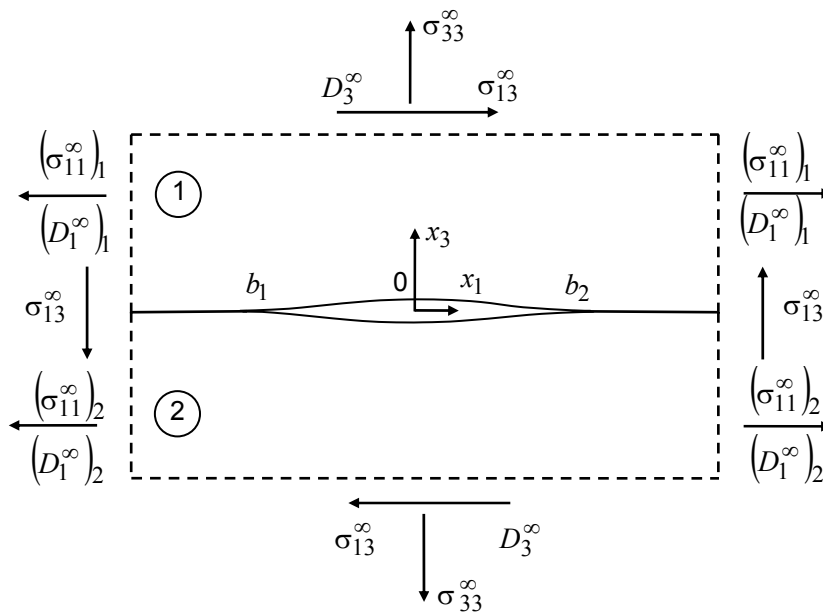


Рис. 1

На межі поділу матеріалів маємо такі граничні умови:

$$[[\sigma_{13}]] = 0, \quad [[\sigma_{33}]] = 0, \quad [[D_3]] = 0, \quad x_1 \in (-\infty, \infty); \quad (1)$$

$$[[u_1]] = 0, \quad [[u_3]] = 0, \quad [[\varphi]] = 0, \quad x_1 \notin (b_1, b_2); \quad (2)$$

$$\sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{33} = 0, \quad D_3 = 0, \quad x_1 \in (b_1, b_2), \quad (3)$$

де  $\sigma_{ij}$ ,  $D_i$ ,  $u_i$ ,  $\varphi$  – механічні напруження, електрична індукція, переміщення та електричний потенціал відповідно. Символ  $[[\cdot]]$  тут і надалі означає стрибок відповідної функції на межі поділу матеріалів.

Відповідно до методики [9] основні характеристики електромеханічного поля на межі поділу матеріалів можна подати у вигляді

$$[[V'(x_1)]] = -iH[h^+(x_1) - h^-(x_1)], \quad (4)$$

$$t(x_1, 0) = h^+(x_1) + \bar{H}^{-1}Hh^-(x_1) + T^\infty, \quad (5)$$

де  $h(z) = \begin{cases} B^{(1)}f^{(1)}(z), & x_3 > 0 \\ H^{-1}\bar{H}B^{(2)}f^{(2)}(z), & x_3 < 0 \end{cases}$  – вектор-функція, аналітична у всій

комплексній площині за винятком області тріщини,  $V = [u_1, u_3, \phi]^T$ ,  $t = [\sigma_{13}, \sigma_{33}, D_3]^T$ ,  $T^\infty = [\sigma_{13}^\infty, \sigma_{33}^\infty, D_3^\infty]^T$ . Вирази для матриць  $A^{(k)}$ ,  $B^{(k)}$  та функцій  $f^{(k)}(z)$  ( $k=1,2$ ) наведені в [9].

Матриця  $H$  у виразах (4), (5) визначається за формулою

$$H = i \left[ A^{(1)}(B^{(1)})^{-1} - \bar{A}^{(2)}(\bar{B}^{(2)})^{-1} \right]$$

і для трансверсально-ізотропних п'езокерамічних матеріалів має таку структуру

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & ih_{13} & ih_{14} \\ ih_{31} & h_{33} & h_{34} \\ ih_{41} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix},$$

де  $h_{jl}$  ( $j, l=1,3,4$ ) дійсні числа.

**Метод розв'язку.** За своєю побудовою вирази (4), (5) автоматично задовольняють граничні умови (1) та (2). Враховуючи далі граничні умови (3), приходимо до векторної задачі Рімана на інтервалі  $x_1 \in (b_1, b_2)$

$$h^+(x_1) + \bar{H}^{-1}Hh^-(x_1) = -T^\infty. \quad (6)$$

Розглянемо спочатку однорідну задачу, яка відповідає задачі (6)

$$h^+(x_1) + \bar{H}^{-1}Hh^-(x_1) = 0, \quad x_1 \in (b_1, b_2). \quad (7)$$

Її розв'язок будемо шукати у вигляді [6]

$$h(z) = (z - b_1)^{-\nu} (z - b_2)^{\nu-1} w, \quad (8)$$

де  $\nu$  – деяка комплексна стала,  $w$  – довільний вектор.

Підставляючи функцію (8) в (7), дістанемо систему

$$\left( \bar{H}e^{2\pi i \nu} + H \right) w = 0. \quad (9)$$

Очевидно, що  $\nu$  та  $w$  будуть, відповідно, власними числами та власними векторами цієї системи.

Умова існування нетривіального розв'язку системи (9) зводиться до кубічного рівняння

$$\delta^3 - \Xi \delta = 0,$$

$$\text{де } \delta = \frac{1 + e^{2\pi i \nu}}{1 - e^{2\pi i \nu}}, \quad \Xi = \frac{h_{14}(h_{33}h_{41} - h_{31}h_{43}) - h_{13}(h_{34}h_{41} - h_{31}h_{44})}{h_{11}(h_{34}h_{43} - h_{33}h_{44})}.$$

Очевидно, корені цього рівняння можна записати як

$$\delta_1 = \sqrt{\Xi}, \quad \delta_3 = -\sqrt{\Xi}, \quad \delta_4 = 0.$$

Числовий аналіз показує, що для однієї групи п'езокерамічних біматеріальних композицій виконується умова  $\Xi > 0$ , для іншої  $\Xi < 0$ . Тоді,

враховуючи, що:

$$v_1 = v(\delta_1), \quad v_3 = v(\delta_3), \quad v_4 = v(\delta_4),$$

дістанемо:

$$v_1 = \frac{1}{2} + i\varepsilon, \quad v_3 = \frac{1}{2} - i\varepsilon, \quad v_4 = \frac{1}{2} \quad \text{при } \varepsilon > 0;$$

$$v_1 = \frac{1}{2} + \kappa, \quad v_3 = \frac{1}{2} - \kappa, \quad v_4 = \frac{1}{2} \quad \text{при } \varepsilon < 0,$$

$$\text{де } \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\varepsilon}}{1 - \sqrt{\varepsilon}} \right), \quad \kappa = \frac{1}{\pi} \arctg(\sqrt{|\varepsilon|}).$$

Знаючи власні числа  $v_j$  ( $j=1,3,4$ ), із системи (9) знайдемо відповідні їм власні вектори  $w_j$ .

Параметри  $\varepsilon$  та  $\kappa$  відіграють важливу роль у подальшому аналізі, оскільки вони визначають характер особливості розв'язку для переміщень, напружень та інших фізичних величин в околі вершини тріщини. У загальному випадку анізотропії п'єзоелектричних тіл, як показано в [9], розподіл напружень та електричної індукції навколо вершини електроізолюваної міжфазної тріщини містить дві пари сингулярностей  $r^{-0,5 \pm i\varepsilon}$  та  $r^{-0,5 \pm \kappa}$ , де  $r$  – відстань від довільної точки тіла до вершини тріщини. У випадку трансверсально-ізотропних п'єзокерамічних біматеріальних тіл, як показав числовий аналіз, один з двох параметрів  $\varepsilon$  або  $\kappa$  завжди дорівнює нулю, в той час як інший залишається ненульовим. Це означає, що в околі вершини електроізолюваної міжфазної тріщини, на відміну від електропроникної, не завжди виникає осцилююча особливість, а тому залежно від того, який знак має стала  $\varepsilon$ , можна виділити дві групи п'єзокерамічних біматеріальних композицій: композиції  $\varepsilon$ -класу ( $\varepsilon > 0$ ), для яких характерно виникнення осцилюючої особливості в околі вершини тріщини, та композиції  $\kappa$ -класу ( $\varepsilon < 0$ ), які характеризуються наявністю степеневі особливості, відмінної від кореневої.

У випадку, коли характеристики матеріалів верхнього та нижнього півпросторів однакові, має місце рівність  $\varepsilon = 0$ , що приводить до кореневої особливості в околі вершини тріщини.

Перейдемо далі до розв'язку неоднорідної задачі (6). Як показано в [9], можливе розкладання вектора  $T^\infty$  і вектор-функції  $h(z)$  за базисом векторів  $w_j$ :

$$T^\infty = T_1 w_1 + T_3 w_3 + T_4 w_4,$$

$$h(z) = h_1(z) w_1 + h_3(z) w_3 + h_4(z) w_4, \quad (10)$$

і задача (6) зведеться до трьох незв'язаних задач лінійного спряження на інтервалі  $x_1 \in (b_1, b_2)$ :

$$h_j^+(x_1) - e^{2\pi i v_j} h_j^-(x_1) = -T_j \quad (j=1,3,4), \quad (11)$$

де функції  $h_j(z)$  є аналітичними у всій комплексній площині за винятком області тріщини.

Розв'язок задач (11) має вигляд [6]

$$h_j(z) = \frac{T_j}{1 - e^{2\pi i v_j}} \left\{ \left[ z + \left( v_j - \frac{1}{2} \right) l - \frac{b_1 + b_2}{2} \right] (z - b_1)^{-v_j} (z - b_2)^{v_j - 1} - 1 \right\},$$

де  $l = b_2 - b_1$ .

З огляду на це і скориставшись виразом (10), можемо записати

$$h(z) = \frac{T_1}{1 - e^{2\pi i \nu_1}} \left\{ \left[ z + \left( \nu_1 - \frac{1}{2} \right) l - \frac{b_1 + b_2}{2} \right] (z - b_1)^{-\nu_1} (z - b_2)^{\nu_1 - 1} - 1 \right\} \mathbf{w}_1 +$$

$$+ \frac{T_3}{1 - e^{2\pi i \nu_3}} \left\{ \left[ z + \left( \nu_3 - \frac{1}{2} \right) l - \frac{b_1 + b_2}{2} \right] (z - b_1)^{-\nu_3} (z - b_2)^{\nu_3 - 1} - 1 \right\} \mathbf{w}_3 +$$

$$+ \frac{T_4}{1 - e^{2\pi i \nu_4}} \left\{ \left[ z + \left( \nu_4 - \frac{1}{2} \right) l - \frac{b_1 + b_2}{2} \right] (z - b_1)^{-\nu_4} (z - b_2)^{\nu_4 - 1} - 1 \right\} \mathbf{w}_4.$$

Введемо далі коефіцієнти при особливостях в околі правої вершини тріщини в такий спосіб

$$K_j = \lim_{x_1 \rightarrow b_2 + 0} \sqrt{2\pi(x_1 - b_2)} (x_1 - b_2)^{0,5 - \nu_j} t_j(x_1),$$

де  $t_j(x_1)$  – компоненти вектора  $\mathbf{t}(x_1, 0)$  в базисі  $\mathbf{w}_j$  ( $j = 1, 3, 4$ ).

Зробивши необхідні обчислення, можемо записати коефіцієнти при особливостях в остаточному вигляді:

– для п'єзокерамічних комбінацій  $\varepsilon$ -класу

$$K_1 = \sqrt{\frac{\pi l}{2}} (1 + 2i\varepsilon) l^{-i\varepsilon} T_1, \quad K_3 = \sqrt{\frac{\pi l}{2}} (1 - 2i\varepsilon) l^{i\varepsilon} T_3, \quad K_4 = \sqrt{\frac{\pi l}{2}} T_4;$$

– для п'єзокерамічних комбінацій  $\kappa$ -класу

$$K_1 = \sqrt{\frac{\pi l}{2}} (1 + 2\kappa) l^{-\kappa} T_1, \quad K_3 = \sqrt{\frac{\pi l}{2}} (1 - 2\kappa) l^{\kappa} T_3, \quad K_4 = \sqrt{\frac{\pi l}{2}} T_4.$$

Як показує числовий аналіз, у випадку комбінацій  $\varepsilon$ -класу коефіцієнти  $K_1$  та  $K_3$  є комплексними, причому  $K_1 = \bar{K}_3$ , а коефіцієнт  $K_4$  – дійсний. У випадку ж комбінацій  $\kappa$ -класу всі коефіцієнти при особливостях є дійсними.

Вирази для напружень та електричної індукції, а також для стрибків переміщень та електричного потенціалу в околі точки  $b_2$ , за допомогою коефіцієнтів  $K_j$  ( $j = 1, 3, 4$ ) подамо в такому вигляді:

– для п'єзокерамічних комбінацій  $\varepsilon$ -класу

$$\mathbf{t}(x_1, 0) = \frac{K_1 (x_1 - b_2)^{i\varepsilon} \mathbf{w}_1}{\sqrt{2\pi(x_1 - b_2)}} + \frac{K_3 (x_1 - b_2)^{-i\varepsilon} \mathbf{w}_3}{\sqrt{2\pi(x_1 - b_2)}} + \frac{K_4 \mathbf{w}_4}{\sqrt{2\pi(x_1 - b_2)}}, \quad (12)$$

$$[[\mathbf{V}(x_1)]] = (\mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}}) \sqrt{\frac{b_2 - x_1}{2\pi}} \left\{ \frac{K_1 (b_2 - x_1)^{i\varepsilon} \mathbf{w}_1}{(1 + 2i\varepsilon) \operatorname{ch}(\pi\varepsilon)} + \frac{K_3 (b_2 - x_1)^{-i\varepsilon} \mathbf{w}_3}{(1 - 2i\varepsilon) \operatorname{ch}(\pi\varepsilon)} + K_4 \mathbf{w}_4 \right\};$$

– для п'єзокерамічних комбінацій  $\kappa$ -класу

$$\mathbf{t}(x_1, 0) = \frac{K_1 (x_1 - b_2)^{\kappa} \mathbf{w}_1}{\sqrt{2\pi(x_1 - b_2)}} + \frac{K_3 (x_1 - b_2)^{-\kappa} \mathbf{w}_3}{\sqrt{2\pi(x_1 - b_2)}} + \frac{K_4 \mathbf{w}_4}{\sqrt{2\pi(x_1 - b_2)}}, \quad (13)$$

$$[[\mathbf{V}(x_1)]] = (\mathbf{H} + \bar{\mathbf{H}}) \sqrt{\frac{b_2 - x_1}{2\pi}} \left\{ \frac{K_1 (b_2 - x_1)^{\kappa} \mathbf{w}_1}{(1 + 2\kappa) \cos(\pi\kappa)} + \frac{K_3 (b_2 - x_1)^{-\kappa} \mathbf{w}_3}{(1 - 2\kappa) \cos(\pi\kappa)} + K_4 \mathbf{w}_4 \right\}.$$

Швидкість вивільнення енергії в околі точки  $b_2$  визначається за такою



формулою [7]

$$G = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_{b_2}^{b_2 + \Delta l} t(x_1, 0) [V(x_1 - \Delta l)] dx_1.$$

Скориставшись виразами (12) і (13) та обчисливши відповідні інтеграли, одержимо представлення для швидкості вивільнення енергії у формі:

– для п’єзокерамічних комбінацій  $\varepsilon$ -класу

$$G = \frac{w_1^T (H + \bar{H}) w_3}{4ch^2(\pi\varepsilon)} K_1 K_3 + \frac{w_4^T (H + \bar{H}) w_4}{8} K_4^2;$$

– для п’єзокерамічних комбінацій  $\kappa$ -класу

$$G = \frac{w_1^T (H + \bar{H}) w_3}{4\cos^2(\pi\kappa)} K_1 K_3 + \frac{w_4^T (H + \bar{H}) w_4}{8} K_4^2.$$

Дані представлення можливі з огляду на специфічну властивість власних векторів  $w_j$  [9], яка підтверджена для розглядуваного класу матеріалів шляхом числової перевірки

$$\begin{bmatrix} w_1^T \\ w_3^T \\ w_4^T \end{bmatrix} H [w_1 \ w_3 \ w_4] = \begin{bmatrix} 0 & w_1^T H w_3 & 0 \\ w_3^T H w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_4^T H w_4 \end{bmatrix}.$$

**Аналіз результатів.** Для ілюстрації отриманих результатів було проведено числові розрахунки для 6 біматеріальних композитів, складених з трансверсально-ізотропних п’єзокерамік PZT-5H, PZT-5, PZT-4 та BaTiO<sub>3</sub>. Характеристики цих матеріалів наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Величина	Розмірність	П’єзокерамічні матеріали			
		PZT-4	PZT-5H	PZT-5	BaTiO <sub>3</sub>
$c_{11}$	$10^{10}$ Н/м <sup>2</sup>	13,9	12,6	12,1	15,0
$c_{12}$		7,78	5,5	7,54	6,6
$c_{13}$		7,43	5,3	7,52	6,6
$c_{33}$		11,3	11,7	11,1	14,6
$c_{44}$		2,56	3,53	2,11	4,4
$e_{31}$	Кл/м <sup>2</sup>	-6,98	-6,5	-5,4	-4,35
$e_{33}$		13,84	23,3	15,8	17,5
$e_{15}$		13,44	17,0	12,3	11,4
$\varepsilon_{11}$	$10^{-10}$ Ф/м	60,0	151	81,1	98,7
$\varepsilon_{33}$		54,7	130	73,5	112

Числовий аналіз показав, що до композицій  $\varepsilon$ -класу належать PZT-5H/BaTiO<sub>3</sub>, PZT-5/PZT-4, а PZT-5H/PZT-4, PZT-5H/PZT-5, BaTiO<sub>3</sub>/PZT-4, PZT-5/BaTiO<sub>3</sub> є композиціями  $\kappa$ -класу.

На рис. 2 показано залежність швидкості вивільнення енергії від різних видів навантаження. Для представлення фізичних величин використовується система СІ. Крива 1 відповідає біматеріальному композиту PZT-5/PZT-4 (композиція  $\varepsilon$ -класу), а крива 2 – композиту BaTiO<sub>3</sub>/PZT-4 (композиція  $\kappa$ -класу). Видно, що для

комбінацій обох класів збільшення зсувних зусиль призводить до зростання швидкості вивільнення енергії, тоді як збільшення інтенсивності електричного навантаження веде до її зменшення.

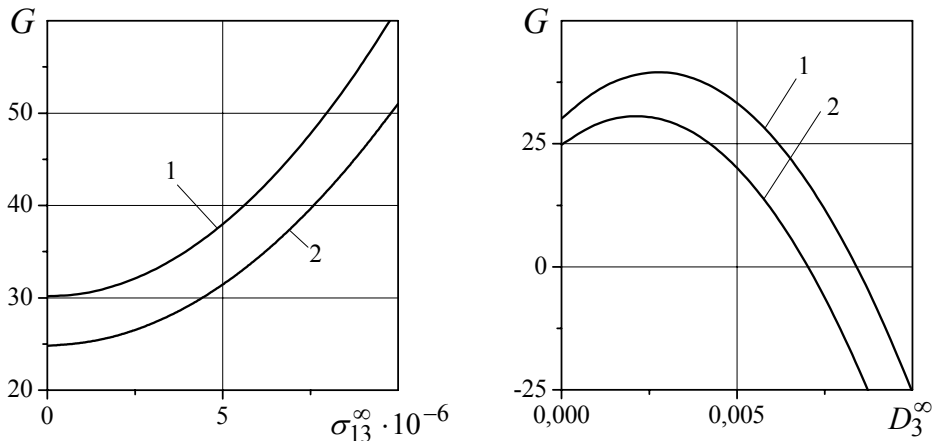


Рис. 2

### Бібліографічні посилання

1. **Бакиров В. Ф.** Интегральные соотношения для задачи о трещине на границе раздела пьезоэлектрика и проводника / В. Ф. Бакиров // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 6. – С. 128 – 150.
2. **Говоруха В. Б.** О влиянии электрического потока на длину зоны контакта межфазной трещины в пьезоэлектрическом биматериале / В. Б. Говоруха, В. В. Лобода // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2003. – Вип. 7, Т. 2. – С. 20–30.
3. **Говоруха В. Б.** О моделях межфазной трещины на границе двух пьезоэлектрических материалов / В. Б. Говоруха // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип. 8, Т. 2. – С. 61 – 68.
4. **Гринченко В. Т.** Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. // Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. –Т. 5. –К., 1989. – 279 с.
5. **Кудрявцев Б. А.** Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником / Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон, В. И. Ракитин // Прикл. математика и механика. – 1975. – Т. 39, № 1. – С. 149–159.
6. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М., 1966. – 708 с.
7. **Партон В. З.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М., 1988. – 472 с.
8. **Beom H. G.** Near-tip fields and intensity factors for interfacial cracks in dissimilar anisotropic piezoelectric media / H. G. Beom, S. N. Atluri // Int. J. Fracture. – 1996. – Vol. 75, № 2. – P – 163–183.
9. **Fracture mechanics of piezoelectric materials** / Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // J. Mech. Phys. Solids. – 1992. – Vol. 40, № 4 – P. 739–765.

Надійшла до редколегії 07.04.09

УДК 539.3

Н. А. Гук

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОТКЛОНЕНИЙ ВНЕШНИХ НАГРУЗОК, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЛСТОСТЕННУЮ ОБОЛОЧКУ ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Пропонується визначати функцію відхилень зовнішнього навантаження, як розв'язок оберненої задачі пружно-пластичного деформування з використанням узагальненого розв'язку. Функціонал нев'язки доповнюється умовою стійкості пластичних деформацій. Вектор невідомих параметрів задачі визначається з використанням алгоритму градієнтної мінімізації з урахуванням апріорної інформації про розв'язок.

Ключові слова: товстостінна оболонка, стійкість пластичних деформацій, обернена задача, ідентифікація, узагальнений розв'язок, алгоритм градієнтної мінімізації.

Предлагается определять функцию отклонений внешней нагрузки, как решение обратной задачи упруго-пластичного деформирования с использованием обобщенного решения. Функционал-невязка дополняется условием устойчивости пластических деформаций. Вектор неизвестных параметров задачи определяется с использованием алгоритма градиентной минимизации с учетом априорной информации о решении.

Ключевые слова: толстостенная оболочка, устойчивость пластических деформаций, обратная задача, идентификация, обобщенное решение, алгоритм градиентной минимизации.

The function of rejections of the external loading as decision of reverse problem of the elastic-plastic deformation with the use of the generalized decision is suggested to determine. The functional is complemented the condition of stability of plasticity deformation. The vector of unknown parameters of task is determined with the use of algorithm of gradient minimization taking into account a priori information about a decision.

Key words: thick-walled shell, stability of plasticity deformation, reverse task, authentication, generalized decision, algorithm of gradient minimization.

**Введение.** Процедура определения реального нагружения оболочечных конструкций по наблюдаемым деформациям является актуальной задачей при эксплуатации указанных систем, а также при создании математических моделей различных технологических процессов. Задача, возникающая при этом, связана с решением упругопластической задачи в обратной постановке.

Решению обратных задач механики деформируемого твердого тела в упругой постановке посвящены [7; 8; 12], однако, постановке и решению обратных упруго-пластических задач посвящены единичные работы [10]. В литературе широко представлены задачи обработки металлов давлением [4], использующие простейшие аналитические решения или итеративные численные решения. Особенностью таких задач является плохая обусловленность и высокая размерность, что, в свою очередь, приводит к непреодолимым вычислительным трудностям.

В настоящей работе рассматривается общая постановка обратной упруго-пластической задачи о восстановлении действующей нагрузки по известным наблюдениям на основе численного алгоритма, позволяющего провести декомпозицию решения, которая одновременно является процедурой регуляризации.

**Постановка задачи.** Рассматривается толстостенная оболочка, находящаяся под действием произвольной квазистатической нагрузки (частота изменения нагрузки существенно меньше максимальной частоты колебаний оболочки). Обозна-

чим  $\Omega = \{X \mid X = (x, y, z) \in R^3 : X \in \Omega\}$  ограниченную область пространства, занятую оболочкой. Нагрузка, действующая на оболочку, изменяется относительно номинально действующей нагрузки  $P_0(X)$  следующим образом:

$$P(X, t_k) = P_0(X) + P_k(X), \quad k = \overline{1, K}, \quad (1)$$

где  $P(X, t_k)$  – функция действующих нагрузок;  $t_k$  – дискретные моменты времени;  $X = \{x, y, z\}$  – вектор пространственных координат;  $P_k(X)$  – идентифицируемые изменения функции нагрузки, соответствующие моменту времени  $t_k$ . Функции  $P_k(X)$  должны быть ограничены на области  $\Omega$

$$P_k(X) \leq C(X), \quad (2)$$

где  $C(X)$  – заранее заданная функция.

Напряженно-деформированное состояние оболочечного элемента, находящегося в упруго-пластической области, может быть описано на основе деформационной теории пластичности в приращениях [1]. Приращение полной деформации и изменение кривизны представляется в виде сумм упругой и пластической частей:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij}^e + \Delta \varepsilon_{ij}^p; \quad \Delta \chi_{ij} = \Delta \chi_{ij}^e + \Delta \chi_{ij}^p. \quad (3)$$

Пластические составляющие деформации  $\varepsilon_{ij}^p$  и кривизны  $\chi_{ij}^p$  поверхности определяются в итерационном процессе метода дополнительных деформаций [1]

$$\varepsilon_{ij}^{p(n)} = \left(1 - \frac{E_c(\varepsilon_i^{(n)})}{E}\right) \varepsilon_{ij}^{(n)}, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_i$  – интенсивность деформаций;  $\varepsilon_i = \sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \frac{1}{4}\varepsilon_{12}^2}$ ;  $E_c(\varepsilon_i^{(n)})$  – секущий модуль, определяемый по обобщенной кривой деформирования материала  $\sigma_i(\varepsilon_i)$ ;  $n$  – номер шага итерационного процесса метода дополнительных деформаций. Критерием окончания итерационного процесса является выполнение условия

$$\left| \frac{\sigma_i^{(n)} - \sigma_i^{*(n)}}{\sigma_i^{(n)}} \right| \leq \varepsilon_1, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_1$  – заданная точность;  $\sigma_i$  – интенсивность действительных напряжений;  $\sigma_i^{*(n)}$  – интенсивность напряжений упругого расчетного тела.

Связь между интенсивностью напряжений  $\sigma_i$  и деформаций  $\varepsilon_i$  такая же, как и между напряжениями и осевой деформацией при одноосном сжатии или растяжении

$$\sigma_i = \begin{cases} E\varepsilon_i, & \varepsilon_i \leq \varepsilon_T \\ f(\varepsilon_i), & \varepsilon_i > \varepsilon_T \end{cases}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E}$ ;  $\sigma_T$  – предел текучести. Функция  $f(\varepsilon_i)$  существует и однозначна.

Значения параметров нагрузки ограничены условием устойчивости пластических деформаций [10]:

$$-\left(\varepsilon_i^{p(n)} \Delta \sigma_i^{(n)}\right) \leq 0, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_i^{p(n)}$ ,  $\Delta \sigma_i^{(n)}$  – значения интенсивности пластических деформаций и приращение интенсивности напряжений достигнутые на  $(n)$ -ом шаге итерационного процесса.

В качестве разрешающих соотношений для определения основных функций, описывающих напряженно деформированное состояние (НДС) оболочки, используются функционалы обобщенного решения [3] сформулированные для  $(n+1)$ -ого шага итерационного процесса (4):

$$\begin{aligned}
 (w \cdot \xi) = & \iint \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + k_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + k_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right] dx dy + \\
 & + \iint \left( T_{11}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + T_{22}^0 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + T_{12}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + T_{12}^0 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx dy - \iint \left( T_{11}^0 \Delta \chi_{11}^p + T_{22}^0 \Delta \chi_{22}^p + T_{12}^0 \Delta \chi_{12}^p \right) \xi dx dy + \\
 & + \iint \left( \Delta \chi_{11}^p \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \Delta \chi_{22}^p \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \Delta \chi_{12}^p \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \Delta \chi_{12}^p \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx dy + \iint R_1 \xi dx dy - \quad (8) \\
 & - \iint \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \chi_{11}^0 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \chi_{22}^0 - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \chi_{12}^0 \right) \xi dx dy - \iint \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Delta \chi_{11}^p + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Delta \chi_{22}^p - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Delta \chi_{12}^p \right) \xi dx dy;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\Phi \cdot \theta) = & - \iint \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + k_{22} w \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \right] dx dy + \iint R_2 \theta dx dy + \\
 & + \iint \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} \chi_{22}^0 + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \chi_{11}^0 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \chi_{12}^0 - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} \chi_{12}^0 \right] dx dy - \iint \left[ \Delta \chi_{11}^p \chi_{22}^0 + \Delta \chi_{22}^p \chi_{11}^0 - \frac{1}{2} \Delta \chi_{12}^p \chi_{12}^0 \right] \theta dx dy + \\
 & + \iint \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} \Delta \chi_{22}^p + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Delta \chi_{11}^p - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \Delta \chi_{12}^p - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} \Delta \chi_{12}^p \right] dx dy, \quad (9)
 \end{aligned}$$

где введено скалярное произведение  $(Q_1 \cdot Q_2) = \iint \left[ \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 Q_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial y^2} \right] dx dy$ ;  $w$  – функция нормальных перемещений;  $\Phi$  – функция усилий;  $\varepsilon_{ij}^p$  – пластические составляющие деформаций;  $\chi_{ij}^p$  – пластические составляющие кривизны поверхности;  $\Delta \varepsilon_{ij}^p$ ,  $\Delta \chi_{ij}^p$  – приращения пластических составляющих деформации и кривизны;  $M_{ij}^0$  – моменты при  $P(X) = P_0(X)$ ;  $T_{ij}^0$  – комплексы, включающие усилия от нагружения  $P(X) = P_0(X)$  и компоненты пластических деформаций  $\varepsilon_{ij}^{p(n-1)}$ , вычисленные на  $(n-1)$ -ом шаге;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $k_{11}, k_{22}$  – кривизна поверхности в направлениях  $x, y$ ;  $R_1, R_2$  – комплексы, содержащие пластические составляющие, определяемые в итерационном процессе метода дополнительных деформаций. Компоненты, содержащие индекс  $(\cdot)^0$  характеризуют функции задачи, вычисленные для действия номинального нагружения  $P(X) = P_0(X)$ .

Пара функций  $(w(X), \Phi(X))$ ,  $w(X) \in H_\chi$ ,  $\Phi(X) \in H_t$ , принадлежащая пространству пар функций со скалярным произведением  $((w_1, \Phi_1) \cdot (w_2, \Phi_2)) = (w_1 \cdot w_2)_{H_\chi} + (\Phi_1 \cdot \Phi_2)_{H_t}$  и удовлетворяющая интегральным

соотношениям (8), (9) при любых  $\xi, \theta$  является обобщенным решением нелинейной краевой задачи. Сочетание граничных условий таково, что возможно образование специальных функциональных пространств  $H_\chi, H_t$  [3].

Предполагается, что в точках  $X_n, n = \overline{1, N}$  ограниченной пространственной области  $\Omega \subset R^3$  известны (измеряются) значения нормальных перемещений

$$w(X_n) = w_n^* \tag{10}$$

Задача состоит в определении функции  $P(X)$ , соответствующей моменту времени  $t_k$ , такой, что обобщенное решение (8), (9) удовлетворяет ограничениям (7).

**Метод решения.** Обратная задача может быть сформулирована как вариационная. Понятие корректной по А.Н. Тихонову [9] постановки задачи требует введения условия компактности, что практически означает использование количественной информации об искомом решении. Решение поставленной задачи сводится к минимизации функционала невязки с ограничениями (7) на неизвестные функции  $P$  на пространстве векторов  $P = (P_1, P_2, \dots, P_M)^T \in R_M$ :

$$J(P, \lambda) = \int_{\Omega} \Delta^T(X, P) \Delta(X, P) d\Omega - \int_{\Omega} \lambda(X) \Delta \sigma_i(X, P) \varepsilon_i^P(X, P) d\Omega \tag{11}$$

Здесь  $\Delta(X, P) = (w(X_n, P) - w_n^*)$  – вектор-функция невязки;  $\lambda_n$  – множители Лагранжа;  $\Delta \sigma_i(X_n, P), \varepsilon_i^P(X_n, P)$  – значения соответствующих функций в точке  $X_n$ .

Для построения дискретного аналога функционала (11) необходимо сформировать обобщенное решение (8), (9) прямой задачи. Решение прямой задачи позволяет для каждого момента времени  $t_k$  определить НДС конструкции, возникающее в результате воздействия внешней нагрузки  $P(X)$ , сформировать вектор нормальных перемещений  $w(X_n, P)$  и вектор невязки  $\Delta(X, P) = (w(X_n, P) - w_n^*)$ . Для решения прямой задачи будем использовать соотношения (8), (9), аппроксимируя неизвестные функции задачи с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

- Для построения системы уравнений МКЭ выполняется дискретизация области  $\Omega$ :
- для решения прямой задачи вводится сетка с координатами узлов  $X_s$ , где  $X_s = \{x_s, y_s, z_s\}, s = \overline{1, S}$  и соответствующими узловыми значениями функции  $w$  в виде вектора  $w(X_s) = \{w_s\}$ ;
  - для представления условия (7) в дискретной форме вводится сетка с координатами узлов  $X_l$ , где  $X_l = \{x_l, y_l, z_l\}, l = \overline{1, L}$ , все  $X_l$  из числа  $X_s$ ;
  - для задания следа решения прямой задачи вводится сетка с координатами узлов  $X_n, n = \overline{1, N}$ , все  $X_n$  из числа  $X_s$  и заданными значениями функции  $w(X_n) = \{w_n^*\}$ ;
  - для идентифицируемой функции  $P(X)$  используется ее дискретное описание в виде узловых значений на сетке  $X_s$ .

Рассматриваемая система представляется в виде ансамбля четырехузловых конечных элементов. Неизвестные функции на элементе задаются для локальной системы координат, связанной с центром тяжести, при помощи аппроксимаций вида:

$$w^e = \sum_{r=1}^4 w_r H_r(\mu) H_r(\eta); \quad \Phi^e = \sum_{r=1}^4 \Phi_r H_r(\mu) H_r(\eta);$$

$$\xi^e = \sum_{r=1}^4 H_r(\mu) H_r(\eta); \quad \theta^e = \sum_{r=1}^4 H_r(\mu) H_r(\eta) \quad (12)$$

где  $w_r, \Phi_r$  – значения функций в узлах;  $H_r$  – функции формы. В качестве функций формы используются интерполяционные полиномы на базе полиномов Богнера-Фокса-Шмидта, хорошо зарекомендовавшие себя в нелинейных задачах теории оболочек [11]. Множители Лагранжа  $\lambda$  также аппроксимируются на элементе

$$\lambda^e = \sum_{r=1}^4 \lambda_r H_r(\mu) H_r(\eta).$$

После выполнения соответствующей процедуры интегрирования и суммирования матриц элементов получаем систему уравнений для  $(n)$ -ого шага метода дополнительных деформаций в виде

$$\left( K + K_{\sigma}^{(n)}(\varepsilon^{p(n)}, P_0) \right) U^{(n)} = R^{(n)}, \quad (13)$$

где  $U^{(n)} = \left( w_s, \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_s, \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_s, \Phi_s, \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_s, \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_s \right)^T$  – вектор значений искомых

функций в  $l$ -ом узле;  $K_{\sigma}^{(n)}$  – матрица, учитывающая параметрические слагаемые соотношений (8), (9);  $K = [C]^T [D][C]$  – матрица жесткости;  $C$  – матрица функций формы;  $D$  – матрица упругости;  $R^{(n)}$  – вектор, учитывающий нагружение и действие дополнительных деформаций.

В результате решения системы уравнений (13) получаем вектор перемещений  $w_s = w(X_s, P)$ ,  $s = \overline{1, S}$ , соответствующий обобщенному решению (8), (9), который вместе с заданным вектором  $w_n^*$  позволяет сформулировать дискретный аналог (11)

$$J(P, \lambda) = \sum_{n=1}^N \Delta^T(X_n, P) \Delta(X_n, P) - \sum_{l=1}^L \lambda_l \varepsilon_l^p(X_l, P) \sum_{m=1}^M \frac{\partial \sigma_l(X_l, P)}{\partial P_m} \Delta P_m, \quad (14)$$

где  $P = (P_1, P_2, \dots, P_M)^T$  – вектор идентифицируемых изменений функции нагрузки,  $m = \overline{1, M}$ ;  $\Delta(X, P) = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N)^T \in R_N$  – вектор невязок, компонентами которого являются  $\Delta_n(X, P) = (w(X_n, P) - w_n^*)$ ,  $n = \overline{1, N}$ ;  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L)^T$  – вектор множителей Лагранжа,  $l = \overline{1, L}$ .

Для того чтобы вектор  $P^* = (P_1^*, P_2^*, \dots, P_M^*)^T \in R_M$  являлся решением задачи (14), необходимо и достаточно существование такого вектора  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_L^*)^T \in A_L$ :  $\lambda^* \in A_L = \{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L) : \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_L \geq 0 \}$ , чтобы пара  $(P^*(X), \lambda^*) \in R_M \times A_L$  была седловой точкой функционала (14) [2].

Для определения седловой точки функции Лагранжа, построим итерационный процесс, представляющий собой метод градиента по каждой из переменных  $P$  и  $\lambda$ , аналогично [2]. Приближения  $P^{(k+1)}$ ,  $\lambda^{(k+1)}$  определяется следующим образом:

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} - \alpha^{(k)} J'_P{}^{(k)}(P^{(k)}, \lambda^{(k)}), \quad (15)$$

$$\lambda_l^{(k+1)} = \max \left\{ 0; \lambda_l^{(k)} + \alpha^{(k)} \operatorname{sign} \left[ \varepsilon_i^P(X_l, P^{(k)}) \sum_{m=1}^M \frac{\partial \sigma_i(X_l, P^{(k)})}{\partial P_m^{(k)}} \Delta P_m^{(k)} \right] \right\}, \quad (16)$$

где  $J_P^{(k)}(P, \lambda) = (J_{P_1}^{(k)}(P, \lambda), \dots, J_{P_m}^{(k)}(P, \lambda))$ . Выбор параметра  $\alpha^{(k)}$  ( $\alpha^{(k)} > 0$ ) осуществляется так, чтобы выполнялось условие убывания целевого функционала  $J(P^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}) < J(P^{(k)}, \lambda^{(k)})$ .

Для выполнения численной минимизации функционала  $J^{(k)}(P, \lambda)$  по переменной  $P$  организуем итерационный процесс метода Ньютона-Рафсона [5]:

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} - h_k (J_P''(P^{(k)}, \lambda^{(k)}))^{-1} J_P'(P^{(k)}, \lambda^{(k)}), \quad (17)$$

где  $J_P'(P^{(k)}, \lambda^{(k)})$ ,  $J_P''(P^{(k)}, \lambda^{(k)})$  – градиент и гессиан функционала  $J^{(k)}(P, \lambda)$  в точке  $P^{(k)}$  соответственно;  $h_k$  – величина шага,  $h_k = 1$ .

Линеаризуя функцию невязки и функцию приращения интенсивностей деформаций  $\Delta \sigma_i(X_l, P)$  в окрестности текущего значения вектора параметров  $P^{(k)}$ :

$$\Delta(X_n, P) = \Delta(X_n, P) + \sum_{m=1}^M \frac{\partial \Delta(X_n, P)}{\partial P_m} \Big|_{P=P^{(k)}} \Delta P_m, \quad (18)$$

получим компоненты градиента и гессиана функционала  $J^{(k)}(P, \lambda)$  в точке  $P^*$  в виде:

$$J_P'(P, \lambda) \Big|_{P=P^*} = \frac{\partial J_P(P, \lambda)}{\partial P_m} \Big|_{P=P^*} \approx 2 \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\partial \Delta(X_n, P)}{\partial P_m} \right\} \Big|_{P=P^*}^T \Delta(X_n, P^*) - \sum_{l=1}^L \left\{ \frac{\partial \varepsilon_i^P(X_l, P)}{\partial P_m} \right\} \Big|_{P=P^*}^T \lambda_l \left\{ \sum_{m=1}^M \frac{\partial \sigma_i(X_l, P)}{\partial P_m} \Delta P_m \right\} \Big|_{P=P^*}, \quad (19)$$

$$J_P''(P, \lambda) \Big|_{P=P^*} = \frac{\partial^2 J_P(P, \lambda)}{\partial P_m \partial P_q} \Big|_{P=P^*} \approx 2 \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\partial \Delta(X_n, P)}{\partial P_m} \right\} \Big|_{P=P^*}^T \left\{ \frac{\partial \Delta(X_n, P)}{\partial P_q} \right\} \Big|_{P=P^*}. \quad (20)$$

Компоненты матрицы градиента определяются численно с использованием разностного аналога

$$G = \left\| \frac{\partial \Delta(X_n, P)}{\partial P_m} \right\| = \frac{\Delta(X_n, P_m, \Delta P_m) - \Delta(X_n, P_m)}{\Delta P_m}, \quad (21)$$

где  $\Delta(X_n, P_m, \Delta P_m) = \{\Delta(X_n, P_m + \Delta P_m \cdot e_1), \dots, \Delta(X_n, P_m + \Delta P_m \cdot e_m)\}$ ;  $\Delta P_m$  – приращение к значению параметра  $P_m$ ;  $e_m$  – базисные векторы:  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ;  $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ ; ...;  $e_m = (0, 0, \dots, 1)$ ;  $m = \overline{1, M}$ .



Вводя обозначения для матрицы градиента

$$G^{(k)} = G(X_n, P^{(k)}) = \left[ \frac{\partial \Delta(X_n, P^{(k)})}{\partial P_m} \right]_{\substack{N \times M, n=\overline{1, N} \\ m=\overline{1, M}}} \quad (22)$$

и матрицы

$$F^{(k)} = F(X_l, P^{(k)}) = \left[ \text{diag} \left\{ \sum_{m=1}^M \frac{\partial \sigma_i(X_l, P)}{\partial P_m} \right\} \left\{ \frac{\partial \varepsilon_i^P(X_l, P)}{\partial P_m} \right\} \right]_{\substack{L \times M, l=\overline{1, L} \\ m=\overline{1, M}}} \quad (23)$$

получим разрешающие уравнения для определения приращений параметров  $P^{(k)}$  в матричной форме:

$$G^{(k)T} G^{(k)} (P^{(k+1)} - P^{(k)}) = -(G^{(k)T} \Delta(P^{(k)}) - F^{(k)T} \lambda)$$

или, опуская индекс  $(k)$ , соответствующий номеру итерации

$$\Delta P = -(G^T G)^{-1} (G^T \Delta(P) - F^T \lambda). \quad (24)$$

При решении задачи минимизации необходимо иметь хорошее приближение матрицы Гессе только в окрестности точки минимума, так как метод Ньютона обладает одношаговой сходимостью для квадратичных функций. Кроме того, линейризуя функцию невязки, получаем такую оценку гессиана (20), которая всегда является положительно полуопределенной матрицей. Это делает вычислительную процедуру (17) аналогом алгоритма спуска и гарантирует сходимость к стационарной точке.

В общем случае матрица  $G$  может быть плохо обусловленной, особенно, если ее размерность велика. Очевидно, что из общего числа идентифицируемых параметров  $M$  можно выбрать те, влияние которых оказывается наиболее существенным. При этом необходимо обеспечить возможность получения решения (24) с заданной точностью.

Для формирования матрицы  $\tilde{G}$  выделим наборы  $\tilde{g}_{nm}$ ,  $n = \overline{1, N}$ ,  $m = \overline{1, B}$ , с индексами  $m \in C^d$ ,  $C^d = \{C_1^d, \dots, C_B^d\}$ ,  $C^d \in K_d$  ( $K_d$  – область определения вектора  $C^d$ ), которым соответствуют элементы  $g_{nm}$  матрицы  $G$  ( $n = \overline{1, N}$ ,  $m = \overline{1, M}$ ).

Для определения квазирешения  $\Delta \tilde{P}_{C^d}$  для множества возможных индексов  $C^d$ , аналогично (24), имеем:

$$\tilde{G}_{C^d}^T \tilde{G}_{C^d} \Delta \tilde{P}_{C^d} = \tilde{G}_{C^d}^T \Delta(\tilde{P}_{C^d}) - \tilde{F}_{C^d}^T \tilde{\lambda}, \quad C^d \in K_d. \quad (25)$$

Для определения наборов  $C^{d*}$ , соответствующих решению задачи (24), необходимо решить задачу о выборе оптимальных точек аппроксимации нагрузки,  $j = C_1^{d*}, \dots, C_B^{d*}$  таких, что после получения решения (25), будет выполняться условие [6]

$$\left\| \tilde{G}_{C^d}^T \tilde{G}_{C^d} \Delta \tilde{P}_{C^d} - (\tilde{G}_{C^d}^T \Delta(\tilde{P}) - \tilde{F}_{C^d}^T \tilde{\lambda}) \right\| - \left\| G^T G \Delta P - (\tilde{G}_{C^d}^T \Delta(\tilde{P}) - \tilde{F}_{C^d}^T \tilde{\lambda}) \right\| \leq \varepsilon_2, \quad (26)$$

где  $\varepsilon_2$  – заданная точность.

Если ввести обозначения  $\tilde{A} = \tilde{G}_{C^d}^T \tilde{G}_{C^d}$ ,  $A = G^T G$  и соответствующие нормы

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^B a_{nm}^2}; \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{n=1}^N A_n^2} \quad \text{то из условия, что при фиксированном } \Delta(P) \text{ и } \lambda$$

сумма  $\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^B (|a_{nm}| - |\tilde{a}_{nm}|)^2$  должна быть минимальной, формулируется условие

для определения  $C^{d^*}$

$$\|A\| = \max_{C^d} \sqrt{\sum_{n=1}^N \sum_{m \in C^d} a_{nm}^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \sum_{m \in C^{d^*}} a_{nm}^2} . \quad (27)$$

Отсюда следует, что набор элементов  $C^d$ , соответствующий выполнению условия (26), должен быть упорядочен по значению сумм  $B$  столбцов матрицы  $G$ .

Несмотря на то, что матрица  $(G^T G)$  всегда является положительной полуопределенной, она может быть вырожденной или близкой к вырождению. В том случае, когда детерминант матрицы  $(G^T G)$  остается близким к нулю, при реализации процедуры (24) возникают вычислительные трудности. Для их преодоления предлагается использование процедуры регуляризации Левенберга-Марквардта [5], в которой аппроксимация гессиана выбирается в виде:

$$J_P''(P, \lambda) \Big|_{P=P^*} \approx 2 \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\partial \Delta(X_n, P)}{\partial P_m} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \Delta(X_n, P)}{\partial P_q} \right\} \Big|_{P=P^*} + \psi E ,$$

где  $\psi$  – малое положительное число;  $E$  – единичная матрица.

Тогда итерационная процедура (24) может быть представлена следующим образом

$$\Delta P^\psi = (G^T G + \psi E)^{-1} (G^T \Delta(P) - F^T \lambda), \quad (28)$$

Параметр  $\psi$  выбирается из условия минимума невязки:

$$\|(G^T G) \Delta P^\psi - (G^T \Delta(P) - F^T \lambda)\| \leq \varepsilon_2 .$$

**Алгоритм идентификации внешних нагрузок.** Описанный подход к определению внешних нагрузок на каждом шаге итерационного процесса может быть представлен следующим алгоритмом (без процедуры регуляризации):

1. Задание числа параметров  $B$ ; номинальной нагрузки  $P_0(X)$ ;  $\varepsilon_1$  – точность в методе дополнительных деформаций;  $\varepsilon_2$  – точность невязки;  $k$  – количество итераций,  $k = 1$ .
2. Решение прямой задачи с точностью  $\varepsilon_1$ , численное построение матриц  $G^{(k)}, F^{(k)}$  с использованием (21).
3. Упорядочение матрицы  $G^{(k)}$  по столбцам в соответствии с условием (27), формирование матрицы  $\tilde{G}^{(k)}$ .
4. Построение матрицы  $(\tilde{G}^{(k)T} \tilde{G}^{(k)})$ , формирование соответствующей матрицы  $\tilde{F}^{(k)}$ .
5. Определение  $\Delta \tilde{P}^{(k)}$  в процедуре (25) и  $\lambda^{(k)}$  из условия (16); проверка выполнения условия (26), если истина, то перейти к п. 6, иначе  $k = k + 1$ , перейти к п. 2.
6. Конец.

**Результаты численного эксперимента.** Изложенный алгоритм был применен для определения отклонения функции внешней нагрузки от заданной номинальной  $P_0(X)$ , действующей на цилиндрическую круговую оболочку, по измененным значениям нормальных перемещений. В качестве номинального нагруже-

ния задавалось неравномерно распределенное внешнее давление в продольных полосах (рис. 1). Исследовалась стальная цилиндрическая круговая оболочка ( $L/R=2,4$ ;  $R/h=70$ ;  $L, R, h$  – длина, радиус, толщина оболочки;  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ H / м}^2$ ;  $\sigma_T = 2,4 \cdot 10^3 \text{ H / м}^2$ ;  $\sigma_e = 3,6 \cdot 10^3 \text{ H / м}^2$ ). Модель оболочки задавалась в конечно-элементной форме (использовался четырехузловой конечный элемент на базе полиномов Богнера-Фокса-Шмидта [11]) (рис. 2).

В результате оказываемого внешнего воздействия  $P(X)$  происходит деформирование оболочки. На ее поверхности зафиксированы точки, значения нормальных перемещений в которых измерены (заданы). Эти значения в дальнейшем использовались в качестве значений вектора  $w^* = \{w_n^*\}$ .

Для итерационной процедуры определения отклонений функции внешней нагрузки от номинальной в качестве аппроксимации функции нагрузки выбирались ее значения в узловых точках области, где наблюдались наибольшие отклонения перемещений точек срединной поверхности от перемещений, вызываемых действием номинального нагружения  $P_0(X)$ . Итеративный процесс восстановления функции отклонения нагрузки с использованием предложенного алгоритма выполнялся для различных случаев распределения номинальной нагрузки и отклонений от нее.

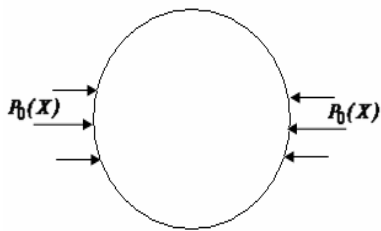


Рис. 1

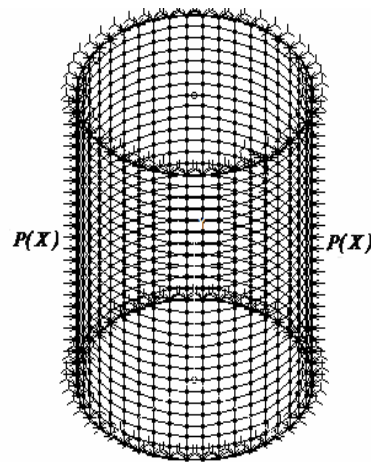


Рис. 2

На рис. 3 представлен результат восстановления функции нагрузки для случая, когда номинальное нагружение вызывает деформирование в упругой области, а отклонение – упруго-пластическое деформирование (случай 1), на рис. 5 – для случая, когда номинальное нагружение вызывает упруго-пластическое деформирование (случай 2). В обоих случаях отклонение только увеличивает номинальную нагрузку, но не изменяет характер ее распределения.

На каждом из рисунков кривые, приведенные сплошной линией, соответствуют заданному распределению нагрузки (рассматривается распределение нагрузки в продольном сечении оболочки). Кривые, представленные пунктирной линией, соответствуют функциям распределения номинальной нагрузки. Кривые, обозначенные штрихпунктирными линиями, соответствуют результатам идентификации вектора нагружения на итерациях с заданной точностью по перемещениям и демонстрируют приближения к искомому решению. В качестве начального приближения для итерационных процессов выбиралось распределение номинальной нагрузки.

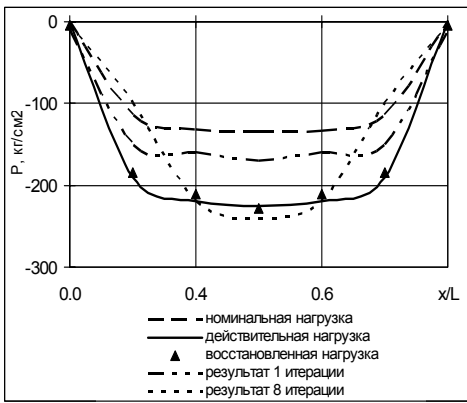


Рис. 3

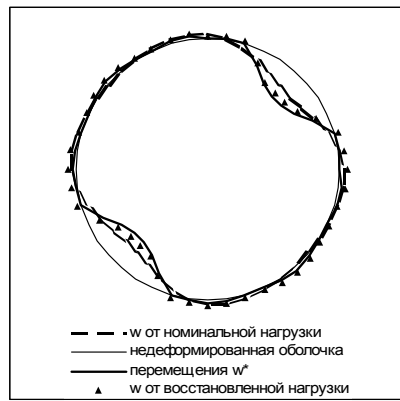


Рис. 4

Распределения нормальных перемещений в поперечном сечении, соответствующих рассматриваемым функциям нагружения, приведены на рис. 4. (для случая 1) и рис. 6 (для случая 2). Сплошные тонкие линии обозначают контур недеформированной оболочки, сплошные жирные линии описывают наблюдаемые перемещения  $W_n^*$ , вызванные действительной нагрузкой, кривые, обозначенные пунктиром иллюстрируют перемещения вызванные действием номинальной нагрузки, а линии обозначенные маркерами  $\blacktriangle$  – перемещения оболочки, вызванные восстановленной в итеративном процессе функцией нагружения. Погрешность приближения к наблюдаемым перемещениям составляет не более 1–2 %.

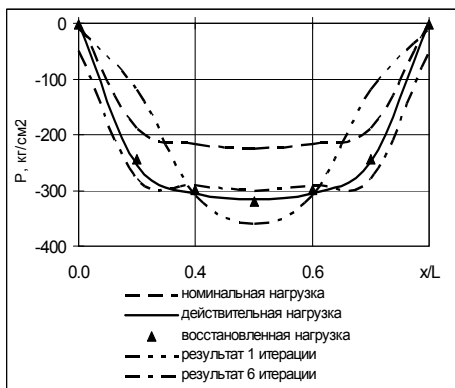


Рис. 5

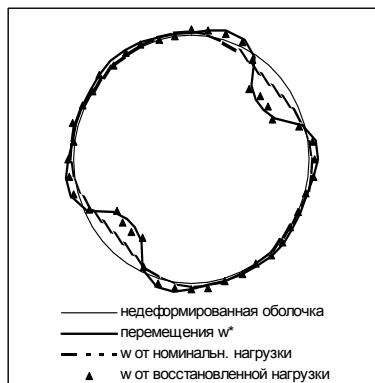


Рис. 6

На рис. 7 представлен результат восстановления функции нагрузки для случая, когда номинальное и действительное нагружение вызывают упруго-пластическое деформирование, но в отличие от предыдущих случаев изменяется характер распределения нагрузки (случай 3). Результаты идентификации вектора нагружения на итерациях с заданной точностью по перемещениям демонстрируют приближения к искомому решению, однако в отличие от двух предыдущих случаев для достижения заданной точности восстановления нагружения требуется большее количество итераций. Погрешность приближения к наблюдаемым перемещениям составляет 4 – 5 %.

Для исследования сходимости итерационного процесса рассматривалось характерное изменение функции невязки по итерациям (рис. 8). В начале процесса восстановления функции нагружения для всех рассматриваемых случаев происходит быстрое уменьшение невязки, затем скорость ее изменения падает, в результате кривые имеют достаточно резкий изгиб, разделяющий две области – быстрого и медленного изменения невязки. Область значений номеров итераций, где происходит резкий изгиб кривой, дает вполне удовлетворительные приближения к искомому решению обратной задачи.

Для всех рассматриваемых случаев к целевому функционалу невязки с помощью множителей Лагранжа добавлялись ограничения, которые обеспечивали выполнение условия устойчивости пластических деформаций. Без учета этих ограничений итерационный процесс идентификации функции внешнего воздействия расходился.

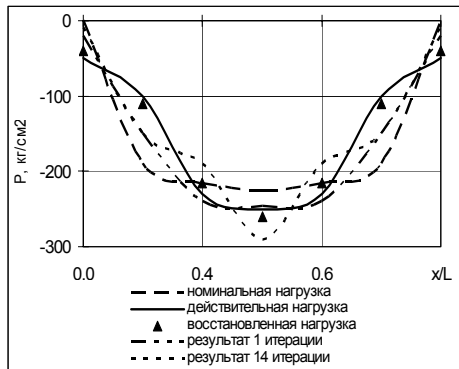


Рис. 7

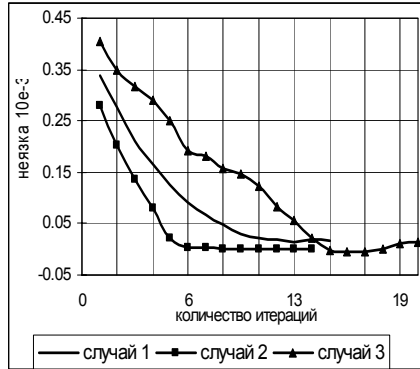


Рис. 8

**Выводы.** Общая постановка обратной упруго-пластической задачи о восстановлении отклонений функции нагрузки может быть сформулирована с использованием функционалов обобщенного решения и дискретного представления неизвестных функций. Учет качественной информации о решении позволил построить эффективный алгоритм минимизации целевого функционала, обеспечивающий сходимость к действительному решению с заданной точностью.

### Библиографические ссылки

1. **Биргер И. А.** Термопрочность деталей машин/ И. А. Биргер, Б. Ф. Шорр, И. В. Демьянушко. – М., 1975. – 456 с.
2. **Васильев Ф. П.** Численные методы решения экстремальных задач/ Ф. П. Васильев. – М., 1988. – 549 с.
3. **Ворович И. И.** математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И. И. Ворович. – М., 1989. – 373 с.
4. **Готлиб Б. М.** Адаптивное управление процессами обработки металлов давлением / Б. М. Готлиб, И. А. Добычин, В. М. Баранчиков. – М., 1985. – 142 с.
5. **Льюнг Л.** Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льюнг. – М.; 1991. – 431 с.
6. **Ободан Н. И.** Идентификация дефектов в деформируемых телах / Н. И. Ободан, А. С. Шульга // Проблемы машиностроения. – 2005. – №1. – С.32-51.
7. **Скопецкий В. В.** Идентификационно-псевдоинверсный подход к решению прямых и обратных задач динамики систем с распределенными параметрами / В. В. Скопецкий, В. А. Стоян, В. Б. Зваридчук // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 4. – С. 32-51.
8. **Сергиенко И. В.** Идентификация параметров составной тонкой пластины, находящейся под динамическим воздействием / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека // Проблемы управления и информатики. – 2007. – № 6. – С. 33-56.
9. **Тихонов А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М., 1986. – 288 с.
10. **Цвелодуб И. Ю.** Обратная упругопластическая задача для пластин / И. Ю. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика. – 1999. – Т. 40, № 4. – С. 186 – 194.
11. **Bogner F. K.** Finite deflection structural analysis using plate and shell discrete elements / F. K. Bogner, R. L. Fox, L. A. Schmit // AIAA Journal. – 1968. – Vol. 6. – № 5.
12. **Yao Zhenhan** Identification of the material parameters of laminated plates/Yao Zhenhan, Qu Shisheng // Tsinghua Sci. and Technol. – 2000. – №1. – P. 1-4.

Надійшла до редколегії 12.02.09

УДК 539.3

А. Г. Зеленський

*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури*

## МОДЕЛІ АНАЛІТИЧНОЇ ТЕОРІЇ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПЛИТ

Розглянуті моделі аналітичної теорії нетонких однорідних трансверсально-ізотропних плит при довільному статичному навантаженні з позицій тривимірної теорії пружності з урахуванням усіх компонент напружено-деформованого стану (НДС). Досліджено вплив механіко-геометричних параметрів та типу навантаження на НДС плит.

**Ключові слова:** модель, теорія, плита, напружено деформований стан.

Рассмотрены модели аналитической теории нетонких однородных трансверсально-изотропных плит при произвольном статическом нагружении с позиции трехмерной теории упругости с учетом всех компонент напряженно-деформированного состояния (НДС). Исследовано влияние механико-геометрических параметров и типа нагружения на НДС плит.

**Ключевые слова:** модель, теория, плита, напряженно-деформированное состояние.

In this work models of analytic theory of non-thin homogeneous transversally-isotropic slabs subjected to arbitrary static loading in the context of three-dimensional theory of elasticity with respect of all components of stress-strain state (SSS) were considered. Influence of mechanical and geometrical parameters and kinds of loading on SSS slabs were investigated.

**Key words:** models, theory, slab, stress-strain state.

**Вступ.** Метод зведення тривимірної задачі теорії пружності для пластин до двовимірної, засновані на розкладанні шуканих функцій у степеневі ряди з цілими показниками за поперечною координатою, використовувався ще Коші і Пуассоном у теорії тонких пластин. М. О. Кільчевський узагальнив указаний метод для розрахунку оболонок [6], запропонувавши метод розкладання напружено-деформованого стану (НДС) у тензорні ряди. Використання поліномів Лежандра для апроксимації компонент НДС за товщиною започатковано І. М. Векуа в [2], де проєкційним способом побудовано теорію призматичних оболонок довільної змінної товщини, яка надалі була розвинена в його подальших роботах для довільних пологих оболонок. У [16] Р. Чікала (Р. Cicala) одержані диференціальні рівняння і крайові умови для оболонок обертання з використанням принципу можливих переміщень. В. В. Понятовським [13] на основі варіаційного принципу Кастільяно побудована теорія пружних однорідних ізотропних пластин сталої товщини з використанням напівоберненого методу Сен-Венана. У ряди за поліномами Лежандра розкладалися тангенціальні напруження. Надалі поліноми Лежандра застосовувались у роботах І. Ю. Хоми [15], А. В. Плеханова, О. П. Прусакова [12], В. І. Гуляєва, В. А. Баженова, П. П. Лізунова [3] та їх послідовників. Огляди уточнених теорій виконано в [8; 9]. У [12] запропоновано енергоасимптотичний метод (ЕАМ). О. П. Прусаковим [14] тривимірні рівняння теорії пружності для пластин зведені до двовимірних з використанням варіаційного принципу Рейснера [18] і методу взаємозв'язаних рівнянь (МВР) при косиметричному деформуванні пластин з урахуванням перших двох наближень для компонент переміщень. Дана робота розглядає різні моделі варіанта аналітичної теорії з використанням МВР і на їх основі досліджено НДС плит при різних типах навантажень.

**Постановка задачі.** Розглядається транстропна плита ( $a \times b \times h$ ) сталої товщини  $h$  у прямокутній декартовій системі координат  $Oxyz$ . Лицеві площини навантажені довільними поперечними силами. Граничні умови:

$$\sigma_z(z = \pm h/2) = -(p(x,y) \pm q(x,y))/2, \quad \sigma_{xz}(z = \pm h/2) = \sigma_{yz}(z = \pm h/2) = 0, \quad (1)$$

де  $p(x,y)$  та  $q(x,y)$  – симетрична та кососиметрична складові поперечного навантаження (відносно серединної площини). Крайові умови можуть бути довільними статичного характеру. Вважається, що площина ізотропії паралельна серединній площині  $Oxy$ .

**Основні рівняння.** Компоненти переміщень, поперечні напруження, які точно задовольняють граничним умовам (1), і тангенціальні напруження апроксимуються за товщиною плити у вигляді рядів за поліномами Лежандра  $P_k(2z/h)$ :

$$U(x,y,z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k\left(\frac{2z}{h}\right) u_k(x,y), \quad (U \rightarrow V; u \rightarrow v); \quad W(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}\left(\frac{2z}{h}\right) w_k(x,y); \quad (2)$$

$$\sigma_{xz}(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n\left(\frac{2z}{h}\right) t_{xn}(x,y), \quad (x,y); \quad \sigma_z(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{2z}{h}\right) s_{zn}(x,y); \quad (3)$$

$$\sigma_x(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{2z}{h}\right) s_{xn}(x,y), \quad (x,y); \quad \sigma_{xy}(x,y,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{2z}{h}\right) t_{yxn}(x,y),$$

де

$$t_{xn}(x,y) = \sum_{i=1}^{n+1} a_{ni} Q_{ix}(x,y), \quad (x,y); \quad s_{zn}(x,y) = \sum_{i=0}^{n+2} b_{ni} \omega_i(x,y); \quad (4)$$

$$Q_{ix}(x,y) = \sum_{j=1}^m h_{ij} w_{j,x} + \sum_{j=0}^m l_{ixj} u_j, \quad (x,y; u_j, v_j);$$

$$\omega_i(x,y) = \sum_{j=1}^m (q_{ij} w_j + e_{ij} \varphi_j) + e_{iq} q + e_{ip} p;$$

$$s_{xn}(x,y) = d_0(u_{n,x} + v_{n,y}) + d_{10} s_{zn}, \quad (x,y; u_n, v_n); \quad t_{yxn}(x,y) = G(u_{n,y} + v_{n,x}).$$

Сталі множники при функціях тут і надалі залежать від механіко-геометричних параметрів плити;  $m$  – натуральне число, яке залежить від кількості доданків у частинних сумах рядів (2).

Зображення компонент НДС у вигляді рядів (2), (3) на відміну від теорій, що оснований на методі гіпотез, дає можливість визначати НДС з будь-якою точністю, враховуючи в указаних рядах відповідну кількість складових компонент (моделі варіанта аналітичної теорії). Якщо в рядах (2) урахувати складові компонент переміщень з індексами  $k = 0, 1, \dots, n$  (для тангенціальних компонент переміщень) і  $k = 1, \dots, n$  (для поперечних переміщень), то у функціях (4) потрібно приймати до уваги тільки ці складові.

Аналітично показано, що НДС розглядуваних плит при поперечному навантаженні визначається розв'язками двох незалежних лінійних крайових задач: одна описує НДС при кососиметричному, а інша – при симетричному навантаженні. На основі аналізу систем диференціальних рівнянь установлено, що з урахуванням перших  $(n+1)$ -го (при  $n$  – натуральному непарному числі) доданків  $u_0, u_1, \dots, u_k, \dots, u_n; v_0, v_1, \dots, v_k, \dots, v_n$  (наближення  $k=0, 1, \dots, n$ ) у рядах (2) для компонент переміщень  $U(x, y, z)$ ,  $V(x, y, z)$  система диференціальних рівнянь для кососиметричного навантаження має  $3(n+1)$ -й порядок, а для симетричного –  $(3n+1)$ -й.

Система диференціальних рівнянь, що описує симетричне деформування

$$\sum_{n=0}^k (M_{i,2n+1}u_{2n} + M_{i,2n+2}v_{2n}) + \sum_{n=1}^k M_{i,2(k+1)+n}w_{2n} = M_{ip}, \quad (i=1, 2, \dots; k=0, 1, \dots); \quad (5)$$

система диференціальних рівнянь, що описує кососиметричне деформування

$$\sum_{n=0}^k (L_{i,2n+1}u_{2n+1} + L_{i,2n+2}v_{2n+1}) + \sum_{n=0}^k L_{i,2k+n+3}w_{2n+1} = L_{ip}, \quad (i=1, 2, \dots; k=0, 1, \dots), \quad (6)$$

де  $M_{i,j}$ ,  $L_{i,j}$  – оператори 2-го та 1-го порядків;  $M_{ip}$ ,  $L_{iq}$  – функції симетричного  $p(x, y)$  і кососиметричного  $q(x, y)$  навантаження відповідно.

Крайові умови в інтегральній формі також отримуються із варіаційного принципу (ВП) Рейснера.

На основі (2) – (6) і крайових умов виведені основні рівняння, що визначаються різною кількістю наближень у рядах (2) (моделі варіанта аналітичної теорії), а саме: при  $k=0, 1$  (модель М01);  $k=1, 3$ ;  $k=0, 2$  (М13, М02) і  $k=0, \dots, 5$  (високе наближення, М0-5).

Розробленою методикою отримані системи диференціальних рівнянь для кожної моделі варіанта теорії операторним методом зведені до зручних для розв'язування систем, що дало можливість розділити їх на окремі системи нижчого порядку та отримати форми їх загальних розв'язків. Виділені диференціальні рівняння, які описують внутрішній НДС, вихровий та потенціальний крайові ефекти; побудовані форми загальних розв'язків для М135, М02, М024.

Для моделі високого наближення М0-5 введена в явному вигляді система диференціальних рівнянь з частинними похідними 34-го порядку [4], яка розділена на систему диференціальних рівнянь симетричного і кососиметричного деформування [5]. Симетричне деформування (М024) визначається системою 16-го порядку, причому, вихровий крайовий ефект описується однорідною системою диференціальних рівнянь 4-го порядку, потенціальний крайовий ефект – однорідним диференціальним рівнянням 8-го порядку, а внутрішній НДС – бігармонічним рівнянням і частинними розв'язками чотирьох неоднорідних диференціальних рівнянь 12-го порядку. Кососиметричне деформування (М135) визначається системою 18-го порядку, вихровий крайовий ефект – однорідною системою 6-го порядку відносно вихрових функцій  $\psi_i(x, y)$  ( $i=1, 3, 5$ )

$$H_{i1}\psi_1 + H_{i3}\psi_3 + H_{i5}\psi_5 = 0; \quad (i=1, 3, 5), \quad (\psi_k = u_{k,y} - v_{k,x}, \quad H_{ij} = h_{ij,2}\nabla^2 + h_{ij,0}), \quad (7)$$



яка операторним методом зведена до диференціального рівняння 6-го порядку відносно функції  $\psi(x, y)$

$$H_0\psi(x, y) = 0; (H_0 = K_{6B}\nabla^6 + K_{4B}\nabla^4 + K_{2B}\nabla^2 + K_{0B}),$$

де  $\psi_i(x, y) = H_{1i}^0\psi(x, y)$ ,  $H_{1i}^0$  – ад’юнкти диференціального визначника системи (7). Внутрішній НДС з потенціальним крайовим ефектом описується неоднорідною системою диференціальних рівнянь 12-го порядку відносно  $w_i(x, y)$  ( $i = 1, 3, 5$ )

$$P_{i1}w_1 + P_{i3}w_3 + P_{i5}w_5 = P_{iq}q, (P_{ij} = \mu_{ij,4}\nabla^4 + \mu_{ij,2}\nabla^2 + \mu_{ij,0}; i = 1, 3, 5). \quad (8)$$

Система диференціальних рівнянь внутрішнього НДС і потенціального крайового ефекту для високого наближення (8) зведена до зручних неоднорідних диференціальних рівнянь 12-го порядку

$$\nabla^4(K_{8\Pi}\nabla^8 + K_{6\Pi}\nabla^6 + K_{4\Pi}\nabla^4 + K_{2\Pi}\nabla^2 + K_{0\Pi})\Phi_i(x, y) = P_{iq}q, (i = 1, 3, 5). \quad (9)$$

Виведені форми загальних розв’язків системи (9):

$$\Phi_1(x, y) = \Phi_{1B}(x, y) + \Phi_{1\Pi}(x, y) + \Phi_{1r}(x, y); \quad \Phi_k(x, y) = \Phi_{kr}(x, y), (k = 3, 5),$$

де  $\Phi_{1r}, \Phi_{3r}, \Phi_{5r}$  – частинні розв’язки неоднорідних диференціальних рівнянь (9);  $\Phi_{1B}$  – загальний розв’язок бігармонічного рівняння  $\nabla^4\Phi_1 = 0$ , який разом з частинними розв’язками трьох неоднорідних диференціальних рівнянь (9) описує внутрішній НДС пластини;  $\Phi_{1\Pi}$  – загальний розв’язок диференціальних рівнянь потенціального крайового ефекту (8-го порядку)

$$(K_{8\Pi}\nabla^8 + K_{6\Pi}\nabla^6 + K_{4\Pi}\nabla^4 + K_{2\Pi}\nabla^2 + K_{0\Pi})\Phi_1 = 0.$$

Одержано складові переміщень через форми загальних розв’язків рівнянь (7) і (9):

$$w_k(x, y) = P_{1k}^0(\Phi_{1B}(x, y) + \Phi_{1r}(x, y)) + \sum_{i=1,3}^5 P_{ik}^0\Phi_{ir}(x, y) \quad (P_{ik}^0 - \text{ад’юнкти системи (8)});$$

$$u_k(x, y) = \sum_{i=1,3}^5 (\lambda_{k\varphi i}\varphi_{i,x} + \lambda_{k\psi i}\psi_{i,y} + \lambda_{kwi}w_{i,x}) + \lambda_{kq}q_{,x};$$

$$v_k(x, y) = \sum_{i=1,3}^5 (\lambda_{k\varphi i}\varphi_{i,y} - \lambda_{k\psi i}\psi_{i,x} + \lambda_{kwi}w_{i,y}) + \lambda_{kq}q_{,y}, \quad (k = 1, 3, 5; \varphi_i = u_{i,x} + v_{i,y}).$$

Побудовані розв’язки в одинарних та подвійних тригонометричних рядах для розглядуваних моделей. Розроблено новий наближений метод розв’язування отриманих систем диференціальних рівнянь високого порядку, згідно з яким, розв’язування системи 8-го (12-го) порядку зведено до послідовного наближеного розв’язування двох (трьох) диференціальних рівнянь 4-го порядку. Метод може бути узагальнений для розв’язування систем більш високих порядків.

Одержано точний аналітичний розв’язок тривимірної задачі теорії пружності для транстропних плит довільної товщини при крайових умовах Нав’є.

**Чисельні розрахунки. Висновки.** На основі розроблених алгоритмів досліджено НДС квадратних трансформних плит довільної сталої товщини при повільно і швидкозмінюваних та квазілокальних поперечних навантаженнях при крайових умовах Нав'с. Отримані в широких межах змінювання механіко-геометричних параметрів чисельні результати (табл. 1 – 3, рис. 1 – 4) указують на більш високу точність М0-3 варіанта аналітичної теорії у порівнянні з іншими теоріями, які основані на використанні різних фізичних гіпотез в т. ч. і з теорією типу Тимошенка-Рейснера (М1, М01). Метод взаємозв'язаних рівнянь дає більш точні результати у порівнянні з енергоасимптотичним (табл. 2).

На рис. 1, 2 ( $h/a = 1/3$ ;  $G'/G = 0,1$ ), рис. 3, 4 ( $h/a = 1/3$ ;  $G'/G = 1$ ) наведені графіки змінювання компонент НДС за товщиною, яка характеризує нелінійність НДС і розходження між результатами моделей варіанта теорії. Тут і надалі  $\tilde{\sigma}_{x(z)} = \sigma_{x(z)}/q$ ;  $\tilde{W} = WE/(qh)$ ;  $\tilde{z} = z/h$ ;  $\tilde{x}(\tilde{y}) = x(y)/a$ . НДС при кососиметричному навантаженні характеризується параметром  $p_{mn}/q_{mn} = 0$ , а при навантаженні на верхній лицевій площині – параметром  $p_{mn}/q_{mn} = 1$  ( $p_{mn}$ ,  $q_{mn}$  – амплітудні значення інтенсивності зовнішнього навантаження); моногармонічне навантаження визначається параметрами  $m = n = 1$  (кількість півхвиль), а полігармонічне – параметрами  $m = n = 3, 5, \dots$ ;  $\Delta$  з нижніми індексами означає відповідне розходження у відсотках.

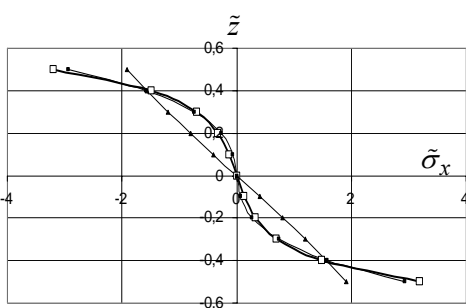


Рис. 1

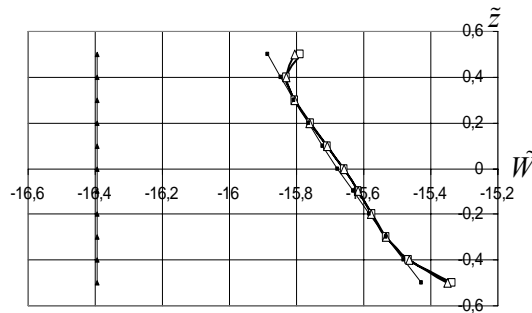


Рис. 2

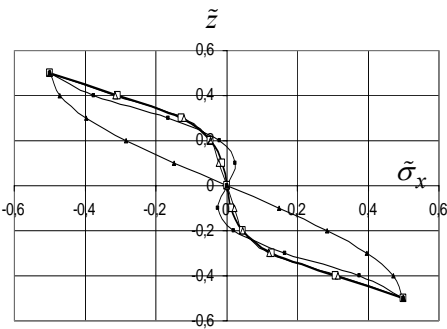


Рис. 3

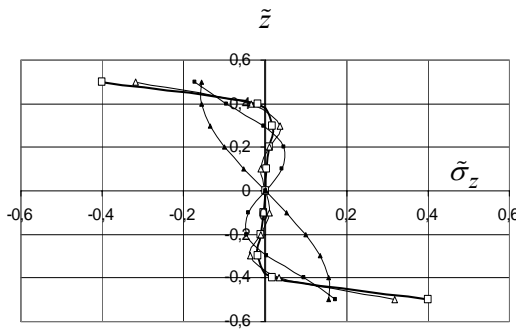


Рис. 4

Лінії на графіках відповідають:  $\square$  – точному розв'язку (ТР) за тривимірною теорією пружності;  $\triangle$  – M0-5 (або M135);  $\blacksquare$  – M0-3 (або M13);  $\blacktriangle$  – M01 (або M1);  $-\triangle-$  – класичній теорії (КТ). Графіки і таблиці наведені для  $E'/E = 1$ ;  $\nu' = \nu = 0,3$ .

Модель M0-3 з високою точністю, а модель M0-5 при повільно змінюваних навантаженнях практично точно описує НДС тонких плит та плит середньої товщини в широких межах змінювання механіко-геометричних параметрів (табл. 1 – 3). При швидкозмінюваних навантаженнях розрахунків за M01, M0-3 може давати незадовільні результати не тільки для плит середньої товщини, але і для тонких плит [4; 5], що вказує на необхідність використання вищих наближень.

Таблиця 1

Розв'язок	Напруження		Прогини	
	$\tilde{\sigma}_x(\tilde{z} = 0,5)$	$\Delta_t \%$	$\tilde{W}(\tilde{z} = 0)$	$\Delta_t \%$
Точний розв'язок	-2,124	–	-3,491	–
Класична теорія	-1,778	16,3	-2,270	35,0
Теорія С. Амбарцумяна [1]	-1,930	9,13	-3,693	5,79
Теорія В. Піскунова і др.[10]	-2,045	3,72	-3,682	5,47
Теорія Х. Муштарі [7]	-2,090	1,60	-3,560	1,98
Теорія В. Піскунова, В. Присяжнюка [11]	-2,118	0,28	-3,500	0,26
Модель M01	-2,086	1,79	-3,591	2,86
Модель M0-3	-2,120	0,19	-3,493	0,06
Модель M0-5	-2,124	0,00	-3,491	0,00

Таблиця 2

Розв'язок	$h/a = 1$				$h/a = 0,2$	
	$\tilde{\sigma}_x$	$\Delta_t \%$	$\tilde{W}$	$\Delta_t \%$	$\tilde{\sigma}_x$	$\tilde{W}$
Точний розв'язок	0,8737	–	-0,3508	–	15,402	-77,043
За теорією Рейснера [17]	0,6079	30,4	-0,3808	8,55	15,198	-76,783
За теорією С. Амбарцумяна [1]	0,8508	2,62	-0,3808	8,55	15,441	-76,783
Друге наближення за ЕАМ [12]	0,8566	1,96	-0,3609	2,88	15,401	-77,046
Третє наближення за ЕАМ [12]	0,8723	0,16	-0,3587	2,25	15,401	-77,044
За МВР (M13) друге наближення	0,8527	2,40	-0,3529	0,60	15,401	-77,046
За МВР (M135) третє наближення	0,8732	0,06	-0,3507	0,03	15,402	-77,043

Таблиця 3

Розв'язок	$z/h$	$\tilde{\sigma}_x$	$\Delta_t$ %	$\tilde{\sigma}_z$	$\Delta_t$ %	$\tilde{W}$	$\Delta_t$ %
Точний розв'язок	0	0	–	0	–	–0,1282	–
	–0,25	0,0673	–	0,2967	–	–0,1618	–
	–0,5	0,4760	–	0,5	–	–0,2343	–
За МВР $k=1$ (M1)	–	0	–	0	–	–0,1748	36,3
	–	0,2063	–	0,3438	15,9	–0,1748	–
	–	0,3323	30,2	0,5	–	–0,1748	25,4
За МВР $k=1,3$ (M13)	–	0	–	0	–	–0,1295	1,01
	–	0,0651	–	0,2964	0,10	–0,1598	–
	–	0,4440	6,72	0,5	–	–0,2508	7,04
За МВР $k=1,3,5$ (M135)	–	0	–	0	–	–0,1278	0,31
	–	0,0670	–	0,2967	0,00	–0,1617	–
	–	0,4743	0,36	0,5	–	–0,2372	1,24

Табл. 4 дає можливість оцінити точність М0-3 в залежності від механіко-геометричних параметрів.

Таблиця 4

$\frac{h}{a}$	$\tilde{z}$	$\frac{G'}{G}=1$	$\Delta_t$ %	$\frac{G'}{G}=2$	$\Delta_t$ %	$\frac{G'}{G}=10$	$\Delta_t$ %	$\frac{G'}{G}=50$	$\Delta_t$ %
$\frac{1}{2}$	0,5	–1,190 –1,206	1,33	–1,296 –1,338	3,14	–1,692 –2,083	18,8	–1,993 –3,959	49,7
	–0,5	0,8350 0,8319	0,37	0,9828 0,9949	1,22	1,481 1,820	18,6	1,828 3,754	51,3
$\frac{1}{5}$	0,5	–5,243 –5,245	0,04	–5,417 –5,422	0,09	–6,555 –6,685	1,94	–9,202 –10,91	15,7
	–0,5	5,052 5,054	0,04	5,228 5,232	0,08	6,377 6,502	1,92	9,041 10,74	15,8
$\frac{1}{10}$	0,5	–20,05 –20,05	0,00	–20,23 –20,23	0,00	–21,61 –21,65	0,18	–26,95 –27,73	2,81
	–0,5	19,88 19,88	0,00	20,07 20,07	0,00	21,45 21,49	0,19	26,79 27,58	2,86

У табл. 5 наведені чисельні результати, які отримані на основі різних моделей при квазілокальних навантаженнях (рис. 5, 6) ( $S$  – кількість доданків у тригонометричних рядах для поперечного навантаження з параметрами  $m = n = 1, 3, \dots$ ;  $q_0$  – амплітудне значення доданків). Модель M135 дає високоточні, а M1 (теорія Тимошенка-Рейснера) – суттєво неточні результати навіть для тонких плит.

Установлено, що внутрішній НДС плит найбільш суттєво залежить від товщини, податливості на поперечний зсув, змінюваності та локальності поперечного навантаження. Точність моделей варіанта аналітичної теорії зростає при зменшенні товщини, податливості на поперечний зсув і змінюваності поперечного навантаження.

Таблиця 5

$\frac{G'}{G}$	$m = n$	M1	M13	M135	TP	$\Delta_{t1} \%$	$\Delta_{t3} \%$	$\Delta_{t5} \%$
		$\tilde{\sigma}_x (\tilde{z} = 0,5)$						
1	1,3,...,29	-1,738	-1,818	-1,890	-1,914	9,20	5,02	1,25
0,1	1,3,...,11	-4,061	-4,765	-4,989	-5,080	20,1	6,20	1,79
$\frac{G'}{G}$	$m = n$	$\tilde{\sigma}_z (\tilde{z} = 0,25)$						
		1	1,3,...,29	-0,3438	-0,2281	-0,2279	-0,2277	51,0
0,1	1,3,...,11	-0,3438	-0,2960	-0,2945	-0,2950	16,5	0,34	0,17
$\frac{G'}{G}$	$m = n$	$\tilde{W} (\tilde{z} = 0)$						
		1	1,3,...,29	-20,15	-20,07	-20,07	-20,07	0,40
0,1	1,3,...,11	-78,58	-77,97	-77,95	-77,95	0,81	0,03	0,00

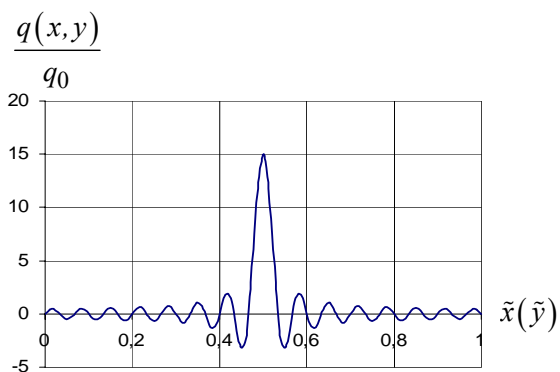


Рис. 5.

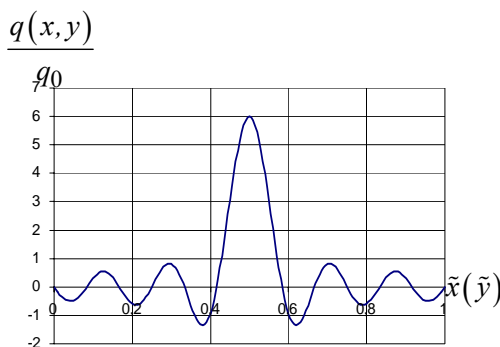


Рис. 6.

### Бібліографічні посилання

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин / С. А. Амбарцумян. – М., 1987. – 360 с.
2. Векуа И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек / И. Н. Векуа // Тр. Тбилисского матем. ин-та. – 1955. – Т.21. – С. 191-293.
3. Гуляев В. И. Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач / В. И. Гуляев, В. А. Баженов, П. П. Лизунов. – Л., 1978. – 192 с.
4. Зеленський А. Г. Метод взаємозв'язаних рівнянь в аналітичній теорії траністропних пластин із урахуванням вищих наближень / А. Г. Зеленський, П. А. Серебрянська // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – Вип. 11, т.2. – 2007. – № 2/2. – С. 84 – 94.
5. Зеленський А. Г. До розрахунку пластин на згин з урахуванням наближень вищих порядків / А. Г. Зеленський, П. А. Серебрянська // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – Вип. 11, т. 1. – 2008. – Т. 16, № 5. – С. 127 – 136.
6. Кильчевский Н. А. Основы аналитической механики оболочек. – К., 1963. – 354 с.

7. **Муштари Х. М.** Теория изгиба плит средней толщины / Х. М. Муштари // Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение. – 1959. – № 2. – С. 107 – 113.
8. **Немиш Ю. Н.** Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория. Обзор / Ю. Н. Немиш, И. Ю. Хома // Прикл. механика. – 1991. – 29, №11. – С. 3-27.
9. **Пискунов В. Г.** Развитие теории слоистых пластин и оболочек. / В. Г. Пискунов, А. О. Рассказов // Прикл. механика. – 2002. – 38, №2. – С. 22-57.
10. **Пискунов В. Г.** К уточнению теории анизотропных пластин / В. Г. Пискунов, А. Г. Гуртовой, В. С. Сипетов // Прикл. механика, 1984. – 20, № 5. – С. 82 – 87.
11. **Присяжнюк В. К.** Учет поперечного обжатия в задачах изгиба многослойных ортотропных пластин / В. К. Присяжнюк, В. Г. Пискунов // Прикл. механика. – 1986. – 22, № 7. – С. 66 – 72.
12. **Плеханов А. В.** Об одном асимптотическом методе построения теории изгиба пластин средней толщины / А. В. Плеханов., А. П. Прусаков // Механика твердого тела. – 1976. – №3. – С. 84 – 90.
13. **Понятовский В. В.** Уравнения теории анизотропных пластинок / В. В. Понятовский // Исследование по упругости и пластичности. –Л., 1965. – №4. – С. 3 – 28.
14. **Прусаков А. П.** О построении уравнений изгиба двенадцатого порядка для трансверсально-изотропной пластины // Прикл. механика. – 1993. – Т. 29, № 12. – С. 51 – 58.
15. **Хома И. Ю.** Обобщенная теория анизотропных оболочек. – К., 1986. – 170 с.
16. **Cicala P.** Sulla teria elastica della plate sottile // Giorn genio Civile. – 1959. – 97, № 4. – P. 238 – 256.
17. **Reissner E.** On the theory of bending of elastic plates / E. Reissner // J. of Math and Phys. – 1944. – 33. – P. 184 – 191.
18. **Reissner E.** On a variotinal theoremin elasticiti // I. Math and Phys. – 1950. – Vol. 33. – P. 90 – 95.

*Надійшла до редколегії 12.10.09*

УДК 539.3

С. В. Козінов, В. В. Лобода

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

## ПЕРІОДИЧНА СИСТЕМА МІЖФАЗНИХ ТРІЩИН ЗІ СКІНЧЕНОЮ ЕЛЕКТРИЧНОЮ ПРОНИКНІСТЮ У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ БІМАТЕРІАЛІ

Розглянуто плоску задачу для двох різнорідних п'єзоелектричних півпросторів, у площині стику яких розташована періодична система тріщин зі скінченою електропроникністю. На нескінченності діє рівномірно розподілене механічне навантаження, заданий сталий вектор електричної індукції. Розв'язок задачі побудовано в замкненій формі методами теорії функцій комплексної змінної. Записано вирази для напружень, компонент вектора електричної індукції, стрибків переміщень та коефіцієнтів інтенсивності напружень. Головна увага приділялася дослідженню впливу електричної проникності тріщин на електромеханічні поля в біматеріалі. Як частковий випадок, розглянуто систему тріщин в однорідному п'єзоелектричному матеріалі.

**Ключові слова:** періодична система тріщин, скінченна електропроникність, п'єзоелектричний біматеріал.

Рассмотрена плоская задача для двух разнородных пьезоэлектрических полупространств, в плоскости стыка которых расположена периодическая система трещин с ограниченной электропроницаемостью. На бесконечности действует равномерно распределенная механическая нагрузка, задан постоянный вектор электрической индукции. Решение задачи построено в замкнутом виде методами теории функции комплексной переменной. Записаны выражения для напряжений, компонент вектора электрической индукции, скачков перемещений и коэффициентов интенсивности напряжений. Основное внимание уделялось исследованию влияния электрической проницаемости трещин на электромеханические поля в биматериале. Как частный случай, рассмотрена система трещин в однородном пьезоэлектрическом материале.

**Ключевые слова:** периодическая система трещин, конечная электропроницаемость, пьезоэлектрический биматериал.

Plane problem for an infinite space which consists of two different piezoelectric materials with periodic set of electrically limited permeable interface cracks is considered. Uniformly distributed electromechanical loading is applied. The solution of the problem is obtained in a close form by use of the complex function theory. Formulae for stresses, electric displacement vector, elastic displacements, electric potential jump and intensity factors are given. The main attention is paid to the influence of the electric permeability of the cracks on electromechanical fields in the composite. As a particular case the periodic set of limited permeable cracks in a homogeneous piezoelectric material is studied.

**Key words:** periodic set of cracks, limited electric permeability, piezoelectric bimaterial.

**Вступ.** Вивчення руйнування композитних п'єзоелектричних матеріалів внаслідок розповсюдження тріщин уздовж межі поділу має важливе практичне значення, зважаючи на наявність таких з'єднань у багатьох електромеханічних приладах. Задача для тріщини у п'єзоелектричному матеріалі вивчається дуже активно, причому, особлива увага приділяється вибору коректних електричних умов на берегах тріщини.

Через складність проблеми, в основному досліджувалися граничні випадки повністю електропроникної [2; 3] та електроізолюваної [4] тріщини. Правомірність таких спрощених електричних граничних умов на берегах тріщини в однорідному п'єзоелектричному матеріалі вивчалася [5] шляхом розгляду тріщини як граничного випадку еліптичного отвору або включення. У результаті зроблено висновок, що модель електропроникної тріщини більш реалістична, ніж електроізолюваної, оскільки в останньому випадку з'являється додаткова сингулярність електричної ін-

дукції в околі вершин тріщини, що залежить тільки від електричного навантаження.

Інший підхід для врахування електропроникності тріщини був запропонований у [6]. Автори використовували граничні умови, в яких електрична проникність заповнювача тріщини враховувалася при розгляді тріщини як конденсатора. Ця модель використана при розв’язанні задачі методом скінчених елементів [7]. Необхідно зауважити, що всі вищеперелічені статті були присвячені задачі про тріщину в однорідному п’єзоелектричному матеріалі.

Тріщина скінченої проникності на межі поділу двох різних п’єзоелектричних матеріалів була аналітично досліджена у [8]. У цій же роботі, як частковий випадок, був проведений аналіз для тріщини зі скінченою проникністю в однорідному п’єзоелектрику.

Задача для періодичної системи тріщин скінченої проникності ще не була розв’язана ні для випадку однорідного п’єзоелектрика, ні для випадку п’єзоелектричного композита.

У пропонуваній роботі побудовано розв’язок задачі для періодичної системи тріщин, що розташовані на лінії поділу двох різних п’єзоелектричних матеріалів у припущенні, що береги тріщин мають скінчену електричну проникність. Як частковий випадок, отриманий також розв’язок задачі для періодичної системи тріщин в однорідному матеріалі.

**Формулювання та розв’язок основних рівнянь.** Визначальні рівняння для лінійного п’єзоелектричного матеріалу мають вигляд:

$$\Pi_{iJ} = E_{iJKL} V_{K,L}, \quad (1)$$

$$\Pi_{iJ,i} = 0, \quad (2)$$

де

$$V_K = \begin{cases} u_k, & K = 1, 2, 3, \\ \varphi, & K = 4, \end{cases} \quad (3)$$

$$\Pi_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & i, J = 1, 2, 3, \\ D_i, & i = 1, 2, 3; \quad J = 4, \end{cases} \quad (4)$$

$$E_{iJKL} = \begin{cases} C_{ijkl}, & J, K = 1, 2, 3, \\ e_{lij}, & J = 1, 2, 3; \quad K = 4, \\ e_{ikl}, & K = 1, 2, 3; \quad J = 4, \\ -\varepsilon_{il}, & J = K = 4. \end{cases} \quad (5)$$

Тут  $u_k, \varphi, \sigma_{ij}, D_i$  – переміщення, електричний потенціал, напруження та електрична індукція, відповідно. У рівняннях (1)-(5) нижні індекси, записані малими літерами, змінюються від 1 до 3, великими – від 1 до 4.

Проводячи перетворення, аналогічні [9], приходимо до наступних виразів для стрибка переміщень та електричного потенціалу, компонент тензора напружень і вектора електричної індукції на межі поділу матеріалів:

$$[\mathbf{V}'(x_1, 0)] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (6)$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x_1) \quad (7)$$

де



$$\llbracket \mathbf{V}'(x_1, 0) \rrbracket = \mathbf{V}'^{(1)}(x_1) - \mathbf{V}'^{(2)}(x_1), \tag{8}$$

та  $\mathbf{G} = \mathbf{B}^{(1)} \mathbf{D}^{-1}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{(2)} (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1} \mathbf{B}^{(1)}$ ,  $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}(x_1 + i0)$ ,  $\mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1 - i0)$ ;  $\mathbf{A}^{(m)}$ ,  $\mathbf{B}^{(m)}$  – відомі матриці [4], що відносяться до верхнього ( $m=1$ ) та нижнього ( $m=2$ ) півпросторів, відповідно;  $\mathbf{V} = \{u_1, u_2, u_3, \varphi\}^T$  та  $\mathbf{t} = \{\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3\}^T$ ;  $\mathbf{W}(z)$  – функція, аналітична у всьому просторі за виключенням області тріщин.

**Постановка задачі.** Розглянемо періодичну систему тріщин, розташованих на лінії стику двох різнорідних п'єзоелектричних півпросторів. Характеристики матеріалів задано пружними модулями  $C_{ijkl}^{(m)}$ , п'єзоелектричними константами  $e_{ikl}^{(m)}$  та діелектричними постійними  $\epsilon_{il}^{(m)}$ . Верхній індекс «1» («2») відповідає «верхньому» («нижньому») півпростору.

Вважаємо, що на нескінченності діють рівномірно розподілені розтягуючі  $\sigma$  та зсувні  $\tau$  напруження, а також задано рівномірно розподілене електричне зміщення  $d$ , під дією яких тріщини розкриваються. Координати вершин тріщини у фундаментальній стрічці [1] позначимо  $-b$  та  $b$ , а період вважаємо рівним  $h$ . Крім того, сукупність відкритих ділянок позначимо через  $M$ , а ділянки жорсткого зчеплення –  $U$ .

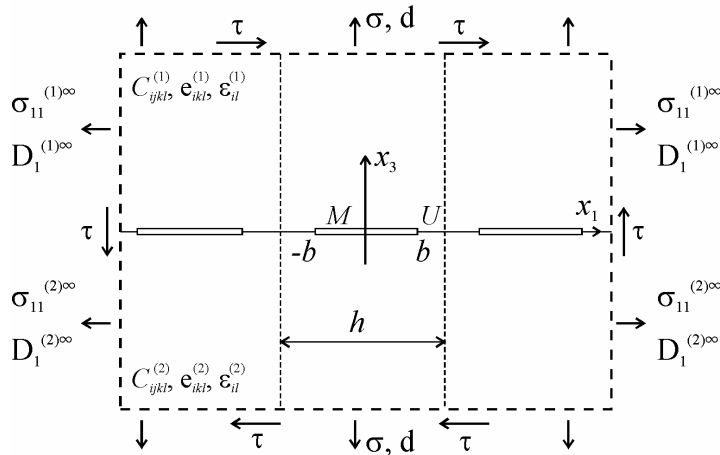


Рис. 1

Уводячи електричне поле до середини тріщини як  $E_a = -(\varphi^+ - \varphi^-)/(u^+ - u^-)$  та враховуючи, що  $D_3 = \epsilon_a E_a$ , приходимо до наступної умови в області тріщини:  $D_3 = -\epsilon_a (\varphi^+ - \varphi^-)/(u^+ - u^-)$ , де  $\epsilon_a = \epsilon_0 \epsilon_r$  – електропроникність матеріалу-заповнювача тріщини,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Кл/(В·м). Таким чином, припускаючи відкриті частини тріщин ненавантаженими, умови спряження та граничні умови можна записати у вигляді (рис. 1):

$$\llbracket \mathbf{V}(x_1, 0) \rrbracket = 0, \quad \llbracket \mathbf{t}(x_1, 0) \rrbracket = 0, \quad x_1 \in U, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{\pm}(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{33}^{\pm}(x_1, 0) = 0, \\ D_3[u_3(x_1, 0)] = -\varepsilon_a[\varphi(x_1, 0)], \quad [D_3(x_1, 0)] = 0, \quad x_1 \in M, \end{aligned} \tag{10}$$

де  $[ ]$  означає стрибок функції при переході через інтерфейс.

**Загальний аналітичний розв’язок.** Припустимо, що складові композита є матеріалами класу бттм [3], поляризованими в напрямку осі  $x_3$ . Тоді для розглядуваного навантаження має місце плоска деформація і матриця  $\mathbf{G}$  без других рядка і стовпця має таку структуру

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} ig_{11} & g_{13} & g_{14} \\ g_{31} & ig_{33} & ig_{34} \\ g_{41} & ig_{43} & ig_{44} \end{bmatrix},$$

причому всі  $g_{ij}$  ( $i, j = 1, 3, 4$ ) є дійсними та визначаються електромеханічними константами п’езоелектричного композита.

Комбінуючи рівняння (6) та (7), приходимо до наступної формули

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j4}D_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \tag{11}$$

де

$$F_j(z) = n_{j1}W_1(z) + i[n_{j3}W_3(z) + n_{j4}W_4(z)], \tag{12}$$

а коефіцієнти  $m_{jl}, n_{jl}, \gamma_j$  ( $j, l = 1, 3, 4$ ) залежать від електромеханічних властивостей композита та для п’езокераміки класу бттм є дійсними.

Припускаємо, що потік електричної індукції є постійна величина вздовж берегів тріщин, тобто

$$D_3^+(x_1, 0) = D_3^-(x_1, 0) = D, \quad x_1 \in M. \tag{13}$$

Використовуючи рівняння (11) та (13) разом з умовами (10) на берегах тріщин, маємо наступну задачу Рімана

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = m_{j4}D \quad (j = 1, 3, 4), \quad x_1 \in M. \tag{14}$$

Для отримання однорідної задачі Рімана введемо нову функцію

$$\Phi_j(z) = F_j(z) - m_{j4}D/(1 + \gamma_j). \tag{15}$$

Тоді рівняння (14) набуде такої форми:

$$\Phi_j^+(x_1) + \gamma_j \Phi_j^-(x_1) = 0 \quad (j = 1, 3, 4) \quad x_1 \in M, \tag{16}$$

$$\Phi_j(z) \Big|_{\rightarrow \pm i0} = \sigma_j^* - i\tau_j^*, \tag{17}$$

де  $\sigma_j^* = [\sigma + m_{j4}(d - D)]/(1 + \gamma_j)$ ,  $\tau_j^* = -m_{j1}\tau/(1 + \gamma_j)$ .

Розв’язок однорідної задачі Рімана (16) розшукуємо у формі [1]

$$\Phi_j(z) = \frac{C_{1j} \cos z + C_{2j} \sin z}{\sqrt{\sin(z-b)\sin(z+b)}} \left[ \frac{\sin(z+b)}{\sin(z-b)} \right]^{i\varepsilon_j}. \tag{18}$$

Тут  $\varepsilon_j = \ln \gamma_j / (2\pi)$ .

Крім того, з метою спрощення формул, тут і далі вважаємо  $h = \pi$ . Таке припущення не порушує загальності розв’язку, оскільки воно може бути легко досяг-

нуто шляхом відповідної заміни координати  $x_1$ .

Поведінка функції  $\Phi_j(z)$  на нескінченності наступна

$$\Phi_j(z)\Big|_{z \rightarrow +i\infty} = (C_{2j} - iC_{1j})e^{2b\varepsilon_j}, \quad \Phi_j(z)\Big|_{z \rightarrow -i\infty} = (C_{2j} + iC_{1j})e^{-2b\varepsilon_j}. \quad (19)$$

Використовуючи формули (17) та (19), отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження довільних дійсних сталих  $C_{1j}$  та  $C_{2j}$  і, розв'язуючи її, маємо:

$$C_{1j} = -\sin(2i\varepsilon_j b)(\sigma_j^* - i\tau_j^*), \quad C_{2j} = \cos(2i\varepsilon_j b)(\sigma_j^* - i\tau_j^*).$$

Підставляючи отримані значення сталих  $C_{1j}$  та  $C_{2j}$  до рівняння (18) та проводячи елементарні перетворення, розв'язок однорідної задачі Рімана (16) набуває вигляду

$$\Phi_j(z) = (\sigma_j^* - i\tau_j^*) \frac{\sin(z - 2i\varepsilon_j b)}{\sqrt{\sin(z-b)\sin(z+b)}} \left[ \frac{\sin(z+b)}{\sin(z-b)} \right]^{i\varepsilon_j}. \quad (20)$$

Використовуючи рівняння (12), приходимо до наступного виразу

$$n_{j1} \square u'_1(x_1, 0) \square + i(n_{j3} \square u'_3(x_1, 0) \square + n_{j4} \square \varphi'(x_1, 0) \square) = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1).$$

Оскільки  $\Phi_j^-(x_1) = -\Phi_j^+(x_1) / \gamma_j$ ,  $x_1 \in M$ , то  $F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1) = (\gamma_j + 1) / \gamma_j \Phi_j^+(x_1)$  і формула для похідної стрибка переміщень набуває вигляду

$$\begin{aligned} & n_{j1} \square u'_1(x_1, 0) \square + i(n_{j3} \square u'_3(x_1, 0) \square + n_{j4} \square \varphi'(x_1, 0) \square) = \\ & = -i \frac{\gamma_j + 1}{\sqrt{\gamma_j}} (\sigma_j^* - i\tau_j^*) \frac{\sin(x_1 - 2i\varepsilon_j b)}{\sqrt{\sin(b-x_1)\sin(b+x_1)}} \left[ \frac{\sin(b+x_1)}{\sin(b-x_1)} \right]^{i\varepsilon_j}, \quad x_1 \in M. \end{aligned} \quad (21)$$

Далі, проводячи перетворення останнього виразу з урахуванням малості  $\varepsilon_1$  та того, що  $\varepsilon_4 = 0$ , та використовуючи третє рівняння (10), приходимо до формули для визначення електричного потоку  $D$  усередині тріщини

$$D = \varepsilon_a \frac{n_{43}\sigma_1^*(D) - n_{13}\sigma_4^*(D)}{n_{44}\sigma_1^*(D) - n_{14}\sigma_4^*(D)}, \quad (22)$$

яка може бути записана у формі

$$\eta_1^* D^2 + \eta_2^* D + \eta_3^* = 0, \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} \eta_1^* &= \sqrt{\gamma_1} m_{44} n_{14} - m_{14} n_{44}, \quad \eta_2^* = (s_1 n_{44} + \varepsilon_a m_{14} n_{43}) - \sqrt{\gamma_1} (s_4 n_{14} + \varepsilon_a m_{44} n_{13}), \\ \eta_3^* &= \varepsilon_a (\sqrt{\gamma_1} n_{13} s_4 - n_{43} s_1). \end{aligned}$$

Використовуючи рівняння (11), (15) та (20) при  $j = 1$ , а також дійсну їх частину при  $j = 4$ , приходимо до системи для визначення напружень та електричної індукції на ділянці  $x_1 \in U$

$$\begin{aligned} & \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{14} D_3^{(1)}(x_1, 0) + i m_{11} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \\ & = (\sigma + m_{14}(d - D) + i m_{11} \tau) \frac{\sin(x_1 - 2i\varepsilon_1 b)}{\sqrt{\sin(x_1 - b)\sin(x_1 + b)}} \left[ \frac{\sin(x_1 + b)}{\sin(x_1 - b)} \right]^{i\varepsilon_1} + m_{14} D, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{44}D_3^{(1)}(x_1, 0) = (\sigma + m_{44}(d - D)) \frac{\sin x_1}{\sqrt{\sin(x_1 - b)\sin(x_1 + b)}} + m_{44}D. \quad (25)$$

Коефіцієнти інтенсивності (КІ) введемо подібно до [8]:

$$K_1 + m_{14}K_4 + im_{11}K_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)}(x_1 - b)^{i\varepsilon_1} [\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{14}D_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0)], \quad (26)$$

$$K_1 + m_{44}K_4 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} [\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{44}D_3^{(1)}(x_1, 0)]. \quad (27)$$

Використовуючи формули (24), (25) при  $x_1 \rightarrow b + 0$ , отримуємо наступну систему, з якої можуть бути знайдені КІ

$$K_1 + m_{14}K_4 + im_{11}K_2 = \sqrt{2\pi} (\sigma + m_{14}(d - D) + im_{11}\tau) \frac{\sin(b - 2i\varepsilon_1 b)}{\sqrt{\sin 2b}} [\sin 2b]^{i\varepsilon_1},$$

$$K_1 + m_{44}K_4 = \sqrt{\pi \tan b} (\sigma + m_{44}(d - D)).$$

Розв'язуючи цю систему, маємо

$$K_1 = \sqrt{2\pi} \frac{m_{44} \{ \Omega_1 [\sigma + m_{14}(d - D)] + \Omega_2 m_{11}\tau \} - m_{14} \sin b (\sigma + m_{44}(d - D))}{(m_{44} - m_{14})\sqrt{\sin 2b}}, \quad (28)$$

$$K_2 = \frac{1}{m_{11}} \sqrt{\frac{2\pi}{\sin 2b}} \{ \Omega_1 m_{11}\tau - \Omega_2 [\sigma + m_{14}(d - D)] \}, \quad (29)$$

$$K_4 = \sqrt{2\pi} \frac{\sin b (\sigma + m_{44}(d - D)) - \{ \Omega_1 [\sigma + m_{14}(d - D)] + \Omega_2 m_{11}\tau \}}{(m_{44} - m_{14})\sqrt{\sin 2b}}. \quad (30)$$

де

$$\Omega_1 = \sin b \cdot \cosh(2\varepsilon_1 b) \cos \zeta + \cos b \cdot \sinh(2\varepsilon_1 b) \sin \zeta,$$

$$\Omega_2 = \cos b \cdot \sinh(2\varepsilon_1 b) \cos \zeta - \sin b \cdot \cosh(2\varepsilon_1 b) \sin \zeta, \quad \zeta = \varepsilon_1 \ln(\sin 2b).$$

**Результати розрахунків для п'єзоелектричного біматеріалу.** Розглянемо вплив зовнішнього механічного та електричного навантаження при певних значеннях коефіцієнта електричної проникності на електричний потік усередині тріщин та КІ для періодичної системи тріщин, що розташовані на лінії поділу двох п'єзоелектричних матеріалів PZT- 4 та PZT-5 у випадку, коли довжина тріщин становить десятю частину періоду. Необхідно відзначити, що значення коефіцієнта електричної проникності  $\varepsilon_r$  для повітря дорівнює 1, для силіконового мастила 2,5, для води 81. Значення  $\varepsilon_r$ , рівні  $10^{-6}$  та 4000, можна вважати відповідними електроізолюваній та повністю електропроникній тріщині, відповідно.

У табл. 1, 2 наведено результати чисельних розрахунків для електричного потоку та КІ у випадку сильного механічного навантаження ( $\sigma = 10$  МПа) та слабого електричного потоку, що діє в додатньому ( $d = 0,001$  Кл/м<sup>2</sup>) та від'ємному ( $d = -0,001$  Кл/м<sup>2</sup>) напрямках, відповідно. Для обох випадків механічний КІН  $K_1$  для різних значень коефіцієнта електропроникності змінюється несуттєво, в той час як зміна  $K_2$  більш істотна. Електричний же КІ  $K_4$  суттєво залежить від електропроникності тріщин. Можна побачити, що для тріщин з великою електропроникністю визначальний вклад у величину КІ  $K_4$  вносить механічне навантаження, тому значення  $K_4$  майже не відрізняються при зміні напрямку електричного потоку на проти-

лежний; зі зменшенням електропроникності тріщин більш суттєвим стає вплив віддаленого електричного потоку і для граничного значення електроізолюваної тріщини значення  $K_4$  майже рівні за модулем і протилежні за знаком.

Таблиця 1

$\varepsilon_r$	$D$ (Кл/м <sup>2</sup> )	$K_1$ (МПа/√м)	$K_2$ (МПа/√м)	$K_4 \cdot 10^4$ (Кл/м <sup>3/2</sup> )
10 <sup>-6</sup>	-5,72·10 <sup>-9</sup>	7,05319	0,131331	7,05494
1	-0,00130	7,05303	0,159217	16,2392
2,5	-0,00154	7,05300	0,164234	17,8916
81	-0,00175	7,05298	0,168734	19,3734
4000	-0,00175	7,05298	0,168897	19,4272

Таблиця 2

$\varepsilon_r$	$D$ (Кл/м <sup>2</sup> )	$K_1$ (МПа/√м)	$K_2$ (МПа/√м)	$K_4 \cdot 10^4$ (Кл/м <sup>3/2</sup> )
10 <sup>-6</sup>	-1,53552·10 <sup>-8</sup>	7,05343	0,0884938	-7,05317
1	-0,00281801	7,05309	0,148851	12,8252
2,5	-0,00329645	7,05303	0,159099	16,2002
81	-0,00373743	7,05298	0,168544	19,3109
4000	-0,00375374	7,05298	0,168893	19,4259

На рис.2 зображена залежність електричного  $K_4$  від віддаленого електричного навантаження, що неперервно змінюється від -0,01 до 0,01 Кл/м<sup>2</sup> для різних значень коефіцієнта відносної електричної проникності  $\varepsilon_r$ . Для повністю електропроникної тріщини  $K_4$  майже не змінюється, але зі зменшенням  $\varepsilon_r$  вплив зовнішнього електричного навантаження стає більш суттєвим, оскільки менша електропровідність призводить до більшої електричної сингулярності в околі вершин тріщин завдяки більш вираженому екрануванню. При нульовому зовнішньому електричному навантаженні тільки для електроізолюваної тріщини  $K_4$  дорівнює нулеві. Для інших же випадків механічне навантаження впливає на електричну сингулярність, оскільки електрична індукція, перпендикулярна до берегів тріщини, ненульова. Для  $d = 0,0025$  Кл/м<sup>2</sup> усі криві перетинаються в одній точці, тобто при такому навантаженні значення  $K_4$  співпадає як для електроізолюваної та електропроникної тріщини, так і для тріщин будь-якої проміжної електропроникності.

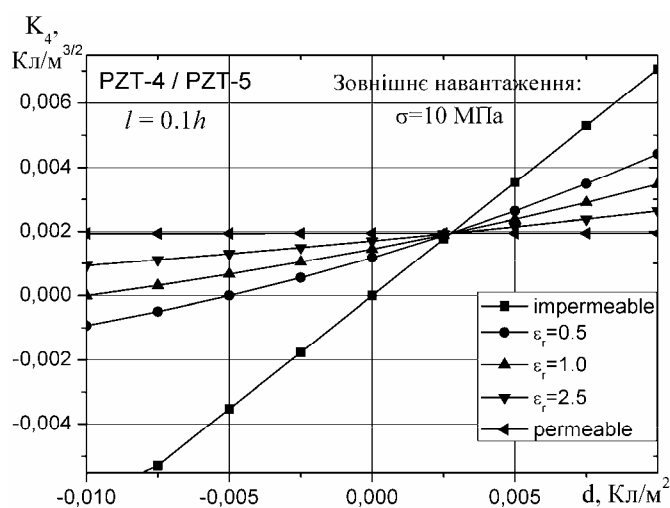


Рис. 2

Для слабкого механічного навантаження ( $\sigma = 1000$  Па) та сильного електричного потоку ( $d = 0,01$  Кл/м<sup>2</sup>) варіація електричного потоку та КІ наведена в табл. 3. Слід відзначити різке зростання величини КІ при значенні  $\epsilon_r$ , близькому до нуля, що відповідає електроізолюваній тріщині, пов'язане з сингулярністю полів напружень в околі вершин тріщин та з сильним електричним навантаженням.

Таблиця 3

$\epsilon_r$	$D$ (Кл/м <sup>2</sup> )	$K_1$ (кПа/√м)	$K_2$ (кПа/√м)	$K_4 \cdot 10^4$ (Кл/м <sup>3/2</sup> )
$10^{-6}$	$3,21 \cdot 10^{-8}$	-0,5039	214,2	70,5407
1	0,00999	0,7052	0,0281	0,00564
2,5	0,00999	0,7053	0,0204	0,00311
81	0,00999	0,7053	0,0170	0,00197
4000	0,00999	0,7053	0,0169	0,00194

**Періодична система тріщин скінченї проникності в однорідному п'єзоелектричному матеріалі.** Розглянемо тепер, як частковий випадок, періодичну систему тріщин, розташовану в однорідному п'єзоелектрику. Рівняння (22) тепер є точним без будь-яких припущень, а вирази для напружень та електричної індукції на продовженні тріщини мають наступний вигляд:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = \sigma \frac{\sin x_1}{\sqrt{\sin(x_1 - b)\sin(x_1 + b)}}, \quad x_1 \in U, \quad (31)$$

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \tau \frac{\sin x_1}{\sqrt{\sin(x_1 - b)\sin(x_1 + b)}}, \quad x_1 \in U, \quad (32)$$

$$D_3^{(1)}(x_1, 0) = (d - D) \frac{\sin x_1}{\sqrt{\sin(x_1 - b)\sin(x_1 + b)}} + D, \quad x_1 \in U. \quad (33)$$

Вводячи КІ наступними формулами:

$$K_1 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0), \quad K_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0), \quad (34)$$

$$K_4 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} D_3^{(1)}(x_1, 0), \quad (35)$$

приходимо до таких їх значень:

$$K_1 = \sqrt{\pi \tan b} \sigma, \quad K_2 = \sqrt{\pi \tan b} \tau, \quad K_4 = \sqrt{\pi \tan b} (d - D). \quad (36)$$

Слід відзначити, що при  $\epsilon_1 = 0$  представлення (26), (27) співпадають з формулами (34), (35), а значення КІ, визначені у випадку біматеріалу формулами (28)-(30), спрощуються до виразів (36).

Стрибок переміщень та електричного потенціалу виражається наступними формулами:

$$\llbracket u_3(x_1, 0) \rrbracket = \{ \mathcal{G}_{11} \sigma + \mathcal{G}_{12} (d - D) \} H(x_1), \quad x_1 \in U, \quad (37)$$

$$\llbracket u_1(x_1, 0) \rrbracket = -m_{11} n_{11}^{-1} \tau H(x_1), \quad x_1 \in U, \quad (38)$$

$$\llbracket \varphi(x_1, 0) \rrbracket = \{ \mathcal{G}_{21} \sigma + \mathcal{G}_{22} (d - D) \} H(x_1), \quad x_1 \in U. \quad (39)$$

де

$$H(x_1) = \ln \left\{ \left( \cos x_1 + \sqrt{\sin(b - x_1)\sin(x_1 + b)} \right) / \cos b \right\}, \quad \Delta = n_{13} n_{44} - n_{14} n_{43},$$

$$\mathcal{G}_{11} = \frac{n_{44} - n_{14}}{\Delta}; \quad \mathcal{G}_{12} = \frac{m_{14} n_{44} - m_{44} n_{14}}{\Delta}; \quad \mathcal{G}_{21} = \frac{n_{13} - n_{43}}{\Delta}; \quad \mathcal{G}_{22} = \frac{m_{44} n_{13} - m_{14} n_{43}}{\Delta}.$$

Згідно з формулами (31)-(33) асимптотична поведінка напружень та електричної індукції при  $x_1 \rightarrow b + 0$  має такий вигляд:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{\sigma \sqrt{\tan b}}{\sqrt{2(x_1 - b)}}, \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \frac{\tau \sqrt{\tan b}}{\sqrt{2(x_1 - b)}}, D_3^{(1)}(x_1, 0) = \frac{(d - D) \sqrt{\tan b}}{\sqrt{2(x_1 - b)}}. \quad (40)$$

Швидкість вивільнення енергії в точці  $x_1 = b$  введена згідно [3]

$$G = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_b^{b+\Delta l} \left\{ \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) [u_3(x_1 - \Delta l, 0)] + \right. \\ \left. + \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) [u_1(x_1 - \Delta l, 0)] + D_3^{(1)}(x_1, 0) [\varphi(x_1 - \Delta l, 0)] \right\} dx_1.$$

Підставляючи в останній вираз формули (37)-(40) та проводячи обчислення, маємо

$$G = \frac{\pi \tan b}{4} \left[ \mathcal{G}_1 \sigma^2 + (\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_{21}) \sigma (d - D) + \mathcal{G}_{22} (d - D)^2 - \frac{m_{11}}{n_{11}} \tau^2 \right].$$

**Результати розрахунків.** Розглянемо вплив зовнішнього механічного та електричного навантаження при різних значеннях коефіцієнта електричної проникності на електричний потік усередині тріщин та на КІ. Вибрано п'єзоелектричний матеріал PZT- 4 і вважалось, що довжина тріщин становить десятю частину періоду.

У табл. 4, 5 наведено результати для електричного потоку всередині тріщини, електричного коефіцієнта інтенсивності  $K_4$  та швидкості вивільнення енергії  $G$  для випадку сильного механічного навантаження ( $\sigma = 10$  МПа) та слабкого електричного, що діє в додатньому ( $d = 0,001$  Кл/м<sup>2</sup>) та у від'ємному ( $d = -0,001$  Кл/м<sup>2</sup>) напрямках, відповідно.

Таблиця 4

$\epsilon_r$	$D$ (Кл/м <sup>2</sup> )	$K_4 \cdot 10^4$ (Кл/м <sup>3/2</sup> )	$G$ (Н/м)
$10^{-6}$	$-6,00 \cdot 10^{-9}$	7,05	524,191
1	-0,00119	15,4	572,478
2,5	-0,00137	16,7	574,462
81	-0,00152	17,8	575,022
4000	-0,00153	17,8	575,023

Таблиця 5

$\epsilon_r$	$D$ (Кл/м <sup>2</sup> )	$K_4 \cdot 10^4$ (Кл/м <sup>3/2</sup> )	$G$ (Н/м)
$10^{-6}$	$-1,7879 \cdot 10^{-8}$	-7,0538	303,787
1	-0,00276356	12,4401	562,321
2,5	-0,00316293	15,2572	572,136
81	-0,00351383	17,7324	575,019
4000	-0,00352648	17,8216	575,023

У табл. 6 проаналізовано зміну електромеханічного стану тріщин у випадку дуже сильного електричного навантаження ( $d = 0,03$  Кл/м<sup>2</sup>) та помірного механічного ( $\sigma = 1$  МПа). Особливо сильним вплив є при значеннях коефіцієнта відносної електропроникності, меншого за 1, тобто при заповненні тріщин речовиною з низькою електропроникністю.

Таблиця 6

$\epsilon_r$	$D$ (Кл/м <sup>2</sup> )	$K_4 \cdot 10^4$ (Кл/м <sup>3/2</sup> )	$G$ (Н/м)
$10^{-6}$	$3,38 \cdot 10^{-8}$	211,6	-19291,7
1	0,0265	24,67	-223,879
2,5	0,0292	5,47	-0,2095
81	0,0297	1,86	5,7476
4000	0,0297	1,78	5,7502

У табл. 7 та 8 наведені результати для електричного потоку, електричного КІ та швидкості вивільнення енергії при механічному та електричному навантаженні, в 10 більшому, ніж у табл. 4 та 5, відповідно. Тобто для табл. 7  $\sigma = 100$  МПа,  $d = 0,01$  Кл/м<sup>2</sup>, а для табл. 8  $\sigma = 100$  МПа,  $d = -0,01$  Кл/м<sup>2</sup>. У зв'язку з нелінійністю задачі пропорційна зміна КІ  $K_4$  та швидкості вивільнення енергії  $G$  спостерігається лише для граничних випадків електропроникних ( $\epsilon_r = 4000$ ) та електроізолюваних ( $\epsilon_r = 10^{-6}$ ) тріщин.

Таблиця 7

$\epsilon_r$	$D$ (Кл/м <sup>2</sup> )	$K_4 \cdot 10^4$ (Кл/м <sup>3/2</sup> )	$G \cdot 10^{-2}$ (Н/м)
$10^{-6}$	$-6,00 \cdot 10^{-9}$	70,5	524,191
1	-0,00417	99,9	548,159
2,5	-0,00727	121,8	561,070
81	-0,0147	174,4	574,959
4000	-0,0153	178,2	575,023

Таблиця 8

$\epsilon_r$	$D$ (Кл/м <sup>2</sup> )	$K_4 \cdot 10^4$ (Кл/м <sup>3/2</sup> )	$G \cdot 10^{-2}$ (Н/м)
$10^{-6}$	$-1,7879 \cdot 10^{-8}$	-70,5392	303,785
1	-0,0107537	5,31622	443,977
2,5	-0,0177109	54,3921	507,805
81	-0,0340305	169,509	574,689
4000	-0,0352412	178,049	575,022

Вплив зміни зовнішнього навантаження на швидкість вивільнення енергії  $G$  при різних значеннях коефіцієнта відносної електричної проникності представлено на рис. 3а. Легко бачити, що при пропорційному зростанні електромеханічного навантаження для тріщин скінченої проникності величина  $G$  змінюється непропорційно, а ділянки пропорційної зміни починаються при наблизненні до граничних значень коефіцієнта відносної електричної проникності.

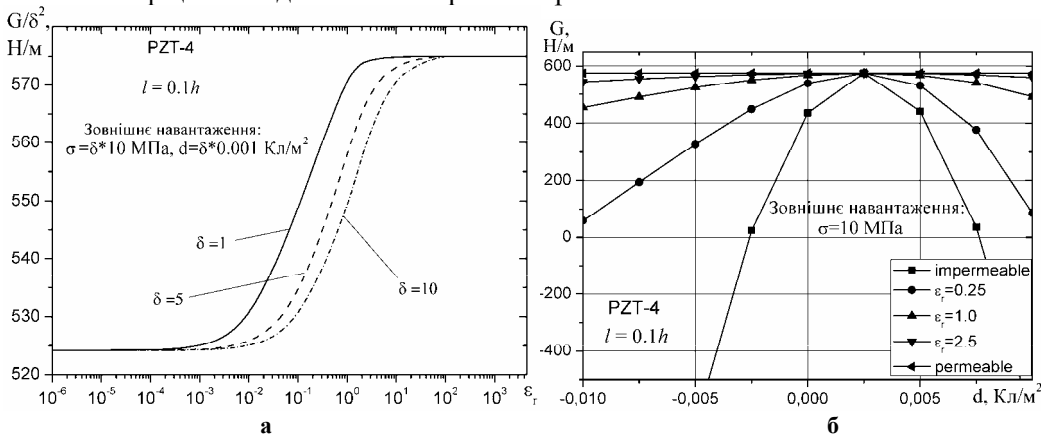


Рис. 3

На рис. 3б представлені результати для швидкості вивільнення енергії  $G$  за зміни зовнішнього електричного навантаження при постійному механічному для різних значень коефіцієнта відносної електричної проникності. Найбільш різка зміна спостерігається для тріщин з низьким коефіцієнтом електричної проникності, в той час як для тріщин з високою електропроникністю вона є менш суттєвою. Для електроізолюваної тріщини швидкість вивільнення енергії із-за сильної сингуляр-



ності є негативною. У випадку обмеженої електропроникності при заповненні тріщин повітрям ( $\varepsilon_r = 1$ ) сингулярність електричного поля є значно меншою і швидкість вивільнення енергії набуває додатніх значень. Слід зауважити, що один із наближених підходів, який базується на припущенні про електричну ізоляцію заповненої повітрям тріщини, приводить до протиріччя при використанні швидкості вивільнення енергії в якості критерію руйнування. Згідно з цим критерієм при використанні моделі електроізолюваної тріщини руйнування відбуватися не буде, адже накопичується більше енергії, ніж вивільнюється. У протилежність цьому при зростанні тріщини з урахуванням проникності ( $\varepsilon_r = 1$ ) відбувається вивільнення енергії. Необхідно відзначити, що зі збільшенням електричного навантаження незалежно від його знаку відбувається зменшення швидкості вивільнення енергії, що вказує на його стримуючий внесок при руйнуванні матеріалів.

**Висновки.** Розглянуто задачу для періодичної системи тріщин скінченної електропроникності, розташованих на межі поділу двох п'єзоелектричних матеріалів, а також в однорідному п'єзоелектричному просторі. Отримано аналітичні формули для напружень та електричного потоку в матеріалі, а також механічні коефіцієнти інтенсивності напружень  $K_1$ ,  $K_2$  та електричний коефіцієнт інтенсивності  $K_4$ , швидкість вивільнення енергії  $G$ . Числові розрахунки у випадку біматеріалу проведені для пари PZT-4 та PZT-5, в однорідному матеріалі – для п'єзоелектрика PZT-4. Знайдено, що при слабкому електричному навантаженні результати близькі до тих, що отримані у випадку електропроникних тріщин. Установлено, що залежність електричного потоку через тріщину, коефіцієнтів інтенсивності та швидкості вивільнення енергії при пропорційній зміні прикладеного електромеханічного навантаження є нелінійною.

### Бібліографічні посилання

1. **Гахов Д. Ф.** Краевые задачи / Д. Ф. Гахов. – М., 1977, 640 с.
2. **Кудрявцев Б. А.** Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная тоннельная трещина на межфазной границе с проводником / Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон, В. И. Ракитин // Прикладная математика и механика. – 1975. – 39. – С. 149-159.
3. **Партон В. З.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев – М., 1988, 470 с.
4. **Suo Z., Kuo C. M., Barnett D. M., Willis J. R.** Fracture mechanics for piezoelectric ceramics // Journal Mech. Phys. Solids. – 1992. – 40. – P. 739–765.
5. **Gao C. F., Fan W. X.** Exact solution for the plane problem in piezoelectric materials with an elliptic hole or a crack // Int. J. Solid Struct. – 1999. – 36. – P. 2527-2540.
6. **Hao T. H., Shen Z. Y.** A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications // Eng. Fract. Mech. – 1994. – 47. – P. 793-802.
7. **Gruebner O., Kamlah M., Munz D.** Finite element analysis of cracks in piezoelectric materials taking into account the permittivity of the crack medium // Eng. Fract. Mech. – 2003. – 70. – P. 793-802
8. **Govorukha V. B., Loboda V. V., Kamlah M.** On the influence of the electric permeability on an interface crack in a piezoelectric bimaterial compound // Int. J. Solid Struct. – 2006. – 43. – P. 1399-1413.
9. **Herrmann K. P., Loboda V. V.** Fracture-mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models // Arch. Appl. Mech. – 2000. – 70. – P. 127-143.

Надійшла до редколегії 18. 02. 09

УДК 539.3

А.Ю. Коцюба, О.В. Максимович  
 Луцький державний технічний університет

## КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ЖОРСТКОГО ШТАМПА ТА ПЛАСТИНКИ З ОТВОРОМ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ

Розроблено чисельний алгоритм розв'язування контактних задач для отворів практично довільної форми, причому область контакту є наперед невідомою і може складатися з окремих ділянок. Для розв'язування задачі використано методи конформного відображення, інтегральних рівнянь, механічних квадратур та квадратичного програмування. Проведено тестування даного алгоритму на задачах, які розв'язані в літературі іншими методами. Досліджено розподіли контактних напружень під штампами різної форми в квадратному отворі.

**Ключові слова:** контактні напруження, конформне відображення, інтегральні рівняння, механічні квадратури, квадратичне програмування.

Разработан численный алгоритм развязывания контактных задач для отверстий практически произвольной формы, причем область контакта является заранее неизвестной и может состоять из отдельных участков. Для развязывания задачи использованы методы конформного отображения, интегральных уравнений, механических квадратур и квадратичного программирования. Проведено тестирование данного алгоритма на задачах, которые развязаны в литературе другими методами. Исследовано распределения контактных напряжений под штампами разной формы в квадратном отверстии.

**Ключевые слова:** контактные напряжения, конформное отображение, интегральные уравнения, механические квадратуры, квадратичное программирование.

The numeral algorithm of within doing the contact sums for openings of practically free form is developed. The field of contact is beforehand unknown and can consist of some separate areas. The methods of conform reflection, integral equations, mechanical squares and quadratic programming are used. Testing of this algorithm is conducted on sums which are already worked out in literature. The divisions of contact tensions under different stamps in the square opening are investigated.

**Key words:** contact tensions, conform reflection, integral equations, mechanical squares, quadratic programming.

**Постановка задачі.** Розглядається задача про контактну взаємодію жорсткого гладкого штампа з границею отвору довільної форми в пластинці. У літературі така задача достатньо повно вивчена, коли штамп є близький за розмірами до отвору, який має кругову форму [1–4]. За останні роки контактні задачі почали розглядатися для областей іншої форми з використанням конформного відображення. При чому у відповідних функціях обмежувалися двома членами [5].

У даній роботі запропоновано чисельний алгоритм розв'язування контактних задач, який ґрунтується на методах конформного відображення, інтегральних рівнянь, механічних квадратур та квадратичного програмування.

Приймемо, що пластинка послаблена отвором, границя якого описується рівнянням  $g(x, y) = 0$ , а границя штампа до контактної взаємодії – рівнянням  $f(x, y) = 0$ . Розглянемо випадок, коли штамп жорсткий і гладкий та відомий головний вектор зусиль  $P$ , що прикладені до штампа.

**Умови контакту.** Для запису умови контакту врахуємо те, що після деформування граничні точки пластинки, що знаходяться в області контакту, будуть задовольняти рівнянню границі штампа з врахуванням його жорсткого зміщення. Звідси одержимо умову

$$f(x + u(x, y) - D, y + v(x, y)) = 0, \quad (1)$$

де  $(u, v)$  – переміщення границі пластинки, які далі будемо вважати малими величинами. Тут розглянуто випадок, коли штамп зміщується в напрямку осі  $Ox$  на відстань  $D$ . Лінеаризувавши (1), і долучивши рівняння границі отвору, одержимо умову контакту

$$f_1(\alpha)\tilde{u}(\alpha) + f_2(\alpha)\tilde{v}(\alpha) = -\tilde{f}(\alpha) + Df_1(\alpha), \quad (2)$$

де  $\tilde{f}(\alpha) = f(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ,  $f_1(\alpha) = f'_x(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ,  $f_2(\alpha) = f'_y(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ;  $\tilde{u}(\alpha) = u(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ ,  $\tilde{v}(\alpha) = v(g_1(\alpha), g_2(\alpha))$ . Тут рівняння границі отвору записано у параметричному вигляді  $x = g_1(\alpha)$ ,  $y = g_2(\alpha)$ ,  $-\pi \leq \alpha < \pi$ .

**Побудова інтегральних рівнянь.** Для запису інтегральних рівнянь побудуємо розв'язок допоміжної задачі теорії пружності для даної пластинки, яка знаходиться під дією зосередженої сили  $(X, Y)$ , що прикладена до межі отвору в точці  $t$ .

Позначимо потенціали Колосова-Мусхелішвілі для цієї задачі через  $\varphi_1(z)$  і  $\psi_1(z)$ . Будемо розглядати випадок, коли площина з вирізаним кругом одиничного радіуса у площині  $\zeta$  відображається на область, яку займає пластинка, функцією  $z = \omega(\zeta)$ , де  $\omega(\zeta) = a \left( \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \dots + \frac{c_m}{\zeta^m} \right)$ . Тут  $a, c_1, \dots, c_m$  – задані комплексні коефіцієнти,  $|\zeta| \geq 1$ . У результаті відображення точки  $t$  у площині  $z$  буде відповідати точка  $\gamma$  у площині  $\zeta$ , тобто  $t = \omega(\gamma)$ .

Використовуючи результати [2], маємо

$$\varphi(\zeta) = U_0(\zeta) - S(1/\zeta), \quad \psi(\zeta) = V_0(\zeta) + \bar{S}(\zeta) - \bar{\omega}(1/\zeta) \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad (3)$$

де  $U_0(\zeta) = -Z[(\chi+1)\ln(\zeta-\gamma) - \chi \ln \zeta]$ ,  $V_0(\zeta) = \bar{Z}[(\chi+1)\ln(\zeta-\gamma) - \ln \zeta]$ ,  $Z = \frac{X+iY}{2\pi(1+\chi)}$ ;  $\chi = 3-4\nu$  для плоскої деформації та  $\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  для узагальненого

плоского напруженого стану,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $S(\zeta) = S_1\zeta + S_2\zeta^2 + \dots + S_{m-1}\zeta^{m-1}$ ,  $S_1, S_2, \dots, S_{m-1}$  – невідомі комплексні сталі,  $\varphi(\zeta) = \varphi_1(\omega(\zeta))$ ,  $\psi(\zeta) = \psi_1(\omega(\zeta))$ ,  $\varphi'(\zeta) = \frac{d\varphi}{d\zeta}$ .

Безпосередньою перевіркою можна перекоонатися, що комплексні потенціали (3) мають задані особливості в точці  $\gamma$  (які відповідають зосередженій силі на межі отвору), враховують логарифмічні особливості для потенціалів при  $\zeta \rightarrow \infty$  ( $\varphi(\zeta) \sim -Z \ln \zeta$ ,  $\psi(\zeta) \sim \chi \bar{Z} \ln \zeta$ ) та задовольняють умові відсутності напружень на межі отвору, тобто  $\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = const$  при  $|\sigma|=1$ .

Для випадку кругового отвору отримані формули (3) збігаються із наведеними в [2] потенціалами при  $S=0$ .

Виділимо у функції  $\psi(\zeta)$  складові, які зростають на нескінченності. Для цього використаємо розклад у ряд Лорана [2]

$$\frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} = b_0 + b_1\zeta + \dots + b_m\zeta^m + \frac{b_{-1}}{\zeta} + \frac{b_{-2}}{\zeta^2} \dots$$

Звідси маємо

$$\frac{\overline{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} = w(\zeta) + B(\zeta), \tag{4}$$

де  $B(\zeta) = b_0 + b_1\zeta + \dots + b_m\zeta^m$ , а  $w(\zeta) \rightarrow 0$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ .

Тоді з (3), враховуючи співвідношення (4), випливає, що функцію  $\psi(\zeta)$  можна подати у вигляді

$$\psi(\zeta) = \psi_A(\zeta) + \psi_B(\zeta),$$

де  $\psi_A(\zeta) = V_0(\zeta) - w(\zeta)\varphi'(\zeta) + P(1+\chi)\frac{B(\gamma)}{\zeta-\gamma}$ ,  $\psi_B(\zeta) = A(\zeta) + \overline{S}(\zeta) + B(\zeta)\left(S\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right)'$ ,

$$A(\zeta) = P\left[(1+\chi)\frac{B(\zeta)-B(\gamma)}{\zeta-\gamma} - \chi\frac{B(\zeta)}{\zeta}\right].$$

Тут  $\psi_A(\zeta)$  – функція, яка не має додаткових особливостей на нескінченності, а функція  $\psi_B(\zeta)$  містить поліноміально зростаючу функцію  $A(\zeta)$ .

Розкладемо функцію  $\psi_B$  у ряд Лорана. Вимагаючи, щоби коефіцієнти в цьому розкладі при додатних ступенях  $\zeta$  були нульовими, отримуємо систему рівнянь для визначення сталих  $S_1, S_2, \dots, S_{m-1}$  [2]

$$-\overline{S}_j + b_{j+2}S_1^* + \dots + b_m S_{m-j-1}^* = PA_j, \quad j = 1, \dots, m-1,$$

де  $A_j$  – коефіцієнти поліному  $A(\zeta) = \sum_{j=0}^{m-1} A_j \zeta^j$ . При цьому коефіцієнти  $A_j$  можна зобразити у вигляді

$$A_j = a_j - \chi b_{j+1}, \quad j \geq 1,$$

де  $a_j$  визначаються за рекурентними формулами  $a_0 = \frac{B(\gamma)-b_0}{\gamma}$ ,  $a_j = \frac{a_{j-1}-b_j}{\gamma}$ ,  $j = 1, \dots, m-2$ ;  $a_{m-1} = b_m$ .

Позначимо вектор контактних напружень через  $(X_n, Y_n)$ . Тоді функція Мусхелішвілі  $\varphi_P$  для пластинки, що перебуває під дією штамп на основі (3) набуде вигляду

$$\varphi_P(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \left( \int_{Mn} (X_n + iY_n) \left[ \ln(\gamma - \zeta) - \frac{\chi}{\chi+1} \ln \zeta \right] ds \right) + \int_{Mn} \varphi_\Delta(\zeta, \gamma, X_n, Y_n) ds. \tag{5}$$

де  $\varphi_{\Delta} = -C(1/\zeta)$ ;  $M_n$  – область контакту,  $ds$  – дугова координата. Зазначимо, що  $\varphi_{\Delta}$  є лінійною функцією відносно змінних  $X_n, Y_n$ . Враховуючи, що  $\ln(\gamma - \zeta) = \ln 2 \sin \frac{|\xi - \alpha|}{2} + i \frac{\alpha + \xi}{2} + \begin{cases} \pi i \text{ при } \xi < \alpha, \\ 0 \text{ при } \xi \geq \alpha; \end{cases}$  формула (5) перепишеться

$$\varphi_P(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{M_n} (X_n + iY_n) \ln \left( 2 \sin \frac{|\xi - \alpha|}{2} \right) ds + \frac{i(\chi - 1)P\alpha}{4\pi(\chi + 1)} - \frac{i}{2} \int_0^s (X_n + iY_n) ds + \int_{M_n} \varphi_{\Delta}(\zeta, \gamma, X_n, Y_n) ds + const,$$

де  $e^{i\xi} = \gamma$ ,  $e^{i\alpha} = \zeta$ .

Для визначення переміщень граничних точок отвору в нескінченній пластинці використаємо формулу [2]

$$2G(u + iv) = (\chi + 1)\varphi_P(\zeta) + i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + const.$$

Звідси отримаємо

$$2G(u + iv) = -\frac{\chi + 1}{2\pi} \int_{M_n} (X_n + iY_n) \ln \left( 2 \sin \frac{|\xi - \alpha|}{2} \right) ds + \frac{i(\chi - 1)P\alpha}{4\pi} - i \frac{\chi - 1}{2} \int_0^s (X_n + iY_n) ds + (\chi + 1) \int_{M_n} \varphi_{\Delta}(\zeta, \gamma, X_n, Y_n) ds + const. \quad (6)$$

Позначимо нормальні напруження під штампом через  $\sigma$ . Тоді враховуючи, що  $(X_n + iY_n) ds = i\sigma dt$  з (6) отримаємо

$$2G(u + iv) = \frac{\chi + 1}{2\pi} \int_{M_n} \sigma(\xi) \ln \left( 2 \sin \frac{|\xi - \alpha|}{2} \right) \gamma \omega'(\gamma) d\xi + \frac{i(\chi - 1)P\alpha}{4\pi} + i \frac{\chi - 1}{2} \int_0^{\alpha} \sigma(\xi) \gamma \omega'(\gamma) d\xi - (\chi + 1) \int_{M_n} \sigma(\xi) \varphi_{\Delta}(\zeta, \gamma, Re(\gamma \omega'(\gamma)), Im(\gamma \omega'(\gamma))) d\xi + const. \quad (7)$$

Підставивши співвідношення (7) в умову (2) отримаємо інтегральне рівняння для знаходження  $\sigma(\xi)$  у вигляді

$$\int_L \sigma(\xi) J(\alpha, \xi) d\xi - Df_1(\alpha) = -\tilde{f}(\alpha), \quad (8)$$

де  $L$  – сукупність відрізків, вздовж яких відбувається контакт;  $J(\alpha, \xi)$ ,  $f_1(\alpha)$  і  $\tilde{f}(\alpha)$  – відомі функції (тут рівняння отвору задається параметрично у вигляді:  $g_1(\alpha) = Re(\omega(\zeta))$ ,  $g_2(\alpha) = Im(\omega(\zeta))$ ). Для знаходження невідомої  $D$ , що входить до рівняння (8), додатково використовуємо умову рівноваги штампа, яка запишеться у вигляді

$$Re \left( - \int_{M_n} \sigma(\xi) \gamma \omega'(\gamma) d\xi \right) = P.$$

Визначення контактних напружень з цих рівнянь є досить складною задачею. Це пов'язано з тим, що може мати місце контакт на кількох ділянках, знаходження меж яких зводиться до відшукування розв'язків системи нелінійних рівнянь. Розв'язування цієї задачі в роботі проведено чисельно. Для цього введемо в розгляд деяку область  $[A, B]$ , яка вміщує всі ділянки контакту. Покладемо в ній  $\sigma(\alpha) = 0$  при  $\alpha \notin L$ . Тоді одержимо альтернативну систему рівнянь-нерівностей

$$\begin{cases} \int_A^B \sigma(\xi) J(\alpha, \xi) d\xi - Df_1(\alpha) = -\tilde{f}(\alpha), \text{ якщо } \sigma(\alpha) < 0, \\ \int_A^B \sigma(\xi) J(\alpha, \xi) d\xi - Df_1(\alpha) \leq -\tilde{f}(\alpha), \text{ якщо } \sigma(\alpha) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Значимо, що спосіб зведення контактних задач з наперед невідомою областю контакту до системи інтегральних рівнянь-нерівностей (9) наведено в [6].

**Чисельний алгоритм розв'язування задачі.** Функція  $J(\alpha, \xi)$  має логарифмічні особливості. Тому для побудови квадратурних формул використаємо відомий в літературі підхід. Гладку функцію  $\sigma(\xi)$  опишемо лінійними, кусково-неперервними функціями

$$\sigma(\xi) = \sum_n \sigma_n S_h(\xi - \alpha_n), \quad (10)$$

де  $S_h(\alpha) = \begin{cases} 1 - \frac{|\alpha|}{h}, \text{ при } |\alpha| \leq h; \\ 0, \text{ при } |\alpha| > h, \end{cases} \quad \sigma_n = \sigma(\alpha_n), \quad \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N - \text{вузлові точки, що по-}$

кривають область  $[A, B]$ , причому  $\alpha_{j+1} = \alpha_j + h$ ,  $h$  – крок розбиття. Підставивши (10) до інтеграла

$$I(\alpha) = \int_A^B \sigma(\xi) J(\alpha, \xi) d\xi,$$

отримаємо квадратурну формулу

$$I(\alpha_v) = \sum_{n=1}^N A_{v,n} \sigma_n, \quad v = \overline{0, N}; \quad (11)$$

де  $A_{v,n} = \int_{-h}^h S_h(t) J(\alpha_v, \alpha_n + t) dt$ .

На основі формул (11) система рівнянь і нерівностей (9) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N+1} A_{v,n} \sigma_n = F_v \text{ при } \sigma_v < 0, \\ \sum_{n=1}^{N+1} A_{v,n} \sigma_n \leq F_v \text{ при } \sigma_v = 0; \\ v = \overline{0, N}; \end{cases} \quad (12)$$

де  $A_{\nu, N+1} = -f_1(\alpha_\nu)$ ;  $F_\nu = -\tilde{f}(\alpha_\nu)$ . Тут позначено  $\sigma_{N+1} = D$ .

Далі система (12) зводиться до задачі квадратичного програмування, а саме до задачі мінімізації величини

$$Y = \sum_{\nu=0}^{N+1} \left( \sum_{n=0}^{N+1} (A_{\nu, n} \sigma_n - F_\nu) \sigma_\nu \right) \quad (13)$$

за умов [1].

Зауважимо, що для випадку півпростору в [6] задача визначення контактних напружень зводиться до мінімізації величини аналогічної (13) іншим способом, який ґрунтується на основі мінімізації пружної енергії тіла.

Область контакту за допомогою вищенаведеного алгоритму знаходиться безпосередньо – шляхом об’єднання ділянок, в яких знайдені напруження  $\sigma_n < 0$ .

**Тестування алгоритму.** З метою тестування даного алгоритму розглянемо задачу, про втискання жорсткого кругового штамп в тіло з круговим отвором, коли розміри штамп близькі до розмірів отвору. При розрахунках покладали  $\omega(\zeta) = R\zeta$ ,  $\chi = 3 - 4\nu$  при  $\nu = 0.3$  (випадок плоскої деформації), радіус штамп рівний  $R - \varepsilon$  при  $\varepsilon/R = 0.001$ ,  $N = 421$ . Розподіл знайдених відносних контактних напружень  $p(\xi) = \frac{\sigma(\xi)}{2G}$  при значеннях величин  $\tilde{P}_i = \frac{-P_i}{\varepsilon E}$ ,  $i = \overline{1, 7}$ , наведених у таблиці 1 зображено на рис. 1 кривими 1-7 відповідно

Таблиця 1

	1	2	3	4	5	6	7
$-P/\varepsilon E$	0.02582	0.1063	0.2587	0.5261	1.0148	2.0409	5.1259

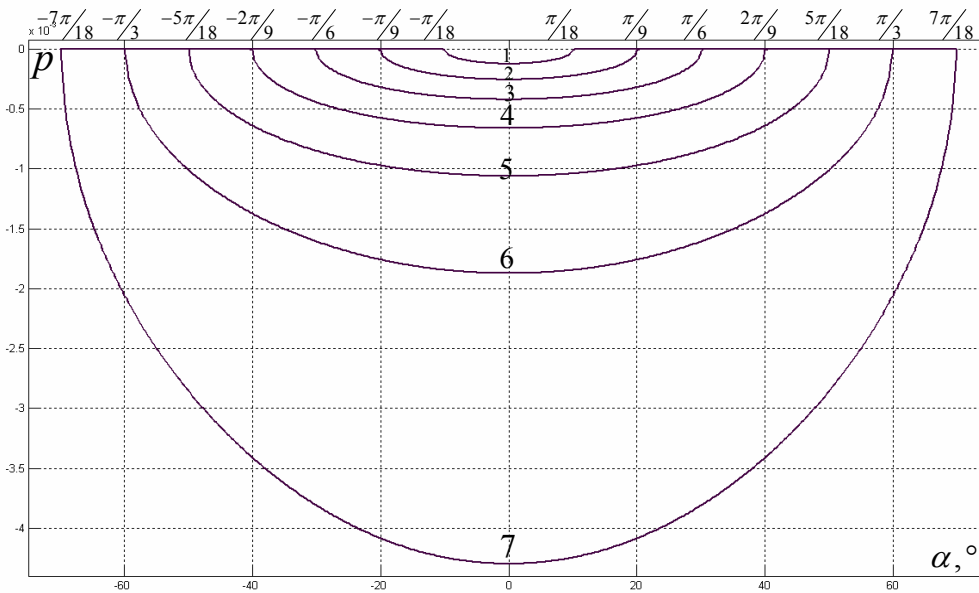


Рис. 1

Як видно з рис. 1 при вибраних значеннях величин  $\tilde{P}_i$  розраховані кути області контакту рівні  $\frac{\pi}{18}i$  при  $i = \overline{1,7}$ . Такі ж значення кутів областей контакту знайдені в [3] за допомогою іншого підходу. Звідси видно, що запропонований алгоритм дозволяє розв'язувати контактні задачі з достатньо високою для практики точністю.

**Розрахунок контактних напружень для випадку штампа еліптичної форми в квадратному отворі.** Розглянемо далі пружну нескінченну пластинку послаблену квадратним отвором з півстороною  $a$ , з центром у початку координат і сторонами паралельними координатним осям. Знайдемо розподіли контактних напружень для випадку, коли штамп має еліптичну форму, тобто задається рівнянням

$$\frac{(x - x_0)^2}{R_x^2} + \frac{y^2}{R_y^2} = 1, \tag{14}$$

де  $R_x, R_y$  – півосі еліпса;  $x_0$  – зміщення еліпса. Результати розрахунків контактних напружень на границі отвору в пластинці наведено на рис. 2. При розрахунках покладалося, що відображаюча функція  $z = \omega(\zeta)$  містить 19 членів;  $\nu = 0.25$ ,

$N = 321$  і  $Q = \frac{-P}{2Ga} = 0.001$  (де  $a$  – це півсторона квадрата). Результати розрахунків

безрозмірних контактних напружень  $p = \frac{\sigma}{2G}$  при  $R_y = 0.95a$ ,  $R_x i = 0.05ia$ ,  $i = \overline{1,4}$  зображено на рис. 2.

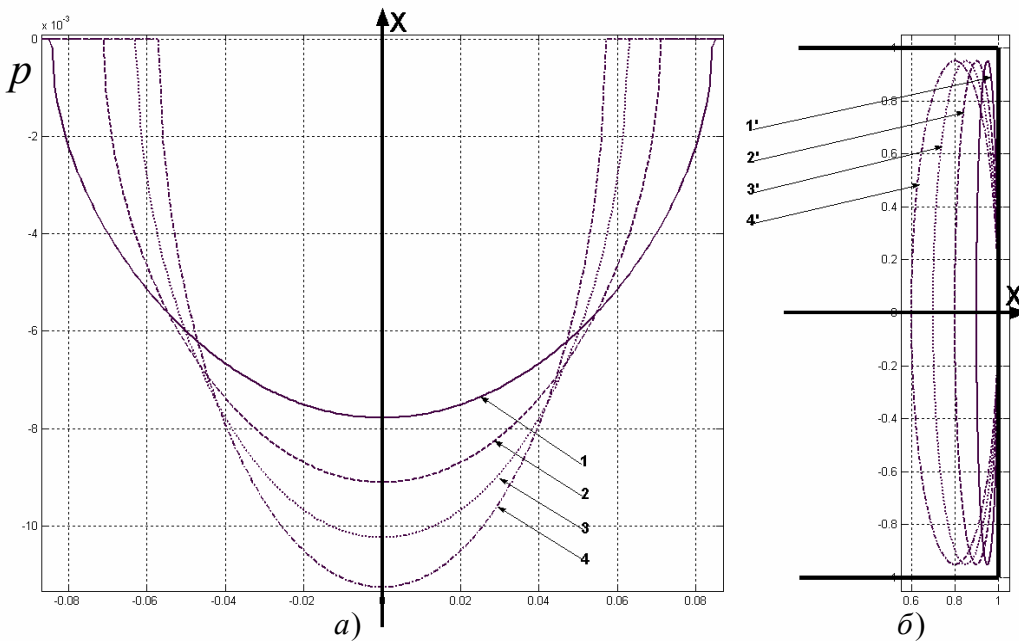


Рис. 2



З рис 2. видно, що при однакових зусиллях максимальні контактні напруження практично лінійно залежать від довжини півосі  $R_x$ , а величина області контакту при цьому змінюються нелінійно.

**Розрахунок контактних напружень для випадку круглого штампа в квадратному отворі.** Розглянуто випадок коли в (14)  $R_x = R_y = a$ ,  $x_0 = 0$ , тобто коли в квадратний отвір втискається штамп кругової форми діаметр, якого рівний стороні квадрату. Кількість членів відображаючої функції, пружні характеристики та кількість вузлових точок тут беруться такими ж як і у попередньому прикладі, відносно значення повної сили приймалось рівним  $Q_i = 0.0005i$ ,  $i = \overline{1,4}$ . Результати розрахунку зображено на рис. 3. Кривим 1 – 4 на рис. 3, а) та кривим 1' – 4' на рис. 3, б) відповідають відносні контактні напруження  $p$  при відповідному значенні головного вектора сили  $Q_i$ .

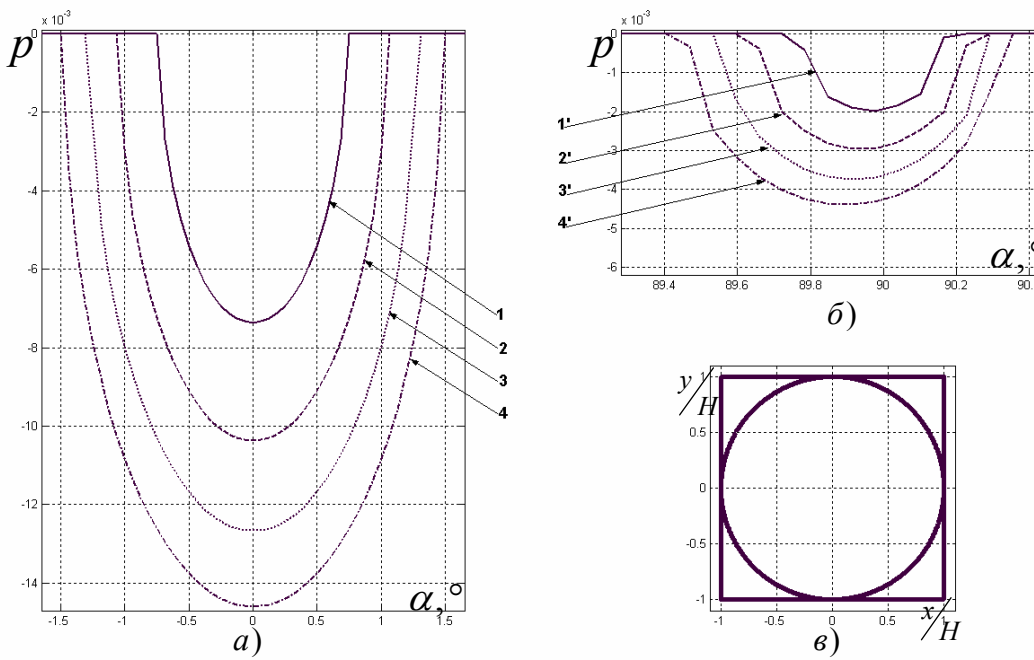


Рис. 3

На рис. 3. а) кривими 1, ..., 4 зображено контактні напруження на стороні  $x = a$ . Аналогічно, на рис. 3. б) кривими 1', ..., 4' зображено контактні напруження на бічній стороні  $y = a$  (на іншій бічній стороні розподіл контактних напружень симетричний). Як видно з графіків, у даному випадку, область контакту складається з трьох ділянок: однієї центральної та двох на бічних сторонах отвору. Причому максимальні значення напружень на останніх двох ділянках контакту зміщуються в напрямку дії штампа. Зазначимо, що при розглянутих значеннях головного вектора сил, відношення максимальних тисків у центральній області контакту та на бічних ділянках є практично сталою величиною і є близькою до 3,5.

**Висновки.** Розроблено числовий алгоритм дослідження контактних напружень на границі отвору практично довільної форми під будь-яким жорстким штампом. Цей алгоритм ґрунтується на методах конформного відображення, інтегральних рівнянь, механічних квадратур та квадратичного програмування. За допомогою порівняння отриманих результатів з відомими в літературі даними [3] показано ефективність та точність алгоритму. Проведено дослідження контактних напружень у пластинці з квадратним отвором для випадку, коли штамп має еліптичну форму з різним відношенням півосей. Установлено, що при дії кругового штампа, діаметр, якого збігається зі сторонами квадрата, контакт має місце на трьох ділянках. При цьому показано, що максимальні напруження на бічних сторонах отвору приблизно в 3.5 менші, ніж відповідні максимальні напруження в центральній області контакту.

### Бібліографічні посилання

1. **Максимович В.М.** Контактна задача про тиск жорсткого кругового штампа довільного радіуса на границю кругового отвору / В.М. Максимович, А.Ю. Коцюба // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки», ЛДТУ – 2007. – Вип. 19. – С. 172-177.
2. **Мухелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М., 1966.– 708 с.
3. **Панасюк В.В.** Деякі контактні задачі теорії пружності / В.В. Панасюк, М.Й. Теплий. – К., 1975.
4. **Савин Г.Н.** Распределение напряжений около отверстий. –К., 1968. – 880 с.
5. **Сяський А.О.** Передача сил до криволінійного отвору нескінченної пластинки стрижнями змінної жорсткості / А.О. Сяський, Ю.В. Батишкіна // Машинознавство. – 2004. – № 6 (84). – С. 21-26.
6. **Johnson K.L.** Contact mechanics. – Cambridge University Press, 1985. – 454 p.

*Надійшла до редколегії 02.09.09*

УДК 539.3

О.В. Литвин, В.Г. Попов  
Одеська національна морська академія

## ВИЗНАЧЕННЯ ХВИЛЬОВИХ ПОЛІВ ПРИ ДИФРАКЦІЇ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ ТОНКИМ ПРУЖНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Досліджується поле хвиль, розсіяних тонким смуговим включенням у матриці, що знаходиться в умовах плоскої деформації. Включення може бути повністю зчепленим з матрицею або знаходитись в умовах гладкого контакту з нею. З огляду на малу товщину включення граничні умови на ньому формулюються на його серединній площині, а переміщення визначаються з рівнянь теорії пружних пластин Кірхгоффа-Лява. Для визначення переміщень і напружень розсіяного поля використані розривні розв'язки рівнянь Ламе. Отримані формули для повних поперечних перерізів розсіювання з метою дослідження розсіяного включенням хвильового поля.

**Ключові слова:** пружне включення, плоскі гармонічні хвилі, плоска деформація, поле розсіяних хвиль, розривний розв'язок, повні поперечні перерізи розсіювання.

Исследуется поле волн, рассеянных тонким полосовым включением в матрице, которая находится в условиях плоской деформации. Включение может быть полностью сцепленным с матрицей или находится в условиях гладкого контакта с ней. Ввиду малой толщины включения граничные условия на нем формулируются на его срединной плоскости, а перемещения находятся из уравнений теории упругих пластин Кирхгоффа-Лява. Для определения перемещений и напряжений рассеянного поля использованы разрывные решения уравнений Ламе. Получены формулы для полных поперечных сечений рассеивания с целью исследования рассеянного включением волнового поля.

**Ключевые слова:** упругое включение, плоские гармонические волны, плоская деформация, поле рассеянных волн, разрывное решение, полные поперечные сечения рассеивания.

The wave field which is diffracted by the thin strip inclusion in the matrix which is in the conditions of plane strain is analyzed in the article. The inclusion can be both fully coupled with the medium and by the conditions of the smooth contact. Boundary conditions are formulated for the middle plane of the inclusion in view of a small thickness of the inclusion and displacements are defined from the Kirkhgoff-Lyav equations of theory of the elastic plates. The discontinuous solutions of the Lamé equation are used for the definition of the displacements and stresses of the scattered field. The formulae for the full transverse sections for the purpose of researching of the diffracted wave field by the inclusion are obtained.

**Key words:** elastic inclusion, plane harmonic waves, plane deformation, the diffracted field, discontinuous solution, the full transverse sections of the diffracted.

**Вступ.** Актуальною для вдосконалення засобів неруйнівного контролю та дефектоскопії є проблема дистанційного визначення геометричних та механічних параметрів тонкостінних неоднорідностей, зокрема включень, в ізотропному пружному середовищі. Оскільки інформація про властивості включення міститься в характеристиках розсіяних полів, то важливе значення мають алгоритми розв'язання задач з їх дослідження. В роботі досліджуються переміщення та напруження хвильового поля, розсіяного тонким пружним включенням, за допомогою так званих повних поперечних перерізів розсіювання (ПППР).

**Постановка задачі.** Нехай необмежене пружне тіло (матриця), що знаходиться в умовах плоскої деформації, містить пружне включення у вигляді пластини товщини  $h$ . У площині  $xOy$  включення займає область  $|x| \leq a$ ,  $-h/2 \leq y \leq h/2$ . На включенні відбувається дифракція поздовжніх хвиль або хвиль поперечного зсуву, заданих своїми потенціалами [2]

$$\varphi_0(x; y) = Ae_1(x; y)\kappa_1^{-1}, \quad \psi_0(x; y) = Ae_2(x; y)\kappa_2^{-1}, \quad (1)$$

де  $\kappa_j^2 = \omega^2 / c_j^2$ ,  $e_j(x; y) = \exp \kappa_j i(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0)$  ( $j=1, 2$ ),  $c_1^2 = (\lambda_1 + 2\mu_1) / \rho_1^{-1}$ ,  $c_2^2 = \mu_1 / \rho_1^{-1}$ ,  $\lambda_1, \mu_1, \rho_1$  – сталі Ламе та густина матриці,  $\omega$  – частота коливань,  $\theta_0$  – кут між додатним напрямком осі  $Ox$  та напрямком розповсюдження хвиль. Усі співвідношення, як і наступні, записані для амплітудних значень. Залежність від часу визначається множителем  $e^{-i\omega t}$ , який тут і далі опускається.

Здійснено подання переміщень та напружень у матриці у вигляді

$$v = v^1 + v^0, u = u^1 + u^0, \sigma_x = \sigma_x^1 + \sigma_x^0, \tau_{xy} = \tau_{xy}^1 + \tau_{xy}^0, \sigma_y = \sigma_y^1 + \sigma_y^0. \quad (2)$$

Перші доданки в (2) пов'язанні з розсіяними від включення хвилями, другі – з хвилями, що падають на включення.

Переміщення розсіяних хвиль визначаються з рівнянь Ламе, які у випадку гармонічних коливань в умовах плоскої деформації мають вигляд:

$$\mu_1 \Delta U_1 + (\lambda_1 + \mu_1) \text{grad div} U_1 = -\rho_1 \omega^2 U_1, U_1 = (u^1(x, y), v^1(x, y))^T. \quad (3)$$

При формулюванні умов взаємодії включення з матрицею будемо вважати включення настільки тонким, що граничні умови на його сторонах можна сформулювати відносно його серединної площини. Нехай обидві сторони включення повністю зчеплені з матрицею. Тоді на його серединній площині терплять розрив напруження, стрибки яких позначені:

$$\sigma_y^1(x, +0) - \sigma_y^1(x, -0) = \chi_1(x), \tau_{xy}^1(x; +0) - \tau_{xy}^1(x; -0) = \chi_2(x), -a \leq x \leq a. \quad (4)$$

Крім того, з умов повного зчеплення випливають рівності:

$$v^1(x, \pm 0) = v_0(x) - v^0(x, 0), u^1(x; \pm 0) = u_0(x) - u^0(x, 0) - \frac{h}{2} \frac{dv_0}{dx}, -a \leq x \leq a, \quad (5)$$

де  $\tau_{xy}^1, \sigma_y^1$  – дотичні та нормальні напруження відбитих хвиль,  $u_0(x), v_0(x)$  – амплітуди відповідно зсувних уздовж осі  $Ox$  та згинальних коливань серединної площини включення.

Якщо на обох сторонах включення виконуються умови гладкого контакту з матрицею, тоді на включенні терплять розрив напруження  $\sigma_y^1$  та переміщення  $u^1$ , стрибки яких позначені

$$\sigma_y^1(x; +0) - \sigma_y^1(x; -0) = \chi_1(x), u^1(x; +0) - u^1(x; -0) = \chi_4(x), -a \leq x \leq a, \chi_4(\pm a) = 0. \quad (6)$$

Також з умови гладкого контакту випливає

$$v^1(x, \pm 0) = v_0(x) - v^0(x, 0), \tau_{xy}^1(x; \pm 0) = -\tau_{xy}^0(x, 0). \quad (7)$$

Переміщення серединної площини включення, що ввійшли до граничних умов (5) та (7), визначаються з відповідних рівнянь теорії пружних пластин [6], які за плоскої деформації мають вигляд:

$$u_0''(x) + k_{02}^2 u_0(x) = -\chi_2(x) / D_{02} h, \quad (8)$$

$$k_{02}^2 = \omega^2 \rho_0 / D_{02}, D_{02} = E_0 / (1 - \nu_0^2), -a < x < a,$$

$$v_0^{IV}(x) - k_{01}^2 v_0(x) = -\chi_1(x) / D_{01}, \quad (9)$$

$$k_{01}^2 = \rho_0 \omega^2 h / D_{01}, D_{01} = E_0 h^3 / 12 (1 - \nu_0^2), -a < x < a,$$

де  $\rho_0, E_0, \nu_0$  – відповідно густина, модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона включення.

При завданні граничних умов для рівнянь (5) та (7) вважатимемо вплив матриці на бічні кромки включення  $x = \pm a$  нехтувало малим. Унаслідок цього на них виконані умови вільного краю:

$$N(\pm a) = -D_{02} \frac{\partial u_0(\pm a)}{\partial x} = 0, \quad M^\pm(\pm a) = -D_{01} \frac{\partial^2 v_0(\pm a)}{\partial x^2} = 0, \\ Q^\pm(\pm a) = -D_{01} \frac{\partial^3 v_0(\pm a)}{\partial x^3} = 0. \quad (10)$$

В останніх рівностях  $N, Q$  – нормальні і поперечні сили,  $M$  – згинальний момент на кромках включення.

**Розв’язання задачі.** Оскільки переміщення і напруження, викликані хвилею, відбитою від включення, мають розриви на серединній площині включення, то їх доцільно подати за допомогою рівнянь (3). Таке подання має вигляд [7]:

$$u^1(x; y) = \int_{-a}^a \chi_1(\eta) G_{41}(\eta - x, y) d\eta + \int_{-a}^a \chi_2(\eta) G_{42}(\eta - x, y) d\eta - \int_{-a}^a \chi_4'(\eta) \frac{\partial G_{44}^*}{\partial \eta}(\eta - x, y) d\eta \\ v^1(x; y) = \int_{-a}^a \chi_1(\eta) G_{31}(\eta - x, y) d\eta + \int_{-a}^a \chi_2(\eta) G_{32}(\eta - x, y) d\eta - \int_{-a}^a \chi_4'(\eta) \frac{\partial G_{34}^*}{\partial \eta}(\eta - x, y) d\eta \\ \sigma_y^1(x, y) = \int_{-a}^a \chi_1(\eta) G_{11}(\eta - x, y) d\eta + \int_{-a}^a \chi_2(\eta) G_{12}(\eta - x, y) d\eta - \int_{-a}^a \chi_4'(\eta) \frac{\partial G_{14}^*}{\partial \eta}(\eta - x, y) d\eta \\ \tau_{xy}^1(x, y) = \int_{-a}^a \chi_1(\eta) G_{21}(\eta - x, y) d\eta + \int_{-a}^a \chi_2(\eta) G_{22}(\eta - x, y) d\eta - \int_{-a}^a \chi_4'(\eta) \frac{\partial G_{24}^*}{\partial \eta}(\eta - x, y) d\eta \\ \sigma_x^1(x, y) = \int_{-a}^a \chi_1(\eta) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\kappa_1^2}{\xi^2} r_1 + 2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} \right] d\eta + \\ + \int_{-a}^a \chi_2(\eta) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\kappa_1^2}{\xi^2} r_1 + 2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial y^2} \right] d\eta + 2\mu \int_{-a}^a \frac{\chi_4'(\eta)}{\kappa_2^2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\kappa_1^2}{\xi^2} r_1 + 2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial y^2} + \left( \kappa_2^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) r_2 \right] d\eta \\ \frac{\partial G_{i4}^*(\eta - x, y)}{\partial \eta} = G_{i4}(\eta - x, y), i = 1; 4. \quad (11)$$

У випадку включення в умовах гладкого контакту в поданнях (11) слід покласти  $\chi_2(x) \equiv 0$ , а для повністю зчепленого включення –  $\chi_4(x) \equiv 0$ . Ядра інтегральних операторів в (11) визначені у [7].

Розв’язки одновимірних крайових задач (8), (9), (10) знаходяться за формулами:

$$u(\zeta) = -\frac{m_0}{2\varepsilon} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) G_2(\tau, \zeta) d\tau, \quad v(\zeta) = -\gamma_0 \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) G_1(\tau, \zeta) d\tau, \quad (12)$$

$$\varphi_1(\zeta) = \chi_1(a\zeta)/\mu, \quad \varphi_2(\zeta) = \chi_2(a\zeta)/a, \quad \varphi_4'(\zeta) = \chi_4'(a\zeta), \quad \zeta = a^{-1}x, \quad m_0 = e_0\mu_0,$$

$$\gamma_0 = 3m_0/2\varepsilon^3, \quad \varepsilon = h/2a, \quad \kappa_0 = a\kappa_2, \quad \mu_0 = (1 - \nu_0^2)/2(1 + \nu_1); \quad e_0 = E_1/E_0, \quad \rho = \rho_1/\rho_0.$$

Тут  $G_1(\tau, \zeta), G_2(\tau, \zeta)$  – функції Гріна відповідних крайових задач [4; 5].

Таким чином, формули (11), (12) визначатимуть переміщення в матриці і включенні за умови, що відомі стрибки (4), (6). Для визначення цих стрибків з граничних умов отримані системи інтегральних рівнянь. Отримання цих систем докладно виведено у [4; 5]. Означена система інтегральних рівнянь для повністю

зчепленого включення знаходиться при задоволенні умов (5):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left\{ \frac{1+\xi^2}{2} \ln|\tau-\zeta| + F_1(\tau-\zeta) + 2\pi\gamma_0 G_1(\tau,\zeta) \right\} d\tau = f_1(\zeta), \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left\{ -2\pi\gamma_0 \frac{\partial}{\partial \zeta} G_1(\tau,\zeta) \right\} d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_2(\tau) \left\{ \frac{1+\xi^2}{2} \ln|\tau-\zeta| + F_2(\tau-\zeta) + \frac{\pi m_0}{\varepsilon} G_2(\tau,\zeta) \right\} d\tau = f_2(\zeta), \quad (13) \\ & f_1(\zeta) = -i \left[ \alpha \sin \theta_0 \exp(i\kappa_0 \xi \zeta \cos \theta_0) - \beta \cos \theta_0 \exp(i\kappa_0 \zeta \cos \theta_0) \right], \\ & f_2(\zeta) = -i \left[ \alpha \cos \theta_0 \exp(i\kappa_0 \xi \zeta \cos \theta_0) + \beta \sin \theta_0 \exp(i\kappa_0 \zeta \cos \theta_0) \right]. \end{aligned}$$

Функції  $F_1(\tau-\zeta)$ ,  $F_2(\tau-\zeta)$  неперервні при  $-1 \leq \tau, \zeta \leq 1$ . Формули для них наводяться з огляду на надзвичайно великий об'єм.

Якщо включення знаходиться в умовах гладкого контакту, тоді система рівнянь знаходиться при задоволенні умов (7):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left\{ \frac{1+\xi^2}{2} \ln|\tau-\zeta| + \Gamma_{21}(\tau-\zeta) + \gamma_0 G_1(\tau,\zeta) \right\} d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_4'(\tau) \left\{ \xi^2 \ln|\tau-\zeta| + \Gamma_{22}(\tau-\zeta) \right\} d\tau = f_1(\zeta), \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_1(\tau) \left\{ -\frac{\xi^2}{\tau-\zeta} + \Gamma_{11}(\tau-\zeta) \right\} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_4'(\tau) \left\{ \frac{2(1-\xi^2)}{\tau-\zeta} + \Gamma_{12}(\tau-\zeta) \right\} d\tau = f_2(\zeta) \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_4'(\tau) d\tau = 0. \quad (14) \end{aligned}$$

Для побудови наближеного розв'язку системи інтегральних рівнянь (13) та (14) невідомі функції представлені у вигляді [1]:

$$\varphi_1(\tau) = \frac{\psi_1(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad \varphi_2(\tau) = \frac{\psi_2(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad \varphi_4'(\tau) = \frac{\psi_4(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}. \quad (15)$$

Далі інтегральні рівняння заміняться системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих значень функцій у вузлах інтерполяції [4; 5]:

$$\psi_{mj} = \psi_j(\tau_m), \quad j=1;2;4,$$

де  $T_n(\tau)$  – многочлен Чебишева 2-го роду,  $\tau_m = \cos(\pi(2m-1)/2n)$ ,  $m = \overline{1, n}$  – корені полінома. Після розв'язання системи функції  $\psi_j(\tau)$  наближаються інтерполяційними многочленами:

$$\psi_j(\tau) = \sum_{m=1}^n \psi_{mj} \frac{T_n(\tau)}{T_n'(\tau_m)(\tau-\tau_m)}, \quad j=1;2;4.$$

Перейдемо до визначення наближених значень повних поперечних перерізів розсіювання (ПППР). В умовах плоскої деформації ПППР  $Q_k(\omega)$  за означенням [3; 8] є відношенням усередненої швидкості поширення енергії розсіяної хвилі  $\langle Q_k^1 \rangle_t$

через циліндричну поверхню одиничної висоти, що містить включення, до середньої за період кількості енергії падаючої хвилі  $\langle I^0 \rangle_t$ , що проходить через одиничну площадку, перпендикулярну до напрямку розповсюдження падаючої хвилі, тобто

$$Q_k(\omega) = \langle Q_k^1 \rangle_t / \langle I^0 \rangle_t, \quad k=1;2. \quad (16)$$

Тут  $k=1$  відповідає випадку розсіяної від включення поздовжньої хвилі, а  $k=2$  – поперечної хвилі.

Оскільки розсіяне хвильове поле визначається суперпозицією поздовжніх і поперечних хвиль, то переміщення та напруження, які викликані цими хвилями, необхідно записати у вигляді:

$$v^1 = v^{11} + v^{12}, \quad u^1 = u^{11} + u^{12}, \quad \sigma_x^1 = \sigma_x^{11} + \sigma_x^{12}, \quad \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^{11} + \tau_{xy}^{12}, \quad \sigma_y^1 = \sigma_y^{11} + \sigma_y^{12}.$$

Перші доданки переміщень та напружень пов'язані з розсіянням поздовжньої хвилі, а другі – поперечної хвилі.

Якщо ввести одиничний вектор нормалі  $n^0 = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$  до фронту падаючої хвилі [8], то середня за період кількість енергії  $\langle I^0 \rangle_t$  в умовах плоскої деформації має вигляд

$$\langle I^0 \rangle_t = \frac{\omega}{2} \left\{ \cos \theta_0 \operatorname{Im}(\sigma_x^0 + \tau_{xy}^0)(\bar{u}^0 + \bar{v}^0) + \sin \theta_0 \operatorname{Im}(\sigma_y^0 + \tau_{xy}^0)(\bar{u}^0 + \bar{v}^0) \right\}.$$

Залежно від типу хвиль, які розповсюджуються в матриці, вона дорівнює

$$\langle I^0 \rangle_t = \frac{\omega \mu A^2 \kappa_1}{2 \xi^2}, \quad \langle I^0 \rangle_t = \frac{\omega \mu B^2 \kappa_2}{2}. \quad (17)$$

Перший вираз пов'язаний з поширенням поздовжньої хвилі, другий – поперечної хвилі, потенціали яких задані в (1).

Нехай  $\epsilon$  циліндрична поверхня одиничної довжини, всередині якої знаходиться включення. Швидкість поширення енергії розсіяної хвилі через цю поверхню дорівнює [8]:

$$Q_k = \frac{-i\omega}{4} \int_L \left\{ n_1 \left[ -(\sigma_x^{1k} u^{1k} + \tau_{xy}^{1k} v^{1k}) e^{-2i\omega t} + \sigma_x^{1k} \bar{u}^{-1k} - \bar{\sigma}_x^{1k} u^{1k} + \tau_{xy}^{1k} \bar{v}^{-1k} - \bar{\tau}_{xy}^{1k} v^{1k} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\bar{\sigma}_x^{1k} u^{-1k} + \bar{\tau}_{xy}^{1k} v^{-1k}) e^{2i\omega t} \right] + n_2 \left[ -(\tau_{xy}^{1k} u^{1k} + \sigma_y^{1k} v^{1k}) e^{-2i\omega t} + \tau_{xy}^{1k} \bar{u}^{-1k} - \right. \right. \\ \left. \left. - \bar{\tau}_{xy}^{1k} u^{1k} + \sigma_y^{1k} \bar{v}^{-1k} - \bar{\sigma}_y^{1k} v^{1k} + (\bar{\tau}_{xy}^{1k} u^{-1k} + \bar{\sigma}_y^{1k} v^{-1k}) e^{2i\omega t} \right] \right\} dL.$$

Тут ризикою згори позначені відповідні спряжені величини. З останньої формули при  $k=1$  знаходимо швидкість поширення енергії поздовжньої хвилі, а при  $k=2$  – енергії поперечної хвилі. Після осереднення величин  $Q_k$  за часом, знайдено

$$\langle Q_k^1 \rangle_t = \frac{\omega}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ n_1 \left[ \sigma_x^{1k} \bar{u}^{-1k} - \bar{\sigma}_x^{1k} u^{1k} + \tau_{xy}^{1k} \bar{v}^{-1k} - \bar{\tau}_{xy}^{1k} v^{1k} \right] + n_2 \left[ \tau_{xy}^{1k} \bar{u}^{-1k} - \bar{\tau}_{xy}^{1k} u^{1k} + \sigma_y^{1k} \bar{v}^{-1k} - \bar{\sigma}_y^{1k} v^{1k} \right] \right\} d\varphi. \quad (18)$$

З інтегральних подань для переміщень та напружень відбитих хвиль (11) знаходимо асимптотичні формули в дальній зоні. Для повністю зчепленого включення такі формули для переміщень і напружень поздовжніх хвиль мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 u^{11}(R, \varphi) &= -\frac{i}{4\mu_1\kappa_2^2} \kappa_1^2 \gamma_1 \left\{ \frac{1}{2} S_{11} \sin 2\varphi + S_{21} \cos^2 \varphi + O(R^{-1}) \right\}, \\
 v^{11}(R, \varphi) &= -\frac{i}{4\mu_1\kappa_2^2} \kappa_1^2 \gamma_1 \left\{ S_{11} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} S_{21} \sin 2\varphi + O(R^{-1}) \right\}, \\
 \sigma_x^{11}(R, \varphi) &= \frac{\kappa_1}{4} (1 - 2\xi^2 \sin^2 \varphi) \gamma_1 \left\{ S_{11} \sin \varphi + S_{21} \cos \varphi + O(R^{-1}) \right\}, \\
 \tau_{xy}^{11}(R, \varphi) &= \frac{\kappa_1}{4} \xi^2 \gamma_1 \sin 2\varphi \left\{ S_{11} \sin \varphi + S_{21} \cos \varphi + O(R^{-1}) \right\}, \\
 \sigma_y^{11}(R, \varphi) &= \frac{\kappa_1}{4} (1 - 2\xi^2 \cos^2 \varphi) \gamma_1 \left\{ S_{11} \sin \varphi + S_{21} \cos \varphi + O(R^{-1}) \right\}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Аналогічні подання для розсіяних хвиль поперечного зсуву мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 u^{12}(R, \varphi) &= \frac{i}{4\mu_1} \gamma_2 \left\{ \frac{1}{2} S_{12} \sin 2\varphi - S_{22} \sin^2 \varphi + O(R^{-1}) \right\}, \\
 v^{12}(R, \varphi) &= -\frac{i}{4\mu_1} \gamma_2 \left\{ S_{12} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} S_{22} \sin 2\varphi + O(R^{-1}) \right\}, \\
 \sigma_x^{12}(R, \varphi) &= -\frac{\kappa_2}{4} \gamma_2 \sin 2\varphi \left\{ S_{12} \cos \varphi - S_{22} \sin \varphi + O(R^{-1}) \right\}, \\
 \tau_{xy}^{12}(R, \varphi) &= \frac{\kappa_2}{4} \gamma_2 \cos 2\varphi \left\{ S_{12} \cos \varphi - S_{22} \sin \varphi + O(R^{-1}) \right\}, \\
 \sigma_y^{12}(R, \varphi) &= \frac{\kappa_2}{4} \gamma_2 \sin 2\varphi \left\{ S_{12} \cos \varphi - S_{22} \sin \varphi + O(R^{-1}) \right\}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Коли на обох сторонах включення виконуються умови гладкого контакту аналогічні формули для переміщень і напружень відбитих поздовжніх хвиль мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 u^{11}(R, \varphi) &= -\frac{i\kappa_1^2}{8\mu_1\kappa_2^2} \gamma_1 \sin 2\varphi \left\{ S_{11} - 2\kappa_1 S_{41} \cos \varphi + O(R^{-1}) \right\}, \\
 v^{11}(R, \varphi) &= -\frac{i\kappa_1^2}{4\mu_1\kappa_2^2} \gamma_1 \sin^2 \varphi \left\{ S_{11} + 2S_{41} + O(R^{-1}) \right\}, \\
 \sigma_x^{11}(R, \varphi) &= \frac{\kappa_1}{4} \sin \varphi (1 - 2\xi^2 \sin^2 \varphi) \gamma_1 \left\{ S_{11} + 2\mu_1 S_{41} + O(R^{-1}) \right\}, \\
 \tau_{xy}^{11}(R, \varphi) &= \frac{\kappa_1}{4} \xi^2 \gamma_1 \sin 2\varphi \sin \varphi \left\{ S_{11} + 2\mu_1 S_{41} + O(R^{-1}) \right\}, \\
 \sigma_y^{11}(R, \varphi) &= \frac{\kappa_1}{4} \sin \varphi (1 - 2\xi^2 \cos^2 \varphi) \gamma_1 \times \left\{ S_{11} + 2\mu_1 S_{41} + O(R^{-1}) \right\}, \\
 u^{12}(R, \varphi) &= \frac{i\gamma_2}{4\mu_1} \sin \varphi \left\{ S_{12} \cos \varphi - S_{42} \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi} + O(R^{-1}) \right\}, \\
 v^{12}(R, \varphi) &= -\frac{i\gamma_2}{4\mu_1} \left\{ S_{12} \cos^2 \varphi + S_{42} \cos 2\varphi + O(R^{-1}) \right\}, \\
 \sigma_x^{12}(R, \varphi) &= -\frac{\kappa_2\gamma_2}{2} \sin \varphi \left\{ S_{12} \cos^2 \varphi + \mu_1 S_{42} \cos 2\varphi + O(R^{-1}) \right\},
 \end{aligned}$$



$$\tau_{xy}^{12}(R, \varphi) = \frac{\kappa_2}{4} \gamma_2 \cos 2\varphi \left\{ S_{12} \cos \varphi + S_{42} \frac{\mu_1 \cos 2\varphi}{\cos \varphi} + O(R^{-1}) \right\},$$

$$\sigma_y^{12}(R, \varphi) = \frac{\kappa_2 \gamma_2}{2} \sin \varphi \left\{ S_{12} \cos^2 \varphi + \mu_1 S_{42} \cos 2\varphi + O(R^{-1}) \right\}. \quad (21)$$

У формулах (19)-(21) використані позначення:

$$S_j = \int_{-a}^a \chi_l(\eta) \exp(-i\kappa_j \eta \cos \varphi) d\eta, \quad l=1;2, \quad S_{4j} = \int_{-a}^a \chi_4'(\eta) \exp(-i\kappa_j \eta \cos \varphi) d\eta, \quad (22)$$

$$\gamma_j = \sqrt{\frac{2}{\pi \kappa_j R}} \exp i \left( \kappa_j R - \frac{\pi}{4} \right), \quad j=1;2.$$

Після переходу до позначень

$$u(\zeta) = a^{-1} u_0(a\zeta), \quad v(\zeta) = a^{-1} v_0(a\zeta),$$

$$\varphi_j(\zeta) = \mu^{-1} \chi_j(a\zeta), \quad j=1;2, \quad \varphi_4(\zeta) = \chi_4'(a\zeta), \quad \zeta = a^{-1} x$$

і використання (15) інтеграли (22) обчислюються за квадратурними формулами Гаусса-Чебишева. У результаті цього отримані наближені формули для головних складових переміщень та напружень хвиль, розсіяних у дальню зону. У випадку повністю зчепленого з матрицею включення ці формули мають вигляд:

$$u^{11}(R, \varphi) = -ai \xi^2 \frac{\gamma_1}{4} \left\{ \frac{1}{2} T_{m1}^1 \sin 2\varphi + T_{m2}^1 \cos^2 \varphi \right\},$$

$$v^{11}(R, \varphi) = -ai \xi^2 \frac{\gamma_1}{4} \left\{ T_{m1}^1 \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} T_{m2}^1 \sin 2\varphi \right\},$$

$$\sigma_x^{11}(R, \varphi) = \mu_1 \kappa_0 \xi \frac{\gamma_1}{4} (1 - 2\xi^2 \sin^2 \varphi) \{ T_{k1}^1 \sin \varphi + T_{k2}^1 \cos \varphi \},$$

$$\tau_{xy}^{11}(R, \varphi) = \mu_1 \kappa_0 \xi^3 \frac{\gamma_1}{4} \sin 2\varphi \{ T_{k1}^1 \sin \varphi + T_{k2}^1 \cos \varphi \},$$

$$\sigma_y^{11}(R, \varphi) = \mu_1 \kappa_0 \xi \frac{\gamma_1}{4} (1 - 2\xi^2 \cos^2 \varphi) \{ T_{k1}^1 \sin \varphi + T_{k2}^1 \cos \varphi \},$$

$$u^{12}(R, \varphi) = ai \frac{\gamma_2}{4} \left\{ \frac{1}{2} T_{m1} \sin 2\varphi - T_{m2} \sin^2 \varphi \right\},$$

$$v^{12}(R, \varphi) = -ai \frac{\gamma_2}{4} \left\{ T_{m1} \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} T_{m2} \sin 2\varphi \right\},$$

$$\sigma_x^{12}(R, \varphi) = -\mu_1 \kappa_0 \frac{\gamma_2}{4} \sin 2\varphi \{ T_{k1} \cos \varphi - T_{k2} \sin \varphi \},$$

$$\tau_{xy}^{12}(R, \varphi) = \mu_1 \kappa_0 \frac{\gamma_2}{4} \cos 2\varphi \{ T_{k1} \cos \varphi - T_{k2} \sin \varphi \},$$

$$\sigma_y^{12}(R, \varphi) = \mu_1 \kappa_0 \frac{\gamma_2}{4} \sin 2\varphi \{ T_{k1} \cos \varphi - T_{k2} \sin \varphi \},$$

$$T_{pl} = \sum_{p=1}^n a_p \psi_{pl} \exp(z_p), \quad T_{pl}^1 = \sum_{p=1}^n a_p \psi_{pl} \exp(\xi z_p),$$

$$z_p = -i\kappa_0 \tau_p \cos \varphi, \quad p = m, k, \quad l; j = 1; 2.$$

Для включення в умовах гладкого контакту головні складові переміщень та напружень хвиль, розсіяних у дальню зону набувають вигляду:

$$\begin{aligned}
 u^{11}(R, \varphi) &= -ai\xi^2 \frac{\gamma_1}{8} \sin 2\varphi \{T_{m1}^1 + 2T_{m4}^1\}, \\
 v^{11}(R, \varphi) &= -ai\xi^2 \frac{\gamma_1}{4} \sin^2 \varphi \{T_{m1}^1 + 2T_{m4}^1\}, \\
 \sigma_x^{11}(R, \varphi) &= \mu_1 \kappa_0 \xi \frac{\gamma_1}{4} (1 - 2\xi^2 \sin^2 \varphi) \sin \varphi \{T_{k1}^1 + 2T_{k4}^1\}, \\
 \tau_{xy}^{11}(R, \varphi) &= \mu_1 \kappa_0 \xi^3 \frac{\gamma_1}{4} \sin 2\varphi \sin \varphi \{T_{k1}^1 + 2T_{k4}^1\}, \\
 \sigma_y^{11}(R, \varphi) &= \mu_1 \kappa_0 \xi \frac{\gamma_1}{4} \sin \varphi (1 - 2\xi^2 \cos^2 \varphi) \{T_{k1}^1 + 2T_{k4}^1\}, \\
 u^{12}(R, \varphi) &= ai \frac{\gamma_2}{4} \sin \varphi \left\{ T_{m1} \cos \varphi + T_{m4} \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi} \right\}, \\
 v^{12}(R, \varphi) &= -ai \frac{\gamma_2}{4} \{T_{m1} \cos^2 \varphi + T_{m4} \cos 2\varphi\}, \\
 \sigma_x^{12}(R, \varphi) &= -\mu_1 \kappa_0 \frac{\gamma_2}{2} \sin \varphi \{T_{k1} \cos^2 \varphi + T_{k4} \cos 2\varphi\}, \\
 \tau_{xy}^{12}(R, \varphi) &= \mu_1 \kappa_0 \frac{\gamma_2}{4} \cos 2\varphi \left\{ T_{k1} \cos \varphi + T_{k4} \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi} \right\}, \\
 \sigma_y^{12}(R, \varphi) &= \mu_1 \kappa_0 \frac{\gamma_2}{2} \sin \varphi \{T_{k1} \cos^2 \varphi + T_{k4} \cos 2\varphi\}.
 \end{aligned}$$

Підставивши до (18) представлення для  $u^{1k}(x, y)$ ,  $v^{1k}(x, y)$ ,  $\sigma_x^{1k}(x, y)$  та  $\tau_{xy}^{1k}(x, y)$  і обчисливши відповідні інтеграли, знайдено вираз для  $\langle Q_k^1 \rangle_t$

$$\langle Q_k^1 \rangle_t = -\frac{\omega \mu a^2 \pi}{16n^2} \int_0^{2\pi} f_k(\varphi) d\varphi, \quad k=1;2. \quad (23)$$

В останній формулі підінтегральні функції залежать від типу розсіяної хвилі і для повністю зчепленого включення відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned}
 f_1(\varphi) &= -\xi^2 \left\{ \sin^2 \varphi U_{11} + \frac{\sin 2\varphi}{2} U_{12} + \frac{\sin 2\varphi}{2} U_{21} + \cos^2 \varphi U_{22} \right\}, \\
 f_2(\varphi) &= -\cos^2 \varphi U_{11} + \frac{\sin 2\varphi}{2} U_{12} + \frac{\sin 2\varphi}{2} U_{21} - \sin^2 \varphi U_{22}.
 \end{aligned}$$

Для включення в умовах гладкого контакту на обох його сторонах ці формули мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 f_1(\varphi) &= -\xi^2 \sin^2 \varphi \{U_{11} + 2U_{14} + 2U_{41} + 4U_{44}\}, \\
 f_2(\varphi) &= -\cos^2 \varphi U_{11} - \cos 2\varphi U_{14} - \cos 2\varphi U_{41} - \frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2 \varphi} U_{44},
 \end{aligned}$$

$$U_{lj}(\varphi) = \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \operatorname{Re}(\psi_{ml} \overline{\psi_{kj}}) \cos z_{mk} + \operatorname{Im}(\psi_{ml} \overline{\psi_{kj}}) \sin z_{mk} \right), \quad l, j = 1; 2; 4,$$

$$z_{mk} = \kappa_0 (\tau_{im} - \tau_{jk}) \cos \varphi, \quad i, j = 1; 2.$$

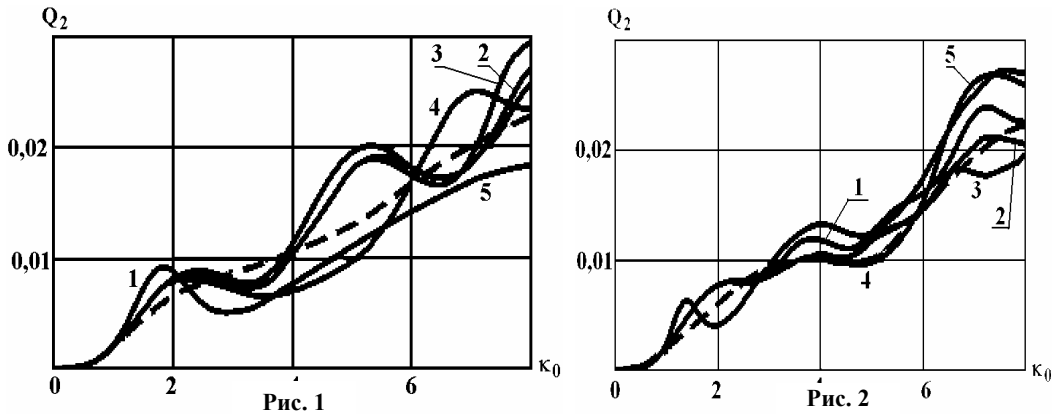
У результаті підстановки (17) та (23) до (16) отримано вираз для ПППР. Якщо на включення набігає поздовжня хвиля, то вираз для ПППР має вигляд:

$$Q_k(\omega) = \frac{-a^2 \xi \pi}{8n^2 \kappa_2 A^2} \int_0^{2\pi} f_k(\varphi) d\varphi.$$

Якщо ж на включення набігає поперечна хвиля, тоді

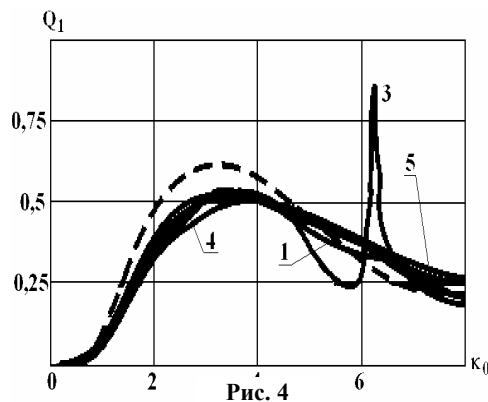
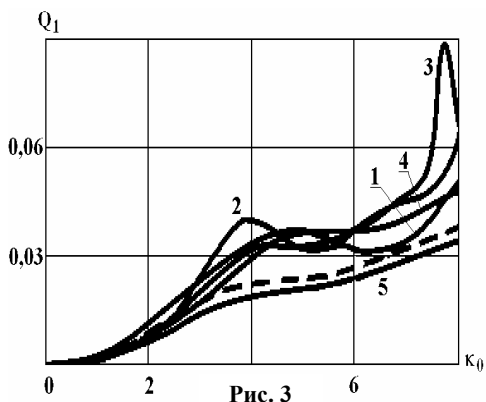
$$Q_k(\omega) = \frac{-a^2 \pi}{8n^2 \kappa_2 B^2} \int_0^{2\pi} f_k(\varphi) d\varphi, \quad k = 1; 2.$$

**Аналіз результатів та висновки.** За допомогою останніх формул проведені дослідження залежності значень повного поперечного перерізу розсіювання  $Q_k$  від безрозмірної частоти  $\kappa_0$  за різних співвідношень між пружними сталими матриці та включення  $e_0 = E_1/E_0$ . Результати цих досліджень показані у вигляді графіків на рис. 1 – 6. На цих рисунках криві 1–5 відповідають наступним значенням  $e_0$ : 0,5; 0,2; 0,1; 0,01; 0,001. Пунктирна крива на всіх рисунках відповідає випадку абсолютно жорсткого включення. Розглядалися хвилі, фронт яких паралельний до включення ( $\theta_0 = 90^\circ$ ) або перпендикулярний до включення ( $\theta_0 = 0^\circ$ ).

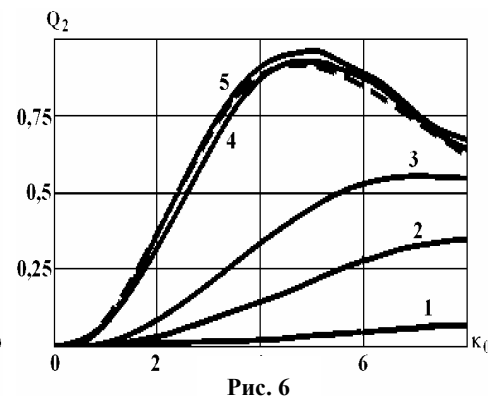
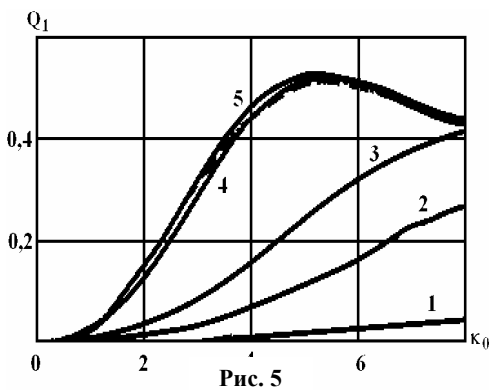


Під час числового аналізу встановлено, що при поширенні поздовжньої хвилі з  $\theta_0 = 90^\circ$  значення поперечних перерізів розсіювання практично не залежать від  $e_0$  і умов взаємодії включення та матриці. Тому на рис. 1 та рис. 2 наведені графіки почастотної залежності ПППР розсіяної від включення поперечної хвилі відповідно для повністю зчепленого включення і включення в умовах гладкого контакту. Як видно, майже при всіх значеннях  $e_0$  поперечні перерізи мають декілька максимумів і мінімумів. Із зростанням  $\kappa_0$  значення ПППР для абсолютно жорсткого включення монотонно зростають, а для пружних включень графіки залежності для  $Q_2$  мають осцилюючий характер навколо значень для абсолютно жорсткого включення. Крім того, в діапазоні частот від  $\kappa_0 = 4$  до  $\kappa_0 = 8$   $Q_2$  для повністю зчепленого включення і

включення в умовах гладкого контакту досягають локальних максимумів за різних значень  $\kappa_0$ . При  $e_0 \rightarrow 0$  значення ПППР прямують до відповідних абсолютно жорсткому включенню значень, але повне співпадіння спостерігається при  $e_0 = 10^{-6}$ .



При набіганні на включення поперечної хвилі з  $\theta_0 = 90^\circ$  ПППР розсіяної поздовжньої хвилі  $Q_1$  для повністю зчепленого включення (рис. 3) зростають з ростом частоти, але при зростанні  $e_0$  монотонність порушується і з'являються точки максимуму. Для включення в умовах гладкого контакту (рис. 4) значення  $Q_1$  значно перевищують відповідні значення  $Q_1$  для повністю зчепленого включення на всьому діапазоні частот. Майже для всіх розглянутих відношень  $e_0$  значення  $Q_1$  для включення в умовах гладкого контакту зростають, досягнувши максимального значення, а з подальшим збільшенням  $\kappa_0$  поступово ПППР зменшуються. Крім того, при всіх розглянутих  $e_0$  значення ПППР для пружного включення перевищують відповідні значення для абсолютно жорсткого. Співпадіння значень ПППР для пружного і абсолютно жорсткого включення теж спостерігається при  $e_0 = 10^{-6}$ .



Якщо ж на включення набігає поздовжня хвиля з  $\theta_0 = 0^\circ$ , то для ПППР розсіяної від включення поздовжньої хвилі (рис. 5) і ПППР розсіяної поперечної хвилі (рис. 6) для повністю зчепленого включення спостерігається з ростом  $\kappa_0$  зростання значень до досягнення максимального значення з наступним повільним спаданням значень, особливо, коли жорсткість включення значно перевищує

жорсткість матриці. З ростом жорсткості включення зростають значення поперечних перерізів, прямуючи до відповідних значень для абсолютно жорсткого включення. Співпадіння значень ПППР для пружного і абсолютно жорсткого включень відбувається при  $e_0 = 10^{-6}$ . Слід відмітити, що ПППР розсіяної від включення поперечної хвилі  $Q_2$  значно перевищують відповідні значення ПППР розсіяння поздовжньої хвилі  $Q_1$ . Якщо ж включення знаходиться в умовах гладкого контакту, то ПППР розсіяної поздовжньої і поперечної хвиль дорівнює нулю.

Отримані формули для ПППР і проведені за їх допомогою дослідження дозволили встановити, що на залежність значень ПППР від кута поширення падаючої хвилі і частоти суттєво впливають умови взаємодії між включенням та матрицею. Це доводить теоретичну можливість дистанційного визначення умов взаємодії між включенням та матрицею за допомогою ПППР.

### Бібліографічні посилання

1. Белоцерковский С.М. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С.М. Белоцерковский, И.К. Лифанов // – М., 1985. – 253 с.
2. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко // К., 1981. – 284 с.
3. Канаун С.К. Метод эффективного поля в механике композитов / С.К. Канаун, В.М. Левин – Петрозаводск, 1993. – 600 с.
4. Литвин О.В. Концентрация напряжений вблизи тонкого упругого включения в условиях гладкого контакта / О.В. Литвин, В.Г. Попов // Известия РАН. Мех. тв. тела, 2007.– №1. – С. 123-132.
5. Литвин О.В. Взаємодія плоских пружних гармонічних хвиль з пружним включенням за повного зчеплення / О.В. Литвин, В.Г. Попов // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – Львів, 2007. – №4. – С. 58-64.
6. Перцев А.К. Динамика оболочек и пластин / А.К. Перцев, Э.Г. Платонов // –Л., 1987. –316с.
7. Попов В.Г. Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы / В.Г. Попов, А.Э. Улановский // Изв. РАН. МТТ, 1995. –№4. –С.99-109.
8. Achenbach J.D., Gantesen A.K., McMaken H. Ray methods for waves in elastic solids. – Pitman, Boston, 1982.

*Надійшла до редколегії 24.12.08*

УДК 593.3

Н.И. Ободан, Г.М. Гавеля

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара***ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ НЕТОНККИХ ОБОЛОЧЕК  
ПРИ НЕОСЕССИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

Досліджується нелінійна невісесимметрична деформація нетонких циліндричних оболонок залежно від виду крайових умов і характеру несимметричності. Проводиться порівняльний аналіз розрахунків із пластичною та пружною моделями, визначаються межі застосування останньої.

Ключові слова: циліндрична оболонка, зовнішнє навантаження, граничні умови, умова стаціонарності, пружна й пластична деформації, критичне навантаження.

Исследуется нелинейная неосесимметричная деформация нетонких цилиндрических оболочек в зависимости от вида граничных условий и характера несимметричности. Проводится сравнительный анализ расчетов с пластической и упругой моделями, определяются границы применимости последней

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, внешняя нагрузка, граничные условия, условие стационарности, упругая и пластическая деформации, критическая нагрузка.

The non-linear non-axisymmetric deformation of non-thin cylindrical shells is investigated in order to analyze different boundary conditions and non-symmetry characteristics influence. Elastic and plastic models are compared to find an applicability range of the plastic one.

Key words: cylindrical shell, external loads, boundary conditions, stationary condition, elastic and plastic deformation, critical load.

**Введение.** Цилиндрические оболочки при неосесимметричном нагружении являются распространенным элементом аэрокосмических конструкций, резервуаров и т. д. [1–3] Известно [4], что для тонкостенных элементов конструкций при упругих деформациях и шарнирном опирании наблюдается немонотонная зависимость предельной (критической) нагрузки от геометрических параметров задачи, при этом ее значение снижается при определенных типах неоднородности почти в два раза. Между тем, поведение элементов конструкций типа цилиндрической оболочки в условиях пластических деформаций при различных граничных условиях может существенно отличаться от вышеисследованного, определение же предельных нагрузок в таком случае является весьма актуальным вследствие их использования в элементах авиационной техники, технологическом оборудовании т. д.

**Постановка задачи.** В данной работе исследуется поведение толстостенной цилиндрической оболочки, нагруженной внешним давлением  $q$  по области  $\Omega_q$ , при различных условиях опирания и при упругопластическом деформировании (рис. 1). Для описания упругопластического поведения материала используется деформационная теория пластичности.

Принята следующая система безразмерных величин, описывающих поведение оболочки:

$$\xi = \frac{x}{R}, \quad \eta = \frac{y}{R}, \quad U = (u, v, w) = \frac{(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})}{R}, \quad (1)$$

где  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  – продольное, окружное и радиальное перемещение точек срединной поверхности;  $L, R, h$  – длина, радиус и толщина оболочки;  $\xi, \eta$  – безразмерные координаты вдоль образующей и направляющей оболочки соответственно.

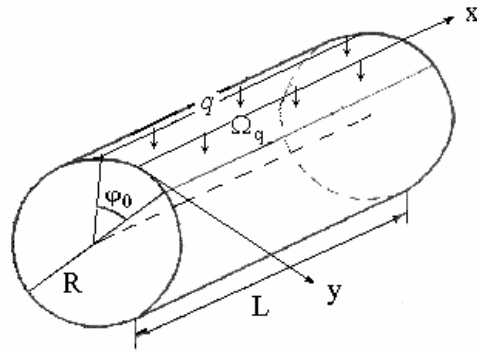


Рис. 1

**Метод решения.** На основе допущения метода дополнительных деформаций о равенстве усилий в расчетном упругом и пластически деформированном теле для расчетного упругого тела формулируется функционал, условиями стационарности которого будут являться уравнения равновесия в перемещениях для расчетного упругого тела при нагружении его действительной нагрузкой и фиктивной от дополнительных деформаций. Такой подход вполне обоснован, так как рассматривается активное нагружение оболочки при неизменном характере действующей нагрузки. Из основных предположений деформационной теории следует, что

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \kappa_{ij} = \kappa_{ij}^e + \kappa_{ij}^p, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^p$  – упругая и пластическая части деформации соответственно  $i, j = 1, 2$ . Процесс разгрузки считается упругим. Основные соотношения содержат неизвестные функции  $\varepsilon_{ij}^p$ , которые будут определяться с помощью метода дополнительных деформаций [5].

С помощью вариационного метода решение поставленной нелинейной краевой задачи может быть получено как точка стационарности следующего функционала

$$\begin{aligned} \Theta = \iint_{\Omega} B \frac{R^2}{2} & \left\{ (\varepsilon_{11}^e)^2 + (\varepsilon_{22}^e)^2 + 2\nu\varepsilon_{11}^e\varepsilon_{22}^e + 2(1-\nu)(\varepsilon_{12}^e)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{h^2}{12} \left[ (\kappa_{11}^e)^2 + 2\nu\kappa_{11}^e\kappa_{22}^e + (\kappa_{22}^e)^2 + 2(1-\nu)(\kappa_{12}^e)^2 \right] \right\} d\xi d\eta + \\ & + \int_{\xi_i = const} \left[ (u^* - u)T_{11} + (v^* - v)T_{12} + (w^* - w)Q_{11} + (\theta_1^* - \theta_1)M_{11} \right] d\eta, \end{aligned}$$

где  $T_{11}, T_{12}, Q_{11}, M_{11}$  – силовые факторы, выраженные через перемещения, или, если учесть, что  $\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p$ , получим

$$\begin{aligned} \Theta = \iint_{\Omega} B \left\{ \left[ \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2(1-\nu)\varepsilon_{12}^2 - 2(\varepsilon_{11}^p + \nu\varepsilon_{22}^p)\varepsilon_{11} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2(\varepsilon_{22}^p + \nu\varepsilon_{11}^p)\varepsilon_{22} - 4(1-\nu)\varepsilon_{12}\varepsilon_{12}^p + (\varepsilon_{11}^p)^2 + (\varepsilon_{22}^p)^2 + 2(1-\nu)(\varepsilon_{12}^p)^2 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2\nu\varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p \Big] + \frac{h^2}{12} \left[ \kappa_{11}^2 + \kappa_{22}^2 + 2(1-\nu)\kappa_{12}^2 + 2\nu\kappa_{11}\kappa_{22} - \right. \\
 & - 2\left(\kappa_{11}^p + \nu\kappa_{22}^p\right)\kappa_{11} - 2\left(\kappa_{22}^p + \nu\kappa_{11}^p\right)\kappa_{22} - 4(1-\nu)\kappa_{12}\kappa_{12}^p + \left(\kappa_{11}^p\right)^2 + \quad (3) \\
 & \left. + \left(\kappa_{22}^p\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\kappa_{12}^p\right)^2 + 2\nu\kappa_{11}^p\kappa_{22}^p \right] \Big\} d\xi d\eta + \\
 & + \int_{\xi_i = const} \left( u^* - u \right) B \left( \varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{11}^p + \nu\varepsilon_{22}^e + \nu\varepsilon_{22}^p \right) + \left( v^* - v \right) B (1-\nu) \left( \varepsilon_{12}^e + \varepsilon_{12}^p \right) + \\
 & + \left( \Theta_1^* - \Theta_1 \right) \frac{Bh^2}{12} \left( \kappa_{11}^e + \kappa_{11}^p + \nu\kappa_{22}^e + \nu\kappa_{22}^p \right) + \left( w^* - w_1 \right) \frac{1}{R} \left[ \frac{Bh^2}{12} \left( \frac{\kappa_{11}^e}{\partial\xi} + \nu \frac{\kappa_{22}^e}{\partial\xi} + \frac{\kappa_{12}^e}{\partial\eta} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\kappa_{11}^p}{\partial\xi} + \nu \frac{\kappa_{22}^p}{\partial\xi} + \frac{\kappa_{12}^p}{\partial\eta} \right) + B \left( \left( \frac{\varepsilon_{11}^e}{\partial\xi} + \nu \frac{\varepsilon_{22}^e}{\partial\xi} \right) \Theta_1 + \left( \varepsilon_{11}^e + \nu\varepsilon_{22}^e \right) \frac{\partial\Theta_1}{\partial\xi} + \right. \\
 & \left. + (1-\nu) \left( \frac{\varepsilon_{12}^e}{\partial\eta} \Theta_2 + \varepsilon_{12}^p \frac{\partial\Theta_2}{\partial\eta} \right) + \left( \frac{\varepsilon_{11}^p}{\partial\xi} + \nu \frac{\varepsilon_{22}^p}{\partial\eta} \right) \Theta_1 + \left( \varepsilon_{11}^p + \nu\varepsilon_{22}^p \right) \frac{\partial\Theta_1}{\partial\xi} + \right. \\
 & \left. \left. + (1-\nu) \left( \frac{\varepsilon_{12}^e}{\partial\eta} \Theta_2 + \varepsilon_{12}^p \frac{\partial\Theta_2}{\partial\eta} \right) \right) \right] \Big\} d\eta + \iint_{\Omega_q} q w d\xi d\eta,
 \end{aligned}$$

где

$$\Theta_1 = -\frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad \Theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad B = \frac{Eh}{1-\nu^2},$$

$E, \nu$  – модули упругости и Пуассона соответственно,  $\Omega$  – область, занимаемая оболочкой.

Относительные деформации срединной поверхности и изменения кривизн в направлении координатных линий выражаются через перемещения следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial \eta} + w + \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2, \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad (4) \\
 \kappa_{11} &= \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \quad \kappa_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \quad \kappa_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}.
 \end{aligned}$$

Функции перемещений  $u(\xi, \eta), v(\xi, \eta), w(\xi, \eta)$  вдоль направляющей оболочки представим кусочно-полиномиальной аппроксимацией. Для этого направляющую оболочки нужно разбить на  $n$  элементов узлами  $k = 0, 1, \dots, n$  и в каждом узле ввести в рассмотрение значения искомым функций и их частных производных по продольной координате:



$$U_{2k+1}(\eta) = U(\xi_k, \eta), \quad U_{2k+2}(\eta) = U'(\xi_k, \eta), \quad U = (u, v, w). \quad (5)$$

Любая из функций  $U$  на интервале между  $k$ -тым и  $(k+1)$ -м узлами аппроксимируется выражением

$$U(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 U_{2k+i}(\eta) H_i(\xi), \quad \xi_k \leq \xi \leq \xi_{k+1}. \quad (6)$$

В качестве функций  $H_i$  используются итерационные полиномы Эрмита третьей степени первого порядка [4]. Благодаря свойствам полиномов Эрмита аппроксимирующее выражение (6) принимает в  $k$ -том узле значение  $U(\xi_k, \eta)$ , а его производная – значение производной по  $\xi$  от функции  $U$ . Такое представление обеспечивает непрерывность искомых функций и их первых производных в направлении оси  $\xi$ .

Из условия стационарности функционала (3) можно получить уравнение Эйлера для функций  $u_i, v_i, w_i$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^{L/R} \left[ (\varepsilon_{11} + v\varepsilon_{22})H'_i - (1-v) \left( \varepsilon_{12}^p + v\varepsilon_{12}^{p'} \right) H_i \right] d\xi = \\ & = \int_0^{L/R} \left[ (\varepsilon_{11}^p + v\varepsilon_{22}^p)H_i - (1-v) \left( \varepsilon_{12}^p + v\varepsilon_{12}^{p'} \right) H_i \right] d\xi, \\ & \int_0^{L/R} \left[ (\varepsilon'_{11} + v\varepsilon'_{22})H_i - (1-v)\varepsilon_{12}H'_i \right] d\xi = \int_0^{L/R} \left[ (\varepsilon'^p_{11} + v\varepsilon'^p_{22}) - (1-v)\varepsilon^p_{12}H'_i \right] d\xi, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{L/R} \left\{ \left[ (\varepsilon_{11} + v\varepsilon_{22}) \cdot w_i(\eta) \cdot (H'_i)^2 + (\varepsilon_{22} + v\varepsilon_{11}) \cdot H_i + (1-v)\varepsilon_{12} \cdot w'_i(\eta) \cdot H_i \cdot H'_i - \right. \right. \\ & - 2(\varepsilon_{22} + v\varepsilon_{11}) \cdot w''_i(\eta) \cdot H_i^2 - 2(\varepsilon'_{22} + v\varepsilon'_{11}) \cdot w'_i(\eta) \cdot H_i^2 - (1-v)\varepsilon_{12} \cdot w'_i(\eta) \cdot H_i \cdot H'_i - \\ & \left. - (1-v)\varepsilon'_{12} \cdot w'_i(\eta) \cdot H_i \cdot H'_i \right] + \frac{h^2}{12} \left[ (\kappa_{11} + v\kappa_{22}) \cdot H''_i - 2(1-v)\kappa'_{12} \cdot H_i + \right. \\ & \left. + (\kappa''_{22} + v\kappa''_{11}) \cdot H_i - q \cdot H_i \right] \Big\} d\xi = \int_0^{L/R} \left\{ \left[ (\varepsilon_{11}^p + v\varepsilon_{22}^p) \cdot w_i(\eta) \cdot (H'_i)^2 + \right. \right. \\ & \left. + (\varepsilon_{22}^p + v\varepsilon_{11}^p) \cdot H_i + (1-v)\varepsilon_{12}^p \cdot w'_i(\eta) \cdot H_i \cdot H'_i - 2(\varepsilon_{22}^p + v\varepsilon_{11}^p) \cdot w''_i(\eta) \cdot H_i^2 - \right. \\ & \left. - 2(\varepsilon_{22}^{p'} + v\varepsilon_{11}^{p'}) \cdot w'_i(\eta) \cdot H_i^2 - (1-v)\varepsilon_{12}^p \cdot w'_i(\eta) \cdot H_i \cdot H'_i - \right. \\ & \left. - (1-v)\varepsilon_{12}^{p'} \cdot w'_i(\eta) \cdot H_i \cdot H'_i \right] + \frac{h^2}{12} \left[ (\kappa_{11}^p + v\kappa_{22}^p) \cdot H''_i - 2(1-v)\kappa_{12}^{p'} \cdot H_i + \right. \\ & \left. + (\kappa_{22}^{p''} + v\kappa_{11}^{p''}) \cdot H_i \right] \Big\} d\xi. \end{aligned}$$

Внеинтегральные члены в функционале (3) равны нулю вследствие выполнения условий (5)–(6).

Систему (7) можно разрешить относительно производных от искомым функций, дополняя граничными условиями по координате  $\eta$ . В качестве таких условий можно взять условие периодичности по окружной координате

$$U_i(0) = U_i(2\pi) \quad (8)$$

или условия симметрии.

Полученная краевая задача (7), (8) сводилась к задаче Коши при помощи метода Ньютона; для нахождения особых точек использовался алгоритм, позволяющий фиксировать точки ветвления решений в процессе движения по параметру нагрузки [4].

На каждом шаге метода Ньютона определяются пластические деформации  $\varepsilon_{ij}^p$ . В используемом методе дополнительных деформаций пластическая часть деформации  $\varepsilon_{ij}^p$  и  $\kappa_{ij}^p$  принимается в качестве дополнительной деформации. С достаточной точностью можно принять [5]

$$\varepsilon_{ij}^p = \left(1 - \frac{E_c}{E}\right) \varepsilon_{ij}, \quad (9)$$

где  $E_c$  – секущий модуль обобщенной кривой деформирования.

Решение задачи упругости при заданных внешних нагрузках и дополнительных деформациях  $\varepsilon_{ij}^p$ , которые определяются формулой (9), совпадают с решением задачи деформационной теории пластичности. Метод дополнительных деформаций заключается в том, что за начальное приближение принимается  $\varepsilon_{ij}^{p(0)} = 0$ , т. е. решается упругая задача и определяются  $\varepsilon_i^{(1)}$  и интенсивности деформаций  $\varepsilon_i^{(1)}$ . Определив по кривой деформирования новое значение напряжений  $\sigma_i^{(1)} = f(\varepsilon_i^{(1)})$  и новый секущий модуль  $E_c^{(1)} = \sigma_i^{(1)} / \varepsilon_i^{(1)}$ , можно определить по формуле (9) дополнительные деформации первого приближения

$$\varepsilon_{ij}^{p(1)} = \left(1 - \frac{E_c^{(1)}}{E}\right) \varepsilon_{ij}^{(1)}. \quad (10)$$

Таким образом, дополнительные деформации  $n$ -го приближения  $\varepsilon_{ij}^{p(n)}$  определяются через деформации  $\varepsilon_{ij}^{(n-1)}$ , найденные из решения упругой задачи предыдущего приближения с дополнительными деформациями  $\varepsilon_{ij}^{p(n-1)}$ .

**Анализ результатов.** С помощью изложенного алгоритма рассматривались два варианта нагружения: I – равномерное внешнее давление, приложенное по полосе с углом раствора  $0 \leq \varphi_0 \leq 0.7\pi$ , II – равномерное внешнее давление, действующее на части поверхности, размеры этой площадки  $(a, \varphi_0)$ ,