

ISSN 9125 0912

531/534
Д54

Заснований

1993

Дніпропетровський
національний
університет

ВІСНИК

Дніпропетровського
університету

2011

Т. 19

№ 5

Серія

МЕХАНІКА

Випуск 15, том 2

ВІСНИК



Дніпропетровського університету

Науковий журнал

№ 5

Том 19

2011

РЕДАКЦІЙНА РАДА:

акад. Академії наук ВО України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Поляков** (*голова редакційної ради*); акад. Академії наук ВО України, д-р техн. наук, проф. **М. М. Дронь** (*заст. голови*); д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. О. Кочубей**; д-р хім. наук, проф. **В. Ф. Варгалюк**; чл.-кор. АПН України, д-р філос. наук, проф. **П. І. Гнатенко**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Г. Гоман**; д-р філол. наук, проф. **В. Д. Демченко**; д-р техн. наук, проф. **А. П. Дзюба**; д-р пед. наук, проф. **Л. І. Зеленська**; чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. П. Моторний**; чл.-кор. АПН України, д-р психол. наук, проф. **Е. Л. Носенко**; д-р філос. наук, проф. **В. О. Панфілов**; д-р біол. наук, проф. **О. Є. Пахомов**; д-р іст. наук, проф. **С. І. Світленко**; акад. Академії наук ВО України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Скалозуб**; д-р філол. наук, проф. **Т. С. Пристайко**; чл.-кор. НАН України, д-р біол. наук, проф. **А. П. Травлєєв**; д-р техн. наук, проф. **Ю. Д. Шентун**.

Серія: МЕХАНІКА

Випуск 15, том 2

Дніпропетровськ
Видавництво
Дніпропетровського
національного університету

Представлены новые результаты исследований в области механики деформируемого твердого тела, динамики и прочности конструкций. Большое внимание уделено вопросам прикладного характера, связанным с теоретическим и экспериментальным обоснованием технологических и проектных решений в современном машиностроении. Эффективность разработанных алгоритмов и методов расчета показана на примерах решения конкретных задач.

Для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов.

Наведені нові результати досліджень у галузі механіки деформівного твердого тіла, динаміки і міцності конструкцій. Велика увага приділяється питанням прикладного характеру, пов'язаним із теоретичним і експериментальним обґрунтуванням технологічних та проектних рішень у сучасному машинобудуванні. Ефективність розроблених алгоритмів і методів розрахунку показана на прикладах розв'язування конкретних задач.

Для науковців, інженерів, аспірантів та студентів старших курсів.

*Друкується за рішенням вченої ради
Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара
згідно з затвердженим планом видань на 2011 р.*

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

д-р. техн. наук, проф. **А.П. Дзюба** (відп. редактор), д-р фіз.-мат. наук, проф. **В.В. Лобода** (заст. відп. редактора), канд. фіз.-мат. наук, доц. **О.О. Бобильов** (відп. секретар), д-р фіз.-мат. наук, проф. **О.Г. Гоман**, чл.-кор. НАН України, д-р техн. наук, проф. **В.С. Гудрамович**, академік АН ВО України, д-р техн. наук, проф. **М.М. Дронь**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О.О. Кочубей**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В.І. Кузьменко**, д-р техн. наук проф. **Н.І. Ободан**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **А.В. Павленко**, чл.-кор. НАН України, д-р техн. наук, проф. **О.В. Пилипенко**, академік АН ВО України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **М.В. Поляков**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О.А. Приходько**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **С.О. Смірнов**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю.А. Черняков**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **М.Ю. Швайко**

Рецензенти:

акад. НАН України, д.т.н., проф. **А.Ф. Булат**
акад. НАН України д.т.н., проф. **А.О. Лебедєв**

© Дніпропетровський національний
університет імені Олеся Гончара, 2011
© Автори статей, 2011
© Видавництво ДНУ, оформлення, 2011

**Випуск журналу
присвячено 75-річчю з дня народження
член-кореспондента НАН України В. С. Гудрамовича**



Вадим Сергійович Гудрамович

6 липня виповнилося 75 років Вадиму Сергійовичу Гудрамовичу – відомому вченому-механіку, члену-кореспонденту Національної Академії наук України, доктору технічних наук, професору, лауреату Державної премії України в галузі науки й техніки, лауреату премії НАН України імені С. П. Тимошенка й премії НАН України імені М. К. Янгеля.

У 1954 р. Вадим Сергійович вступив до фізико-технічного факультету Дніпропетровського державного університету. Тут він почав займатися науковою діяльністю під керівництвом видатного вченого-механіка професора Володимира Івановича Моссаковського (надалі Героя Соціалістичної Праці, академіка Академії наук УРСР).

Після закінчення з відзнакою університету в 1959 р. В. С. Гудрамович почав трудову діяльність в Особливому конструкторському бюро № 586 (зараз – Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля). У 1963 р. він вступив до аспірантури ДДУ й у 1964 р. успішно захистив кандидатську дисертацію. З 1965 р. за переводом почав працювати в ДДУ. У 1966 р. був запрошений до Сектору проблем технічної механіки АН УРСР, організований того ж року для рішення проблемних науково-технічних завдань ракетно-космічної техніки, у відділ, очолюваний В. І. Моссаковським. Згодом, Сектор був перетворений у Дніпропетровське Відді-

Дніпропетровське Відділення Інституту механіки АН УРСР, а в 1980 р. – в Інститут технічної механіки АН УРСР (зараз – НАН України й Державного космічного агентства України).

У 1968 р. був затверджений вченому званні старшого наукового співробітника за фахом «Теорія пружності й пластичності».

В 1968 – 1970 рр., за рішенням Президії АН УРСР, В. С. Гудрамович – стажист-дослідник Московського державного університету ім. М. В. Ломоносова. Керівником був призначений академік АН СРСР Ю. М. Работнов.

В 1973 р. Вадим Сергійович успішно захистив докторську дисертацію, а в 1979 р. йому було присвоєне звання професора. В 1995 р. В. С. Гудрамовича було обрано членом-кореспондентом НАН України за фахом «Механіка».

З 1975 р. Вадим Сергійович очолює в Інституті технічної механіки НАНУ науковий відділ (зараз – відділ міцності, динаміки й технології виготовлення конструкцій). Одночасно з 1975 р. по сумісництву – професор кафедри обчислювальної механіки й міцності конструкцій Дніпропетровського національного університету.

В. С. Гудрамовичу належать важливі наукові розробки в області нелінійної механіки, механіки деформівного твердого тіла, механіки контактних взаємодій, міцності й стійкості неоднорідних оболонково-стрижневих систем, динаміки й міцності конструкцій ракетно-космічної техніки, енергетики, транспорту, антенно-хвильової техніки, нафтогазової промисловості. Він – автор понад 320 наукових публікацій і винаходів, у тому числі – 12 монографій.

В. С. Гудрамович – член Секретаріату Національного комітету України з теоретичної і прикладної механіки, Правління Українського товариства з механіки руйнування, Наукової Ради «Механіка деформівного твердого тіла» НАН України. Член Спеціалізованих рад по захисту докторських і кандидатських дисертацій при Дніпропетровському національному університеті й Запорізькому національному технічному університеті. У 2000 – 2006 рр. був членом експертної ради ВАК України.

Він нагороджений орденом Дружби народів, декількома медалями. Федерація космонавтики СРСР нагородила його медаллю ім. М. К. Янгеля. Федерація космонавтики України – медаллю ім. Ю. В. Кондратюка. Нагороджений Знаком МВО України «Відмінник освіти» та Почесним знаком НАН України «За наукові досягнення».

Свій ювілей Вадим Сергійович зустрічає у розквіті творчої енергії сповнений нових задумів та ідей.

Редколегія широко вітає ювіляра зі знаменною датою та бажає йому міцного здоров'я, щастя та нових творчих досягнень у науці!

Редколегія

УДК 539.3

А. П. Дзюба

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

**ЧЛЕН-КОРЕСПОНДЕНТ НАН УКРАЇНИ
ВАДИМ СЕРГІЙОВИЧ ГУДРАМОВИЧ
(до 75-річчя з дня народження)**

Наведено короткий огляд основних результатів наукової діяльності член-кореспондента Національної академії наук України, доктора технічних наук, професора В. С. Гудрамовича в галузі нелінійної механіки, механіки деформованого твердого тіла, динаміки і міцності тонкостінних конструкцій ракетно-космічної техніки, енергетики, транспорту, антенно-хвильової техніки.

Ключові слова: наук. діяльність, нелінійна механіка, механіка деформованого твердого тіла, динаміка і міцність, ракетно-космічна техніка.

Приведен краткий обзор основных результатов деятельности член-корреспондента Национальной академии наук Украины, доктора технических наук, профессора В. С. Гудрамовича в области нелинейной механики, механики деформируемого твердого тела, динамики и прочности тонкостенных конструкций ракетно-космической техники, энергетики, транспорта, антенно-волноводной техники.

Ключевые слова: научная деятельность, нелинейная механика, механика деформируемого твердого тела, динамика и прочность, ракетно-космическая техника.

The fundamental results of scientific activity of Corresponding Member of the National academy of sciences of Ukraine V. S. Hudramovich in the field of the nonlinear mechanics, mechanics of deformable solids, dynamics and strength of thinwalled structures of rocket-space techniques, energetics, transport, antenna-waveguides engineering are analysed.

Key words: scientific activity, nonlinear mechanics of deformable solids, dynamics and strength, rocket-space techniques.

Після закінчення з відзнакою фізико-технічного факультету Дніпропетровського державного університету Вадим Сергійович Гудрамович з 1959 р. працює в Особливому конструкторському бюро № 586 (зараз – Державне Конструкторське бюро «Південне» ім. М. К. Янгеля). У студентські роки він почав займатися науковою діяльністю під керівництвом видатного вченого-механіка, доктора фізико-математичних наук, професора Володимира Івановича Моссаковського. Згодом В. І. Моссаковський став ректором ДДУ, одержав звання Героя Соціалістичної Праці, його було обрано академіком АН УРСР.

Вадим Сергійович почав свою трудову діяльність в секторі міцності проектного відділу КБ. Відділ тоді очолював В. М. Ковтуненко, згодом лауреат Ленінської і Державної премій, член-кореспондент АН СРСР і АН УРСР, а на чолі сектору міцності перебував П. І. Никитін (згодом начальник Комплексу міцності КБ, член-кореспондент АН УРСР).

Він почав працювати в групі наукових досліджень, яка за розпорядженням Генерального конструктора була створена 1959 р. для В. І. Моссаковського. Група проводила аналіз багатьох експериментів з міцності і стійкості оболонково-стрижневих ракетно-космічних конструкцій з пошуком відповідних теоретичних розробок, або їх створенням. Потім група була перетворена в науково-дослідний сектор.

Перші наукові дослідження В. С. Гудрамовича пов'язані з задачами контактної міцності, а саме: стійкість і міцність розпірних шпангоутів паливних баків, контактні задачі для оболонкових конструкцій, які опираються на основи – ложементи. Труднощі тут були пов'язані з необхідністю урахування пружності прилягаючих оболонок та відшарування конструкцій від ложемента при змінній зоні контакту. На основі досліджень вийшли перші наукові публікації у співавторстві з В. І. Моссаковським у Працях Центрального НДІ з ракетно-космічної техніки (Москва, 1961 р.) та журналі «Известия АН СССР. Механика и машиностроение» (1961 р.). У подальшому ці дослідження розвивалися, були створені загальні методики розв'язування контактних задач спряження, ускладнених задач контактних взаємодій для неоднорідних оболонкових конструкцій та локальних і протяжних опор, властивості яких описуються різними моделями. Працюючи в КБ «Південне», В. С. Гудрамович почав займатися дослідженням напружено-деформованого стану і несучої здатності з урахуванням

пластичних деформацій, що мало значення для визначення дійсних запасів міцності. Зокрема, для елементів оболонкових конструкцій при локальних навантаженнях і контактних взаємодіях використовувались поняття теорії граничної рівноваги при моделі ідеально пластичного тіла зі знаходженням зон руйнування, що обмежені лінійними пластичними шарнірами. Конфігурація і параметри цих зон визначалися при розв'язуванні спеціальних задач математичного програмування. На основі досліджень з залученням експериментальних даних створювалися ефективні методики розрахунку, які почали використовуватися як у КБ «Південне», так і багатьох проєктних закладах Києва, Москви, Ленінграда, Міаса, Куйбишева та ін.

У 1963 р. В. С. Гудрамович вступив до заочної аспірантури кафедри прикладної теорії пружності ДНУ (керівник В. І. Моссаковський) і в 1964 р. захистив кандидатську дисертацію. Опонентами виступили професор П. М. Огібалов (МДУ ім. М. В. Ломоносова) і професор Ю. А. Шевляков (ДДУ).

З 1965 р. В. С. Гудрамович за переводом з КБ «Південне» працює в Дніпропетровському державному університеті (старшим викладачем, потім доцентом).

У 1966 р. з ініціативи Генерального конструктора КБ М. К. Янгеля було створено Сектор проблем технічної механіки АН УРСР для вирішення науково-технічних питань ракетно-космічної техніки. Вадима Сергійовича залучили для праці в ньому на посаді старшого наукового співробітника у відділ, який за сумісництвом очолив В. І. Моссаковський. Сектор проблем технічної механіки потім було перетворено в Дніпропетровське Відділення Інституту механіки АН УРСР. З 1980 р. – Інститут технічної механіки АН УРСР (зараз Національної академії наук України і Державного космічного агентства).

У 1968 р. ректор ДНУ В. І. Моссаковський й керівник ДВ ІМ АН УРСР В. А. Лазарян звернулися до Президії Академії наук УРСР з пропозицією про наукове стажування В. С. Гудрамовича в Московському державному університеті ім. М. В. Ломоносова, ведучому науковому центрі країни, з метою розвитку в Дніпропетровську досліджень з нелінійної механіки, зокрема, з теорій пластичності і повзучості, на сучасному рівні. Відповідне рішення Президії АН УРСР про наукове стажування і дослідницьку діяльність Вадима Сергійовича в 1968–1970 рр. на кафедрі теорії пластичності МДУ було прийнято. Керівником наукового стажування (а це дорівнювалося до докторантури) було призначено завідуючого кафедри академіка АН СРСР Юрія Миколайовича Работнова.

Під час стажування Вадим Сергійович продовжував роботу за зазначеними вище науковими напрямами. Він, зокрема, активно працював у галузі досліджень стійкості і несучої здатності тонкостінних систем з урахуванням пластичності і повзучості в механіці контактних взаємодій. В МДУ В. С. Гудрамович відвідував лекції видатних вчених з механіки суцільного середовища та математики. Він зробив ряд доповідей на Всесоюзних семінарах у МДУ і Московському авіаційному інституті. Це були відразу і публікації в журналі «Известия АН СССР. Механика твердого тела». Ю. М. Работнов представив дві його статті в «Доклады АН СССР».

Після повернення зі стажировки Вадим Сергійович працював над проблематикою докторської дисертації. Були зроблені наукові доповіді в Москві (МДУ, МАІ, МВТУ, ЦНДІМаш), Києві (ІМех, ІПМ АН УРСР), Новосибірську (НДУ, Сиб НДДА ім. С. О. Чаплигіна). У 1973 р. він успішно захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук. Опонентами виступили відомі вчені академік АН УРСР А. Д. Коваленко, професори А. С. Вольмір, П. І. Нікітін, Ю. М. Шевченко (згодом академік НАН України), опонуюча організація Сиб НДДА. На дисертацію були одержані відзиви від академіків В. П. Макеева, Ю. М. Работнова, чл.-кор. АН СРСР В. І. Феодосьєва, професорів О. В. Кармішина, А. Г. Угодчикова та ін., а також ЦНДІМаш та багатьох КБ.

Після захисту дисертації Вадим Сергійович продовжив роботу з дослідженнями стійкості і несучої здатності оболонок з урахуванням пластичності і повзучості. Протягом багатьох років він з учнями займався вивченням стійкості пружно-пластичних оболонок при складних історіях навантаження. Теоретичні дослідження, зокрема, засновані на використанні теорії течії кінематично-трансляційного типу Новожилова-

Кадашевича. Створені ефективні методи і алгоритми розрахунку критичних зусиль (біфуркаційних і граничних). Проведено значний цикл експериментальних досліджень стійкості оболонок із АМГ-6 при складному комбінованому навантаженні (більше, ніж 250 експериментів). Досліджені задачі стійкості оболонок при повзучості з використанням критерію початкових недосконалень форми (гладкі, підкріплені оболонки, урахування пластичних деформацій). Такі задачі мають значення для конструкцій ракетної техніки (зокрема, так звана «холодна» повзучість, коли тривалий час відсіки знаходяться під дією постійної осової сили і тиску, які дають напруження, що близькі до межі текучості). Розроблена експериментальна установка (В. С. Гудрамович є автором відповідного патенту) дозволяє проводити випробування моделей оболонкових конструкцій на повзучість та тривалу міцність.

Були продовжені дослідження з механіки контактних взаємодій. Розглядалась низка задач для оболонково-стрижневих систем і основ різного класу при ускладненні умов контакту: урахування пластичних деформацій, поява зон порушення контакту, що є змінними, дефекти і пошкодження контактуючих елементів, різноманітних особливостей структури неоднорідних систем.

Важливими є застосування розв'язків контактних задач у задачах динаміки складних багатомасових систем. Наприклад, при вивченні динаміки ракет «пакетного» типу, рейкових потягів різних типів та ін. об'єкти представляються у вигляді набору мас, які з'єднані пружинами, що моделюють пружно-в'язко-пластичні властивості цих систем (ідея М. Є. Жуковського). За таких випадків при визначенні жорсткостей відповідних «пружин» можливо використовувати результати розв'язування контактних задач «спряження» реальних тонкостінних конструкцій, що моделюються елементами – масами. Розв'язки таких контактних задач використовуються також при дослідженні динамічної стійкості при дії імпульсного локального навантаження, яка оснований на побудові областей динамічної стійкості при розв'язуванні рівнянь Мат'є.

При розв'язуванні задач визначення несучої здатності оболонково-стрижневих конструкцій з урахуванням пластичних деформацій при локальних навантаженнях визначаються верхня і нижня границі (відповідно кінематичний і статичний розв'язок) коефіцієнту запасу (відношення граничного навантаження до діючого) при ідеально пластичній моделі матеріалу. Багатий набір теоретичних розв'язків таких задач супроводжувався проведенням широкого циклу експериментів на оболонках із АМГ-6М при використанні спеціально створених пристроїв.

Другий підхід пов'язаний з вивченням локальної стійкості (для пружних тонких оболонок). Теоретичні дослідження ґрунтувалися на використанні методу локальних варіацій – чисельному методу рішення варіаційних задач. Експериментальні дослідження проведено на спеціально створених пристроях з використанням двухпозиційної високошвидкісної кінозйомки.

Проведені теоретичні дослідження задач несучої здатності і стійкості при локальних навантаженнях добре підтверджуються багаточисленними експериментами.

З 1980 р. Вадим Сергійович серйозну увагу приділяє вивченню впливу полів нерегулярних недосконалостей форми різної фізичної природи і залишкових напружень на напружено-деформівний стан і граничні стани складних оболонково-стрижневих неоднорідних конструкцій. Такі задачі мають велике практичне значення: попередня дія на конструкцію навантажень великої інтенсивності (зокрема, імпульсних) при експлуатації і в технологічних процесах виготовлення приводять до появи полів недосконалостей форми і залишкових напружень, оцінка впливу яких є досить важливою. У цьому напрямку розроблено ефективні чисельні і аналітичні методи розрахунку несучої здатності з урахуванням пластичних деформацій і проведена велика кількість експериментів. Розроблені методи розрахунку використовувались при створенні нової техніки і були відмічені відзнаками і преміями відповідних Міністерств, за ними розроблені державні стандарти.

Слід відзначити загальне теоретичне значення таких досліджень: критерії початкових недосконалостей є найбільш прийнятними при дослідженні критичних станів тонкостінних систем з урахуванням пластичних деформацій і повзучості матеріалу.

Велику увагу приділяв В. С. Гудрамович дослідженню фермових систем, зокрема, космічної техніки, в тому числі з недосконаlostями форми і попереднім натягом гнучких тросових елементів.

Дослідження напружено-деформованого стану і граничних стані пошкоджених структур – основна спрямованість різноманітних напрямків робіт В. С. Гудрамовича. Один з напрямків – застосування методу скінченних елементів (МСЕ) до розрахунку неоднорідних систем з локальними концентраторами різної форми з урахуванням пластичних деформацій при варіаційній постановці задач. Ефективним виявилось застосування проекційно-ітераційних схем реалізації МСЕ і методу локальних варіацій, що дає змогу суттєво (в десятки рази) зменшити час розрахунків. Такі задачі мають значення, зокрема, при розв'язуванні задач моделювання поведінки неоднорідних структур, коли необхідно вирішувати велику кількість однотипних задач. Це має велике значення при розв'язуванні задач механіки руйнування середовищ, коли є локальні концентратори (пори, тріщини, включення), які виникають і трансформуються у процесі навантаження. При цьому суттєво використовуються схеми плоских задач (при пластичних деформаціях доцільно використовувати методи пружких розв'язків, коли будуються схеми послідовних наближень). Корозійна деградація елементів конструкцій також приводить до своєрідних пошкоджень, що з одного боку зменшує розміри (товщина та ін.) елементів, а з другого призводить до необхідності зміни розрахункової схеми. Ці роботи проводяться сумісно з науковцями ДНУ.

Майже 30 років Вадим Сергійович керує роботами і приймає безпосередню участь в створенні оптимальних тонкостінних конструкцій антенно-хвильової техніки (АХТ) і концентруючих систем сонячної енергетики (СЕ) мінімальної ваги з високими міцністними оптичними і електромагнітними властивостями, розробці ефективних технологій їх виготовлення і методів розрахунку міцності, несучої здатності, оптичних характеристик. Суть технологій, які належать до безвідходних та енергозберігаючих, у комплексному використанні методу електролітичного формовання (кристалізація металу з перенасиченого прикатодного шару електроліта при дії електричного струму). Поверхня осадження є точною копією поверхні катоду – матриці, при цьому виготовляється велика кількість однотипних виробів з відбиваючою поверхнею високої якості. Перевагами відповідних технологічних процесів є висока точність виготовлення, мала вага, рівномірність розподілу матеріалу, що регулюється (однорідність структури), можливість виготовлення виробів АХТ і СЕ, що не можуть бути виготовлені з використанням інших технологій. Серед виготовлених на основі розроблених технологій параболічні і дзеркальні антени і концентратори СЕ (діаметри антени 0,2 – 1,6 м, товщина $h = (1,5 \div 4) \cdot 10^{-4}$ м), суцільні хвильоводи з формами перерізів, що змінюються за довжиною, хвильоводи зі зігнутими перерізами змінної площі, конічні антени, в тому числі з ребрами, що формують діаграму спрямованості, пірамідальні і щільні антени, малі концентратори СЕ для фотоелектрики (фокони), двошарові антени з тонкою металевою параболічною поверхнею ($h = 2 \cdot 10^{-3}$ м) і підкріплюючим шаром. Параболічний концентратор з діаметром 1,6 м, $h = (2,5 \div 4) \cdot 10^{-4}$ м та вагою менше, ніж 10 кг, із нікелю експлуатується, наприклад, у Геліоцентрі ПІМ НАН України (п. Кацивелі, Крим). Колімаційне дзеркало розміром 5×6 м, що складається з 70 антенних двошарових щитів: метал-компаунд, експлуатується в складі наземного антенного полігону в КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля. Матеріалом, з якого можуть бути виготовлені вироби АХТ і СЕ можуть бути: нікель, інвар (сплав нікелю з залізом), алюміній. Поряд з розробкою технологічних процесів теоретично і експериментально досліджені різноманітні задачі статички, динаміки і оптики виробів антенно-хвильової техніки і сонячної енергетики. Розробки з технологій та відповідні дослідження впроваджені на підприємствах і в науково-дослідних організаціях аерокосмічної галузі і космічного зв'язку Дніпропетровська, Києва, Москви, Санкт-Петербурга, Красноярська, Омська та ін. Ці розробки зацікавили зарубіжних партнерів. На основі їх виконувались 2 контракти, а одним з них виконується і зараз контракт, які фінансуються США і Канадою.

Вадим Сергійович успішно поєднує наукову і педагогічну діяльність. З 1975 р. він працює професором кафедри, створеної В. І. Моссаковським (зараз це

кафедра обчислювальної механіки і міцності конструкцій), за сумісництвом. Він читав курси з теорії пластин і оболонок, опору матеріалів, теорії пластичності, біомеханіки. Зараз викладає дисципліни «Основи теорії в'язкопружності і повзучості», «Методи розрахунку конструкцій з урахуванням пластичних деформацій». Він нагороджений Почесним знаком МВО України «Відмінник освіти».

В. С. Гудрамович перебував у багатьох країнах, приймаючи участь у міжнародних наукових форумах, читаючи лекції, або перебуваючи в службових відрядженнях.

Отримані В. С. Гудрамовичем результати досліджень використані при вирішенні важливих прикладних задач нелінійної механіки деформівного твердого тіла, динаміки і міцності конструкцій пріоритетних галузей техніки: ракетно-космічній, енергетики, транспорту, нафтогазовій, у промисловому і цивільному будівництві, при створенні технологічних процесів виготовлення ефективних пристроїв антенно-хвилеводної техніки, зв'язку і радіоастрономії, концентруючих систем сонячної енергетики та дослідження їх динаміки і міцності.

Він одержав Державну премію України в галузі науки і техніки (1997 р.), став лауреатом премії НАН України ім. акад. М. К. Янгеля (1997 р.) і премії НАН України ім. акад. С. П. Тимошенка (2004 р.).

Президія НАН України відзначила Вадима Сергійовича Почесною відзнакою «За наукові досягнення».

На завершення наведемо слова редакційної статті, що була присвячена 100-річчю зі дня народження видатного вченого-механіка сучасності лауреата Ленінської премії, Героя Соціалістичної Праці академіка В. В. Новожилова (Известия РАН. Механика твердого тела, 2010, № 6): «... вчений-механік повинен бути пов'язаним з тою чи іншою галуззю техніки і інженерної справи, концентрувати свої зусилля на виникаючих тут справжніх фундаментальних і прикладних проблемах...».

Наукова діяльність В. С. Гудрамовича повністю відповідає цій глибокій думці, що визначає діяльність багатьох видатних вітчизняних вчених-механіків, починаючи з Степана Прокоповича Тимошенка.

Свій ювілей Вадим Сергійович Гудрамович зустрічає в розквіті творчої енергії, повний нових задумів і ідей.

Список основних наукових публікацій В. С. Гудрамовича

1. Моссаковский В. И. Контактные задачи теории оболочек и стержней / В. И. Моссаковский, В. С. Гудрамович, Е. М. Макеев. – М. : Машиностроение, 1978. – 248 с.
2. Гудрамович В. С. Несущая способность и долговечность элементов конструкций / В. С. Гудрамович, Е. С. Переверзев. – К. : Наук. думка, 1981. – 284 с.
3. Гудрамович В. С. Предельные состояния оболочек при сложном нагружении и ползучести материала / В. С. Гудрамович, В. П. Герасимов, В. С. Коноваленков, В. П. Пошивалов. – К. : Наук. думка, 1984. – 254 с.
4. Гудрамович В. С. Тонкостенные элементы зеркальных антенн / В. С. Гудрамович, И. А. Дисковский, Е. М. Макеев. – К. : Наук. думка, 1986. – 153 с.
5. Гудрамович В. С. Устойчивость упругопластических оболочек / В. С. Гудрамович. – К. : Наук. думка, 1987. – 216 с.
6. Моссаковский В. И. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций / В. И. Моссаковский, В. С. Гудрамович, Е. М. Макеев. – К. : Наук. думка, 1988. – 288 с.
7. Гудрамович В. С. Предельный анализ элементов конструкций / В. С. Гудрамович, В. П. Герасимов, А. Ф. Деменков. – К. : Наук. думка, 1990. – 136 с.
8. Гудрамович В. С. Упругопластические конструкции с несовершенствами формы и остаточными напряжениями / В. С. Гудрамович, А. Ф. Деменков. – К. : Наук. думка, 1991. – 173 с.
9. Гудрамович В. С. Теория ползучести и ее приложения к расчету элементов тонкостенных конструкций. – К. : Наук. думка, 2005. – 222 с.
10. Аксененко А. В. Работоспособность оболочечных конструкций при локальном ударном нагружении / А. В. Аксененко, В. С. Гудрамович, А. П. Дзюба, А. К. Козлов. – Дн. : Изд-во ДНУ, 2006. – 216 с.
11. Гудрамович В. С. Контактная задача для упругого кольца, подкрепляющего цилиндрическую оболочку / В. С. Гудрамович, В. И. Моссаковский // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1961. – № 2. – С. 153–156.
12. Гудрамович В. С. Общий случай плоской контактной задачи для распорного кольца / В. С. Гудрамович, В. И. Моссаковский // Прикл. механика. – 1966. – Т. 2. – № 6. – С. 1–10.
13. Гудрамович В. С. К исследованию пластической устойчивости цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении / В. С. Гудрамович // Прикл. механика. – 1971. – Т. 7. – № 9. – С. 25–30.
14. Гудрамович В. С. О граничных поверхностях в задачах пластической устойчивости цилиндрических оболочек / В. С. Гудрамович // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1972. – № 1. – С. 60–63.

15. Гудрамович В. С. Несущая способность шпангоутов при действии сосредоточенных сил / В. С. Гудрамович // Известия вузов, Авиационная техника. – 1972. – № 1. – С. 125–128.
16. Гудрамович В. С. Пластическое выпучивание цилиндрической оболочки конечной длины при импульсном локальном нагружении / В. С. Гудрамович // Теория оболочек и пластин. Труды VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1973. – С. 125–130.
17. Галкин В. Ф. О влиянии предела текучести на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии / В. Ф. Галкин, В. С. Гудрамович, В. И. Моссаковский, И. Н. Спиридонов // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 3. – С. 180–182.
18. Гудрамович В. С. О критических поверхностях в задачах выпучивания пластин и оболочек за пределами упругости / В. С. Гудрамович // Труды X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – Тбилиси: Мецниереба, 1975. – Т. 1. – С. 366–373.
19. Моссаковский В. И. Контактные задачи теории оболочек / В. И. Моссаковский, В. С. Гудрамович // Контактная прочность пространственных конструкций. – К.: Наук. думка, 1976. – С. 3–39.
20. Гудрамович В. С. Контактные задачи сопряжения для систем пологих оболочек и силовых колец при произвольном нагружении / В. С. Гудрамович // Контактная прочность пространственных конструкций. – К.: Наук. думка, 1976. – С. 56–66.
21. Гудрамович В. С. Об изгибе и несущей способности цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами формы и остаточными напряжениями / В. С. Гудрамович, А. Ф. Деменков // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 1. – С. 29–33.
22. Гудрамович В. С. Выпучивание цилиндрических оболочек за пределами упругости при сложном нагружении / В. С. Гудрамович, Л. П. Заварыкин // Прикл. механика. – 1977. – Т. 13. – № 1. – С. 61–68.
23. Гудрамович В. С. О локальной устойчивости сферических оболочек / В. С. Гудрамович, И. А. Дисковский // Доклады АН СССР. – 1977. – Т. 232. – № 6. – С. 1285–1288.
24. Гудрамович В. С. О влиянии истории нагружения на выпучивание цилиндрических оболочек за пределами упругости / В. С. Гудрамович, В. С. Коноваленков // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 5. – С. 512–515.
25. Гудрамович В. С. Применение высокоскоростной киносъемки при экспериментальном исследовании процесса локальной потери устойчивости / В. С. Гудрамович, И. А. Дисковский, Н. А. Коновалов // Журнал науч. и прикладной фотографии и кинематографии АН СССР. – 1979. – Т. 24. – № 1. – С. 14–20.
26. Гудрамович В. С. К исследованию выпучивания оболочек в условиях ползучести / В. С. Гудрамович, В. П. Пошивалов // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 245. – № 6. – С. 1329–1332.
27. Гудрамович В. С. Пластическое разрушение составных оболочечных конструкций / В. С. Гудрамович, В. П. Герасимов, И. Ф. Ларионов, Ю. И. Саввин // Проблемы прочности. – 1979. – № 11. – С. 58–61.
28. Гудрамович В. С. Устойчивость и несущая способность пластических оболочек / В. С. Гудрамович // Прочность и долговечность конструкций. – К.: 1980. – С. 15–31.
29. Гудрамович В. С. Исследование пластического выпучивания цилиндрических оболочек при сложных путях нагружения / В. С. Гудрамович, А. П. Гайдученко, М. Ф. Демешко, В. С. Коноваленков // Прикл. механика. – 1980. – Т. 16. – № 1. – С. 26–31.
30. Гудрамович В. С. Статика и динамика жесткопластических цилиндрических оболочек при локальном нагружении / В. С. Гудрамович, В. П. Герасимов // Труды XII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – Ереван: Изд. ЕГУ, 1980. – Т. 2. – С. 50–56.
31. Величкин В. А. Колебания системы с физически нелинейными характеристиками при импульсном нагружении / В. А. Величкин, В. С. Гудрамович, В. В. Пилипенко и др. // Прочность и надежность технических устройств. – К.: Наук. думка, 1981. – С. 4–10.
32. Гудрамович В. С. Критические состояния неупругих оболочек при сложном нагружении / В. С. Гудрамович // Матер. Всесоюз. симп.: Устойчивость в механике деформируемого твердого тела. – Калинин: Изд. КПИ, 1981. – Т. 1. – С. 61–87.
33. Гудрамович В. С. Несущая способность неидеальных цилиндрических оболочек с учетом пластических деформаций / В. С. Гудрамович, А. Ф. Деменков, С. Н. Конюхов // Прочность и надежность элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1982. – С. 45–48.
34. Гудрамович В. С. Установка для испытаний на ползучесть и длительную прочность / В. С. Гудрамович, А. П. Гайдученко, М. Ф. Демешко, Л. В. Михайленко // А. с. № 930056. Приоритет изобр. 04.12.80. Оpubл. 23.05.82.
35. Гудрамович В. С. Критические состояния упругопластических цилиндрических оболочек с учетом истории нагружения / В. С. Гудрамович, В. С. Коноваленков // Труды XIII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. – Таллин: Изд. ТПИ, 1983. – С. 35–40.
36. Гудрамович В. С. Деформирование и несущая способность упругопластических цилиндрических оболочек с несовершенствами формы и остаточными напряжениями / В. С. Гудрамович, А. Ф. Деменков // Прикл. механика. – 1985. – Т. 21. – № 7. – С. 62–68.
37. Гудрамович В. С. Контактное взаимодействие оболочечных конструкций с упругими основаниями при усложненных условиях эксплуатации / В. С. Гудрамович, Е. М. Макеев, В. И. Моссаковский, П. И. Никитин // Проблемы прочности. – 1985. – № 10. – С. 108–114.
38. Гудрамович В. С. Вопросы прочности и жесткости элементов космических ферменных конструкций / В. С. Гудрамович, Е. М. Макеев, В. П. Семенов // Проблемы космической технологии металлов. – К.: Наук. думка, 1985. – С. 31–39.
39. Гудрамович В. С. Метод и программа расчета на ЭВМ цилиндрической оболочки с начальными несовершенствами формы и остаточными напряжениями. Методические рекомендации МР 184–85 /

- В. С. Гудрамович, А. Ф. Деменков // Расчеты и испытания на прочность. – М. : ВНИИНАШ Госстандарта СССР, 1985. – 28 с.
40. Гудрамович В. С. Технология изготовления элементов крупногабаритных космических антенн на основе метода электроритического формования / В. С. Гудрамович, И. А. Дисковский, А. И. Коваленко // Проблемы космической технологии металлов. – К. : ИЭС им. Е.О. Патона, 1986. – С. 77–82.
41. Гудрамович В. С. Деформирование и предельное состояние неупругих оболочек с учетом истории нагружения / В. С. Гудрамович, В. С. Коноваленков // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 3. – С. 157–163.
42. Гудрамович В. С. Параболические оболочки под действием солнечного излучения / В. С. Гудрамович, И. А. Дисковский, Ю. С. Сельский // Прикл. механика. – 1987. – Т. 28. – № 11. – С. 38–45.
43. Гудрамович В. С. Установка для динамических испытаний образцов, материалов и изделий / В. С. Гудрамович, Л. В. Михайленко, В. Л. Суколенов и др. // А. с. № 1307292 СССР. Приоритет изобр. 23.12.1985. Опубл. 3.01.87.
44. Гудрамович В. С. Влияние локального нагрева кругового выреза на устойчивость упругопластических цилиндрических оболочек при осевом сжатии / В. С. Гудрамович, В. Н. Ведерников, В. Г. Зубчанинов, В. Н. Лотов // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 5. – С. 29–31.
45. Алпатов А. П. Физико-механические свойства реберных хрящей и разработка активных методов воздействия на их формообразование в возрастном аспекте / А. П. Алпатов, В. С. Гудрамович, А. И. Бойко и др. // Труды VI Всесоюз. конф. детских хирургов. «Новые направления в лечении хирургической инфекции у детей». – М. : ММИ, 1988. – С. 193–194.
46. Гудрамович В. С. Экспериментальное исследование деформирования и несущей способности цилиндрических оболочек с круговыми вырезами / В. С. Гудрамович, А. Ф. Деменков, А. Ф. Яценко, М. Ф. Демешко // Проблемы прочности. – 1989. – № 10. – С. 65–67.
47. Гудрамович В. С. Контактное взаимодействие оболочечной конструкции и основания при учете их упругопластических свойств / В. С. Гудрамович, И. В. Пасечник // Прикл. механика. – 1989. – Т. 25. – № 11. – С. 38–44.
48. Гудрамович В. С. Экспериментальное исследование динамических характеристик тонкостенной зеркальной антенны с применением двухпозиционной высокоскоростной кино съемки / В. С. Гудрамович, И. А. Дисковский, Н. А. Коновалов, И. М. Майтала // Журнал науч. и прикладной фотографии и кинематографии АН СССР. – 1989. – Т. 34. – № 5. – С. 321–326.
49. Гудрамович В. С. Установка для изготовления изделий методом гальванопластики / В. С. Гудрамович, А. П. Гайдученко, А. И. Коваленко // А. с. № 1611995. Приоритет изобр. 20.11.88. Опубл. 8.08.90.
50. Гудрамович В. С. Теоретико-экспериментальные исследования деформирования фрагментов крупногабаритных космических ферменных конструкций / В. С. Гудрамович, В. Ф. Галкин, А. Ф. Деменков, М. Ф. Демешко и др. // Космическая наука и техника. – 1991. – № 6. – С. 58–62.
51. Гудрамович В. С. Исследование деформирования и критических состояний упругопластических подкрепленных шпангоутами цилиндрических оболочек при внешнем давлении / В. С. Гудрамович, А. Ф. Деменков, А. В. Репринцев // Доклады НАН Украины. Сер. А. – 1996. – № 10. – С. 75–79.
52. Hudramovich V. S. Calvanoplastics – based technology for the production of antenna equipment and radiant – energy concentrators / V. S. Hudramovich, A. P. Gaiduchenko // Proc. of 5th European Conf. on advanced materials, processes and applications. – Zwijndrecht : Publ. Netherlands Soc. Materials Sci. – 1977. – V. 4. – P. 475–478.
53. Гудрамович В. С. Несущая способность цилиндрических оболочек при неравномерном нагружении с учетом геометрической и физической нелинейности / В. С. Гудрамович, А. В. Гладкий // Техн. механика. – 1997. – № 5. – С. 121–126.
54. Hudramovich V. S. Carrying capacity of locally loaded shell structures / V. S. Hudramovich // Proc. of Intern. Conf. “Carrying capacity of shell structures” / Ed. V. Krupka, P. Shneider. – Brno, Czech Republic, 1997. – P. 145–151.
55. Hudramovich V. S. Numerical simulation of nonlinear contact interaction between shell – structures and supports (stamps) of different types / V. S. Hudramovich // Progress and Trends in rheology. Proc. of 5th European rheology conf. / Ed. I. Emry. – Darmstadt : Springer, 1998. – P. 351–352.
56. Lebedev A. A. Kinetics of accumulation of scattered damages in metallic materials under static deformation / A. A. Lebedev, N. G. Chausov, V. S. Hudramovich // Proc. of 10th Intern. Sympos. on metallography «Metallography – 98» / Ed. I. Hrivnak. – Košice, Slovakia, 1998. – P. 461–464.
57. Hudramovich V. S. Estimation of the effect of deformability of shell reservoirs on measurement errors of oil product volumes / V. S. Hudramovich, A. F. Demenkov, V. N. Ivanovsky et al // Доклады НАН Украины. Сер. А. – 1998. – № 9. – С. 58–62.
58. Lebedev A. A. Micro- and macrostructural aspects of plastic deformation of metastable steels / A. A. Lebedev, V. V. Kosarchuk, V. S. Hudramovich // Solid mechanics and its applications. – V. 62 / Ed. Gladwell G. M. L., Proc. of IUTAM Symp. «Micro – and Macrostructural aspects of thermoplasticity» / Ed. O. Bruhns, E. Stein. – Dordrecht / Boston / London : Kluwer Acad. Publ., 1999. – P. 355–362.
59. Hudramovich V. S. Plastic and creep instability of shells with initial imperfections / V. S. Hudramovich // Solid mechanics and its applications. – V. 64 / Ed. Gladwell G. M. L., Proc. of IUTAM Symp. «Rheology of bodies with defects» / Ed. Wan Reng. – Dordrecht / Boston / London : Kluwer Acad. Publ., 1999. – P. 277–289.
60. Hudramovich V. S. Strength of locally loaded thinwalled structures of marine vehicles / V. S. Hudramovich // High Speed marine vehicles. Proc. of 5th Intern. Symp. – Napoli, Italy : Univ. Federico II, 1999. – P. IV.1.1 – IV.1.12.

61. *Hudramovich V. S.* Plastic deformation and limit states of metal shell structures with initial shape imperfections / V. S. Hudramovich, A. A. Lebedev, V. I. Mossakovsky // *Light – weight steel and aluminium structures. Proc. of Intern. conf. / Ed. P. Makelainen.* – Amsterdam / Lausanne / New York / Tokyo : Elsevier, 1999. – P. 257–263.
62. *Hudramovich V. S.* Influence of damage of the rocket–space girds structures on their deformation and carrying capacity / V. S. Hudramovich, A. F. Demenkov // *Proc. of 5th Symp. on space science and technology. Intern. forum on astronautics and aeronautics.* – Harbin, China : Publ. Institute of Technology, 2000. – P. 121–127.
63. *Гудрамович В. С.* Влияние технологических дефектов (начальные прогибы и остаточные напряжения) на деформирование и предельное состояние ферменных конструкций / В. С. Гудрамович, А. Ф. Деменков, Е. В. Самарская // *Труды Международн. конф. «Оценка и обоснование продления ресурса элементов конструкций».* – К. : ИПП НАНУ, 2000. – Т. 1. – С. 455–460.
64. *Гудрамович В. С.* Технологии изготовления устройств антенно-волноводной техники и солнечной энергетики, основанные на методе электролитического формирования / В. С. Гудрамович, А. П. Гайдученко, А. И. Коваленко // *Космічна наука і технологія.* – 2001. – Т. 7. – № 2/3. – С. 66–77.
65. *Гудрамович В. С.* Исследование прочности конструкций ракетно-космической техники в некоторых экстремальных условиях эксплуатации / В. С. Гудрамович // *Техн. механика.* – 2001. – № 2. – С. 74–87.
66. *Гудрамович В. С.* Влияние остаточных напряжений на устойчивость тонкостенных элементов антенной техники и гелиоэнергетики, изготовленных методом электролитического формирования / В. С. Гудрамович, А. Ф. Деменков, А. В. Репринцев // *Техн. механика.* – 2002. – № 1. – С. 82–86.
67. *Гудрамович В. С.* Методы расчета прочности оболочечных конструкций ракетно-космической техники при локальных нагрузках и контактных взаимодействиях / В. С. Гудрамович // *Космічна наука і технологія.* – 2002. – Т. 8. – № 4. – С. 11–24.
68. *Hudramovich V. S. Demenkov A.* Analysis of influence of the cylindrical tanks deformability on measurement errors of product volumes / V. S. Hudramovich, A. F. Demenkov // *Proc. of Intern. conf. on design, inspection, maintenance and operation of cylindrical steel tanks and pipelines / Ed. V. Krupka.* – Prague, Czech Republic, 2003. – P. 346–350.
69. *Гудрамович В. С.* Предельный анализ – эффективный способ оценки конструкционной прочности оболочечных систем / В. С. Гудрамович // *Труды 3 Міжнар. конф. «Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій».* – Львів, 2004. – С. 583–588.
70. *Гудрамович В. С.* Остаточные напряжения в тонкостенных конструктивных элементах устройств антенно-волноводной техники и солнечной энергетики, изготовленных методом электролитического формирования / В. С. Гудрамович, А. Ф. Деменков, А. И. Коваленко и др. // *Техн. механика.* – 2004. – № 1. – С. 135–140.
71. *Hudramovich V. S.* Features of nonlinear deformation and critical states of shell systems with geometrical imperfections / V. S. Hudramovich // *Intern. Appl. Mech.* – 2006. – V. 42. – № 12. – P. 1323–1355.
72. *Hudramovich V. S.* On influence of the technology of manufacturing on the loadbearing capacity of steel tanks / V. S. Hudramovich, A. F. Demenkov, E. A. Egorov, A. V. Reprintsev // *Strength of Materials.* – 2006. – V. 38. – № 4. – P. 423–427.
73. *Гудрамович В. С.* Эффективные технологические схемы изготовления высокоточных волноводных систем / В. С. Гудрамович // *Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Акустика і хвилі.* – К. : Наук. думка, 2007. – С. 94–99.
74. *Гудрамович В. С.* Проекційно-ітераційні модифікації методу локальних варіацій та аспекти їх застосування в задачах локальної стійкості оболонок / Вадим Гудрамович, Етері Гарт // *Сучасні проблеми механіки та математики. Матер. Міжнарод. наук. конф.* – Львів : ППІМ НАНУ, 2008. – Т. 1. – С. 18–20.
75. *Левин В. М.* Особенности процесса формирования напряжённо-деформированного состояния пространственных несущих систем железобетонных башенных сооружений / В. М. Левин, В. С. Гудрамович, В. А. Митраков и др. // *Пространственные конструкции зданий и сооружений.* – М. : Стройиздат, 2008. – Вып. 11. – С. 150–163.
76. *Гудрамович В. С.* Контактные задачи теории оболочечно-стержневых систем в механике конструкций ракетно-космической техники / В. С. Гудрамович // *Техн. механика.* – 2008. – № 2. – С. 52–66.
77. *Гудрамович В. С.* Вплив форми скінченного елементу на обчислювальну ефективність проекційно-ітераційних методів при розв'язуванні плоскої задачі теорії пружності / В. С. Гудрамович, Е. Л. Гарт // *Вісник Київського ун-ту. Сер фізико-математичні науки.* – 2008. – Вип. 4. – С. 53–58.
78. *Hudramovich V. S.* Contact interactions and optimization of shell structures under local loading / V. S. Hudramovich, A. P. Dzyuba // *Journ. of Math. Sci.* – 2009. – V. 162. – № 2. – P. 231–245.
79. *Гудрамович В. С.* Упругопластическое деформирование прямоугольных пластин с двумя отверстиями различной формы / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, С. А. Рябоконт // *Техн. механика.* – 2009. – № 4. – С. 102–110.
80. *Hudramovich V. S.* Contact mechanics of shell structures under local loading / V. S. Hudramovich // *Intern. Appl. Mech.* – 2009. – V. 45. – № 7. – P. 708–729.
81. *Гудрамович В. С.* Проблемы динамики и прочности конструкций концентраторов солнечной энергии / В. С. Гудрамович // *Матер. Междуна. научн. конф. «Проблемы использования альтернативных источников энергии в Туркменистане».* – Ашхабад : Ylum, 2010. – С. 46–49.
82. *Гудрамович В. С.* Основные проблемы разработки концентраторов солнечной энергетики / В. С. Гудрамович // *Матер. Междуна. научн. конф. «Наука, техника и инновационные технологии в эпоху Великого Возрождения».* – Ашхабад : Ylum, 2010. – С. 184–187.
83. *Гудрамович В. С.* Проекционно-итерационные схемы реализации метода конечных элементов в задачах упругопластического деформирования пластин с отверстиями / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт // *Упругость и неупругость. Матер. Междуна. симп. посв. 100-летию со дня рожд. А. А. Ильющина.* – М. : Изд. МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011. – С. 144–147.
84. *Hudramovich V. S.* Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates / V. S. Hudramovich, E. L. Hart, S. A. Rjabokon // *Journ. of Eng. Math.* – 2011. – DOI: 10.1007/s 10665–010–9409–5. – Режим доступа : <http://www.springerlink.com/content/100287>.

УДК 629.7.015.3: 533.6.011.8

В. П. Басс

*Институт технической механики НАН Украины и
Государственного космического агентства*

СОВРЕМЕННЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

Виконано огляд сучасного стану рішення задач молекулярної газової динаміки. Акцент зроблено на застосуванні методу пробних часток рішення кінетичного рівняння Больцмана. Наведені алгоритм та результати рішення трьохвимірних задач динаміки розрідженого газу відносно зразків ракетно-космічної техніки.

Ключові слова: молекулярна газова динаміка, метод пробних часток, рівняння Больцмана, трьохвимірні задачі, ракетно-космічна техніка, число Кнудсена, функція розподілення, алгоритм рішення.

Выполнен обзор современного состояния решения задач молекулярной газовой динамики. Акцент сделан на применении метода пробных частиц решения кинетического уравнения Больцмана. Приведены алгоритм и результаты решения трехмерных задач динамики разреженного газа применительно к образцам ракетно-космической техники.

Ключевые слова: молекулярная газовая динамика, метод пробных частиц, уравнение Больцмана, трёхмерные задачи, ракетно-космическая техника, число Кнудсена, функция распределения, алгоритм решения.

The review of modern state for solution of molecular gas dynamics problems is made. The emphasis is on method of sampling particles for solution of Boltzmann kinetic equation. The algorithms and results of three-dimensional problems solutions for dynamics of rarefied gas in connection with specimens of rocket-space techniques are given.

Kew words: molecular gas dynamics, method of sampling particles; Boltzmann equation, three-dimensional problems, rocket-space technique, Knudsen number, function of distribution, algorithm of solution.

Введение. Почти 140 лет назад гениальный австрийский физик Людвиг Больцман опубликовал свое знаменитое уравнение, которое по широте и глубине возможных приложений имеет непреходящую ценность. При изучении течений, в которых характерные линейный и временной масштабы намного больше соответствующих длин и времен свободного пробега молекул, уравнение Больцмана содержит малый параметр – число Кнудсена. Это обстоятельство естественным образом приводит к идее поиска его решения в виде разложения в степенной ряд. Впервые такое решение построено Гильбертом в 1912 году. Оказалось, что функция распределения нулевого приближения удовлетворяет однородному уравнению Больцмана, а функция распределения высших приближений – рекуррентной системе линейных интегральных уравнений.

Немного другую процедуру разложения по малому параметру предложил Энског и независимо от него Чепмен. Реализуя эту процедуру, получаем – в нулевом приближении локально – максвелловскую функцию распределения, а для гидродинамических переменных – уравнения Эйлера. В первом приближении получаем уравнения Навье-Стокса; в следующих приближениях – уравнения Барнета; уравнения третьего порядка и т. д. Вопрос о сходимости ряда Чепмена-Энскага чрезвычайно сложен и в каждой конкретной задаче должен решаться самостоятельно. Во всяком случае, до сих пор вопрос даже об асимптотической сходимости метода

Чепмена-Энскога решения уравнения Больцмана остается открытым. Поскольку при больших и малых числах Кнудсена уравнение Больцмана содержит тот или иной малый параметр, то в отдельных случаях удается построить аналитические решения. При промежуточных числах Кнудсена аналитических решений нет, и единственным методом получения информации о решении уравнения Больцмана являются численные методы и в первую очередь – статистические методы.

Родоначальниками статистических методов являются Г. Берд (G.A. Bird), а также Дж.К. Хэвилэнд (J.K. Haviland). В середине 1960-х годов в серии работ ими были созданы первые рабочие версии нестационарных и стационарных численных методов, показавших свою эффективность на ряде задач об одномерных и плоских течениях разреженного газа. Среди отечественных ученых наибольший вклад в обоснование и развитие этих методов внесли О.М. Белоцерковский и В.Е. Яницкий (ВЦ РАН, г. Москва). Сотрудники ВЦ РАН В.В. Аристов, А.М. Бишаев, И.Н. Ларина, В.А. Рыков, Ф.Г. Черемисин, Е.М. Шахов получили оригинальные решения для модельных кинетических уравнений. Особое место в развитии методов статистического моделирования принадлежит отечественной школе во главе с М.Н. Коганом (ЦАГИ им. проф. Н.Е. Жуковского). Здесь следует отметить работы В.И. Власова, С.Л. Горелова, А.И. Ерофеева, В.А. Перепухова, В.В. Рябова, Ю.И. Хлопкова и др. Традиционно фундаментальными работами выделяется Новосибирская школа механиков и аэродинамиков: А.К. Ребров (Институт теплофизики СО РАН), Ю.Н. Григорьев, М.С. Иванов, С.В. Рогазинский (ИТПМ СО РАН, ВЦ СО РАН, Институт вычислительных технологий Минобрнауки РФ), В.Я. Рудяк (Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет). Существенный прогресс в развитии параллельных алгоритмов прямого статистического моделирования течений разреженного газа на многопроцессорных вычислительных системах достигнут учеными и специалистами С.-Петербургского Института высокопроизводительных вычислений и баз данных (Н.Ю. Быков, И.А. Гришин, В.В. Захаров, Г.А. Лукьянов, Гр.О. Ханларов). Оригинальные учебные пособия по кинетической теории разреженного газа созданы в Балтийском государственном техническом университете «Военмех» (А.Н. Волков). Краткий обзор результатов, полученных разными авторами, можно найти в [1].

Это далеко не полный перечень отечественных ученых и специалистов, чьи усилиями методы динамики разреженного газа и молекулярной газовой динамики оформились в самостоятельный раздел вычислительной механики.

В данной работе развивается метод пробных частиц (МПЧ), который является естественным развитием классического статистического метода Монте-Карло для решения уравнения Больцмана и основан на специальном итеративном процессе. Метод случайных блужданий пробных молекул на фоне полевых – введен Хэвилэндом [2; 3] как модификация метода, известного в теории переноса нейтронов. Метод получил в дальнейшем строгое теоретическое обоснование в рамках общей теории методов Монте-Карло как метод решения соответствующей краевой задачи для уравнения Больцмана [4; 5].

Метод Монте-Карло основывается на том, что при стационарном течении на большом временном интервале среднее время, проведенное молекулами в любой области фазового пространства, пропорционально функции распределения молекул по скоростям $f(\vec{x}, \vec{\xi})$. Таким образом, если движение пробной молекулы можно представить в аналитическом виде и принять соответствующую модель случайных столкновений с другими молекулами, то функция распределения вместе с любыми

ее моментами (аэродинамическими параметрами) может быть вычислена, исходя из суммарного времени, проведенного молекулами в каждом элементе фазового пространства. Другими словами, вычисление параметров газа в расчетных ячейках основано на эргодической гипотезе, согласно которой фазовые средние равны соответствующим средним по времени.

Общее описание алгоритма. Сущность метода пробных молекул заключается в следующем. Вокруг тела выделяется некоторая прямоугольная расчетная область с внешней границей G , которая разбивается на элементарные ячейки Ω (рис. 1).

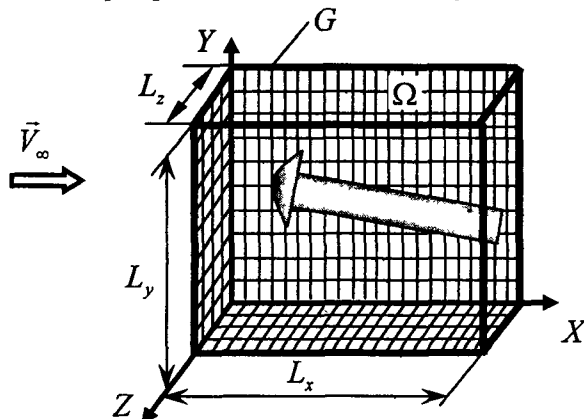


Рис. 1. Расчетная область для решения трехмерных задач

В зависимости от специфики решаемой задачи и режима обтекания сетка может быть неравномерной и адаптированной к поведению газодинамических параметров в отдельных областях расчетной области. При этом средний линейный размер ячейки не должен превышать местную длину свободного пробега молекул. На границе G функция распределения влетающих в Ω молекул соответствует невозмущенному потоку. Внутри каждой ячейки Ω параметры газа считаем постоянными, а функцию распределения $f(\vec{x}, \vec{\xi})$ – не зависящей от координаты $\vec{x} \in \Omega$.

В каждой ячейке Ω запоминаем числовую плотность газа n и один случайный вектор – скорость полевой молекулы $\vec{\xi}_1$ с плотностью вероятности, равной нормированной функции распределения $\frac{1}{n} f(\vec{x}, \vec{\xi}_1)$. Это значит, что вероятность в произвольный момент времени обнаружить в ячейке Ω полевую скорость $\vec{\xi}_1$ из интервала $d\vec{\xi} = d\xi_x d\xi_y d\xi_z$ вокруг вектора $\vec{\xi}$ должна равняться

$$P\{\vec{\xi}_1 \in (\vec{\xi}, d\vec{\xi})\} = \frac{1}{n} f(\vec{\xi}) d\vec{\xi}. \quad (1)$$

На этом поле плотности n и полевых молекулярных скоростей $\vec{\xi}_1$ моделируем случайные блуждания одной пробной молекулы $\vec{\xi}$, которая влетает в расчетную область через внешнюю границу G в соответствии с известной граничной функцией распределения входящих молекул. Когда молекула выходит из расчетной области, вместо нее вбрасываем через G другую пробную молекулу и т. д.

При пролёте пробной молекулы со скоростью $\vec{\xi}$ через ячейку Ω за время Δt запоминаем ее скорость $\vec{\xi}$ в этой ячейке в качестве полевой скорости $\vec{\xi}_1$ с вероят-

ністю, пропорціональної Δt . Вероятність столкновения $\bar{\xi}$ с $\bar{\xi}_1$ во время пролета равна $ng\sigma\Delta t$, где $g = |\bar{\xi} - \bar{\xi}_1|$, а σ – полное сечение столкновения молекул. Соответствующая плотность вероятности такого события равна

$$f(\rho) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{\rho}{\lambda}\right), \quad (2)$$

где $\lambda = \xi/ng\sigma$ – средняя длина свободного пробега пробных молекул. Соответственно среднее время свободного пробега равно $\tau = 1/ng\sigma$.

В начальный момент влета пробной молекулы в расчетную область (или после очередного столкновения) время свободного пробега τ' разыгрывается по формуле

$$\tau' = -\tau \ln R, \quad (3),$$

где R – случайное число, равномерно распределенное на промежутке $[0; 1]$.

При пролете молекулы через каждую из ячеек по известным координатам границ ячеек и значению скорости пробной молекулы $\bar{\xi}$ рассчитывается время пролета ячейки Δt . Оценивается время τ'' до очередного возможного столкновения

$$\tau'' = \tau' - n\Delta t. \quad (4)$$

До тех пор, пока $\tau'' > 0$, молекула движется свободно, т. е. переходит из одной расчетной ячейки в другую. В той ячейке, для которой $\tau'' < 0$, разыгрывается столкновение пробной молекулы с полевой.

Вычисление новой скорости пробной молекулы $\bar{\xi}'$ производится по формуле для столкновений упругих сфер

$$\bar{\xi}' = \frac{1}{2}(\bar{\xi} + \bar{\xi}_1 + g\bar{e}), \quad (5)$$

где \bar{e} – случайный вектор, равномерно распределенный на единичной сфере.

При попадании пробной молекулы на поверхность тела записываются соответствующие молекулярные признаки. К примеру, для сил и моментов

$$\begin{aligned} F_x &= \sum \xi_x, & F_y &= \sum \xi_y, & F_z &= \sum \xi_z; \\ M_x &= \sum (y \cdot \xi_z - z \cdot \xi_y); & M_y &= \sum (z \cdot \xi_x - x \cdot \xi_z); \\ M_z &= \sum (x \cdot \xi_y - y \cdot \xi_x), \end{aligned} \quad (6)$$

где x, y, z – координаты пересечения траектории молекулы с поверхностью тела; ξ_x, ξ_y, ξ_z – составляющие скорости пробной молекулы (падающей и отраженной).

Отражение пробных молекул от поверхности тела происходит в соответствии с максвелловской функцией распределения по скоростям при температуре стенки. После отражения от поверхности молекулы вновь начинают блуждать на фоне полевых вплоть до вылета за пределы расчетной области.

Описанный выше процесс называется одним испытанием. После проведения N испытаний соответствующие аэрогазодинамические величины осредняются по числу испытаний и умножаются на суммарный поток молекул N_0 в расчетную область через ее границу G в соответствии с невозмущенной функцией распределения. Для сил и моментов получаем

$$\bar{F}_i = \frac{mN_0}{N} F_i; \quad \bar{M}_i = \frac{mN_0}{N} M_i, \quad (7)$$

где $i = x, y, z$ обозначают проекции характеристик на соответствующую ось, а m – масса молекулы.

Плотность и скорость газа в ячейке Ω вычисляется аналогично

$$n = \frac{N_0}{N\Delta\Omega} (\sum \Delta t), \quad \vec{v} = \frac{N_0}{N\Delta\Omega} \frac{\sum \vec{\xi} \Delta t}{\sum \Delta t}. \quad (8)$$

Здесь $\Delta\Omega$ – объем соответствующей ячейки.

Так как в начале расчета поле плотности неизвестно, то расчет ведется по итерациям. Задается начальное поле плотности n_0 , а также начальное распределение полевых молекулярных скоростей (по одной в каждой пространственной ячейке Ω). В процессе моделирования блужданий пробной молекулы вычисляется новое поле плотности n_1 . Затем расчет повторяется на новом поле плотности и т. д. до тех пор, пока итерации не сойдутся в пределах малой случайной погрешности. При вычислении v -й итерации, в которой используется поле плотности n_{v-1} от предыдущей итерации, функция распределения пробных молекул $f_v(\vec{x}, \vec{\xi})$ дает новое поле плотности $n_v(\vec{x})$. Полевые молекулы имеют при этом плотность вероятности $f_v(\vec{x}, \vec{\xi}_1)/n_v$. Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые имеют место при выводе уравнения Больцмана, получим уравнение для $f_v(\vec{x}, \vec{\xi})$

$$\vec{\xi} \frac{\partial f_v}{\partial x} = \frac{n_{v-1}}{n_v} \int (f'_v f'_{v1} - f_v f_{v1}) g b d b d \varphi d \vec{\xi}_1, \quad (9)$$

Предполагая процесс итераций сходящимся, при $n_{v-1} = n_v$, получим уравнение Больцмана.

Построение итерационного процесса по числу Kn . Расчетные алгоритмы по реализации МПЧ, как правило, основывались на осреднении молекулярных признаков в соответствующих ячейках расчетного поля в процессе блуждания пробных частиц на фоне полевых. При этом, на первой итерации, соответствующие моменты функции распределения (плотность и скорость) полевых частиц принимались равными невозмущенным при фиксированном числе Кнудсена. Однако, как известно, любой итерационный процесс сходится тем быстрее, чем точнее задано начальное приближение.

В [1; 6 – 9] было предложено корректировать начальное поле при фиксированном числе Kn , начиная со свободномолекулярного режима ($Kn \rightarrow \infty$), постепенно приближаясь к фиксированному (внешний цикл по числу Kn). В качестве нулевого приближения для начального поля при $Kn \rightarrow \infty$ берется точное численное решение независимо от формы обтекаемого тела. Внутри же этого цикла газодинамические параметры по всему полю течения уточняются обычным методом установления. Такой подход позволил существенно улучшить сходимость результатов расчета.

Результаты расчетов и их обсуждение. С помощью описанного выше алгоритма проведены численные исследования гиперзвукового обтекания отдельных проектируемых образцов ракетно-космической техники (вторая ступень ракетно-космического комплекса «Циклон-4» и космического аппарата серии «Січ-2» на раннем этапе его проектирования).

На рис. 2 показана зависимость коэффициента лобового сопротивления второй ступени ракетного носителя «Циклон-4» от высоты полета и режимов обтекания при входе в плотные слои атмосферы Земли под углом атаки $\alpha = 10^\circ$ при тем-

пературе поверхності T_w , равной температуре торможения T_0 . Ступень бралась цилиндрической формы длиной $R = 23$ м и диаметром $d = 3$ м [1].

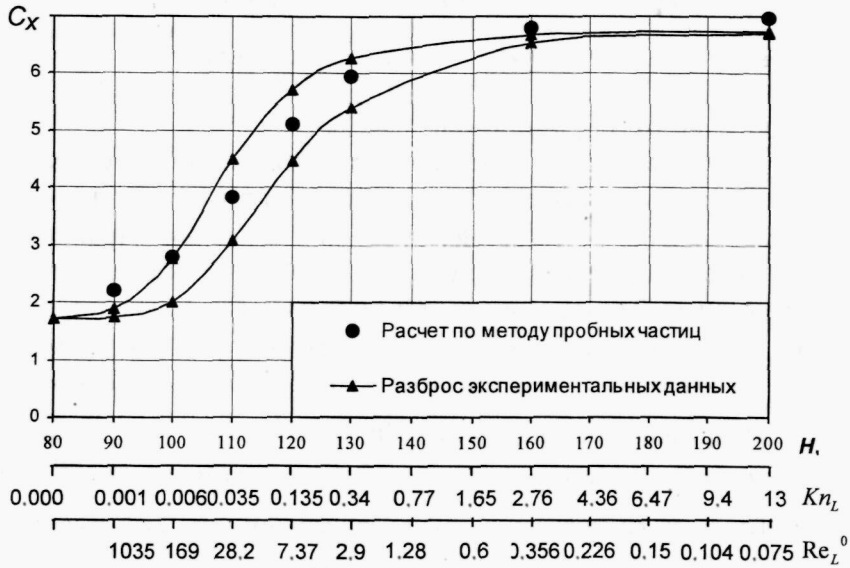


Рис. 2. Зависимость коэффициента лобового сопротивления второй ступени РН «Циклон - 4» от высоты полёта и чисел Кнудсена (Рейнольдса) под углом атаки $\alpha = 10^\circ$ ($T_w/T_0 = 1,0$)

Как видно из графика, расчеты по МПЧ попадают в коридор экспериментальных данных, полученных для цилиндров в аэродинамических трубах малой плотности для условий, близких к расчетным.

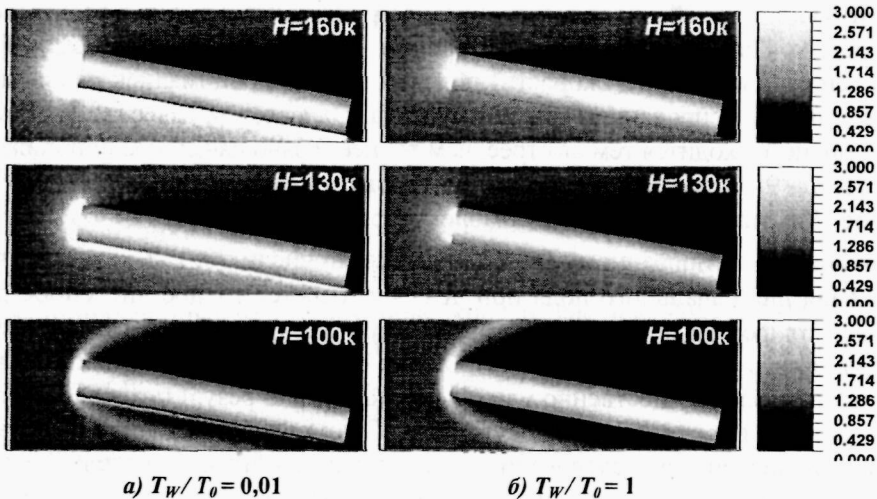


Рис. 3. Распределение плотности ρ / ρ_∞ в окрестности 2-й ступени РН «Циклон-4» при её обтекании под углом атаки $\alpha = 10^\circ$

Анализ результатов счета показывает, что режим свободномолекулярного обтекания начинает нарушаться уже с высоты $H \approx 150$ км, выходя на почти «сплошносредний» режим на высоте $H \approx 80$ км. На такой же характер обтекания указыва-

ют и графики распределения относительной плотности ρ/ρ_∞ в окрестности ступени (рис. 3) для различных температурных факторов T_w/T_0 . На высоте $H \approx 100$ км уже прослеживается хорошо сформированная ударная волна. Эти результаты могут быть использованы для определения возможных районов падения ступеней при входе в плотные слои атмосферы.

На рис. 4 приведены графики распределения относительной плотности ρ/ρ_∞ КА серии «Січ-2». При обтекании аппарата на высоте 90 км под углом атаки $\alpha = 90^\circ$ образовавшийся головной скачок уплотнения «садится» на панели солнечных батарей, вызывая, в силу асимметрии конструкции, неравномерное распределение давления по их поверхностям (рис. 5). Это обстоятельство может привести, в первую очередь, к деформации батарей при неуправляемом входе в атмосферу, а затем уже и к возможному разрушению самой конструкции аппарата.

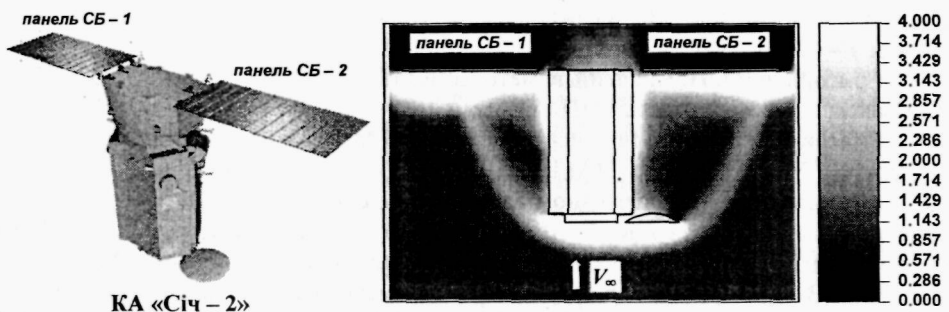


Рис. 4. Распределение плотности ρ/ρ_∞ в окрестности КА «Січ - 2» на высоте 90 км под углом атаки $\alpha = 90^\circ$ ($T_w/T_\infty = 0,3$)

Результаты исследований показали, что при рассмотрении течений на больших расчетных областях задачи могут успешно решаться в несколько этапов с использованием адаптивных сеток и схем «сквозного» счета. Существенное сокращение ресурсных затрат ЭВМ стало возможным благодаря построению оптимальных алгоритмов «блуждания» пробных частиц в расчетных ячейках и пересечения их траекторий с поверхностью тела. Работоспособность предложенного алгоритма проверялась путем сравнения интегральных и распределенных по поверхности характеристик различных тел с имеющимися аналитическими и экспериментальными данными.

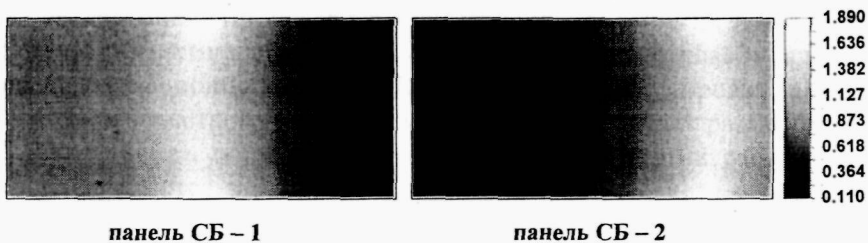


Рис. 5. Распределение давления P/P_∞ по поверхностям панелей СБ КА «Січ - 2»

Заключение. Разработанный вариант метода пробных частиц применим для решения как фундаментальных, так и прикладных задач высотной аэродинамики космического аппарата. Представленные результаты были использованы при реше-

нии актуальных задач динамики разреженного газа и молекулярной газовой динамики, а также при разработке новых образцов космической техники [1; 9].

В дальнейшем, планируется работа по совершенствованию и обоснованию алгоритма для расчета течений с учетом диссоциации, ионизации, излучения, химических реакций и других реальных эффектов. Однако даже в изложенной постановке данный метод позволяет решать сложные газодинамические задачи при различных числах Кнудсена.

Библиографические ссылки

1. **Басс В. П.** Молекулярная газовая динамика и ее приложения в ракетно-космической технике / В. П. Басс. – К., 2008. – 272 с.
2. **Naviland I. K.** Application of the Monte-Carlo method to heat transfer in a rarefied gas / I. K. Naviland, M. L. Lavin // Phys. Fluids. – 1962. – V. 5, № 11. – P. 1399 – 1405.
3. **Хэвиленд Дж. К.** Решение двух задач о молекулярном течении методом Монте-Карло / Дж. К. Хэвиленд // Вычислительные методы в динамике разреженных газов. – М., 1969. – С. 7 – 115.
4. **Григорьев Ю. Н.** Численные методы механики сплошной среды / Ю. Н. Григорьев, М. С. Иванов, Н. М. Харитонова // ВЦ СО АН СССР. – 1971. – Т. 2, № 4. – С. 101 – 107.
5. **Власов В. И.** Расчет течения разреженного газа около пластины под углом атаки / В. И. Власов // Ученые записки ЦАГИ. – 1975. – Т. VI, № 2. – С. 48 – 56.
6. **Абрамовская М.Г.** Об одном алгоритме реализации метода пробных частиц в динамике разреженного газа / М. Г. Абрамовская, В. П. Басс, Печерица Л. Л // Материалы Третьей международной школы-семинара «Модели и методы аэродинамики» – М., 2003 – С. 6 – 7.
7. **Басс В. П.** Расчет аэродинамических параметров в окрестности тел, обтекаемых свободномолекулярным потоком / В. П. Басс, В. И. Бразинский // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1982. – № 4. – С. 177 – 180.
8. **Басс В. П.** Численные алгоритмы для расчета процессов массопереноса в сильно разреженном газе / В. П. Басс, В. И. Бразинский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1988. – Т. 28, № 7. – С. 1078 – 1093.
9. **Модель космоса: научно-информационное издание: В 2 т. / Под ред. М. И. Панасюка, Л. С. Новикова.** – Т. 2: Воздействие космической среды на материалы и оборудование космических аппаратов. – М., 2007. – 1144 с.

Надійшла до редколегії 29.04.11

УДК 539.3

А. А. Бобылёв

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА И ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВДАВЛИВАНИИ В УПРУГОЕ ТЕЛО ЖЕСТКОГО ШТАМПА С ЗАДАНЫМ УСИЛИЕМ

Розглядається задача про втискування без тертя у пружне тіло скінченних розмірів жорсткого штампа із заданим зусиллям. Отримано варіаційне формулювання задачі, дискретизація якої виконана методом скінченних елементів. Для розв'язання скінченновимірної задачі квадратичного програмування розроблено чисельний алгоритм на основі методу спряжених градієнтів з використанням лінійного перетворення змінних.

Ключові слова: контактна задача, пружне тіло скінченних розмірів, жорсткий штамп, варіаційний метод, метод скінченних елементів.

Рассматривается задача о вдавливании без трения в упругое тело конечных размеров жесткого штампа с заданным усилием. Получена вариационная формулировка задачи, дискретизация которой произведена методом конечных элементов. Для решения конечномерной задачи квадратичного программирования разработан численный алгоритм на основе метода сопряженных градиентов с использованием линейного преобразования переменных.

Ключевые слова: контактная задача, упругое тело конечных размеров, жесткий штамп, вариационный метод, метод конечных элементов.

The problem of pressing without a friction in a finite elastic body of a hard punch is considered. The variational formulation of the problem which discretization is made by the finite element method is obtained. The computational algorithm is developed for solving received quadratic programming problem on the basis of the conjugate gradients method with use of linear transformation of variables.

Key words: contact problem, finite elastic body, hard punch, variational method, finite element method.

Введение. Решение многих задач прочности конструкций и сооружений тесно связано с проблемой расчета усилий контактного взаимодействия их элементов, распределение которых, как правило, заранее неизвестно [5; 8; 9]. Задачи контактных взаимодействий элементов конструкций и сооружений возникают в различных отраслях современного машиностроения и промышленного строительства. Эти обстоятельства придают особое значение разработке методов расчета контактных взаимодействий и исследованию конкретных контактных задач.

Одной из простейших контактных задач является задача о вдавливании без трения жесткого штампа в упругое тело. Если жесткий штамп или упругое тело являются строго выпуклыми, то фактическая область контакта заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи. Для упругих тел конечных размеров наиболее эффективным подходом к решению такого класса задач является использование вариационного метода. Вариационная формулировка задачи о вдавливании без трения жесткого штампа в упругое тело конечных размеров приведена в [1; 3; 7]. Особенность постановки контактной задачи в этих работах состоит в том, что предполагаются заданными не только форма жесткого штампа, но и его конечное положение, т. е. задается глубина внедрения штампа в упругое тело, а усилие вдавливания определяется в процессе решения контактной задачи. Во многих практических задачах, например, при расчете внедрения штампа под действием собственного веса, наоборот, известно усилие вдавливания, а глубина внедрения подлежит определению. В этом случае – при помощи итерационных алгоритмов решение задачи можно свести к решению последовательности контактных задач с

заданной глубиной внедрения штампа, для решения которых используется указанная выше вариационная формулировка [3]. Однако такой подход существенно увеличивает вычислительные затраты на решение задачи, особенно при контактном взаимодействии упругого тела с системой жестких штампов.

Альтернативный подход состоит в использовании вариационной формулировки задачи о вдавливании в упругое тело жесткого штампа с заданным усилием. Целью настоящей работы является получение такой вариационной формулировки и разработка на её основе численного алгоритма.

Постановка задачи. Рассмотрим упругое тело конечных размеров, занимающее область $\Omega \in R^3$, ограниченную замкнутой поверхностью Γ с внешней нормалью \vec{n} . Введём неподвижную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$. Далее через x будем обозначать точку пространства с координатами $x = (x_1, x_2, x_3)$, а через \vec{x} – радиус-вектор этой точки, проведенный из начала координат. Под $u_i(x)$, $\varepsilon_{ij}(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ будем понимать соответственно компоненты вектора перемещений и тензоров деформации и напряжений в точке $x \in \Omega$. Положение жесткого штампа определяется вектором перемещений \vec{z} и вектором поворота $\vec{\varphi}$ штампа как жесткого целого относительно его начального положения. Перемещения, углы поворотов и деформации считаются малыми. Напряжения в упругом теле в недеформированном состоянии отсутствуют.

Напряженно-деформированное состояние упругого тела Ω описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(x)}{\partial x_j} + F_i(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} \right), \quad x \in \Omega; \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(x) = a_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где $\vec{F}(x)$ – интенсивность объёмных сил; $a_{ijkl}(x)$ – компоненты тензора модулей упругости.

Поверхность упругого тела Γ состоит из трёх непересекающихся частей $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q \cup \Gamma_p$. На части Γ_u заданы перемещения

$$u_i(x) = g_i(x), \quad (4)$$

а на части поверхности Γ_q действуют поверхностные усилия

$$\sigma_{ij}(x) n_j(x) = q_i(x). \quad (5)$$

Через Γ_p обозначена часть поверхности Γ , по которой возможен контакт тела с жестким штампом. Аналогично, часть поверхности жесткого штампа, по которой возможен контакт с упругим телом, обозначим Γ_p^* . Предельные размеры Γ_p и Γ_p^* определяются исходя из геометрических соображений. Фактические площадки контакта упругого тела и жесткого штампа считаются заранее неизвестными и подлежат определению в процессе решения задачи.

Взаимное расположение упругого тела и жесткого штампа в начальном по-

ложении будем описывать функцией начального зазора

$$\Phi(x) = (\bar{x}^*(x) - \bar{x}) \cdot \bar{n}(x),$$

где $x^*(x)$ – точка пересечения перпендикуляра к поверхности Γ_p , проведенного из точки $x \in \Gamma_p$, с поверхностью Γ_p^* .

Предположим, что поверхности Γ_p и Γ_p^* согласованы в том смысле, что скалярные произведения разности внешних нормалей к этим поверхностям $\bar{n}(x) - \bar{n}^*(x^*(x))$ на векторы перемещений $\bar{u}(x)$ и \bar{z} , а также на вектор начального зазора $\bar{x}^*(x) - \bar{x}$ пренебрежимо малы по сравнению с модулями векторов перемещений и начального зазора. Тогда, учитывая, что в первом приближении искажение формы поверхности тела определяется нормальными перемещениями лежащих на поверхности частиц [7], контактное взаимодействие упругого тела с жестким штампом описывается следующими линеаризованными условиями идеального одностороннего контакта:

$$u_n(x) \leq \Phi(x) + (\bar{z} + \bar{\varphi} \times \bar{x}^*(x)) \cdot \bar{n}(x), \quad x \in \Gamma_p, \quad x^*(x) \in \Gamma_p^*; \quad (6)$$

$$p_n(x^*(x)) = -\sigma_n(x) \geq 0, \quad x \in \Gamma_p, \quad x^*(x) \in \Gamma_p^*; \quad (7)$$

$$\bar{p}_t(x^*(x)) = -\bar{\sigma}_t(x) = 0, \quad x \in \Gamma_p, \quad x^*(x) \in \Gamma_p^*; \quad (8)$$

$$\sigma_n(x) \left\{ u_n(x) - \Phi(x) - (\bar{z} + \bar{\varphi} \times \bar{x}^*(x)) \cdot \bar{n}(x) \right\} = 0, \quad x \in \Gamma_p, \quad x^*(x) \in \Gamma_p^*, \quad (9)$$

где $u_n = u_i n_i$; $\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$; $\bar{\sigma}_t = \bar{\sigma} - \sigma_n \bar{n}$; $\bar{p}(x^*)$ – распределенные по поверхности жесткого штампа контактные усилия.

Обозначим через \bar{R} главный вектор приложенных к жесткому штампу внешних сил, а через \bar{M} главный момент этих сил относительно начала системы координат $Ox_1x_2x_3$. Тогда уравнения равновесия жесткого штампа имеют вид:

$$\int_{\Gamma_p^*} p_n(x^*) \bar{n}^*(x^*) d\Gamma_p^* + \bar{R} = 0, \quad x^* \in \Gamma_p^*; \quad (10)$$

$$\int_{\Gamma_p^*} \bar{x}^* \times (p_n(x^*) \bar{n}^*(x^*)) d\Gamma_p^* + \bar{M} = 0, \quad x^* \in \Gamma_p^*. \quad (11)$$

Таким образом, задача состоит в определении полей перемещений $u_i(x)$, деформаций $\varepsilon_{ij}(x)$ и напряжений $\sigma_{ij}(x)$ в занимаемой упругим телом области Ω , а также перемещений \bar{z} и углов поворота $\bar{\varphi}$ жесткого штампа, удовлетворяющих уравнениям (1) – (3), (10) – (11) с граничными условиями (4) – (9). Необходимо также определить фактические площадки контакта упругого тела с жестким штампом.

Вопросы существования и единственности контактных задач теории упругости с односторонними связями подробно рассмотрены в [7]. Далее будем предполагать, что решение контактной задачи (1) – (11) существует и единственно.

Вариационная формулировка задачи. Перемещения \bar{u} упругого тела, перемещения \bar{z} и повороты $\bar{\varphi}$ жесткого штампа будем рассматривать как элементы

$U = (\bar{u}, \bar{z}, \bar{\varphi})$ прямого произведения пространств $K = [W_2^1(\Omega)]^3 \otimes R^3 \otimes R^3$. Для корректности вариационной формулировки задачи будем предполагать, что функции, характеризующие упругие свойства тела, внешние воздействия и условия контактного взаимодействия, являются ограниченными по нормам соответствующих пространств и обладают следующими свойствами гладкости:

$$a_{ijkl} \in L_\infty(\Omega), \bar{g} \in [H^{1/2}(\Gamma_u)]^3, \bar{q} \in [H^{-1/2}(\Gamma_q)]^3, \Phi \in H^{1/2}(\Gamma_p).$$

Кроме того, компоненты тензора модулей упругости удовлетворяют условиям симметричности и эллиптичности

$$a_{ijkl} = a_{ijlk} = a_{klij}, \quad a_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \geq C \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad C = \text{const} > 0, \quad \forall \{\varepsilon_{ij}\} \in L_2(\Omega).$$

Введем множество кинематически допустимых перемещений

$$K_0 = \left\{ V = (\bar{v}, \bar{s}, \bar{\psi}) \in K : \begin{array}{l} \bar{v}(x) = \bar{g}(x), \quad x \in \Gamma_u; \\ v_n(x) \leq \Phi(x) + (\bar{s} + \bar{\psi} \times \bar{x}^*(x)) \cdot \bar{n}(x), \quad x \in \Gamma_p, \quad \bar{x}^*(x) \in \Gamma_p^* \end{array} \right\},$$

а также билинейную $a(\cdot, \cdot) : K \otimes K \rightarrow R$ и линейную $b(\cdot) : K \rightarrow R$ формы:

$$a(U, V) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) \varepsilon_{ij}(\bar{v}) d\Omega,$$

$$b(V) = \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_q} q_i v_i d\Gamma_q + \bar{R} \cdot \bar{s} + \bar{M} \cdot \bar{\psi}.$$

Утверждение 1. Решение $U = (\bar{u}, \bar{z}, \bar{\varphi})$ задачи в дифференциальной постановке (1) – (11) удовлетворяет вариационному неравенству

$$a(U, V - U) - b(V - U) \geq 0 \quad \forall V \in K_0. \quad (12)$$

Доказательство. Из (1) – (11) следует, что $U \in K_0$. Используя для области Ω первую формулу Бетти (Грина) [10], из уравнений (1) – (3) и граничного условия (5) для произвольного $V = (\bar{v}, \bar{s}, \bar{\psi}) \in K_0$ получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) (\varepsilon_{ij}(\bar{v}) - \varepsilon_{ij}(\bar{u})) d\Omega &= \int_{\Omega} F_i (v_i - u_i) d\Omega + \int_{\Gamma_q} q_i (v_i - u_i) d\Gamma_q + \\ &+ \int_{\Gamma_p} \sigma_{ij} n_i (v_i - u_i) d\Gamma_p. \end{aligned} \quad (13)$$

Для последнего слагаемого в правой части (13), используя (6) – (11) и учитывая согласованность поверхностей Γ_p и Γ_p^* , получим оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_p} \sigma_{ij} n_i (v_i - u_i) d\Gamma_p &= \int_{\Gamma_p} \sigma_n (v_n - u_n) d\Gamma_p = \int_{\Gamma_p} \sigma_n (v_n - \Phi - (\bar{s} + \bar{\psi} \times \bar{x}^*) \cdot \bar{n}) d\Gamma_p - \\ &- \int_{\Gamma_p} \sigma_n (u_n - \Phi - (\bar{z} + \bar{\varphi} \times \bar{x}^*) \cdot \bar{n}) d\Gamma_p + \int_{\Gamma_p} \sigma_n (\bar{s} - \bar{z} + (\bar{\psi} - \bar{\varphi}) \times \bar{x}^*) \cdot \bar{n} d\Gamma_p \geq \\ &\geq \bar{R} \cdot (\bar{s} - \bar{z}) + \bar{M} \cdot (\bar{\psi} - \bar{\varphi}). \end{aligned} \quad (14)$$

Утверждение вытекает из соотношения (13) и неравенства (14).

Используя результаты [6; 7; 10], можно показать, что справедливы следующие утверждения.

Утверждение 2. Решение вариационного неравенства (12), если оно существует и обладает вторыми производными (хотя бы обобщенными), удовлетворяет всем уравнениям и условиям задачи в дифференциальной постановке (1) – (11).

Утверждение 3. Вариационное неравенство (12) эквивалентно задаче минимизации: найти элемент $U = (\bar{u}, \bar{z}, \bar{\varphi}) \in K_0$ такой, что

$$J(U) = \inf_{V \in K_0} \left\{ J(V) = \frac{1}{2} a(V, V) - b(V) \right\}. \quad (15)$$

Вычислительный алгоритм. Для дискретизации задачи минимизации (15) используем метод конечных элементов. Выберем тип конечных элементов и произведем разбиение области Ω . Узлы МКЭ-сетки обозначим $P_l, l = \overline{1, L}$. Перемещения $\bar{u}(x)$ интерполируются по узловым значениям $\bar{u}(P_l)$, при этом в узлах $P_l \in \Gamma_p$ в качестве компонент вектора узловых перемещений выбираются нормальные и тангенциальные (относительно поверхности Γ_p) компоненты. В результате получим конечномерную задачу квадратичного программирования: найти вектор обобщенных узловых перемещений $y^* = (\bar{u}(P_1), \dots, \bar{u}(P_L), \bar{z}, \bar{\varphi})$ такой, что

$$J_1(y^*) = \min_{y \in Y} \left\{ J_1(y) = \frac{1}{2} y^T A_1 y - B_1^T y \right\}, \quad (16)$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – блочная матрица размера $(3L+6) \times (3L+6)$; A_0 – квадратная симметричная положительно полуопределенная матрица размера $3L \times 3L$, матрица жесткости упругого тела Ω ; $B_1 = (B_0, \bar{R}, \bar{M}) \in R^{3L+6}$; $B_0 \in R^{3L}$ – вектор эквивалентных внешних узловых нагрузок для тела Ω ; $Y \subset R^{3L+6}$ – множество кинематически допустимых узловых перемещений.

При использовании коллокационного метода [4] аппроксимации граничных условий множество Y имеет вид

$$Y = \left\{ \begin{array}{l} y \in R^{3L+6} : y_i = d_i, i \in I_1; \\ y_j \leq c_j^0 + c_j^1 y_{3L+1} + c_j^2 y_{3L+2} + c_j^3 y_{3L+3} + c_j^4 y_{3L+4} + c_j^5 y_{3L+5} + c_j^6 y_{3L+6}, j \in I_2 \end{array} \right\},$$

где I_1 – множество номеров компонент вектора y , соответствующих перемещениям узлов, принадлежащих поверхности Γ_u ; I_2 – множество номеров компонент вектора y , соответствующих нормальным перемещениям узлов, принадлежащих Γ_p ; d_i – коэффициенты, равные значениям соответствующих функций $g_r(x)$ в граничных узлах $P_l \in \Gamma_u$; $c_j^k, k = \overline{0,6}$, – коэффициенты, вычисляемые для j -ой компоненты вектора y , соответствующей узлу $P_l \in \Gamma_p$, по формулам

$$c_j^0 = \Phi(P_l), \quad c_j^k = n_k(P_l), \quad k = \overline{1,3};$$

$$c_j^4 = x_2(P_l)n_3(P_l) - x_3(P_l)n_2(P_l);$$

$$c_j^5 = x_3(P_1)n_1(P_1) - x_1(P_1)n_3(P_1);$$

$$c_j^6 = x_1(P_1)n_2(P_1) - x_2(P_1)n_1(P_1).$$

Основная сложность, возникающая при разработке алгоритмов численного решения задачи (16), состоит в том, что каждое ограничение в виде линейного неравенства содержит несколько переменных. Для упрощения вида ограничений предложено линейное преобразование переменных $w = Cz$ такое, что

$$w_i = \begin{cases} y_i, & i \notin I_2 \\ y_i - c_i^1 y_{3L+1} - c_i^2 y_{3L+2} - c_i^3 y_{3L+3} - c_i^4 y_{3L+4} - c_i^5 y_{3L+5} - c_i^6 y_{3L+6}, & i \in I_2 \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что матрица C является невырожденной и выражения для элементов матриц C^{-1} и C^{-T} несложно получить в явном виде.

В результате преобразования переменных получим следующую задачу квадратичного программирования: найти элемент $w^* \in R^{3L+6}$, такой что

$$J_2(w^*) = \min_{w \in W} \left\{ J_2(w) = \frac{1}{2} w^T A_2 w - B_2^T w \right\}, \quad (17)$$

$$W = \{w \in R^{3L+6} : y_i = d_i, i \in I_1; w_j \leq c_j^0, j \in I_2\},$$

где $A_2 = C^{-T} A_1 C^{-1}$; $B_2 = C^{-T} B_1$.

Отметим, что вид ограничений в задаче (17) такой же, как и в задаче квадратичного программирования, полученной при дискретизации вариационной формулировки контактной задачи о вдавливании в упругое тело жесткого штампа с заданной глубиной внедрения [1].

Матрица жесткости A_0 упругого тела Ω является сильно разреженной блочной матрицей. Для ее хранения в памяти ЭВМ используется разреженный блочно-строчный формат [11]. Такая схема хранения матрицы предъявляет минимальные требования к памяти, объем которой пропорционален первой степени количества неизвестных, и в то же время позволяет эффективно организовать вычисление произведения матрицы на вектор. Поэтому для численного решения задачи квадратичного программирования (17) целесообразно применять градиентные методы, не требующие формирования в явном виде матрицы Гессе минимизируемой функции. Достаточно программно реализовать расчет ее произведения на вектор. В настоящей работе для численного решения задачи (17) используется вариант метода сопряженных градиентов, предложенный в [1].

Численные результаты. Разработанный вычислительный алгоритм реализован в виде отдельного модуля пакета прикладных программ для решения контактных задач. В качестве примера ниже приведены результаты численного решения задачи о вдавливании жесткого штампа с заданным усилием в однородное изотропное упругое тело, занимающее область

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : L \leq x_1 \leq L, -H \leq x_2 \leq 0\}.$$

Предполагалось, что тело Ω находится в условиях плоской деформации. В качестве предельно возможной области контакта с жестким штампом принималась грань $x_2 = 0$. Функция $\Phi(x)$, описывающая форму жесткого штампа выбиралась в виде

$$\Phi(x) = D(x_1 / L)^m.$$

Поверхности $x_1 = \pm L$ тела Ω считались свободными от внешних нагрузок, а на грани $x_2 = -H$ задавались условия: $u_2 = 0$, $\sigma_{12} = 0$. Для исключения смещения тела как жесткого целого дополнительно задавалось условие $u_1 = 0$ при $x_1 = 0$.

Значения физических и геометрических параметров при проведении расчетов принимались следующими: модуль Юнга $E = 10 \text{ ГПа}$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; линейные размеры упругого тела $L = 1 \text{ м}$ и $H = 2 \text{ м}$.

На рис. 1 и 2 изображено распределение на поверхности возможного контакта нормальных напряжений σ_{22} для случая вдавливания жесткого штампа в упругое тело усилием $R_2 = 10 \text{ МН}$. Значения параметров, характеризующих форму жесткого штампа, приведены в табл. 1. Для вычисления контактных напряжений по найденным узловым перемещениям использовалась методика, предложенная в [2].

Таблица 1.
Параметры, характеризующие форму жесткого штампа

Кривая	Рис. 1		Рис. 2	
	D	m	D	m
1	0,002	2	0,0001	4
2	0,003	2	0,0025	4
3	0,004	2	0,0050	4
4	0,005	2	0,0075	4
5	0,006	2	0,0100	4

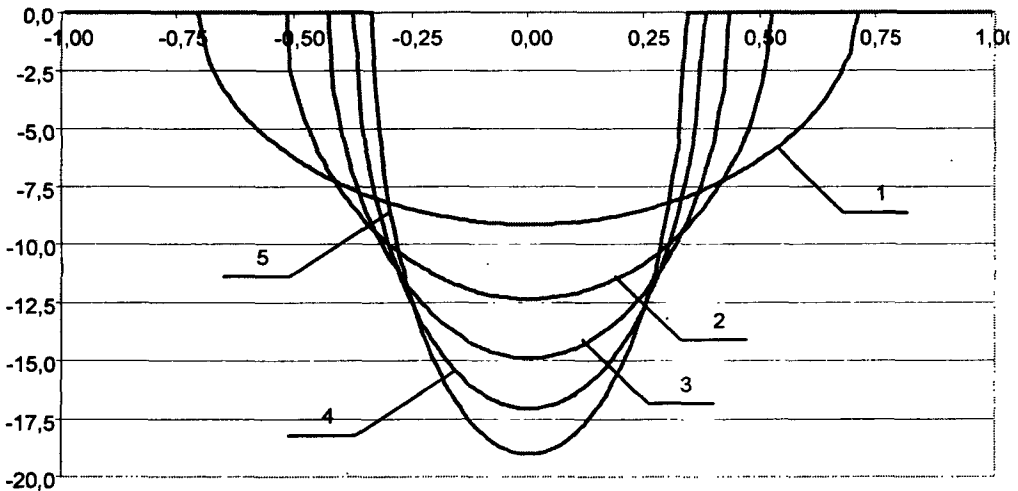


Рис. 1. Распределение контактного давления

Выводы. Для контактной задачи о вдавливании в упругое тело жесткого штампа с заданным усилием получено вариационное неравенство и эквивалентная ему задача минимизации с ограничениями в виде равенств и неравенств. Дискретизация задачи произведена методом конечных элементов. Использование линейного преобразования переменных позволило упростить вид ограничений-неравенств и применить для решения полученной задачи квадратичного программирования вариант метода сопряженных градиентов, ранее разработанный для решения задачи о вдавливании в упругое тело жесткого штампа с заданной глубиной внедрения. От-

метим, что разработанный численный алгоритм позволяет получить численное решение рассматриваемой задачи без использования внешних итераций.

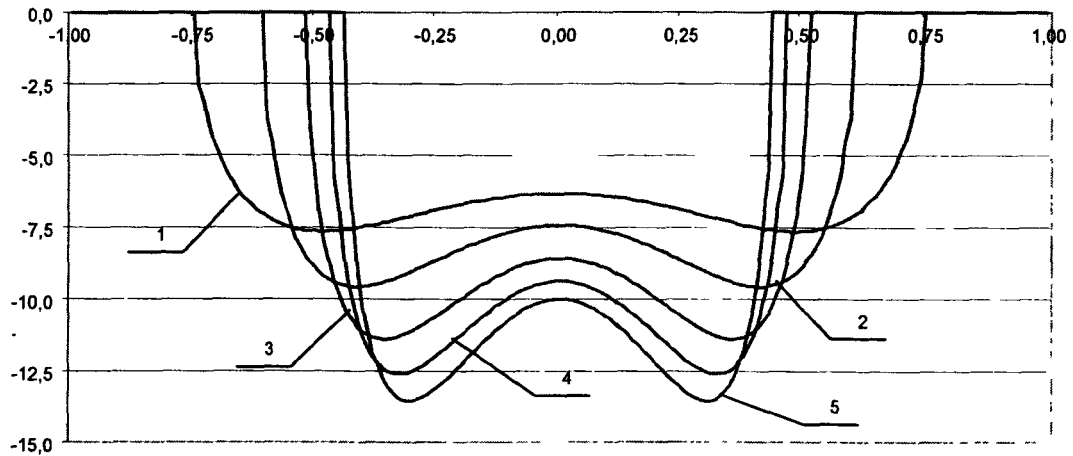


Рис. 2. Распределение контактного давления

Полученная вариационная формулировка и разработанный на её основе численный алгоритм могут быть обобщены для случая вдавливания в упругое тело конечных размеров нескольких жестких штампов с заданными усилиями, а также для случая вдавливания в упругое тело жесткого штампа с тонким упругим покрытием.

Библиографические ссылки

1. Бобылев А. А. Об одном варианте численного решения контактных задач теории упругости / А. А. Бобылев // Решение прикладных задач математической физики и дискретной математики. – Д., 1987. – 23-29 с.
2. Бобылев А. А. К вопросу об определении контактных напряжений методом конечных элементов / А. А. Бобылев // Методы решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела. – Д., 1989. – 8-11 с.
3. Власенко Ю. Є. Взаємодія важких штампів з багатозаровою пружнопластичною основою, що містить вclusions: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.23.17 «Будівельна механіка» / Власенко Юрій Євгенович. – Д., 2010. – 19 с.
4. Гловински Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер. – М., 1979. – 574 с.
5. Горячева И. Г. Механика трения / И. Г. Горячева. – М., 2001. – 479 с.
6. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М., 1980. – 383 с.
7. Кравчук А. С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике / А. С. Кравчук. – М., 1997. – 339 с.
8. Механика контактных взаимодействий. – М., 2001. – 672 с.
9. Моссаковский В. И. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций / В. И. Моссаковский, В. С. Гудрамович, Е. М. Макеев. – К., 1988. – 288 с.
10. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функционалы энергии / П. Панагиотопулос. – М., 1989. – 496 с.
11. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. – М., 1988. – 410 с.

Надійшла до редколегії 19.05.11

УДК 539.3

В. В. Божидарнік, О. В. Максимович
 Луцький національний технічний університет

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНОГО СТАНУ АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИНОК ІЗ КРАЙОВИМИ ТРІЩИНАМИ ЗА ВРАХУВАННЯ КОНТАКТУ ЇХ БЕРЕГІВ

Запропоновано алгоритм розрахунку напруженого стану анізотропних пластинок із отворами і криволінійними крайовими тріщинами з врахуванням контакту їх берегів. Досліджено вплив механічних характеристик матеріалу на значення КІН при врахуванні контакту берегів тріщин.

Ключові слова : анізотропна пластинка, тріщина, контакт берегів.

Предложен алгоритм расчета напряженного состояния анизотропных пластинок с отверстиями и криволинейными краевыми трещинами с учетом контакта их берегов. Исследовано влияние механических характеристик материала на значения КИН при учете контакта берегов трещин.

Ключевые слова : анизотропная пластинка, трещина, контакт берегов.

In the article the algorithm of calculation of the tense state of anisotropic plates of weak is offered by cracks taking into account the contact of their banks. Thus, the area of contact can consist of a few areas of contact. Investigational influence of mechanical descriptions of material on a value stress intensity factors.

Keywords : anisotropic plate, crack, contact of banks.

Вступ. Методи дослідження напруженого стану біля тріщин в ізотропних і анізотропних пластинках достатньо повно розроблені при розтяжних навантаженнях. При стиску і зсуві пластинок може виникати контакт берегів тріщин, який істотно змінює напружений стан та коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН). Контакт берегів тріщин може мати місце і при розтягу пластинок з отворами, якщо тріщини розміщені в зонах стискувальних напружень. Огляд виконаних в цьому напрямку робіт для ізотропних пластинок наведений в [1, 5, 2]. Для анізотропних пластинок таким задачам у випадку криволінійних тріщин присвячені окремі роботи для внутрішніх тріщин [6]. Крайові тріщини за контакту їх берегів для анізотропних пластинок залишаються маловивченими. Для знаходження областей контакту в літературі, як правило, використовують ітераційні процедури, за допомогою яких досліджувались, в основному, задачі для випадку, коли область контакту одна і прилягає до вершини тріщини або розміщена симетрично. В даній роботі запропоновано підхід, який застосовний у загальному випадку, коли область контакту може складатися з кількох ділянок.

Постановка задачі. Нехай пружна анізотропна пластинка послаблена отвором і системою тріщин, які лежать на контурі L . Розглянемо випадок, коли пластинка перебуває під дією зусиль на нескінченності, зосереджених сил та зусиль, прикладених до берегів тріщин (поза ділянками контакту), межа отвору ненавантажена.

Розглянемо довільну криву Γ , яка лежить в області D , що займає пластинка. Вектор напружень (X_Γ, Y_Γ) на цій кривій через комплексні потенціали Лехніцького визначається за формулами [1]

$$X_\Gamma = 2\operatorname{Re}\left[s_1\Phi(z_1)z_1' + s_2\Psi(z_2)z_2'\right], \quad Y_\Gamma = -2\operatorname{Re}\left[\Phi(z_1)z_1' + \Psi(z_2)z_2'\right], \quad (1)$$

де $z_j = x + s_j y$, $j = 1, 2$; s_j – корені характеристичного рівняння $\alpha_{11}s^4 - 2\alpha_{16}s^3 + (2\alpha_{12} + \alpha_{66})s^2 - 2\alpha_{26}s + \alpha_{22} = 0$, причому $\text{Im } s_j > 0$; α_j – пружні сталі; $z'_j = dz_j / ds$; ds – диференціал дуги на кривій.

Введемо вектор напружень $P_\Gamma = N_\Gamma + iT_\Gamma$ в точці кривої Γ на дотичній до неї площинці, де N_Γ, T_Γ – проекції вектора на нормаль та дотичну. Цей вектор на основі (1) через комплексні потенціали знаходиться за формулою

$$P_\Gamma(Z) = \left[(1 + is_1)z'_1 \Phi(z_1) + (1 + i\bar{s}_1)\bar{z}'_1 \overline{\Phi(z_1)} + (1 + is_2)z'_2 \Psi(z_2) + (1 + i\bar{s}_2)\bar{z}'_2 \overline{\Psi(z_2)} \right] e^{-\gamma}, \quad (2)$$

де γ – кут нахилу дотичної в точці $Z \in \Gamma$ з координатами (x, y) .

Для запису інтегральних рівнянь задачі попередньо наведемо відомі співвідношення для внутрішніх тріщин у нескінченній пластинці, модифіковані інтегральні рівняння для пластинки з отвором і внутрішніми тріщинами (за яких умови на отворі задовольняються тотожно).

Інтегральні рівняння для нескінченної пластинки відносно похідних від стрибків переміщень. Розглянемо спочатку нескінченну пластинку з криволінійними тріщинами. Будемо виходити з інтегрального зображення у вигляді [4]

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \int_L [\Phi_1(z_1, T)g'_1(s) + \Phi_2(z_1, T)g'_2(s)]ds + \Phi_S(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \int_L [\Psi_1(z_2, T)g'_1(s) + \Psi_2(z_2, T)g'_2(s)]ds + \Psi_S(z_2), \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\Phi_j(z_1, T) = \frac{A_j}{z_{j0} - z_1}, \quad \Psi_j(z_2, T) = \frac{B_j}{z_{j0} - z_2}, \quad (4)$$

$z_{j0} = \xi + s_j \eta$, T – точка з координатами (ξ, η) , за якими проводиться інтегрування,

$$A_1 = -\frac{is_1}{2\pi\Delta_1}, \quad A_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_1}, \quad B_1 = -\frac{is_2}{2\pi\Delta_2}, \quad B_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_2},$$

$$\Delta_1 = a_{11}(s_1 - \bar{s}_1)(s_1 - s_2)(s_1 - \bar{s}_2), \quad \Delta_2 = a_{11}(s_2 - \bar{s}_1)(s_2 - s_1)(s_2 - \bar{s}_2), \quad s = s(\xi, \eta),$$

$g'_j = dg_j / ds$, g_j – невідомі функції, які рівні стрибкам переміщень u (при $j = 1$) і v (при $j = 2$) на берегах тріщин. Комплексні потенціали з індексом S визначають напружений стан суцільної нескінченної пластинки, який виникає від дії зосереджених сил і навантаження на безмежності.

Підставивши представлення (3) в формули для визначення вектора напружень на тріщині (2), отримуємо інтегральне рівняння

$$\int_L [Q_1(Z, T)g'_1(s) + Q_2(Z, T)g'_2(s)]ds = Q_T(Z) - Q_S(Z), \quad (5)$$

де $Q_j(Z, T)$ і $Q_S(Z)$ – вектори напружень P_i в точці Z з координатами (x, y) кривої L , які визначаються за формулою (2) через відповідно комплексні потенціали $\Phi_j(z_1, T), \Psi_j(z_2, T)$ і $\Phi_S(z_1), \Psi_S(z_2)$, $Q_T = N_L + iT_L$ – заданий вектор напружень на берегах тріщин, який приймається однаковим на протилежних берегах. При побу-

дові рівняння (5) використана формула Племеля-Сохоцького, причому інтеграли типу Коші розглядаються в сенсі головного значення. До рівнянь (5) необхідно додати рівняння однозначності переміщень [5].

Модифіковані інтегральні рівняння для пластинки з отвором і внутрішніми тріщинами. Розглянемо нескінченну пластинку з отвором довільної форми, яка займає область D , що послаблена тріщинами. При розгляді задачі теорії пружності для області D з внутрішньою тріщиною, яка розміщена на кривій L , будемо виходити із інтегрального зображення у вигляді [4]

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \int_L [\Phi_1^D(z_1, T)g_1'(s) + \Phi_2^D(z_1, T)g_2'(s)]ds + \Phi_D(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \int_L [\Psi_1^D(z_2, T)g_1'(s) + \Psi_2^D(z_2, T)g_2'(s)]ds + \Psi_D(z_2), \end{aligned} \quad (6)$$

де $\Phi_j^D(z_j, T)$, $\Psi_j^D(z_j, T)$, ($j=1, 2$) – мають такі ж особливості, як і функції Φ_j, Ψ_j (формули (4)) та є розв'язком задачі теорії пружності для області D з вільною від навантаження границею, причому в (4) $z_{j0} = \xi + s_j \eta$, (ξ, η) – довільна точка, що лежить в області D .

Модифіковані інтегральні рівняння для пластинки з отвором і крайовими тріщинами. При записі інтегрального представлення для крайової тріщини необхідно врахувати, що у вершині тріщини H з координатами (c, d) , яка виходить із границі отвору, вектор переміщень має ненульовий стрибок. Тому, на відміну від внутрішніх тріщин, в яких стрибки переміщень у вершинах рівні нулю, їх диференціювання необхідно проводити в сенсі узагальнених функцій. Тоді в зображеннях (6) до функцій g_j' необхідно додати складові $\Delta g_j'$, які рівні

$$\Delta g_1' = u_H \delta(s - s_H), \Delta g_2' = v_H \delta(s - s_H),$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака, s_H – дугова координата вершини H , (u_H, v_H) – стрибки переміщень у точці H . Тут розглянуто випадок однієї тріщини.

Тоді з (6) для випадку крайової тріщини отримаємо представлення

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \int_L [\Phi_1(z_1, T)g_1'(s) + \Phi_2(z_1, T)g_2'(s)]ds + u_H \Phi_1(z_1, H) + v_H \Phi_2(z_1, H) + \Phi_D(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \int_L [\Psi_1(z_2, T)g_1'(s) + \Psi_2(z_2, T)g_2'(s)]ds + u_H \Psi_1(z_2, H) + v_H \Psi_2(z_2, H) + \Psi_D(z_2), \end{aligned} \quad (7)$$

причому тут під інтегралами похідні $g_{1,2}'$ розглядаються в класичному сенсі.

Очевидно, що мають місце рівності

$$u_H = - \int_L g_1'(s)ds, v_H = - \int_L g_2'(s)ds, \quad (8)$$

які можна розглядати як умови однозначності переміщень, оскільки при їх записі враховано, що стрибок переміщень в іншій вершині рівний нулю.

Використовуючи умови (2) інтегральне представлення (7) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\Phi(z_1) &= \int_L [\Phi_1^*(z_1, T)g_1'(s) + \Phi_2^*(z_1, T)g_2'(s)]ds + \Phi_D(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \int_L [\Psi_1^*(z_2, T)g_1'(s) + \Psi_2^*(z_2, T)g_2'(s)]ds + \Psi_D(z_2),\end{aligned}\quad (9)$$

де $\Phi_j^*(z_1, T) = \Phi_j^D(z_1, T) - \Phi_j^D(z_1, H)$, $\Psi_j^*(z_2, T) = \Psi_j^D(z_2, T) - \Psi_j^D(z_2, H)$. Підкреслимо, що при використанні представлення (9) автоматично забезпечується виконання умов однозначності переміщень на тріщині.

Інтегральні рівняння задачі отримуються як і вище та зводяться до вигляду

$$\int_L [Q_1^*(Z, T)g_1'(s) + Q_2^*(Z, T)g_2'(s)]ds = Q_T(Z) - Q_D(Z), \quad (10)$$

де $Q_j^*(Z, T)$ і $Q_D(Z)$ - вектори напружень P_L в точці Z кривої L , які визначаються за формулою (2) через комплексні потенціали $\Phi_j^*(z_1, T)$, $\Psi_j^*(z_2, T)$ і $\Phi_D(z_1)$, $\Psi_D(z_2)$

Числовий алгоритм розв'язування отриманих рівнянь. Будемо розглядати випадок, коли контур інтегрування заданий параметрично у вигляді $\xi = \alpha(\theta)$, $\eta = \beta(\theta)$, $-1 \leq \theta \leq 1$, причому прийемо, що параметру $\theta = -1$ відповідає вершина тріщини, що виходить на граничний контур.

Прийемо, що для введених функцій справедливі представлення

$$g_1' = \frac{dg_1}{d\theta} \frac{1}{s'} = \frac{U(\theta)}{s'\sqrt{1-\theta^2}}, \quad g_2' = \frac{dg_2}{d\theta} \frac{1}{s'} = \frac{V(\theta)}{s'\sqrt{1-\theta^2}}, \quad (11)$$

де $U(\theta), V(\theta)$ - гладкі функції.

Використавши наведені в [1] квадратурні формули Лобатто для регулярних інтегралів та інтегралів з ядрами типу Коші, отримаємо

$$\begin{aligned}\Phi(z_{1\nu}) &= \sum_{k=1}^N C_k [\Phi_1^*(z_{1\nu}, T_k)U_k + \Phi_2^*(z_{1\nu}, T_k)V_k] + \Phi_D(z_{1\nu}), \\ \Psi(z_{2\nu}) &= \sum_{k=1}^N C_k [\Psi_1^*(z_{2\nu}, T_k)U_k + \Psi_2^*(z_{2\nu}, T_k)V_k] + \Psi_D(z_{2\nu}),\end{aligned}\quad (12)$$

де $U_k = U(\theta_k)$, $V_k = V(\theta_k)$, $\theta_k = -\cos(\pi_N(k-1))$, $k=1, \dots, N$; $\pi_N = \pi/(N-1)$; $C_k = \pi_N$, при $k \neq 1$ і $k \neq N$; $C_1 = C_N = 0, 5\pi_N$; T_k - точка з координатами (x_k, y_k) ; $x_k = \alpha(\theta_k)$, $y_k = \beta(\theta_k)$; N - вибрана кількість вузлових точок; $z_{j\nu} = \widetilde{x}_\nu + s_j \widetilde{y}_\nu$; $\widetilde{x}_\nu = \alpha(\tau_\nu)$, $\widetilde{y}_\nu = \beta(\tau_\nu)$; $\tau_\nu = \cos[\pi_N(\nu-0,5)]$ при $\nu=1, \dots, N-1$.

Підставимо формули (12) у рівняння (10) при $x = \widetilde{x}_\nu$, $y = \widetilde{y}_\nu$, $\nu=1, \dots, N-1$. Тоді отримаємо систему рівнянь

$$\sum_{n=2}^N A_{\nu n} U_n + \sum_{n=2}^N B_{\nu n} V_n = P_\nu + Q_\nu, \quad \nu=1, \dots, N-1, \quad (13)$$

де $A_{\nu n} = C_n Q_1^*(Z_\nu, T_n)$, $B_{\nu n} = C_n Q_2^*(Z_\nu, T_n)$, $Q_\nu = Q_T(Z_\nu)$, $P_\nu = -Q_D(Z_\nu)$.

Тут враховано, що в вершині тріщини, яка виходить на граничний контур, напруження обмежені, в зв'язку з чим, аналогічно [5], прийнято $U_1 = V_1 = 0$.

Значення КІН для вершини тріщини, якій відповідає параметр $\theta = 1$, визначаються за формулами [1]

$$K_I = -2\sqrt{\pi} \operatorname{Im} \left[\overline{d_2} S W_*(1) \right] / \sqrt{s_N}, \quad K_{II} = -2\sqrt{\pi} \operatorname{Im} \left[\overline{g_2} S W_*(1) \right] / \sqrt{s_N},$$

де α – кут між дотичною до тріщини у вершині й віссю Ox ,

$$W_* = \frac{-V_N + s_1 U_N}{\Delta_1} \frac{s_2 - s_1}{s_2 - s_2}, \quad g_j = \sin \alpha - s_j \cos \alpha, \quad d_j = \cos \alpha + s_j \sin \alpha.$$

Система тріщин. Розглянемо випадок, коли на отвір виходять J тріщин, які знаходяться на кривих L_j , що виходять із точок H_j . Тоді отримуємо зображення

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \sum_{j=1}^J \int_{L_j} [\Phi_{1,j}^D(z_1, T) g_1'(s) + \Phi_{2,j}^D(z_1, T) g_2'(s)] ds + \Phi_D(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \sum_{j=1}^J \int_{L_j} [\Psi_{1,j}^D(z_2, T) g_1'(s) + \Psi_{2,j}^D(z_2, T) g_2'(s)] ds + \Psi_D(z_2), \end{aligned} \quad (14)$$

де $\Phi_{k,j}^D(z_1, T) = \Phi_k^D(z_1, T) - \Phi_k^D(z_1, H_j)$, $\Psi_{k,j}^D(z_2, T) = \Psi_k^D(z_2, T) - \Psi_k^D(z_2, H_j)$.

Легко показати, що при обході вздовж замкненого контуру, який вміщує отвір з тріщинами умови однозначності переміщень при довільних функціях g_1', g_2' виконуються тотожно. Дискретний аналог цих рівнянь записується аналогічно, як і вище.

Врахування контакту берегів тріщин. Для врахування можливості контакту берегів тріщини модифікуємо спочатку систему рівнянь (13) таким чином, щоби невідомими в ній були стрибки переміщень.

З цією метою розглянемо довільну точку K , яка лежить на тріщині. Позначимо в ній через u_α, u_β – проєкції вектора переміщень на дотичну і нормаль до тріщини. Переміщення в декартовій системі координат тоді будуть

$$u + iv = (u_\alpha + iu_\beta)e^{i\gamma},$$

де γ – кут нахилу дотичної до тріщини в точці K .

Прийmemo, що вершині тріщини, яка виходить на межу отвору відповідає параметр $\xi = -1$ при вибраній вище параметризації рівняння тріщини. Зобразимо у нових змінних

$$g_\alpha = U_\alpha(\xi)\sqrt{1-\xi}, \quad g_\beta = U_\beta(\xi)\sqrt{1-\xi},$$

де g_α, g_β – стрибки переміщень u_α, u_β ; U_α, U_β – гладкі функції.

Тоді для стрибків переміщень у декартовій системі координат маємо $g_1 + ig_2 = g(\xi)\sqrt{1-\xi}$, де $g(\xi) = (U_\alpha + iU_\beta)\exp(i\gamma(\xi))$, g_1, g_2 – стрибки переміщень u, v на берегах тріщини. Диференціюючи, маємо

$$d(g_1 + ig_2) / d\xi = [(1-\xi)g' - 0,5g(\xi)] / \sqrt{1-\xi}.$$

Зіставляючи цю формулу із зображеннями (11), отримуємо для введених вище функцій U, V співвідношення

$$U + iV = \sqrt{1 + \xi} [(1 - \xi)g' - 0,5g(\xi)]. \quad (15)$$

Для функції $g(\xi)$ при $|\xi| \leq 1$ використаємо інтерполяційну формулу з вузловими точками, що складаються із коренів полінома Чебишева $U_{M-1}(\xi)$ та точок -1 і 1 [7]

$$g(\xi) = \sum_{n=0}^M \varepsilon_n S_n T_n(\xi), \quad (16)$$

де

$$S_n = \frac{2}{M} \sum_{k=0}^M \varepsilon_k g_k T_n(\xi_k), \quad g_k = g(\xi_k), \quad \xi_k = \cos \frac{\pi(M-k)}{M}, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & 1 < n < M, \\ 0,5, & n = 0; n = M. \end{cases}$$

Підставивши формулу (16) в (15), маємо

$$U(x) + iV(x) = \sum_{n=0}^M C_n r_n(x), \quad (17)$$

де $r_n(x) = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{1+x}} \left[n T_{n-1}(x) - \frac{1+(2n+1)x}{2} T_n(x) \right]$, при $n > 0$; $r_0(x) = -\frac{\varepsilon_0 \sqrt{1+x}}{2}$. Тут враховано, що при $n > 0$ маємо $(1-x^2)T'_n(x) = n[T_{n-1}(x) - xT_n(x)]$.

Перепишемо формулу (17) у вигляді

$$U(\xi) + iV(\xi) = \sum_{k=0}^M g_k W_k(\xi), \quad \text{де } W_k(\xi) = \frac{2\varepsilon_k}{M} \sum_{n=0}^M T_n(\xi_k) r_n(\xi).$$

Будемо далі виходити із отриманої вище системи комплексних алгебраїчних рівнянь (13) відносно похідних від стрибків переміщень, які визначаються через $U_n = U(\theta_n)$, $V_n = V(\theta_n)$. Використовуючи (17) та покладаючи $M = N - 2$, запишемо

$$U_n + iV_n = \sum_{k=0}^{N-2} g_k W_{nk}, \quad \text{де } W_{nk} = W_k(\theta_n), \quad n = 1, \dots, N.$$

Звідси маємо взаємозв'язок

$$U_n = \sum_{k=0}^{N-2} W_{nk} (U_k^\alpha l_k - U_k^\beta m_k), \quad V_n = \sum_{k=0}^{N-2} W_{nk} (U_k^\alpha m_k + U_k^\beta l_k),$$

де $U_k^\alpha = U_\alpha(\xi_k)$, $U_k^\beta = U_\beta(\xi_k)$, $l_k = \cos \gamma_k$, $m_k = \sin \gamma_k$, $\gamma_k = \gamma(\xi_k)$.

Підставивши їх в рівняння (13), отримуємо систему рівнянь відносно стрибків переміщень

$$\sum_{k=0}^{N-2} \alpha_{vk} U_k^\alpha + \sum_{k=0}^{N-2} \beta_{vk} U_k^\beta = P_v + \sigma_v + i\tau_v, \quad v = 1, \dots, N-1, \quad (18)$$

де $\alpha_{vk} = a_{vk} l_k + b_{vk} m_k$, $\beta_{vk} = -a_{vk} m_k + b_{vk} l_k$, $a_{vk} = \sum_{n=1}^N A_{vn} W_{nk}$, $b_{vk} = \sum_{n=1}^N B_{vn} W_{nk}$, σ_v, τ_v — невідомі контактні напруження. Тут розглянуто випадок коли до берегів тріщин не прикладене зовнішнє навантаження.

Знаходження контактних напружень. При розгляді контактних задач об-

межуємося випадком гладких берегів тріщин. Тоді в системі (18) маємо $\tau_\nu = 0$, а σ_ν – є невідомими контактними напруженнями ($\nu = 1, \dots, N-1$), причому поза ділянками контакту $\sigma_\nu = 0$.

Контакт берегів вздовж всієї тріщини. Отриманий розв’язок особливо ефективний, якщо має місце гладкий контакт берегів вздовж всієї довжини тріщини. Зазначимо, що такій постановці в літературі присвячено низка робіт, в яких додатково встановлюють умови на навантаження, за яких отриманий розв’язок є справедливий. Оскільки має місце повний контакт берегів тріщини, то в системі (18) $U_k^\beta = 0, k = 1, \dots, N-2$. Звідси маємо систему рівнянь

$$\sum_{k=0}^{N-2} \alpha_{\nu k} U_k^\alpha - \sigma_\nu = P_\nu, \quad \nu = 1, \dots, N-1, \quad (19)$$

де σ_ν – невідомі контактні напруження у вузлових точках Z_ν .

Неповний контакт берегів тріщин. Для розв’язування задачі спочатку виключимо із системи (18) невідомі U_k^α . Для цього перепишемо систему в матрично-матричному вигляді

$$\begin{cases} D_{11}U^\alpha + D_{12}U^\beta = S + \sigma, \\ D_{21}U^\alpha + D_{22}U^\beta = T, \end{cases} \quad (20)$$

де $D_{11} = \text{Re } \alpha, D_{12} = \text{Re } \beta, D_{21} = \text{Im } \alpha, D_{22} = \text{Im } \beta$, α і β – матриці, які складається із коефіцієнтів $\alpha_{\nu k}$ і $\beta_{\nu k}$; $S = \text{Re } P, T = \text{Im } P$; U^α, U^β, P – стовпчики, що складаються із коефіцієнтів $U_k^\alpha, U_k^\beta, P_\nu$ відповідно. Тут σ – стовпчик, що складається із значень невідомих контактних (нормальних) напружень σ_ν у вузлових точках Z_ν .

Із другого рівняння (20) маємо $U^\alpha = -(D_{21}^{-1}D_{22})U^\beta + D_{21}^{-1}T$, де D_{21}^{-1} – обернена до матриці D_{21} . Тоді із першого рівняння отримуємо матричне рівняння

$$DU^\beta = \sigma + p, \quad (21)$$

де $D = D_{12} - D_{11}D_{21}^{-1}D_{22}$, $p = S - (D_{11}D_{21}^{-1})T$.

Зазначимо, що рівняння (21) зручно використовувати при розв’язуванні низки однотипних задач для тріщини заданої форми без контакту берегів тріщин (при $\sigma = 0$).

Невідомі контактні напруження і стрибки переміщень у вузлових точках задовольняють одночасно нерівностям $\sigma_n \leq 0, U_n^\beta \geq 0$. У зв’язку з цим, за аналогією до відомого в контактних задач теорії пружності підходу Синьоріні, встановлюємо, що розв’язок контактної задачі задовольняє альтернативній системі рівнянь-нерівностей

$$\sum_{k=0}^{N-2} D_{nk}U_k^\beta = p_n, \quad \text{при } U_n^\beta > 0, \quad (22)$$

$$\sum_{k=0}^{N-2} D_{nk}U_k^\beta \leq p_n, \quad \text{при } U_n^\beta = 0, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad (23)$$

де D_{nk} – коефіцієнти матриці D .

Введемо в розгляд задачу про знаходження невідомих величин y_k на основі

мінімізації величини

$$I = - \sum_{n=0}^{N-2} \sum_{k=0}^{N-2} (D_{nk} y_k - p_n) y_n, \quad (24)$$

за умови, що справедливі нерівності

$$\sum_{k=0}^{N-2} D_{nk} y_k \leq p_n, \quad y_n \geq 0, \quad \text{при } n = 1, \dots, N-1. \quad (25)$$

Очевидно, що величина I за умов (25) є додатною величиною. Тому задача мінімізації величини (24) при умовах (25) належить до добре вивченої задачі квадратичного програмування.

Будемо виходити із того, що розв'язок контактної задачі існує і єдиний. Тому існує і є єдиним розв'язок системи рівнянь і нерівностей (24), (25), до якої зведена ця задача. Легко перевірити, що знайдені із цієї системи величини U_n^β , $n = 1, \dots, N-1$ є розв'язком задачі квадратичного програмування (24) і (25). Дійсно, значення $y_n = U_n^\beta$ задовольняють нерівностям (25) та при цих значеннях додатна величина I рівна нулю, тобто набуває мінімального значення (це випливає із рівнянь і нерівностей (24), (25)). Звідси випливає, що розв'язок задачі квадратичного програмування (24) і (25) існує. Водночас, ця задача квадратичного програмування не може мати іншого розв'язку, ніж вказаний, оскільки і вона має єдиний розв'язок.

Звідси випливає, що поставлена контактна задача зводиться до розв'язування задачі квадратичного програмування (24) і (25), з якої знаходимо величини y_n , а далі покладаємо $U_n^\beta = y_n$ ($n = 1, \dots, N-1$). При проведенні обчислень контроль за точністю розв'язку здійснюється на основі отриманого значення величини I , яка на точному розв'язку дорівнює нулю. Після знаходження величин U_n^β із задачі квадратичного програмування контактні напруження визначаються за формулами

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{N-2} D_{nk} U_n^\beta - P_n. \quad (26)$$

Знаходження КІН. КІН знаходяться через величини $U(1), V(1)$. Враховуючи, що $U(\xi) + iV(\xi) = \sqrt{1+\xi} \left[(1-\xi)g' - 0,5g(\xi) \right]$, маємо $U(1) + iV(1) = -g(1) / \sqrt{2}$, причому $g(1) = (U_\alpha(1) + iU_\beta(1)) \exp(i\gamma(1))$.

Дослідження НДС півплощини з крайовими тріщинами. Розглянуто задачу про дію штампу на анізотропну півплощину з крайовими тріщинами. Така задача стосовно до ізотропних пластинок детально вивчена в роботах Панасюка В. В. і Дацишин О. П. [2] з метою дослідження довговічності тіл за їх контактної циклічної взаємодії. Прийmemo, що тиск під параболічним штампом описується розподілом Герца для суцільної півплощини. Саме таким способом в основному виконані дослідження в [2].

Розглянемо півнескінченну пластинку $y < 0$ з тріщинами, яка навантажена прикладеними до межі розподіленими зусиллями $\sigma_y = Y_0 p(x), \tau_{xy} = X_0 p(x)$ та зосередженими силами. Тут функція $p(x)$ відмінна від нуля на проміжку (c, d) , X_0, Y_0 – сталі. Для застосування модифікованих інтегральних рівнянь при дослідженні НДС півплощини необхідно записати відповідні дислокаційні розв'язки Φ_j^D, Ψ_j^D та розв'язки

для суцільної півплощини Φ_D, Ψ_D , що відповідають прикладеному навантаженню.

Побудова дислокаційного розв'язку для півплощини з вільним краєм. Для знаходження потенціалів Лехніцького Φ_j^D, Ψ_j^D ($j=1, 2$) необхідно побудувати розв'язок задачі теорії пружності для області D , яка в даному випадку займає півплощину $y < 0$, з вільною від навантаження границею. Використовуючи результати [1], отримуємо

$$\Phi_j^D(z_1) = - \left(\frac{A_j}{z_1 - z_{10}} + \alpha_1 \frac{\bar{A}_j}{z_1 - z_{10}} + \beta_1 \frac{\bar{B}_j}{z_1 - z_{20}} \right),$$

$$\Psi_j^D(z_2) = - \left(\frac{B_j}{z_2 - z_{20}} + \alpha_2 \frac{\bar{A}_j}{z_2 - z_{10}} + \beta_2 \frac{\bar{B}_j}{z_2 - z_{20}} \right),$$

де $\alpha_1 = \frac{\bar{s}_1 - s_2}{\Delta_1}$, $\beta_1 = \frac{\bar{s}_2 - s_2}{\Delta_1}$, $\beta_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_2}{\Delta_1}$, $\alpha_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_1}{\Delta_1}$, $\Delta_1 = s_2 - s_1$.

Напруження в суцільній півплощині. Нехай до межі півнескінченної пластинки прикладене розподілене навантаження $\sigma_y = Y_0 p(x), \tau_{xy} = X_0 p(x)$, причому тут функція $p(x)$ відмінна від нуля на проміжку (c, d) , X_0, Y_0 – сталі. Тоді

$$\Phi_D(z_1) = - \frac{1}{2\pi i} \frac{X_0 + s_2 Y_0}{s_1 - s_2} F(z_1), \quad \Psi_D(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \frac{X_0 + s_1 Y_0}{s_1 - s_2} F(z_2), \quad F(z) = \int_c^d \frac{p(\xi) d\xi}{z - \xi}.$$

Зокрема, для розподілу Герца $p(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ маємо $F(z) = \pi \left(\sqrt{z^2 - a^2} - z \right)$.

Результати розрахунків. Розглянемо випадок дії герцівського тиску, коли його центр розміщено в точці x_0 , тріщина довжиною l виходить на межу пластинку в точці $(0, 0)$, кут між тріщиною і віссю Ox рівний β та між штампом і основою має місце тертя, що описується законом $\tau_{xy} = k\sigma_y$, де k – коефіцієнт тертя (тобто, приймаємо $X_0 = kY_0$).

Дослідимо розподіл КІН для різних кутів нахилу тріщин: $\beta = 20^\circ, 30^\circ, 135^\circ, 150^\circ, 160^\circ$ при $L/a = 1, k = 0, \lambda = 1$ ($\lambda = x_0/l$).

Відносні КІН для ізотропної пластинки практично збігаються із даними, які отримані в [2] безпосередньо для ізотропних пластинок іншим методом.

Відносні КІН F_I (зліва) та F_{II} (справа) для скло-епоксидної пластинки при армуванні в напрямку вісі Oy та Ox наведено на рис. 1 і 2 відповідно.

Із наведених рисунків видно, що анізотропія істотно впливає на значення КІН. Розподіл відносних КІН F_{II} в ізотропній пластинці та в армованій в напрямку вісі Oy пластинці має однаковий характер, при цьому в анізотропній пластинці значення КІН значно більші за величиною.

Висновки. Запропоновано алгоритм дослідження напруженого стану анізотропних пластинок із крайовими тріщинами з врахуванням контакту їх берегів, який базується на методі інтегральних рівнянь. Ефективність алгоритму проілюстрована при дослідженні напружень біля крайових тріщин у півплощині. Встановлено випадки, коли значення КІН мало або істотно залежать від механічних характеристик матеріалу.

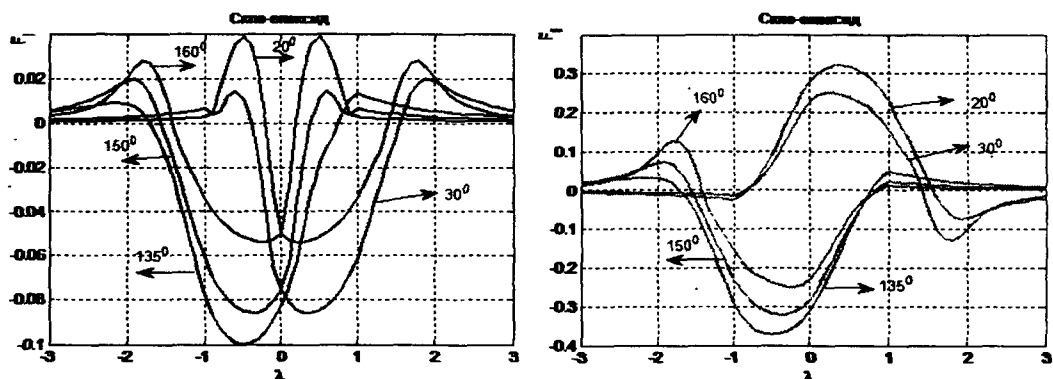


Рис. 1. Відносні КІН для скло-епоксидної пластинки, армування в напрямку осі Oy

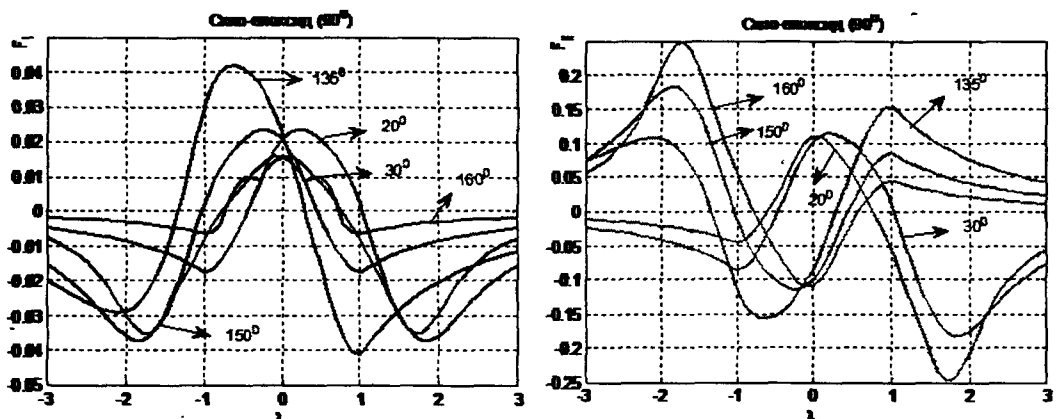


Рис. 2. Відносні КІН для скло-епоксидної пластинки, армування в напрямку осі Ox

Бібліографічні посилання

1. Божидарнік В.В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами / В.В. Божидарнік, О.В. Максимович – Луцьк, 2003. – 226 с.
2. Дацишин О.П. Напружений стан півплощини з крайовою тріщиною під герцівським навантаженням / О.П. Дацишин, Г.П. Марченко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – №1 – С. 23–35.
3. Кит Г.С. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами / Г.С. Кит, М.Г. Кривцун. – К., 1983. – 277 с.
4. Максимович О.В. Визначення напруженого стану біля крайових тріщин у анізотропних пластинчастих елементах конструкцій та деталях машин / О.В. Максимович // Межд. сб. научных трудов Донецкого национального технического университета «Прогрессивные технологии и системы машиностроения». – 2009. Вип. 37 – С. 136–144.
5. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук. – К., 1981. – 324 с.
6. Стрельникова Е.А. О влиянии контакта берегов криволинейной трещины в анізотропной пластине на коэффициенты интенсивности / Е.А. Стрельникова // Проблемы машиностроения. – 1980, – № 12, – С. 15–19.
7. Mason J.C. Chebyshev Polynomials / J.C. Mason, D.C. Handscomb. – London, New York, Washington; 2003. – 335 p.

Надійшла до редакції 28.04.11

УДК 539.3:519.6

Э. Л. Гарт

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОДЕФОРМИРУЕМЫХ СРЕД С ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Розроблені ефективні проекційно-ітераційні схеми реалізації методу скінченних елементів для розв'язування задачі про рівновагу плоскодеформованих середовищ з пружними включеннями. Дослідження проведено для прямокутних пластин з прямокутним і трикутним включенням. Проаналізовано вплив різних граничних умов, механічних і геометричних характеристик пластини та включення на розподіл напружень і деформацій.

Ключові слова: плоскодеформоване середовище, пружне включення, метод скінченних елементів, проекційно-ітераційні схеми.

Разработаны эффективные проекционно-итерационные схемы реализации метода конечных элементов для решения задачи о равновесии плоскодеформируемых сред с упругими включениями. Исследование проведено для прямоугольных пластин с прямоугольным и треугольным включением. Проанализировано влияние разных граничных условий, механических и геометрических характеристик пластины и включения на распределение напряжений и деформаций.

Ключевые слова: плоскодеформируемые среды, упругое включение, метод конечных элементов, проекционно-итерационные схемы.

Efficient projective-iterative schemes of the finite element method for solving equilibrium problem for plate with elastic inclusions is developed. Research for rectangular plate with rectangular and triangular inclusions is given. The influence of different boundary conditions, mechanical and geometrical characteristics of the plate and inclusion on the stresses and strains distribution is analyzed.

Key words: deformed in plane media, elastic inclusion, finite element method, projective-iterative schemes.

Введение. Материалы, которые используются на практике, в частности, при создании конструкций различных отраслей техники, неоднородны по своей структуре и зачастую включают в себя трещины, пустоты, инородные элементы (включения). Эти дефекты являются концентраторами напряжений, поэтому в зонах, прилегающих к ним, при определенных уровнях нагрузок может начаться процесс разрушения. Исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) тел с концентраторами напряжений такого рода, является важной проблемой механики деформируемого твердого тела.

Распространенными модельными задачами, отражающими существенные особенности деформирования и разрушения различных сред, являются плоские задачи теории упругости. Исследованию влияния включений на НДС деформируемых тел посвящены работы многих отечественных и зарубежных авторов [2; 11; 13; 15; 16; 19 – 24 и др.].

Одним из наиболее распространенных и универсальных численных методов решения широкого круга краевых и вариационных задач является метод конечных элементов (МКЭ) [10; 14]. Практика применения проекционно-итерационных схем реализации этого метода к решению различных задач теории упругости и пластичности для плоскодеформируемых сред показывает их высокую эффективность [4 – 8; 17; 18]. В настоящей работе рассмотрено применение проекционно-итерационного варианта МКЭ к решению задачи о напряженно-деформированном состоянии пластин с упругими включениями прямоугольной и треугольной формы.

Постановка задачі. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние изотропной прямоугольной пластины Ω с упругим включением (прямоугольным, рис. 1, а или треугольным, рис. 1, б). Ширина пластины равна L_1 , длина – L_2 , размеры включения определяются величинами $(L''_1 - L'_1)$ и $(L''_2 - L'_2)$ (в дальнейшем их будем называть a и b).

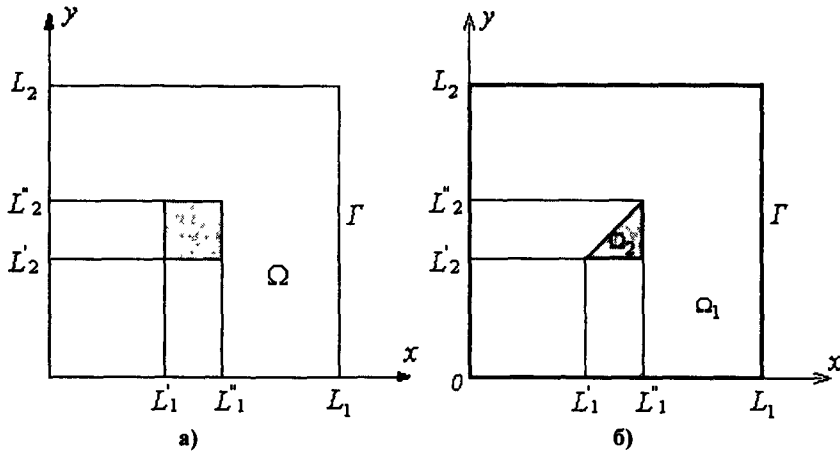


Рис. 1. Геометрия пластины с упругим включением

На границе пластины Γ заданы граничные условия в перемещениях. Рассматриваются два варианта:

- 1) на границе Γ заданы перемещения:

$$u(x, y)|_{\Gamma} = g_1(x, y), \quad v(x, y)|_{\Gamma} = g_2(x, y), \quad (1)$$

где $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$ – известные функции переменных x, y ;

- 2) на части границы Γ ($0 \leq x \leq L_1, y=0$ и $0 \leq x \leq L_1, y=L_2$) заданы перемещения:

$$\begin{aligned} u(x, y)|_{y=0} &= 0, & v(x, y)|_{y=0} &= v_1, \\ x \in [0, L_1] & & x \in [0, L_1] & \\ \\ u(x, y)|_{y=L_2} &= 0, & v(x, y)|_{y=L_2} &= -v_1, \\ x \in [0, L_1] & & x \in [0, L_1] & \end{aligned} \quad (2)$$

где v_1 – заданное значение перемещений; на остальной части границы Γ ($0 \leq y \leq L_2, x=0$ и $0 \leq y \leq L_2, x=L_1$) нормальные и касательные напряжения равны нулю. Требуется определить поля перемещений, деформаций и напряжений пластины с включением.

Исходя из вариационного принципа механики, приходим к задаче минимизации функционала [3]:

$$I[u, v] = \int_{\Omega_1} \left\{ 2\mu_1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy + \int_{\Omega_2} \left\{ 2\mu_2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy, \quad (3)$$

где $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ – постоянные Ляме материалов пластины и включения соответственно; $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ – область определения переменных x и y .

Метод решения. Минимизация функционала (3) проводится на основе проекционно-итерационного варианта МКЭ [4; 17], основная идея которого заключается в следующем. Исходная экстремальная задача аппроксимируется с помощью МКЭ последовательностью ($n = 1, 2, \dots$) дискретных экстремальных задач для функций многих переменных. Каждая из полученных задач решается с помощью некоторого итерационного метода (например, метода последовательной верхней релаксации), но не до конца. Начиная с произвольного, достаточно грубого, разбиения для соответствующей функций многих переменных строится лишь несколько приближений (k_n) к ее точке минимума, последнее затем интерполируется на более мелкую конечно-элементную сетку и служит на ней начальным приближением к точке минимума для соответствующей функции многих переменных. Процесс продолжается до достижения заданной точности.

Применение метода последовательной верхней релаксации к решению полученной последовательности задач минимизации приводит к следующим формулам проекционно-итерационного процесса:

$$z_{h,i}^{(k+1)} = z_{h,i}^{(k)} + \omega (z_{h,i}^{(*)} - z_{h,i}^{(k)}), \quad (4)$$

$$k = 0, 1, \dots, k_{n-1}, \quad h = h_n, \quad n = 1, 2, \dots; \quad i = \overline{1, N_n},$$

$$z_h^{(0)} = \Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} z_\tau^{(k_n)}, \quad h = h_{n+1}, \quad \tau = h_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(z_h^{(0)} \in Z_h, \quad h = h_1).$$

Здесь $0 < \omega < 2$ – параметр релаксации; N_n – общее количество узлов на n -ой сетке; $z_h^{(0)}$, $h = h_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ – начальное приближение к точке минимума функции многих переменных, полученное путём интерполяции $z_h^{(k_n)}$ ($h = h_n$, $n = 1, 2, \dots$) на более мелкую триангуляцию, при $h = h_1$ $z_h^{(0)}$ – произвольная сеточная функция из Z_h ; Φ_n^{-1} – линейный интерполирующий оператор, ставящий во взаимно однозначное соответствие каждой сеточной функции $z_h \in H_h$ ее непрерывный в области $\overline{\Omega}$ интерполянт; Φ_n – линейный оператор, осуществляющий обратное отображение; $z_{h,i}^{(*)}$ – точка минимума функции

$$I_i^{(k)} [z_{h,i}] = I_h [z_{h,1}^{(k)}, z_{h,2}^{(k)}, \dots, z_{h,i}^{(k)}, z_{h,i+1}^{(k-1)}, \dots, z_{h,N}^{(k-1)}].$$

Нетрудно убедиться в том, что условия теоремы о сходимости [1] проекционно-итерационного метода (4) для задач (1), (3) и (2), (3) оказываются выполненными.

Численные результаты. Рассмотрим результаты применения указанного проекционно-итерационного метода к решению конкретной задачи (1), (3) ((2), (3)) для пластины размером $L_1 \times L_2 = 4,5 \times 4,5$ см с упругим прямоугольным и треугольным включениями, размеры которых определяются величинами $a = b = 1,5$ см; $0,5$ см при разных комбинациях материалов пластины и включения: сталь ($E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$), титан ($E = 120$ ГПа, $\nu = 0,32$), алюминий ($E = 70$ ГПа, $\nu = 0,36$). Задача решена для двух вариантов граничных условий: в случае условий вида (1) перемещения на всей границе Γ заданы по закону $g_1(x, y) = \gamma_0(y - L_2/2)$, $g_2(x, y) = \gamma_0(x - L_1/2)$, $\gamma_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ – угол сдвига; в случае граничных условий (2) $\nu_1 = 1 \cdot 10^{-3}$. Проекционно-итерационный вариант МКЭ реализован на 6-ти вложенных вдвое конечно-элементных сетках (19×19 , 37×37 , 73×73 , 145×145 , 289×289 , 577×577) из прямоугольных лагранжевых элементов первой степени ($h_{n+1} = h_n/2$) с точностью вычислений, равной 10^{-8} , при параметре релаксации $\omega = 1,75$. Количество k_n строящихся приближений на n -ом шаге ($n = 1, 2, \dots, 6$) проекционно-итерационного процесса определялось как наименьшее целое k , которое удовлетворяет неравенству

$$\| z_h^{(k)} - z_h^{(k-1)} \| \leq \varepsilon \quad (k = 0, 1, \dots, k_n),$$

где ε – заданная точность вычислений; $z_h^{(k)}$ – k -ое приближение к решению n -ой конечномерной задачи; h – шаг сетки.

Серия вычислительных экспериментов проведена на ПК AMD Athlon(tm) (1,80 ГГц) с 1,96 ГБ оперативной памяти при помощи разработанного комплекса компьютерных программ на языке FORTRAN.

Приведем в качестве иллюстрации данные вычислений для стальной пластины с прямоугольным и треугольным алюминиевым включением при $a = b = 0,5$ см. Приближенное решение задачи в случае граничных условий (1) на основе проекционно-итерационного процесса было получено за 23 с 69 мс для прямоугольного включения (за 13 с 43 мс для треугольного включения), а на основе традиционного МКЭ – за 19 мин 47 с 79 мс (за 17 мин 11 с 84 мс). Как видно, проекционно-итерационный вариант МКЭ оказался в 52 раза (в 73 раза) эффективнее обычного МКЭ.

Распределение напряжений σ_x , σ_y и σ_{xy} в характерном сечении пластины ($x = L_1''$, $0 \leq y \leq L_2$) при граничных условиях типа (2) для трех вариантов сочетаний материалов пластины и треугольного включения (стальной пластины с алюминиевым включением (St_Al), титановой пластины со стальным включением (Ti_St) и алюминиевой пластины со стальным включением (Al_St)) изображено на рис. 2 – 4 соответственно. Здесь размер включения определяется величинами $a = b = 1,5$ см.

Из рис. 2 – 4 видно, что максимальные напряжения в пластинах с упругим треугольным включением возникают в зоне угловых точек контура включения. Такая же картина наблюдается и для пластин с прямоугольным включением. С ростом размеров включения концентрация напряжений возрастает. Из рассмотренных в работе материалов наибольшие по величине напряжения имеют место в стальной пластине, а наименьшие – в алюминиевой.

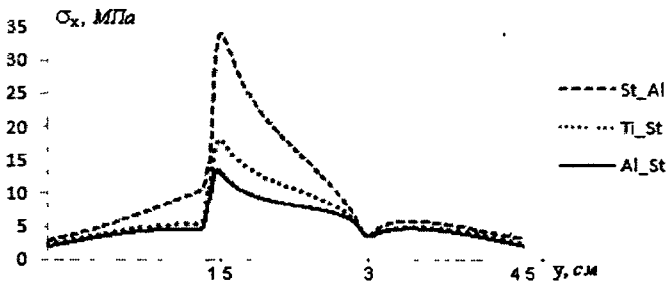


Рис. 2. Распределение напряжений σ_x в характерном сечении пластины

$$(x = L_1'', 0 \leq y \leq L_2)$$

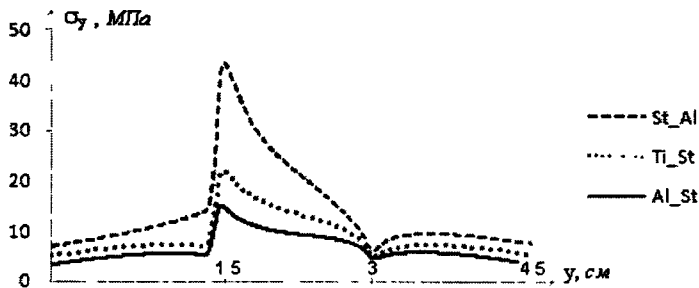


Рис. 3. Распределение напряжений σ_y в характерном сечении пластины

$$(x = L_1'', 0 \leq y \leq L_2)$$

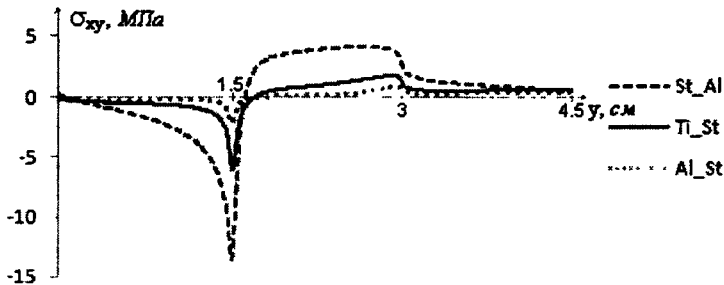


Рис. 4. Распределение напряжений σ_{xy} в характерном сечении пластины

$$(x = L_1'', 0 \leq y \leq L_2)$$

Характер распределения напряжений σ_x , σ_y , σ_{xy} для пластины St_Al с прямоугольным и треугольным включением при $a = b = 1,5$ см в случае граничных условий (2) проиллюстрирован на рис. 5, а) – в) соответственно. Здесь концентрация напряжений имеет место в зоне угловых точек контура включения и пластины.

Распределение напряжений σ_{xy} в сечении пластины $x = L_1''$, $0 \leq y \leq L_2$ в случае граничных условий (2) для пластины Ti_St с прямоугольным включением размером $1,5 \times 1,5$ см и $0,5 \times 0,5$ см приведено на рис. 6 (сплошная линия соответствую-

ет включению $1,5 \times 1,5$ см, а пунктирная – включению $0,5 \times 0,5$ см). Анализ распределения напряжений свидетельствует, что при данном виде граничных условий наибольшие напряжения образуются на стыке пластины и включения, а также вблизи угловых точек контура пластины (краевой эффект), но где именно будут сосредоточены максимальные значения напряжений зависит как от размеров включения, так и от материала пластины и включения. По результатам проведенных расчетов выявлено, что при уменьшении размера включения величина напряжений σ_{xy} в области стыка пластины и включения уменьшается, а вблизи угловых точек пластины наоборот, увеличивается, тем самым достигая максимальных значений.

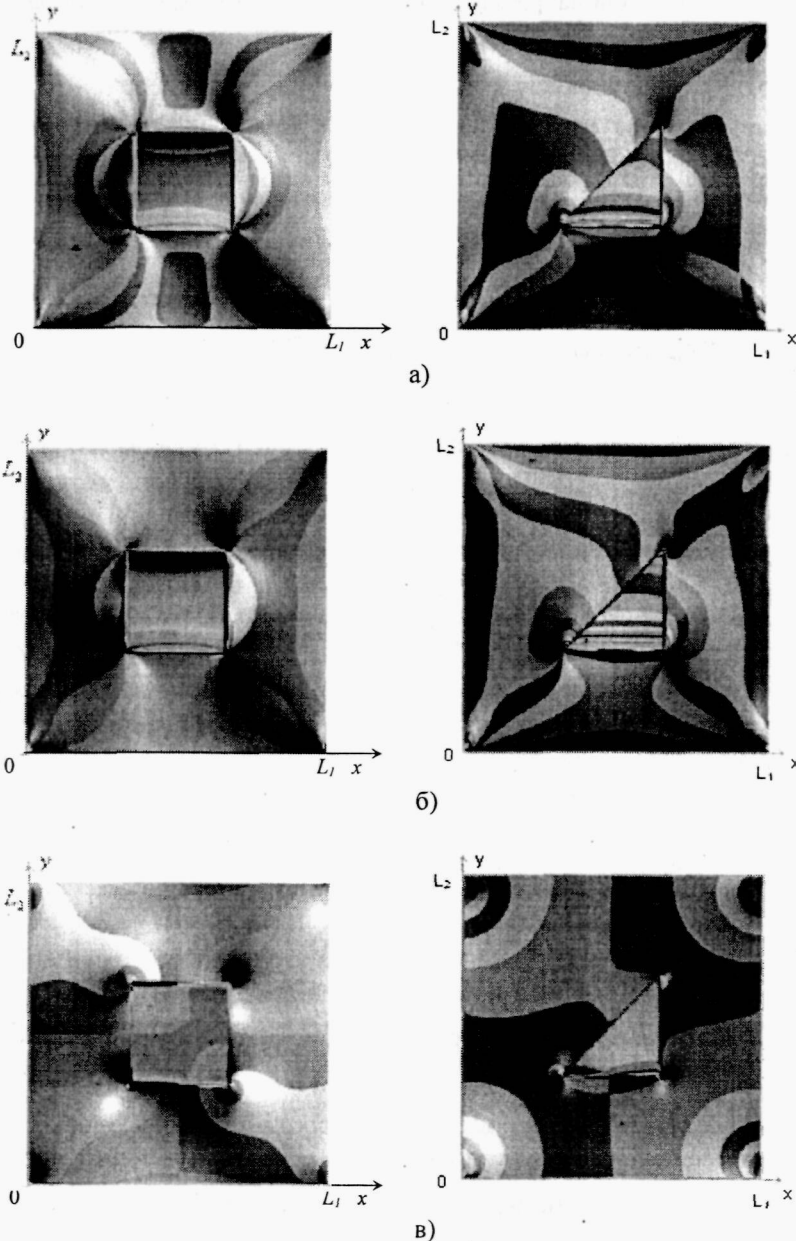


Рис. 5. Распределение напряжений в пластине St_Al с прямоугольным и треугольным включением: а – σ_x , б – σ_y , в – σ_{xy}

Зависимость характера распределения напряжений в пластине от физико-механических свойств материала пластины и включения иллюстрирует следующий пример. Так, для алюминиевой пластины со стальным прямоугольным включением размером $1,5 \times 1,5$ см максимальные напряжения возникают вблизи угловых точек контура пластины, в то время, как для титановой пластины с таким же включением максимальные напряжения возникают вблизи вершин включения (прямоугольного и треугольного), т. е. первичную роль в характере распределения напряжений играет материал пластины. Если не принимать во внимание размеры включения, то вероятность образования максимальных напряжений в окрестности угловых точек контура пластины тем больше, чем модуль упругости материала пластины меньше. Максимальные напряжения σ_x и σ_y при граничных условиях (2) возникают вблизи вершин включения, также как и в случае граничных условий (1).

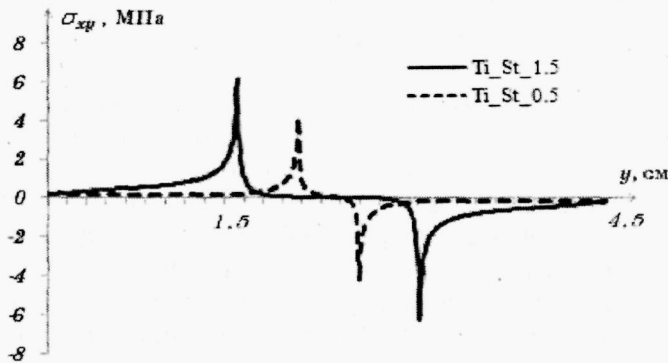


Рис. 6. Распределение напряжений σ_{xy} в характерном сечении пластины Ti_St с прямоугольным включением в случае граничных условий (2)

Сравнивая влияние двух рассмотренных видов граничных условий видим, что для пластины как с треугольным, так и с прямоугольным включением, максимальные напряжения при граничных условиях типа (1) превышают максимальные напряжения при граничных условиях типа (2). Это проиллюстрировано на примере распределения напряжений σ_{xy} в пластине Ti_St с прямоугольным включением размером $1,5 \times 1,5$ см (рис. 7).

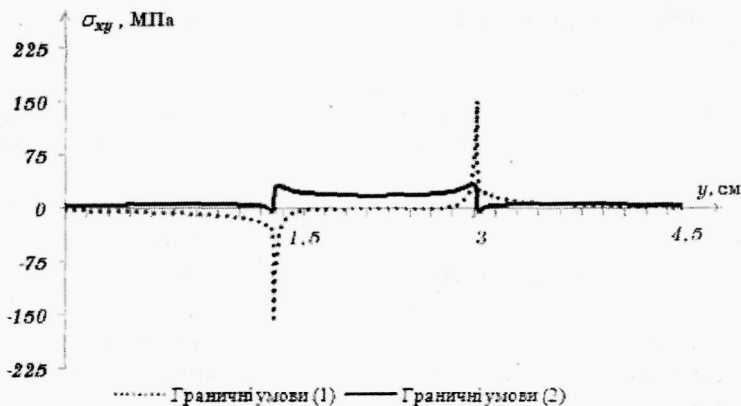


Рис. 7. Распределение напряжений σ_{xy} в характерном сечении пластины Ti_St с прямоугольным включением в случае граничных условий (1)

Следует отметить, что во всех проведенных расчетах значения напряжений не превышают границы пропорциональности для использованных материалов, т. е. расчет не выходит за пределы теории упругого тела.

Выводы. 1. На основе проекционно-итерационного варианта МКЭ разработаны алгоритм и комплекс компьютерных программ, который позволяет довольно эффективно решать класс задач теории упругости для пластин с упругими включениями (прямоугольными, треугольными). Проекционно-итерационные схемы реализации МКЭ дают выигрыш по времени счета на ПК более чем в 70 раз по сравнению с традиционным МКЭ.

2. Исследовано влияние разных граничных условий, физико-механических и геометрических характеристик пластины и включения на ее НДС. Установлено:

– независимо от размеров включения, материала пластины и включения, концентрация напряжений наблюдается в окрестности вершин включения; с ростом размеров включения напряжения увеличиваются;

– вид граничных условий ((1) или (2)) не существенно влияет на характер распределения напряжений вблизи контура включения;

– при одинаковых размерах включения концентрация напряжений вблизи вершин включения возрастает с ростом модуля упругости материала пластины;

Разработанный комплекс программ можно применять для решения более сложных задач теории упругости для пластин с несколькими произвольно расположенными упругими включениями разной формы и при других видах граничных условий. Возможна модификация предложенного вычислительного алгоритма для решения задач для плоскодеформируемых сред при усложненных связанных вязкоупруго-пластических моделях материала [9; 18]. Такие задачи важны для механики разрушения.

Библиографические ссылки

1. Балашова С. Д. О сходимости проекционно-итерационного метода решения экстремальной задачи с ограничениями / С. Д. Балашова, Э. Л. Тавадзе (Гарт) // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. – Д., 1996. – С. 128–134.
2. Барило В. Г. Устойчивость деформирования твердых тел с дефектами типа трещин и включений / В. Г. Барило // Проблемы прочности. – 2005. – № 1. – С. 118–135.
3. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М., 1987. – 544 с.
4. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационные модификации метода конечных элементов в краевых задачах теории упругости / Э. Л. Гарт // Доповіді НАН України. – 2008. – № 6. – С. 56–61.
5. Гарт Е. Л. Розв'язування задач пружно-пластичної рівноваги пластин з прямокутним і круговим отворами на основі проекційно-ітераційних схем реалізації методу скінченних елементів / Е. Л. Гарт, В. С. Гудрамович, С. А. Рябоконт // Вісник Київськ. ун-ту. Сер. : фіз.-мат. науки. – 2009, № 3. – С. 61–66.
6. Гарт Э. Л. Проекционно-итерационные схемы реализации метода конечных элементов для тел с упругими включениями / Э. Л. Гарт // Матеріали Міжнародної наукової конференції «Математичі проблеми технічної механіки-2011» (13–15 квітня 2011 р.). – Дніпропетровськ–Дніпродзержинськ, 2011. – Т. 2. – С. 68.
7. Гарт Е. Л. Числовий аналіз рівноваги пружної пластини з включенням на основі проекційно-ітераційного варіанта методу скінченних елементів / Е. Л. Гарт, К. О. Ніжніченко // Техническая механика. – 2011. – № 1. – С. 61–69.
8. Гудрамович В. С. Проекционно-итерационные схемы реализации метода конечных элементов в задачах упругопластического деформирования пластин с отверстиями / В. С. Гуд-

- рамович, Э. Л. Гарт // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященный 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина (Москва, 20–21 января 2011 г.). – М., 2011. – С. 144–147.
9. **Кукуджанов В. И.** Связанные модели упругопластичности и повреждаемости и их интегрирование / В. И. Кукуджанов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 6. – С. 103–135.
 10. **Марчук Г. И.** Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М., 1981. – 416 с.
 11. **Мирсалимов В. М.** Обратная периодическая задача теории изгиба пластины с упругим включением / В. М. Мирсалимов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2006. – № 3. – С. 171–179.
 12. **Самарский А. А.** Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М., 1978. – 592 с.
 13. **Сулим Г. Т.** Основы математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів, 2007. – 716 с.
 14. **Шайдуров В. В.** Многосеточные методы конечных элементов / В. В. Шайдуров. – М., 1989. – 288 с.
 15. **Шарафутдинов Г. З.** Тонкий диск с центральным жестким круговым включением под действием радиальных напряжений / Г. З. Шарафутдинов // Вестн. МГУ. Сер. 1. – 2004. – № 6. – С. 60–63.
 16. **Duong C. N.** Analysis of a plate containing a polygon-shaped inclusion with a uniform eigen-curvature / C. N. Duong, J. Yu // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2003. – V. 70, № 3. – P. 404–407.
 17. **Hart E. L.** Projection-iterative version of the pointwise relaxation method / E. L. Hart // Journ. of Math. Sci. – 2010. – V. 167, № 1. – P. 76–88.
 18. **Hudramovich V. S.** Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates / V. S. Hudramovich, E. L. Hart, S. A. Rjabokon' // Journ. of Eng. Math. – 2011. – DOI: 10.1007/s 10665–010–9409–5. – Режим доступа : <http://www.springerlink.com/content/100287>.
 19. **Mura T.** Inclusion problems / T. Mura, H. M. Shodja, Y. Hirose // Appl Mech. Rev. – 1996. – V. 49, № 10/2. – P. 118–127.
 20. **Ouinias D.** Numerical analysis of the effect of notch-inclusion interaction in a loaded plate / D. Ouinas, B. Boutabout, B. Bachir Bouiadjra, A. Megueni // J. Mater. Sci. and Technol. – 2004. – V. 12, № 1. – P. 26–35.
 21. **Shen H.** Stress analysis of an elliptic inclusion with imperfect interface in plane elasticity / H. Shen, P. Schiavone, C. Q. Ru, A. Mioduchowski // J. Elasticity. – 2001. – V. 62. – P. 25–46.
 22. **Trantina G. G.** Elastic-plastic analysis of small defects-voids and inclusions / G. G. Trantina, M. Barishpolsky // Eng. Fract. Mech. – 1984. – V. 20, № 1. – P. 1–10.
 23. **Wang X.-F.** Bending of a thin plate containing a rigid inclusion and a crack / X.-F. Wang, N. Hasebe // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2000. – V. 24. – P. 145–153.
 24. **Yu H. Y.** Elastic inclusions and inhomogeneities in transversely isotropic solids / H. Y. Yu, S. C. Sanday, C. I. Chang // Proc. Roy. Soc. London (Proceedings: Math. and Phys. Sci.). – 1994. – V. A444, № 1920. – P. 239–252.

Надійшла до редколеги 17 04 11

УДК 393.3

А. Я. Григоренко¹, И. А. Лоза²¹Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,²Национальный транспортный университет

НЕОСЕССИМЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО ГРАДИЕНТНЫХ МАТЕРИАЛОВ, ПОЛЯРИЗОВАННЫХ В ОСЕВОМ НАПРАВЛЕНИИ

Розглянута задача про власні неосесиметричні коливання неоднорідних за товщиною порожнистих циліндрів з функціонального градієнтного п'єзоелектричного матеріалу. Властивості матеріалу неперервно змінюються в осьовому напрямі. Бічні поверхні циліндра вільні від зовнішніх навантажень та вкриті нескінченно тонкими замкнутими електродами. Запропоновано ефективний чисельно-аналітичний метод розв'язку. Після його застосування розділення змінних та методу сплайн-колокацій задача теорії електропружності у частинних похідних зводиться до крайової задачі на власні значення у звичайних диференціальних рівняннях, яка розв'язується методом дискретної ортогоналізації у поєднанні з методом покрокового пошуку. Наведено результати чисельного аналізу спектра власних частот циліндру з функціонально градієнтної п'єзокераміки PZT 4.

Ключові слова: функціонально-градієнтні п'єзоелектричні матеріали, порожнистий циліндр, власні несиметричні коливання, метод сплайн-колокацій, метод дискретної ортогоналізації.

Рассмотрена задача о собственных неосесимметричных колебаний неоднородных по толщине полых цилиндров из функционально градиентного пьезоэлектрического материала. Свойства материала непрерывно изменяются в осевом направлении, боковые поверхности цилиндра свободны от внешних нагрузок и покрыты тонкими замкнутыми электродами. Предложен эффективный численно-аналитический метод решения. После применения метода разделения переменных и метода сплайн-коллокаций задача теории электроупругости в частных производных сводится к краевой задаче в обычных дифференциальных уравнениях, которая решается устойчивым методом дискретной ортогонализации вместе с методом пошагового поиска. Приведены результаты численного анализа спектра собственных частот цилиндра из функционально градиентной пьезокерамики PZT 4.

Ключевые слова: функционально-градиентные пьезоэлектрические материалы, полый цилиндр, собственные несимметрические колебания, метод сплайн-коллокаций, метод дискретной ортогонализации.

The problem about nonaxisymmetrical natural vibrations of hollow inhomogeneous cylinder from functionally graded piezoelectric material is considered. A material property of cylinder is varying continuously in axial direction. Lateral faces of cylinder are free from environmental loads and coated short-circuited electrodes. After separate variables and application spline-collocation method the initial problem of theory of electroelasticity in the partial derivatives is reduced to the boundary value problem for the system of ordinary differential equations. Numerical results of the investigation of natural frequencies of vibrations FGPM hollow cylinder are presented.

Key words: functionally graded piezoelectric materials, hollow cylinder, nonaxisymmetrical natural, vibrations, spline-collocation method, discrete ortogonalization method.

Введение. Функционально градиентные пьезоэлектрические материалы (ФГПМ) привлекли к себе широкое внимание в последние десятилетия. ФГПМ представляют собой комбинацию двух или более различных материалов, которые соединены в единую структуру с непрерывно изменяющимися свойствами в одном или разных направлениях. Для повышения функциональности устройств (повышения прочности, достижения больших деформаций и т. д.) их часто выполняют в виде многослойных конструкций. При этом в двух соседних слоях за счет разницы физико-механических свойств материалов в процессе эксплуатации возникают микротрещины. Это снижает срок службы пьезоэлектрических устройств и ограни-

чивает область их применения. Применение в этих устройствах ФГПМ, где свойства материала непрерывно изменяются, позволяют конструкции приобретать полезные качества, без каких либо механических ослаблений в местах соединения материалов. Здесь мы получаем возможность комбинировать свойства этих материалов, чего не смогли бы добиться, используя монолитные структуры. Пьезоэлектрические устройства могут выполняться как целиком из ФГПМ, так и иметь промежуточные слои из этих материалов. Применение их позволяет достигать больших деформаций и существенно уменьшать внутренние напряжения, что положительно сказывается на сроке службы указанных устройств и открывает широкие возможности для применения этих материалов во многих приложениях как, например, в космических технологиях.

Ввиду того, что данное направление развивается недавно, а также усложнения задачи в связи с тем, что физические свойства материала являются функциями одной из координат, имеется незначительное количество публикаций, посвященных данной тематике (в основном – статические одномерные задачи [2; 3; 7; 8]). Для решения задачи, рассматриваемой в настоящей статье, предлагается использовать эффективный численно-аналитический подход, с успехом применявшийся для решения аналогичных задач для упругих тел [4 – 6] и также для однородных пьезокерамических цилиндров [1].

Некоторые аспекты нестационарного электромеханического поведения пьезокерамических тел исследованы на основании численного подхода в [9 – 12].

Рассматриваются собственные осесимметричные колебания полого цилиндра из функционально градиентного пьезокерамического материала, боковые поверхности которого свободны от внешних воздействий и покрыты тонкими короткозамкнутыми электродами. Торцы цилиндра жестко заземлены и свободны от электродов.

Основные уравнения. Уравнения осесимметричных гармонических колебаний в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_\theta &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho \omega^2 u_z &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения электростатики:

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0; \quad E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

Соотношения Коши:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}; \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}; \end{aligned} \quad (3)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, ρ – плотность материала, ω – круговая частота, u_i – компоненты вектора перемещений, D_i – компоненты вектора электри-

ческой индукции, E_i – компоненты вектора напряженности электрического поля, φ – электростатический потенциал, ε_{ij} – компоненты тензора деформаций.

Материальные соотношения для материала, поляризованного в осевом направлении, имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= c_{11}\varepsilon_{rr} + c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_z; \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{12}\varepsilon_{rr} + c_{11}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}\varepsilon_{zz} - e_{13}E_z; \\ \sigma_{zz} &= c_{13}\varepsilon_{rr} + c_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{33}\varepsilon_{zz} - e_{33}E_z; \\ \sigma_{\theta z} &= 2c_{55}\varepsilon_{\theta z} - e_{15}E_\theta; \sigma_{rz} = 2c_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_r; \\ \sigma_{r\theta} &= 2c_{66}\varepsilon_{r\theta}; D_z = e_{13}\varepsilon_{rr} + e_{13}\varepsilon_{\theta\theta} + e_{33}\varepsilon_{zz} + e_{33}E_z; \\ D_r &= 2e_{15}\varepsilon_{rz} + e_{11}E_r; D_z = 2e_{15}\varepsilon_{\theta z} + e_{11}E_\theta.\end{aligned}\quad (4)$$

где c_{ij} – компоненты тензора модулей упругости, e_{ij} – компоненты тензора пьезомодулей, ε_{ij} – компоненты тензора диэлектрической проницаемости материала. Будем рассматривать случай, когда указанные выше компоненты изменяются по экспоненциальному закону:

$$c_{ij} = c_{ij}^0 e^{nr}, \quad e_{ij} = e_{ij}^0 e^{nr}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 e^{nr}, \quad (6)$$

где c_{ij}^0 , e_{ij}^0 и ε_{ij}^0 – значения соответствующих модулей на внешней поверхности цилиндра, значение m определяется экспериментально и обычно находится в пределах $-2 \leq n \leq 2$.

Граничные условия на боковых поверхностях цилиндра (при $r = R_0 \pm h$) задаются следующими: поверхности свободны от внешних усилий: $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0$ и покрыты тонкими электродами, которые закорочены: $\varphi = 0$; торцы цилиндра (при $z = \pm L/2$) жестко заземлены: $\tilde{u}_r = 0; \tilde{u}_z = 0$ и свободны от электродов: $D_z = 0$; R_0 – радиус срединной поверхности, h – половина толщины, L – длина цилиндра.

Метод решения. После разделения переменных и использования метода сплайн-коллокаций по осевой координате, исходная двумерная задача дифференциальных уравнений в частных производных сводится к краевой задаче на собственные значения в обыкновенных дифференциальных уравнениях по радиальной координате [1; 2]

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = A(x, \Omega)\mathbf{R} \quad (8)$$

с граничными условиями:

$$B_1\mathbf{R}(-1) = 0, B_2\mathbf{R}(1) = 0. \quad (9)$$

Здесь введены безразмерные величины:

$$\Omega = \omega h \sqrt{\rho/\lambda}, \quad \tilde{c}_{ij} = c_{ij}^0/\lambda, \quad \tilde{e}_{ij} = e_{ij}^0/\sqrt{\varepsilon_0\lambda}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}^0/\varepsilon_0, \quad x = (r - R_0)/h.$$

где ρ – плотность материала цилиндра, R_0 – радиус срединной поверхности, ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума, $\lambda = 10^{10} \text{ Н/м}^2$.

Ненулевые элементы матрицы A для случая осевой поляризации пьезокерамики имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= 1; A_{21} = -\Phi_1^{-1} \left(\left(\Omega^2 - \frac{m^2 \tilde{c}_{66} + \tilde{c}_{11}}{x^2} \right) \frac{1}{\tilde{c}_{11}} \Phi_1 + \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \Phi_1' \right); & A_{22} &= -\Phi_1^{-1} \frac{1}{x} \Phi_1; \\
 A_{23} &= -\Phi_1^{-1} \frac{m(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{11} x^2} \Phi_1; & A_{24} &= -\Phi_1^{-1} \frac{\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66}}{\tilde{c}_{11} x} \Phi_2; & A_{25} &= -\Phi_1^{-1} \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{11}} \Phi_1'; \\
 A_{26} &= -\Phi_1^{-1} \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{11}} \Phi_1'; & A_{34} &= 1; & A_{41} &= \Phi_2^{-1} \frac{m(\tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{66} x^2} \Phi_1; \\
 A_{42} &= \Phi_2^{-1} \frac{m(\tilde{c}_{12} + \tilde{c}_{66})}{\tilde{c}_{66} x} \Phi_1; & A_{43} &= -\Phi_2^{-1} \left(\left(\frac{\Omega^2}{\tilde{c}_{55}} - \frac{m^2 \tilde{c}_{11} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{55} x^2} \right) \Phi_2 + \frac{\tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}} \Phi_2' \right); \\
 A_{44} &= -\Phi_2^{-1} \frac{1}{x} \Phi_2; & A_{45} &= \Phi_2^{-1} \frac{\tilde{c}_{13} + \tilde{c}_{55}}{\tilde{c}_{66}} \frac{m}{x} \Phi_1'; & A_{46} &= \Phi_2^{-1} \frac{\tilde{e}_{13} + \tilde{e}_{15}}{\tilde{c}_{66}} \frac{m}{x} \Phi_1'; & A_{56} &= 1 \\
 A_{61} &= -\Phi_1^{-1} \left(1 + \frac{\Delta_4}{\Delta} \right) \frac{1}{x} \Phi_1'; & A_{62} &= -\Phi_1^{-1} \left(1 + \frac{\Delta_4}{\Delta} \right) \Phi_1'; & A_{63} &= -\Phi_1^{-1} \left(1 + \frac{\Delta_4}{\Delta} \right) \frac{m}{x} \Phi_2'; \\
 A_{64} &= -\Phi_1^{-1} \left(\left(\frac{\tilde{e}_{33} \Omega^2}{\Delta} - \frac{m^2}{x^2} \right) \Phi_1 + \frac{\Delta_5}{\Delta} \Phi_1' \right); & A_{65} &= -\Phi_1^{-1} \frac{1}{x} \Phi_1; & A_{66} &= \Phi_1^{-1} \frac{\Delta_6}{\Delta} \Phi_1'; \\
 A_{67} &= \Phi_1^{-1} \frac{\Delta_6}{\Delta} \Phi_1'; & A_{78} &= 1; & A_{81} &= \Phi_1^{-1} \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{1}{x} \Phi_1'; & A_{82} &= \Phi_1^{-1} \frac{\Delta_1}{\Delta} \Phi_1; \\
 A_{83} &= \Phi_1^{-1} \frac{\Delta_1}{\Delta} \frac{m}{x} \Phi_2'; & A_{84} &= -\Phi_1^{-1} \left(\frac{\tilde{e}_{15} \Omega^2}{\Delta} \Phi_1 - \frac{\Delta_2}{\Delta} \Phi_1' \right); & A_{85} &= -\Phi_1^{-1} \left(\frac{m^2}{x^2} \Phi_1 - \frac{\Delta_3}{\Delta} \Phi_1' \right); \\
 A_{85} &= -\Phi_1^{-1} \left(\frac{m^2}{x^2} \Phi_1 - \frac{\Delta_3}{\Delta} \Phi_1' \right); & A_{86} &= -\Phi_1^{-1} \frac{1}{x} \Phi_1,
 \end{aligned}$$

а матрицы B , [1]:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \begin{pmatrix} \tilde{c}_{12} \frac{1}{x_0} & \tilde{c}_{11} & 0 & 0 & \tilde{c}_{13} & 0 & \tilde{e}_{13} & 0 \\ \frac{m}{x_0} & 0 & -\frac{1}{x_0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{55} & 0 & \tilde{e}_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\
 B_2 &= \begin{pmatrix} \tilde{c}_{12} \frac{1}{x_N} & \tilde{c}_{11} & 0 & 0 & \tilde{c}_{13} & 0 & \tilde{e}_{13} & 0 \\ \frac{m}{x_N} & 0 & -\frac{1}{x_N} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{55} & 0 & \tilde{e}_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \tilde{e}_{15}^2 + \tilde{c}_{55}\tilde{e}_{11}; \Delta_1 = \tilde{c}_{55}\tilde{e}_{13} - \tilde{c}_{13}\tilde{e}_{15}; \Delta_2 = \tilde{c}_{55}\tilde{e}_{33} - \tilde{c}_{33}\tilde{e}_{15}; \Delta_3 = \tilde{c}_{55}\tilde{e}_{33} + \tilde{e}_{33}\tilde{e}_{15};$$

$$\Delta_4 = \tilde{e}_{15}\tilde{e}_{33} + \tilde{e}_{11}\tilde{c}_{13}; \Delta_5 = \tilde{e}_{33}\tilde{e}_{15} + \tilde{c}_{33}\tilde{e}_{11}; \Delta_6 = \tilde{e}_{15}\tilde{e}_{33} - \tilde{e}_{33}\tilde{e}_{11}.$$

Входящие в выражения элементов матриц A выражения Φ , представляют собой линейные комбинации B -сплайнов на равномерной сетке Δ ; $-L/2 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = L/2$.

Решение задачи (8), (9) выполнено устойчивым методом дискретной ортогонализации в сочетании с методом пошагового поиска.

Анализ результатов. Ниже приведены результаты численного анализа задачи (8), (9). На рис. 1 представлена зависимость первой собственной частоты от безразмерной длины цилиндра для различных значений параметра n ($m = 2$). При этом внешний радиус цилиндра $R_+ = 5$, внешний – $R_- = 3$. Когда $m = 0$ имеем случай однородного материала рассмотренный в [1]. На внешней поверхности цилиндра при $R_+ = 5$ заданы следующие характеристики пьезокерамики PZT 4:

$$c_{11}^0 = 13,9 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}; c_{12}^0 = 7,43 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}; c_{13}^0 = 7,78 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2};$$

$$c_{33}^0 = 11,5 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}; c_{55}^0 = 2,56 \cdot 10^{10} \frac{H}{M^2}; e_{13}^0 = -5,2 \frac{K}{M^2}; e_{15}^0 = 12,7 \frac{K}{M^2};$$

$$e_{33}^0 = 15,1 \frac{K}{M^2}; \varepsilon_{11}^0 = 730; \varepsilon_{33}^0 = 635$$

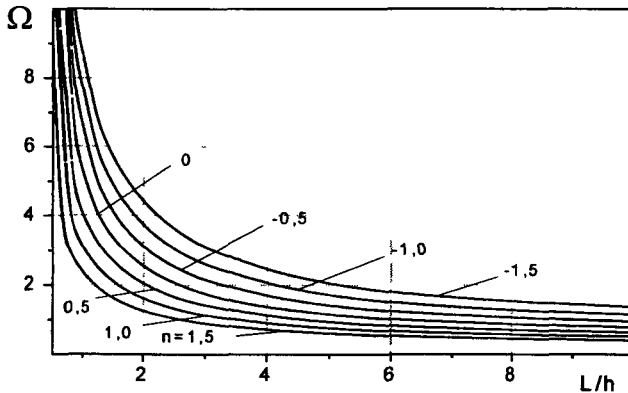
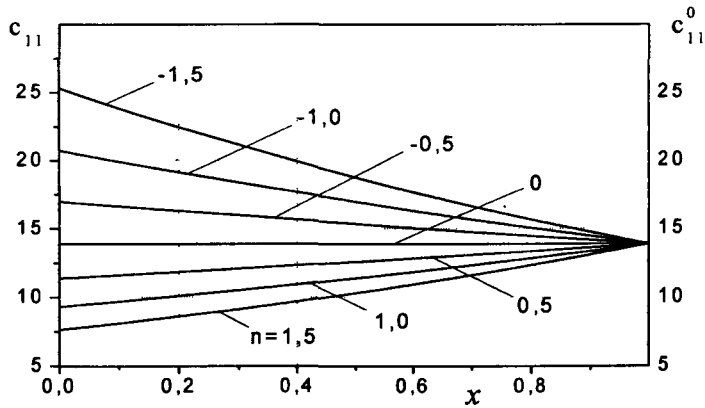
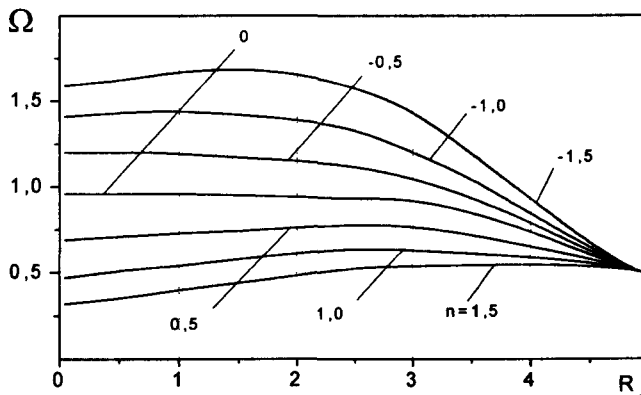


Рис. 1. Зависимость первой собственной частоты от безразмерной длины цилиндра для различных значений параметра n ($m = 2$)

Как видно из приведенного рисунка меньшим значениям степени n соответствуют большие значения собственных частот. Причина становится очевидной, если рассмотреть изменение физико-механических характеристик градиентного материала по толщине для различных значений параметра n . На рис. 2 эта зависимость представлена на примере изменения по толщине упругого модуля c_{11} . Левая граница рисунка соответствует значению упругого модуля на внутреннем радиусе цилиндра, правая – на внешнем. Как видно из приведенного рисунка меньшим значениям степени n соответствуют большие значения в модуля c_{11} , что находит отражение в соответствующем изменении частоты собственных колебаний цилиндра.

Рис. 2. Зависимость упругого модуля c_{11} от n

На рис. 3 представлена зависимость первой собственной частоты от внутреннего диаметра цилиндра (R_-), (при этом длина цилиндра ($L = 5$) и его внешний диаметр ($R_+ = 5$) остаются фиксированными, $m = 2$) для различных значений n . Рассматривается изменение внутреннего диаметра в широком диапазоне от 0,05 до 4,95 безразмерных единиц (т. е. от сплошного цилиндра до тонкой цилиндрической оболочки).

Рис. 3. Зависимость первой собственной частоты от внутреннего диаметра цилиндра (R_-)

Анализируя приведенный рисунок можно также отметить соответствие меньшим значениям степени m больших значений собственных частот, а также тот факт, что для более толстых цилиндров влияние показателя степени более значительно.

Библиографические ссылки

1. Григоренко А. Я. Исследование свободных колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины с осевой поляризацией / А. Я. Григоренко, Т. Л. Ефимова, И. А. Лоза. // Прикл. механика. – 2010. – 46, № 6 – С. 17–26.
2. Dai H. L. Electromagnetoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric solid cylinder and sphere / H. L. Dai, Y. M. Fu, J.H. Yang, // Acta Mech. Sin. – 2007. – 23, P. 55–63
3. Dai H. L. Analytical solution for electromagnetoelastic behaviors of functionally graded piezoelectric hollow cylinder / H. L. Dai, L. Hong, Y. M. Fu, X. Xiao // Appl. Math. Modeling. – 2010. – 34, P. 343–357
4. Ya. M. Grigorenko Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on basis of different models / Ya. M. Grigorenko, A.Ya. Grigorenko, G.G. Vlaikov. – Kyiv. – 2009. – 549 p.

5. **Grigorenko A. Ya.** Stress-strain state of shallow shells with rectangular planform and varying thickness: Refined formulation / A. Ya. Grigorenko, N. P. Yaremchenko // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – 41, № 10. – P. 1132–1141.
6. **Grigorenko A. Ya.** Using Spline-Approximation to solve problems of axisymmetric free vibration of sick-walled orthotropic cylinders / A. Ya. Grigorenko, T.L. Efimova // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – 44, №10 – P. 1137–1147.
7. **Khoshgoftar M. J.** Thermoelastic analysis of thick walled cylinder made of functionally graded piezoelectric materials / M. J. Khoshgoftar, Ghorbanpour Arani, M. Arefi // *Smart Mater. Struct.* – 2009. – 18, 115007
8. **Jabbary M.** Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads / M. Jabbary, S. Sohrabpour, M. R. Eslami // *Int. J. Pres. Ves. Pip.* – 2002. – 79, P. 493–497
9. **Shul'ga N.A., Grigorieva L.O.** Studying the Electroelastic Deformation of Layer under Mechanical Loading by the Method of Characteristics. // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – 45, № 1 – P. 82 – 89.
10. **Shul'ga N.A.** Radial Electromechanical Non-Stationary Vibrations of a hollow Piezoceramic Cylinder under Elastic Excitation / N.A. Shul'ga, L.O. Grigorieva // *In. Appl. Mech.* – 2009. – 45, № 2 – P. 230 – 235.
11. **Shul'ga N.A.** On Electroelastic Non-Stationary Vibrations of a Piezoceramic Layer / N.A. Shul'ga, L.O. Grigorieva // *Inter. Applied Mechanics.* – 2009. – 45, № 3 – P. 373 – 381.
12. **Shul'ga N.A.** Radial Elaso-Electrtic Nonstationary Oscillations of Piezoceramic Cylinder under Mechanical Loading / N.A. Shul'ga, L.O. Grigorieva // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – 45, № 4. – P. 466 – 471.

Надійшла до редколегії 27.04.11

УДК 539.3

В. Т. Гринченко

Институт гидромеханики НАН Украины

ОСОБЕННОСТИ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ СТРУКТУРАХ

Конструкції, що створені з елементів, які мають різні фізико-механічні властивості, широко використовуються в інженерній практиці. Розглянуто деякі особливості хвильових полів в таких елементах конструкцій, що можуть моделюватися з використанням уявлень про хвильоводи. Розглядаються неоднорідні хвильоводи як в напрямку розповсюдження хвиль, так і в напрямку, що є перпендикулярний до напрямку перенесення хвильової енергії.

Ключові слова: хвильоводи, хвильове поле, неруйнівний акустичний контроль, дисперсійні характеристики хвиль.

Конструкции, образованные соединением элементов с различными физико-механическими свойствами, широко используются в инженерной практике. Рассмотрены некоторые особенности волновых полей в таких элементах конструкций, которые могут моделироваться с использованием представлений о волноводах. Рассматриваются неоднородные волноводы как в направлении распространения волн, так и в направлении, перпендикулярном направлению переноса волновой энергии.

Ключевые слова: волноводы, волновое поле, неразрушающий акустический контроль, дисперсионные характеристики волн.

Constructions, formed connection of elements with different physical-mechanical properties, are widely used in engineering practice. Some features of the wave fields are considered in such elements of constructions which can be designed with the use of presentation of waveguides. Heterogeneous waveguides both in the direction of distribution of waves and in direction, perpendicular direction of transfer wave energy are examined.

Key words: waveguides, wave field, non-destructive acoustic control, dispersible characteristics of waves.

Ведение Использование неоднородных элементов конструкций позволяет часто решать важные задачи эксплуатационной надежности конструкции в целом. В то же время неоднородность конструкции во многих случаях обуславливает необходимость особенно тщательно подходить к оценке их прочности и надежности. Один из возможных методов неразрушающего контроля основан на использовании ультразвуковых полей. В связи с этим интерпретация результатов измерения ультразвуковых полей возможна лишь при условии глубокого понимания фундаментальных особенностей формирования волновых полей в упругих неоднородных конструкциях. Некоторые важные для такого понимания знания могут быть получены при рассмотрении волновых полей в неоднородных упругих волноводах. Получение количественных оценок для характеристик волновых полей, после принятия предположения об упругом характере деформирования, основывается на решении довольно сложных задач математической физики. Мы лишь вкратце укажем на такие задачи, не останавливаясь на деталях метода их решения. С этими деталями можно познакомиться, например, в [1; 2].

Особенности волнового поля в волноводе со вставкой. Рассмотрим вначале волновое поле в упругом волноводе со вставкой из другого материала. Геометрия рассматриваемого объекта представлена на рис. 1. Волновод состоит из двух частей 1 и 2 с различными механическими свойствами (разные значения коэффициента Пуассона и модуля упругости материалов). Граница раздела выбрана по сечению

$Z = 0$. Волновое поле возбуждается падающей из бесконечности волной $u^{(0)}$. Следует определить характеристики отраженного и прошедшего поля. Причем важным здесь является, как оценка энергии прошедшей и отраженной волны, так и локальные кинематические характеристики волнового поля в окрестности поверхности контакта. Знание последних часто важно для правильной интерпретации данных сенсоров, расположенных вблизи поверхности контакта.

Векторные характеристики прошедшего и отраженного полей должны удовлетворять уравнению движения

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1-\nu}{1-2\nu} \text{grad div} \mathbf{u} = -\frac{\rho}{\mu} \omega^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

где приняты традиционные обозначения для коэффициента Пуассона ν , модуля сдвига μ , плотности ρ и частоты ω . На поверхности стыка должны выполняться следующие условия для напряжений и смещений.

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)} &= \sigma_z^{(0)} + \sigma_z^{(2)}, & \tau_{yz}^{(1)} &= \tau_{yz}^{(0)} + \tau_{yz}^{(2)}, \\ u_y^{(1)} &= u_y^{(0)} + u_y^{(2)}, & u_z^{(1)} &= u_z^{(0)} + u_z^{(2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Такого типа граничные задачи в классической акустике и электродинамике достаточно просты, поскольку структура в поперечном направлении нормальных волн не зависит от частоты. В упругом случае это не так. Физической причиной зависимости структуры упругой нормальной волны от частоты и механических свойств материала служит довольно простой на первый взгляд факт преобразования продольной волны в поперечную (равно как и поперечной волны в продольную) при наклонном падении их на поверхность раздела в волноводе.

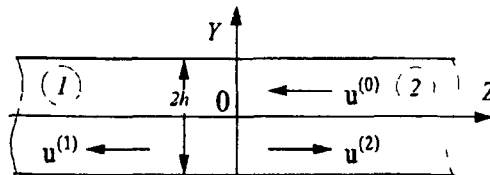


Рис. 1. Геометрия волновода и структура волнового поля

Именно этой причиной объясняется возникновение неоднородных волн даже в случае отражения гармонической волны от свободного или заземленного конца в балке. В данном случае интерес представляет, как степень возбуждения неоднородных волн у поверхности раздела, так и их влияние на энергетические характеристики прошедшей и отраженной волны.

Некоторые трудности в процессе получения количественных характеристик волновых полей связаны с наличием локальных особенностей (сингулярностей) в окрестности точек границы $Z = 0, Y = \pm h$. Характер сингулярности может быть определен до решения граничной задачи в целом и это дает возможность построить алгоритмы расчета, обеспечивающие необходимую точность выполнения условий сопряжения (2) и условия сохранения энергии при относительно небольшом объеме вычислений. Для компонент тензора напряжений в окрестности указанной точки имеет место следующая асимптотическая оценка

$$\sigma_z \approx A(1 - y^2)^{-1+\epsilon}.$$

Показатель особенности определяется из решения следующего трансцендентного уравнения [3]

$$(\beta \sin^2 \frac{\pi \epsilon}{2} + (\alpha - \beta) \epsilon^2)^2 - 0.25 \sin^2 \pi \epsilon - \epsilon^2 \alpha^2 = 0,$$

где использованы следующие обозначения

$$\alpha = \frac{\gamma(1 - \nu_1) - (1 - \nu_2)}{\gamma(1 - \nu_1) + (1 - \nu_2)}, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{\gamma(1 - 2\nu_1) - (1 - 2\nu_2)}{\gamma(1 - \nu_1) + (1 - \nu_2)}, \quad \gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

С точки зрения определения возможностей акустического контроля качества соединения двух частей волновода наибольший интерес представляют энергетические оценки для прошедшей и отраженной волны. При использовании для анализа этого показателя простейшей стержневой модели распределение энергии между двумя указанными типами волн не зависит от частоты. Наличие такой зависимости является наиболее существенным здесь и должно учитываться при регистрации и обработке звуковых сигналов. Постоянство в распределении энергии двух типов волн должно наблюдаться для относительно низких частот и это может служить основой для оценки качества получаемых результатов.

Результаты расчетов позволяют определить частотные характеристики энергии отраженных и прошедших волн. На рис. 2 представлены такие характеристики для двух различных комбинаций материалов. Здесь по вертикальной оси отложены в процентах по отношению к энергии падающей волны энергии прошедшей (сплошная линия) и отраженной (штриховая линия) волн. По горизонтальной оси отложена безразмерная частота [1; 4].

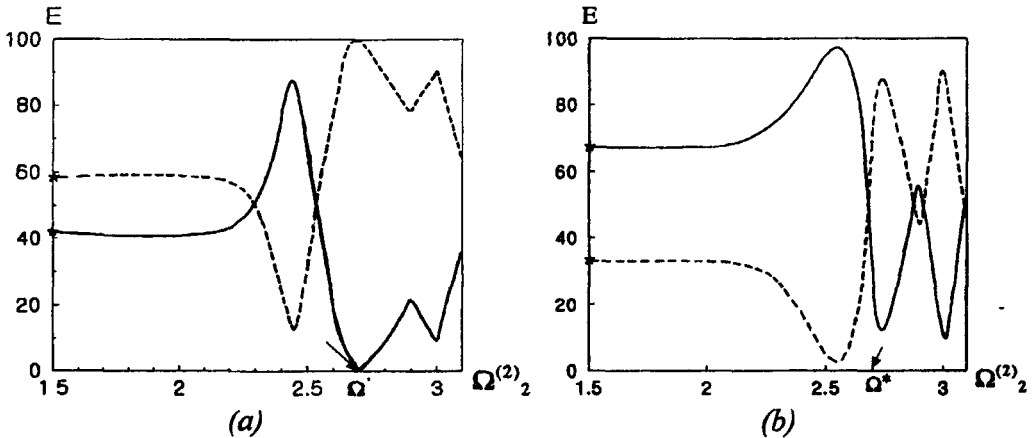


Рис. 2. Частотная зависимость энергий прошедшей и отраженной волны
 (а) $\mu_2/\mu_1 = 3.27, \rho_2/\rho_1 = 4.25, \nu_2 = \nu_1 = 0.30$. (б) $\mu_2/\mu_1 = 1.65, \rho_2/\rho_1 = 2.15, \nu_2 = \nu_1 = 0.30$.

Как видно в довольно широком диапазоне частот (вплоть до частоты $\Omega \approx 2.2$) прекрасно работает стержневая модель. Отклонение от оценок стержневой модели в этом диапазоне частот может служить показателем некачественного соединения частей волновода.

В области относительно высоких частот наблюдается чрезвычайно сильная частотная зависимость коэффициентов отражения и прохождения волн. Возможны такие ситуации, когда наблюдается полное прохождение волны из одной части

волновода в другу. Для некоторых других частот наблюдается обратная картина, когда полностью исчезает прошедшая волна. Несомненно, такая структура волнового поля должна учитываться при разработке алгоритмов неразрушающего контроля. При этом интересно качественно выяснить причину такого поведения бегущих волн.

На рис. 2 на горизонтальной оси указано специфическое значение частоты Ω^* , которое близко к значению частоты краевого резонанса в полубесконечном волноводе [1]. Поскольку возникновение такого резонансного явления связано с существенным возбуждением неоднородных волн, целесообразно проанализировать их свойства в рассматриваемой задаче составного волновода. На рис. 3 представлены данные о коэффициентах возбуждения прошедшей и отраженной волн для первой из указанных на рис. 2 комбинации свойств частей волновода и коэффициенты возбуждения первой неоднородной волны справа и слева от поверхности контакта. Все коэффициенты получены при нормировании амплитуд на амплитуду падающей волны.

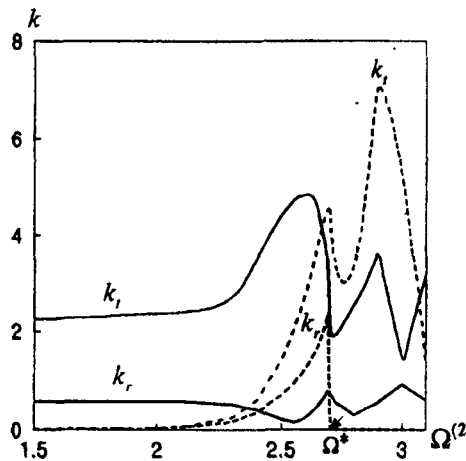


Рис. 3. Коэффициенты возбуждения прошедшей (k_t), отраженной (k_r) волн и двух неоднородных волн (штриховые линии)

Представленная картина довольно четко указывает на то, что в области относительно высоких частот механизм передачи энергии из одной части волновода в другую существенно связан с возбуждением неоднородных волн. При чем главенствующую роль в рассмотренных случаях симметричного относительно плоскости $y=0$ волнового поля играет именно первая неоднородная волна. С точки зрения развития методики неразрушающего акустического контроля представленные данные достаточно важны. Они указывают на то, что сенсоры, расположенные вблизи поверхности контакта в области высоких частот будут обнаруживать сильную зависимость измеряемых кинематических характеристик волнового поля от расстояния до поверхности контакта. При надлежащем понимании причин такой зависимости возможно повышение эффективности и надежности неразрушающего контроля.

Свойства волнового поля в композитном упруго-жидкостном волноводе. Другой характерный случай неоднородностей в волноводах возникает при рассмотрении структур, механические свойства которых меняются в перпендикулярном по отношению к направлению распространения волны направлении. Здесь также важно

получить энергетические характеристики распространяющихся волн, но уже с несколько другой точки зрения. Основной интерес здесь представляют оценки энергии, переносимой в различных частях волновода. Нами накоплен большой объем количественных оценок таких энергетических параметров для практически интересного случая упруго-жидкостного волновода [5]. Здесь будут приведены данные, характеризующие особенности волнового взаимодействия между упругой оболочкой и жидким ядром волновода.

На рис. 4 представлена геометрия участка бесконечного волновода, образованного упругой оболочкой, заполненной жидкостью. Под действием внешних возмущений в такой структуре формируется волновое поле. На достаточно большом по сравнению с характерной длиной волны расстоянии это поле образуется лишь распространяющимися волнами. Характер движения в таких волнах не зависит от способа возбуждения волнового поля и определяется лишь физическими и геометрическими параметрами волновода. В связи с этим при рассмотрении возможностей контроля волновых полей по измерениям на поверхности волновода следует выбирать такие частотные диапазоны, в которых нормальная волна наиболее выжжена именно в движении точек поверхности.

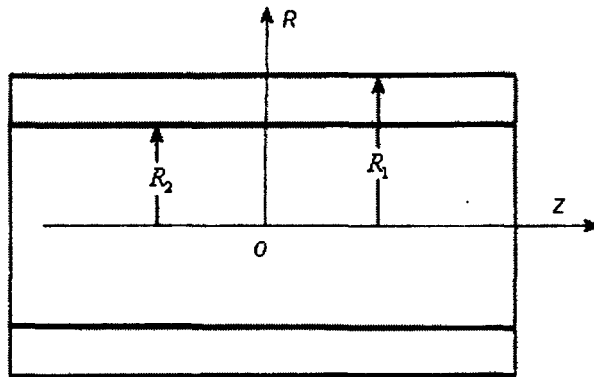


Рис. 4. Геометрия участка бесконечного волновода, образованного упругой оболочкой, заполненной жидкостью

При анализе волновых полей в рассматриваемого типа структурах важную информацию можно получить при анализе дисперсионных характеристик нормальных волн. Не останавливаясь на деталях вычислительных процедур, описанных в [5], приведем данные о дисперсионных свойствах волн в стальном цилиндре, заполненном водой. На рис. 5 представлены дисперсионные кривые нескольких первых нормальных волн в широком диапазоне частот.

На рис. 5 дисперсионные кривые составного волновода представлены штриховыми линиями. Здесь по горизонтальной оси отложено волновое число, а по вертикальной – безразмерная частота. Для анализа свойств волновода оказалось полезным нанести на этом же рисунке дисперсионные кривые пустоно полого цилиндра и жидкостного волновода с жесткими стенками. Эти данные отражены тонкими сплошными линиями. Очень важным свойством волнового поля в составном цилиндре, как это следует из данных рис. 5 есть то, что динамическое взаимодействие между упругим цилиндром и жидкостью проявляется лишь в очень узком частотном диапазоне вблизи точек пересечения дисперсионных кривых для полого цилиндра и жидкостного волновода, т.е. только там, где оказываются близкими по значению величины фазовых скоростей нормальных волн соответ-

вующих парциальных подсистем. Из данных рис. 5 следует важный физический вывод – при распространении нормальной волны в составном волноводе вполне реальны такие ситуации, когда наличие волны практически невозможно зафиксировать по измерениям на поверхности. В этих случаях вся энергия нормальной волны переносится в жидком ядре. Например, низшая нормальная волна, имеющая в качестве асимптотического значения скорости скорость звука в воде, не может быть зарегистрирована на поверхности упругого цилиндра.

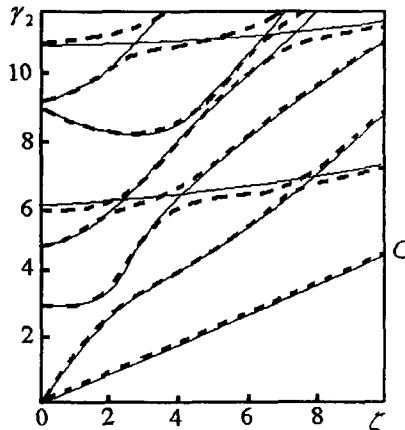


Рис. 5. Дисперсионные кривые составного волновода

Заключение. В работе довольно сложная проблема анализа свойств неоднородных волноводов кратко рассмотрена в аспекте выделения тех особенностей процесса распространения и отражения нормальных волн, которые важны для разработки систем неразрушающего контроля акустическими методами. Выделено два важных аспекта. Показано, что к настоящему времени накоплен и систематизирован достаточно обширный объем данных о свойствах неоднородных волноводов. Уровень понимания особенностей переноса энергии в неоднородных структурах и кинематических характеристик точек поверхности волновода, их связи со структурой волнового поля по толщине создают основу для создания эффективных неразрушающих методов контроля сложных неоднородных элементов конструкций.

Библиографические ссылки

1. Гринченко В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – Киев, Наукова думка, 1981, –281с.
2. Гринченко В. Т. Основы акустики / В. Т. Гринченко, І. В. Вовк, В. Т. Мацапура. – Київ, Наукова думка, 2007, –640с.
3. D. Vogy, Two edge-bounded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions, Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., Vol. 38, 1971. –P. 377-386
4. Гринченко В. Т. Антисимметричные колебания полуслоя / В. Т. Гринченко, Н. С. Городецкая, И. В. Старовойт. Неоднородные волны. Акуст. Вісн. – Вип. 12, №2, 2009. –С. 16-24.
5. Гринченко В. Т. Свойства нормальных волн в упруго-жидкостном цилиндрическом волноводе / В. Т. Гринченко, Г. Л. Комиссарова. Акуст. Вісн. – Вип. 3, №3, 2000, –С.44-55.

Надійшла до редколегії 27.04.11

УДК 539.3:517.926.4

В. З. Гришак¹, В. И. Пожуев², Д. В. Гришак²¹Запорожский национальный университет,²Запорожская государственная инженерная академия

ГИБРИДНЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ АКТУАЛЬНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ КОНСТРУКЦИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА БАЗЕ СОВРЕМЕННОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Обговорюється ефективність гібридних асимптотичних методів при розв'язку лінійних і нелінійних статико-динамічних задач конструкцій із змінними параметрами. Основна увага приділяється техніці застосування асимптотичного методу фазних інтегралів у сполученні із принципом ортогоналізації Гальоркіна і методом збурень, а також ВКБ-варіаційного підходу, який зазначає сумісне застосування ВКБ-наближень і достатньої умови існування екстремуму функціоналу, який реалізує рівняння задачі. Обговорюється рішення ряду актуальних проблем механіки, які описуються сингулярними диференціальними рівняннями із змінними коефіцієнтами та їх системами, що мають параметр при старших похідних.

Ключові слова: гібридні асимптотичні методи, крайові задачі, конструкції із змінними параметрами, лінійні і нелінійні рівняння, наближені аналітичні та чисельні методи розв'язку, комп'ютерна алгебра, програмні комплекси.

Обсуждается эффективность гибридных асимптотических методов при решении линейных и нелинейных статико-динамических задач конструкций с переменными параметрами. Основное внимание уделяется технике применения асимптотического метода фазовых интегралов в сочетании с принципом ортогонализации Галеркина и методом возмущений, а также ВКБ-вариационного подхода, предполагающего совместное использование ВКБ-приближений и достаточного условия существования экстремума функционала, реализующего уравнение задачи. Обсуждается решение ряда актуальных проблем механики, которые описываются сингулярными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами и их системами, содержащими параметр при старших производных.

Ключевые слова: гибридные асимптотические методы, краевые задачи, конструкции с переменными параметрами, линейные и нелинейные уравнения, аналитические и численные решения, компьютерная алгебра, программные комплексы.

An effectiveness of hybrid asymptotic methods to the solution of linear and nonlinear static and dynamics problems of structures with variable parameters are discussed. Special attention is paid to technique of asymptotic phase-integral method application in connection with perturbation method, Galerkin orthogonality principal, and WKB-variational approach as well, which supposes using both WKB-approximation and sufficient condition of extremum existence of functional for realization of problem equation. Some actual mechanical problems which are described by singular differential equations with variable coefficients and systems of equations which contain a parameter near the highest derivatives are discussed.

Key words: hybrid asymptotic methods, boundary problems, structures with variable parameters, linear and nonlinear equations, analytical and numerical solutions, computer algebra, program complexes.

Введение. Многие задачи механики современных конструкций переменной геометрии и с параметрами, зависящими от координат и времени, в частности, задачи определения напряженно-деформированного состояния, устойчивости и динамических характеристик, сводятся к необходимости интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами и их систем. Однако, такого рода уравнения, которые реализуют краевые задачи и задачи Коши, удастся проинтегрировать аналитически лишь в исключительных случаях, в связи с чем, возникает необходимость их приближенного аналитического решения. Прямые численные методы решения указанных задач не позволяют достаточно быстро оценить влияние конструктивных параметров исследуемой механической системы

и характера внешнего нагружения (которое в общем случае также является функцией координат и времени) на поведение конструкции на стадии проектировочного расчета и дать рекомендации по ее несущей способности. С другой стороны, надежные приближенные аналитические решения позволяют более эффективно использовать численные методы для уточняющего расчета.

Среди приближенных подходов, которые получили развитие в последнее время, наряду с численными методами значительное место занимают аналитические подходы, включающие вариационные методы, метод Бубнова-Галеркина, асимптотический метод возмущений (особенно в нелинейных задачах), метод фазовых интегралов (ВКБ-приближений) для уравнений сингулярного типа и другие.

Если дифференциальное уравнение исследуемой задачи включает безразмерный параметр ϵ («большой» или «малый»), приближенное аналитическое решение удобно искать в виде асимптотического разложения в области одного или большего числа значений параметра. Полученные таким образом решения являются локальными по параметру возмущения ϵ , то есть достигают удовлетворительной точности на достаточно узком интервале изменения параметра. В связи с этим актуальной проблемой асимптотической математики является поиск методов и алгоритмов, которые позволяют улучшить приближенные решения, построенные на классических асимптотических методах, расширяя, таким образом, область их эффективного применения.

Можно назвать ряд подходов (в литературе, например в [2 – 4; 9; 12; 13], они приобрели название гибридных), которые базируются на идее построения «уточняющего» решения, в основе которого лежит последовательность координатных функций асимптотического разложения с неизвестными параметрами. Если специальным образом определить искомые параметры разложения, то «уточненное» гибридное решение исходного уравнения, как показывают исследования, достаточно хорошо, с точки зрения практического применения, согласовывается с «точным» (если оно существует, но является достаточно громоздким, либо выраженным через специальные функции, усложняющие численную реализацию на стадии проектировочного расчета), либо с прямым численным, методом на существенно расширенном интервале изменения параметра возмущения.

К гибридным асимптотическим подходам следует отнести методы возмущений-Галеркина [9], ВКБ-Галеркина и ВКБ-вариационный [4], а также комбинации указанных методов, в частности, для исследования нелинейных задач [13]. Следует отметить, что среди процедур, которые позволяют устранить неравномерность асимптотических разложений, особое место занимает аппроксимация Паде [8], нашедшая практическое применение.

Так, например, для решения нелинейных задач сингулярного типа с параметрами при старшей производной исходного дифференциального уравнения и функции нелинейности, эффективным является совместное использование метода возмущений с ВКБ-вариационным, либо ВКБ-Галеркин методами. На первом этапе приближенное аналитическое решение краевой задачи, либо задачи Коши, определяется с помощью метода возмущений по параметру нелинейности, что приводит к связанной (рекуррентной) системе линейных неоднородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами сингулярного типа с последующим (на втором этапе) использовании гибридного асимптотического похода. Следует отметить, что и на первом этапе исследования возможно использовать гибридные алгоритмы на базе метода возмущений.

В данной работе обобщаются некоторые результаты исследований в области развития гибридных асимптотических методов, позволяющих строить приближенные аналитические решения достаточно высокой степени точности и связанных идей соединения асимптотических, вариационных и невариационных методов решения краевых задач и задач Коши, сводящихся к сингулярным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами и их системам, а также результаты решения конкретных задач.

Гибридный ВКБ-вариационный метод и техника его применения. Указанный подход допускает совместное использование ВКБ-приближений и достаточного условия существования экстремума функционала, который реализует уравнение краевой задачи или задачи Коши. Приближенное аналитическое решение, в данном случае, определяется с помощью метода фазовых интегралов (ВКБ-разложений) и на основе определенной таким образом последовательности функций ВКБ-приближений строится новое «уточняющее» решение, неизвестные параметры которого определяются при исследовании на экстремум функции конечного числа переменных, в которую преобразуется исходный функционал при подстановке в него гибридного решения. Для вычисления квадратур, входящих в полученное таким образом приближенное аналитическое решение, численной реализации полученных зависимостей и сравнения в ряде предельных случаев с прямыми численными методами интегрирования исходных уравнений используются современные компьютерная алгебра и программные комплексы.

В качестве примера рассматривается краевая задача, описываемая линейным дифференциальным уравнением n -го порядка, с переменными коэффициентами и содержащим параметр возмущения ε при старших производных

$$\varepsilon^n [y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y'] + q(x, \varepsilon)y = 0, \quad (1)$$

где функция $q(x, \varepsilon) \neq 0$ на интервале $x \in [a; b]$ и граничными условиями

$$\begin{cases} y(a) = A_0, & y'(a) = A_1, & \dots & y^{n/2-1}(a) = A_{n/2-1}, \\ y(b) = B_0, & y'(b) = B_1, & \dots & y^{n/2-1}(b) = B_{n/2-1}. \end{cases} \quad (2)$$

К уравнению (1) может быть сведено значительное количество задач статического и динамического деформирования неоднородных тонкостенных конструкций. Безразмерный параметр ε возникает в уравнении задачи естественным образом при введении безразмерных переменных, представляя собой, например, величину, обратную частоте собственных колебаний исследуемой системы, отношение наименьшего и наибольшего линейных размеров конструкции, отношения жесткостных характеристик в ортогональных направлениях конструктивно ортотропной пластины, либо оболочки, и т. п.

В соответствии с методом фазовых интегралов [7] решение уравнения (1) ищется в виде формального разложения по обратным степеням параметра

$$y = \exp \int \sum_{j=0} \varepsilon^{j-1} \psi_j dx, \quad (3)$$

где $\{\psi_j\}$ – последовательность функций, члены которой определяются в результате подстановки разложения (3) в исходное уравнение (1) и дальнейшего решения рекуррентной системы неоднородных уравнений относительно функций $\{\psi_j\}$.

Необходимо отметить, что в случае уравнений высокого порядка определение членов $\{\psi_j\}$, $j > 1$ разложения (3) является достаточно громоздким. Поэтому в прикладных задачах обычно ограничиваются определением нулевого и первого членов ВКБ-разложения (3), что приводит к неучету ряда составляющих исходного уравнения. Однако, при малых ε обеспечивается удовлетворительная точность построенного на основе разложения (3) ВКБ-решения уравнения (1), хотя область эффективного их использования нуждается в дополнительном исследовании. В этом случае – гибридные асимптотические подходы позволяют учесть все состав-

ляющие исходного уравнения и получить «уточненные» приближенные аналитические решения для существенно расширенной области изменения параметра разложения, когда ε перестает быть малым. Как отмечено в [1], «если при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место реальная асимптотика, при $\varepsilon \rightarrow \infty$ также можно получить определенный разумный асимптотический процесс». Попытка ответить на указанные вопросы в совокупности с данным принципом приводят к идее гибридного асимптотического похода.

Методика улучшения (или «уточнения») решения краевой задачи (1), (2), которое строится на основе использования метода ВКБ-приближений, заключается в следующем.

Формальное «уточняющее» разложение решения задачи (1), (2) (назовем его гибридным) задаем в виде

$$\bar{y} = \exp \int_{j=0}^N \delta_j \psi_j dx, \quad (4)$$

где $\{\psi_j\}$ – определенные $N+1$ «координатные» функции разложения (3), а $\{\delta_j\}$ – неизвестные параметры, которые подлежат определению при условии, что решение $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$, построенное на основе разложения (4), «как можно ближе соответствовало бы точному решению исходной задачи».

В основе принципа определения параметров $\{\delta_j\}$, $j=0, \dots, N$ гибридного решения лежит идея замены исходной краевой задачи (1), (2) вариационной задачей об экстремуме функционала, для которого уравнение (1) является в общем случае уравнением Эйлера-Пуассона. Таким образом, если функционал $V[y(x), \varepsilon]$ является функционалом, исследование которого на экстремум реализует уравнение (1), а гибридное решение $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$ является решением краевой задачи (1), (2), то при каких-либо неизвестных значениях $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N$ решение $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$ входит в N -параметрическое семейство допустимых функций вариационной задачи, то есть функций, на которых функционал $V[y(x), \varepsilon]$ может достигать экстремума.

При подстановке $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$ в функционал $V[y(x), \varepsilon]$, последний становится функцией N переменных

$$V[\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N), \varepsilon] = \varphi(\delta_0, \dots, \delta_N). \quad (5)$$

Исследование на экстремум функционала $V[y(x), \varepsilon]$ превращается в исследование на экстремум функции $\varphi(\delta_0, \dots, \delta_N)$ (5). Необходимому условию существования экстремума функционала $\delta V[y, \varepsilon] = 0$, таким образом, соответствует эквивалентная система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_0} = 0, & \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_1} = 0, & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_N} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решение системы (6) приводит к набору $\delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_N^*$, при котором функции $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_N^*)$ приводят к достижению экстремума функционала $V[y(x), \varepsilon]$. Сама функция $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_N^*)$ при этом является искомым гибридным решением краевой задачи (1), (2), которое достаточно хорошо согласуется с точным решением независимо от величины параметра ε .

В качестве конкретной краевой задачи рассмотрим уравнение Бесселя

$$y'' + 1/x y' + (\lambda^2 - k^2/x^2)y = 0, \quad (7)$$

где λ – параметр, k – порядок уравнения.

К уравнению (7), либо его модификации, сводится ряд задач механики деформируемого твердого тела, в частности о напряженно-деформированном состоянии анизотропных оболочек вращения, собственных колебаниях круглой пластины и другие. Уравнение (7) имеет точное решение в специальных функциях. Введя замену $\lambda^2 = 1/\varepsilon^2$ в уравнении (7) получим форму удобную для построения ВКБ-решения

$$\varepsilon^2 [y'' + 1/x y'] + (1 - \varepsilon^2 k^2/x^2)y = 0, \quad (8)$$

где изначально предполагается $\varepsilon \ll 1$.

Граничные условия для уравнения (8) берутся в форме

$$y(a) = A \text{ и } y(b) = B, \quad (9)$$

где $0 < a < b$.

Для того, чтобы функция $1 - \varepsilon^2 k^2/x^2$ в уравнении (8) на интервале $x \in [a, b]$ не имела нулей (а исходное уравнение, соответственно, «точек поворота»), необходимо соблюдать условие $\varepsilon k \in [0, a) \cup (b, +\infty)$. При наличии «точек поворота» в исходном уравнении решение строится специальным образом. И в этом случае, как показывает анализ, гибридные асимптотические подходы могут быть весьма эффективны.

Итак, подстановка двучленного ВКБ-разложения (3) в уравнение (8) позволяет определить искомые функции

$$\psi_0 = \begin{cases} \pm (\varepsilon^2 k^2/x^2 - 1)^{1/2}, & \varepsilon k > b, \\ \pm i(1 - \varepsilon^2 k^2/x^2)^{1/2}, & \varepsilon k < a, \end{cases} \quad (10)$$

и, соответственно,

$$\psi_1 = \frac{-\psi_0' - \frac{1}{x}\psi_0}{2\psi_0} = \begin{cases} -\frac{1}{4} \frac{d}{dx} \ln(\varepsilon^2 k^2/x^2 - 1) - \frac{1}{2x}, & \varepsilon k > b, \\ -\frac{1}{4} \frac{d}{dx} \ln(1 - \varepsilon^2 k^2/x^2) - \frac{1}{2x}, & \varepsilon k < a. \end{cases} \quad (11)$$

Выполнив необходимые операции для двучленного гибридного разложения (4), строится общее гибридное решение уравнения (8) с удовлетворением граничным условиям (9) для определения $d_j = d_j(\delta_0, \delta_1)$ и $g_j = g_j(\delta_0, \delta_1)$ с дальнейшей подстановкой в функционал

$$V[\bar{y}_H] = \frac{1}{2} \int_a^b \left[\varepsilon^2 y'^2 - \left(1 - \varepsilon^2 \frac{k^2}{x^2} \right) y^2 \right] x dx = \varphi(\delta_0, \delta_1),$$

который реализует исходное уравнение (8). Исследование функции $\varphi(\delta_0, \delta_1)$ на экстремум позволяет определить искомые параметры δ_0, δ_1 .

Нижче на рис. 1 – 4 порівнюються результати рішення рівняння Бесселя (8), отримані з використанням ВКБ (пунктирна лінія) і гібридного ВКБ-варіаційного підходу (неперервна лінія) з точним рішенням (кола) для випадків:

- 1) $k=1$, $\varepsilon=0.1$, $y(0.2)=1, y(1)=2$;
- 2) $k=2$, $\varepsilon=0.6$, $y(0.3)=1, y(1)=2$;
- 3) $k=1/7$, $\varepsilon=1$, $y(0.3)=y(1)=-1$;
- 4) $k=1/10$, $\varepsilon=2$, $y(0.3)=y(1)=1$.

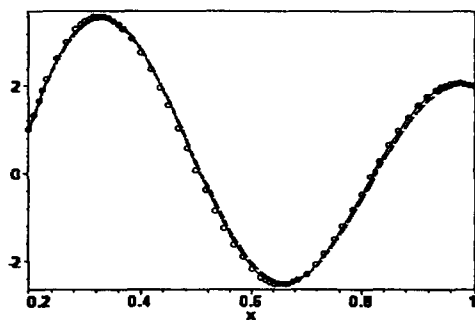


Рис. 1. $k=1$, $\varepsilon=0,1$, $y(0,2)=1$, $y(1)=2$

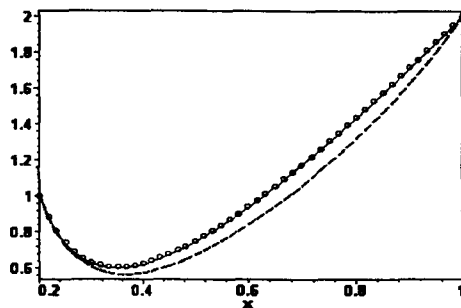


Рис. 2. $k=2$, $\varepsilon=0,6$, $y(0,3)=1$, $y(1)=2$

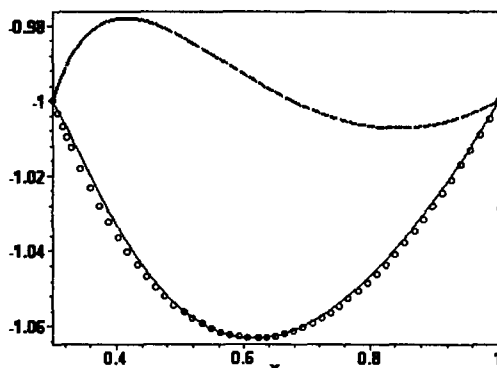


Рис. 3. $k=1/7$, $\varepsilon=1$, $y(0,3)=y(1)=-1$

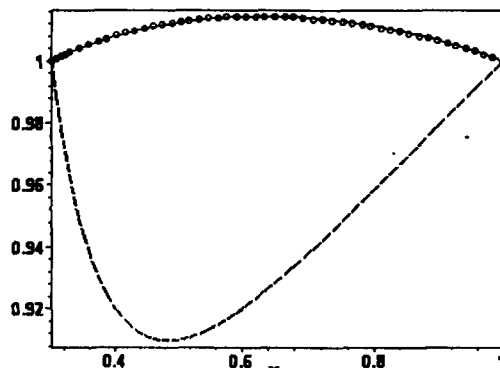


Рис. 4. $k=1/10$, $\varepsilon=2$, $y(0,3)=y(1)=1$

Как следует из приведенных численных результатов, ВКБ-вариационный подход позволяет получить приближенное аналитическое решение уравнения Бесселя второго порядка, которое достаточно хорошо соответствует точному решению для тех величин параметра ε , когда классический метод ВКБ приводит к неудовлетворительным результатам.

Гибридный ВКБ-Галеркин метод и техника его применения. Для решения линейных задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами, гибридный ВКБ-Галеркин метод включает совместное использование метода фазовых интегралов и принципа ортогонализации по Галеркину [2]. Для решения нелинейных задач, в частности, геометрически нелинейных задач механики деформируемого твердого тела, на первом этапе используется метод возмущений по параметру нелинейности [13] (внешняя асимптотика) с дальнейшим использованием, на втором этапе решения, гибридного ВКБ-Галеркин метода (внутренняя асимптотика).

Для решения неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами необходимо построить надежное аналитическое (в общем случае приближенное) решение однородной задачи. Идея метода заключается в следующем.

Пусть необходимо решить краевую задачу или задачу Коши дифференциального уравнения

$$\Lambda(u, \varepsilon) = 0, \quad (12)$$

где Λ – дифференциальный оператор; $u(x)$ – искомая функция, определенная в некоторой области (интервале) D изменения x ; ε – параметр при заданных краевых или начальных условиях.

Применение метода происходит в два этапа. На первом этапе строится асимптотическое разложение u в области одного или большего значения параметра ε ($\varepsilon = \varepsilon_p$, $p = 1, 2, \dots, P$)

$$u = \sum_{k=0}^{n_p-1} u_k^p \alpha_k^p(\varepsilon) + O(\alpha_{n_p}^p(\varepsilon)), \quad (13)$$

где $\{\alpha_k^p(\varepsilon)\}$ – определенная последовательность (например, $\alpha_k^1 = \varepsilon^k$).

Функции u_k^p определяются одним из асимптотических методов, в рассматриваемом случае – методом ВКБ (фазовых интегралов). Отметим, что Гир и Андерсен [9; 10] используют формальное асимптотическое разложение в соответствии с методом возмущений, либо метод сращиваемых асимптотических разложений. На втором этапе найденные функции u_k^p используются как координатные функции для метода Галеркина. Для этого аппроксимация решения задачи (12) при заданных граничных условиях представляется в виде

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N \delta_i u_i, \quad (14)$$

где δ_i – неизвестные параметры.

Для определения параметров δ_i соотношение (14) подставляется в уравнение (12) и ставится условие ортогональности полученной таким образом невязки к N координатным функциям u_i во всей области D

$$\int_D \Lambda \left(\sum_{i=1}^N \delta_i u_i, \varepsilon \right) u_j dx = 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Уравнения (15) представляют собой систему N алгебраических уравнений относительно N неизвестных параметров δ_i .

В качестве примера эффективного использования асимптотического метода фазовых интегралов (метода ВКБ) приведем задачу о колебаниях системы, масса которой не периодически зависит от времени [6]. К таким конструкциям, например, относятся космические транспортные средства, масса которых не периодически изменяется со временем, конструкции телевизионных башен переменной жесткости, подводные кабели переменной во времени длины и другие. Методы анализа этих проблем неизбежно отличаются от так называемых колебаний систем с периодически изменяемыми или постоянными параметрами. Решение указанных задач основано на частных случаях изменения массы, либо жесткости исследуемой системы, допускающих точное аналитическое решение, либо на использовании прямых численных методов интегрирования дифференциальных уравнений задачи.

Основное разрешающее уравнение линейных колебаний одномерной системы принято в виде дифференциального уравнения с переменными коэффициентами в виде [6]

$$\frac{d}{dt} \left[m(t) \frac{dX(t)}{dt} \right] + K(t) X(t) = P(t). \quad (16)$$

Как известно, если решения однородной задачи уравнения (16) $S_1(t)$ и $S_2(t)$ найдены, тогда общим решением уравнения (16) может быть решение, полученное посредством метода Лагранжа

$$X(t) = C_1 S_1(t) + C_2 S_2(t) + S_p(t), \quad (17)$$

в котором

$$S_p(t) = -S_1(t) \int \frac{S_2(t) P(t)}{S_1(t) S_2'(t) - S_2(t) S_1'(t)} dt + S_2(t) \int \frac{S_1(t) P(t)}{S_1(t) S_2'(t) - S_2(t) S_1'(t)} dt, \quad (18)$$

где $S_i'(t) = dS_i(t)/dt$, $i=1,2$. $S_p(t)$ – частное решение неоднородного уравнения (16), которое может быть получено известными методами; C_1 и C_2 – произвольные постоянные, которые могут быть определены из начальных условий.

Основная проблема заключается в отыскании надежного приближенного аналитического решения однородного уравнения в общем случае изменения коэффициентов во времени.

Для случая свободных колебаний $P(t) = 0$ правая часть исходного уравнения обращается в ноль и исключая первую производную из однородного уравнения (16), имеем

$$\varepsilon^2 Z''(t) + F(t) Z = 0, \quad (19)$$

где

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\Phi_0}, \quad \Phi(t) = \Phi_0 F(t), \quad \Phi(t) = \tilde{K}(t) - \frac{\tilde{D}(t)}{2} - \frac{\tilde{D}^2(t)}{4}, \quad F(t) = \frac{\Phi(t)}{\Phi_0}. \quad (20)$$

В соответствии с методом фазовых интегралов, используя начальные условия

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = 1, \quad (21)$$

при условии, что масса системы уменьшается по экспоненциальному закону, т. е.

$$m(t) = m_0 e^{-\omega t}, \quad (22)$$

решение задачи приобретает вид

$$X(t) \doteq \exp \left[-\frac{\alpha}{2} t \right] \left\{ \frac{2 \cos \beta}{\alpha \beta} \sin(\beta e^{1/2 \alpha t}) - \frac{2 \sin \beta}{\alpha \beta} \cos(\beta e^{1/2 \alpha t}) \right\}. \quad (23)$$

Результаты численного анализа при заданных параметрах системы (при условии отсутствия демпфирования) на основе приближенного аналитического подхода на базе метода ВКБ и прямой численной реализации исходного уравнения приведены на рис. 5.

Сопоставительный анализ показывает, что в ряде случаев имеет место достаточно хорошее соответствие результатов для определенных величин параметров исследуемой системы, в частности, по величине параметра ВКБ-приближения. Сле-

дует отметить, что предложенные в [10] аналитические решения, определяющие естественные формы колебаний одноступенчатой стержневой системы переменной массы, могут быть использованы для анализа свободных и вынужденных колебаний многоступенчатых конструкций с параметрами, зависящими от времени, и учетом их демпфирования.

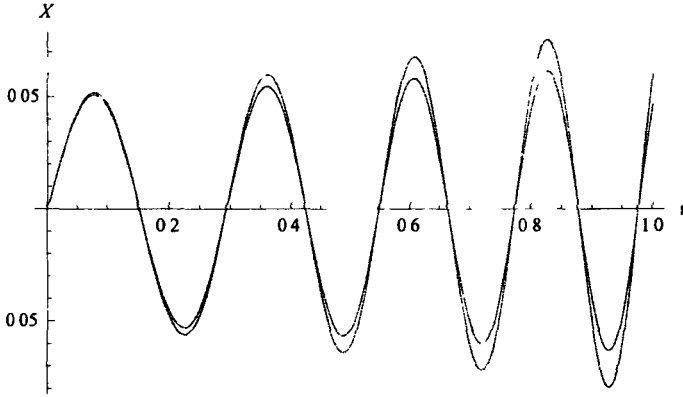


Рис. 5. Сопоставление результатов анализа на основе асимптотического решения и прямого численного расчета

Решение задачи для шарнирно опертой пластины размерами $(a \times b)$, толщиной h , с учетом весовых характеристик $\gamma(t)$ и коэффициента демпфирования $\varepsilon(t)$, зависящих от времени, сводится к интегрированию разрешающего дифференциального уравнения вида [5]

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - 2 \frac{\gamma(t)}{g} h \varepsilon(t) \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\gamma(t)}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (24)$$

которое, после введения безразмерных величин и удовлетворения граничным условиям, может быть сведено к уравнению второго порядка по времени

$$\lambda^2 f''(t) + 2\bar{\varepsilon}(t) f'(t) + \bar{D}(t) f(t) = \bar{q}(t). \quad (25)$$

В результате использования асимптотического ВКБ-Галеркин метода задача сводится к нахождению неизвестных параметров гибридного решения однородной задачи из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A\delta_{02} - B\delta_{01}^2 + W = 0, \\ A\delta_{01} + 2B\delta_{01}\delta_{02} = 0, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$A = \int_a^b [-\lambda^2 \bar{f}'_0 \bar{f}'_0 - 2\bar{\varepsilon}(t) \bar{f}'_0] dt; \quad B = \int_a^b \lambda^2 \bar{f}_0^3 dt; \quad W = \int_a^b \bar{D}(t) \bar{f}_0 dt. \quad (27)$$

Откуда определяются искомые параметры разложения

$$\begin{cases} \delta_{01} = \frac{\sqrt{4BW - A^2}}{2B}, \\ \delta_{02} = \mp \frac{A}{2B}. \end{cases} \quad (28)$$

При известном общем решении однородного уравнения частное решение исходного неоднородного уравнения не представляет принципиальных трудностей.

Для заданных геометрических и жесткостных характеристик пластины (рис. 6) и законов изменчивости параметров от времени приближенное аналитическое решение задачи сопоставлено с прямым численным расчетом на базе программного комплекса MAPLE рис. 7.

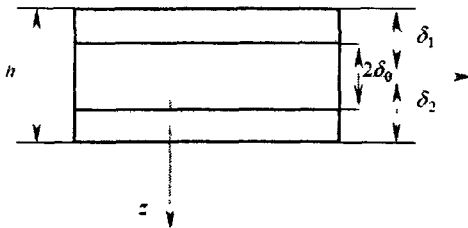


Рис. 6. Ортотропная симметрично собранная пластина

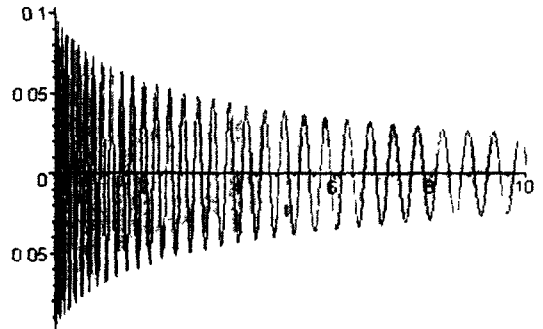


Рис. 7. Поведение характеристических функций $f(t)$

Необходимо отметить, что пластина с материалом, вес которого увеличивается в большей мере ($\gamma(t) = 10^4 t$) совершает колебания с меньшей частотой, нежели пластина с более легким материалом ($\gamma(t) = 10t$).

В заключение укажем, что в последнее время гибридные асимптотические методы, обсуждаемые в настоящей работе, нашли применение в прикладных задачах динамической устойчивости оболочечных конструкциях летательных аппаратов, в решении проблемы теплоизлучения и в смежных областях естествознания.

Выводы. В данной работе обобщены некоторые результаты исследований, посвященных развитию гибридных асимптотических методов на основе метода фазовых интегралов (метода ВКБ), которые лишены основного недостатка классических асимптотических методов – их локальности по величине малости параметра разложения. В качестве актуальных направлений дальнейших исследований в области аналитической механики следует указать проблемы статической и динамической устойчивости конструкций из материалов с памятью формы, свойства которых являются функциями времени; статические и динамические проблемы механики систем с разрывными характеристиками, зависящими от координат и времени; вынужденные нелинейные колебания, импульсную динамику и теплоизлучение деформируемых систем, характеристики и параметры демпфирования которых являются функциями времени, при взаимодействии с полями различной физической природы; стохастические проблемы нелинейной динамики конструкций с переменными параметрами и случайными внешними воздействиям; эффективные приближенные решения статико-динамических задач строительной механики на базе современной компьютерной алгебры, в частности конструкций летательных аппаратов с переменными характеристиками по координатам и во времени; актуальные проблемы биомеханики неоднородных сред и материалов в реальных условиях функциони-

рования; системные экспериментальные исследования неоднородных конструкций с параметрами, зависящими от координат и времени, на базе новейших методов физического эксперимента.

Библиографические ссылки

1. Андрианов И. В. Асимптотология: идеи, методы, результаты / И. В. Андрианов, Л. И. Маневич – М., 1994.
2. Грищак В. З. Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування / В. З. Грищак. – Запоріжжя, 2009. – 225 с.
3. Грищак В. З. К решению проблемы динамического деформирования пьезоэлектрических многослойных пластин на основе гибридного ВКБ-Галеркин метода / В. З. Грищак, О. А. Ганилова // Доповіді НАН України, 2008. – № 5. – С. 13-20.
4. Грищак В. З. Наближений аналітичний метод розв'язку диференціального рівняння із змінними коефіцієнтами стосовно задачі власних коливань круглої пластини змінної товщини / В. З. Грищак, Т. С. Герасімов // Вісник Запорізького державного університету, 2000. – № 2. – С. 52-60.
5. Грищак Д.В. Новый приближенный аналитический развязок задачі про власні коливання тришарової пластини зі змінними за часом масою та коефіцієнтом демпфірування / Д.В. Грищак // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2009. – № 1. – С. 114-117.
6. Пожуев В.И. Приближенный аналитический метод анализа колебаний конструкций с массой, не периодически зависящей от времени / В. И. Пожуев, Д. В. Грищак // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла, –Д., 2009. – Вип. 10. – С. 240-246.
7. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов / Дж. Хединг – М., 1965.
8. Andrianov I.V. New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation method / I.V. Andrianov, J. Awrejcewicz // Appl Mech Rev, 2001. – 54(1). – P. 69-92.
9. Geer J.F. A hybrid perturbation-Galerkin technique with applications to slender body Theory / J.F. Geer, C.M. Andersen // SIAM J. Appl. Math., 1989. – № 2. – P. 344-361.
10. Geer J.F. Hybrid Perturbation-Galerkin Method for Differential Equations Containing a Parameter / J.F. Geer, C.M. Andersen // Pan American Congress on Appl. Mech., 1991. – P. 460-463.
11. Gristchak D.V. New Approximate Analytical Solution of Buckling Problem for Rectangular Plate under Non uniform External Loading / D.V. Gristchak // Proc. XII Sympozjum Staceczności Konstrukcji. – Zakopane, 7-11 Wrzesnia, 2009. – P. 133-138.
12. Gristchak V. Z.A hybrid WKB-Galerkin method and its application / V. Gristchak, Ye. Dmitrijeva // Technische Mechanik, 1995. – № 15. – P. 281-294.
13. Gristchak V.Z. Double Asymptotic Method for Nonlinear Forced Oscillations Problem of Mechanical Systems with Time Dependent Parameters / V.Z. Gristchak, V.N. Kabak // Int. J. Technische Mechanik, 1996. – Band 16. – Heft 4. – P. 285-296.

Надійшла до редколегії 27.04.11

УДК 539.3

В. І. Гуляєв, О. І. Борщ
 Національний транспортний університет

АВТОКОЛИВАННЯ КРУЖЛЯННЯ БУРИЛЬНИХ КОЛОН

Розглянута задача про коливання конструкції низу бурильної колони, що обертається, під дією моменту сил тертя (різання) прикладеного до долота. Проведено аналіз механізму самозбудження коливань. Показано, що формований момент є неконсервативним і являє собою основне джерело динамічної нестійкості системи. Побудовано форми згинних рухів конструкції низу бурильної колони при різних значеннях характерних параметрів.

Ключові слова: згинні коливання, низ бурильної колони, сили тертя, динамічна нестійкість системи, форми згинних коливань.

Рассмотрена задача об изгибных колебаниях конструкции низа вращающейся бурильной колонны, под действием приложенного к долоту момента сил трения (резания). Выполнен анализ механизма самовозбуждения колебаний. Показано, что формируемый момент является неконсервативным и представляет собой основной источник динамической неустойчивости системы. Построены формы изгибных движений конструкции низа бурильной колонны при различных значениях характерных параметров.

Ключевые слова: изгибные колебания, низ бурильной колонны, силы трения, динамическая неустойчивость, формы изгибных колебаний.

The problem about bending vibrations of bottom hole assembly under action of a friction moment applied to the bit is considered. The analysis of vibration self-excitation mechanism is performed. It is shown that the generated moment is not conservative and it is the main reason of the system dynamic instability. The modes of bottom hole assembly whirling are constructed for different values of characteristic parameters.

Key words: bending vibrations, bottom hole assembly, friction moment, dynamic instability, modes of bottom vibrations.

Вступ. Явище збудження згинних коливань кружляння низу бурильної колони є однією з найбільш поширених причин порушення геометричної точності запланованої траєкторії прямолінійної або криволінійної свердловини і виникнення її геометричних недосконалостей [7]. При їх генеруванні нижні секції БК починають здійснювати згинні коливання, що призводять до періодичних перекосів долота, між його зовнішньою поверхнею та стінкою свердловини утворюється кільцевий зазор і центр долота починає рухатися навколо осьової лінії свердловини по складних, циклічно повторюваних кривих, які нагадують багатопелюсткові квітки. При цьому на поверхні стінки свердловини утворюється система жолобів, недопустимих за технічними умовами буріння.

Схожі рухи здійснює вісь гіроскопа, що обертається, під дією коріолісових сил інерції. У механіці вони отримали назву прецесії. Проте подібні коливання долота мають іншу природу, оскільки викликані дією сил контактної та фрикційної взаємодії долота зі стінкою свердловини, які змінюються в часі. І хоча в даному випадку гіроскопічні сили, обумовлені обертанням, також присутні, їх внесок у загальний баланс сил не є вирішальним.

В англійській науковій літературі зазначений рух долота, на відміну від прецесії, отримав назву «whirling» – кружляння. Цієї термінології будемо дотримуватися і в даній роботі, називаючи такий динамічний процес коливаннями кружляння. Однією з перших моделей подібного руху можна вважати викладену в [4] постановку задачі про коливання і стійкість консольного валу, який обертається з маховиком (диском) на кінці.

Питання математичного моделювання безпосередньо коливань кружляння долота на кінці БК вивчалися в [5]. У ній долото замінювалося плоским круговим диском,

що обертається відносно своєї осі, прикріпленим двома пружинами до нерухомих точок. Показано, що центр диска в цій моделі рухається по досить складних кривих.

Аналізуючи результати досліджень у зазначених публікаціях, можна відзначити, що навряд чи вони відображають реальний механізм явищ, що виникають, оскільки отримані на основі досить абстрактних моделей, слабо відображають особливості протікаючих динамічних процесів [8]. По-перше, це пов'язано з великою різноманітністю та істотною складністю процесів, що розглядаються, які ускладнюють розробку їх адекватних моделей. По-друге, складною є конструкція низу бурильної колони, що складається з багатоопорної пружної балки, що обертається, з консольною ділянкою, на кінці якої приєднано тривимірне тіло долота. По-третє, складність моделі зумовлена складністю діючих на долото навантажень, серед яких слід виділити неконсервативний крутний момент (момент різання або фрикційний момент), осьову силу тиску долота на дно свердловини, нормальні і дотичні сили контактної взаємодії при перекосах долота і відхиленнях осі долота від осі свердловини.

У даній роботі запропоновано математичну модель першого етапу збудження коливань кружляння, що дозволяє встановити стани системи, при яких починають порушуватися ці коливання, і побудувати форми їх прояву. Хоча така задача виявляється простішою за другу, можна вважати, що вона є не менш важливою, тому що її розв'язання дає можливість передбачити і уникнути одну з позаштатних ситуацій процесу буріння.

Математична модель початкового етапу процесу збудження коливань кружляння конструкції низу бурильної колони. При постановці задачі про моделювання початкового етапу порушення коливань кружляння долота представимо конструктивну схему бурильної колони у вигляді багатопрольотної нерозрізаної трубчастої балки довжиною L , що обертається з кутовою швидкістю ω .

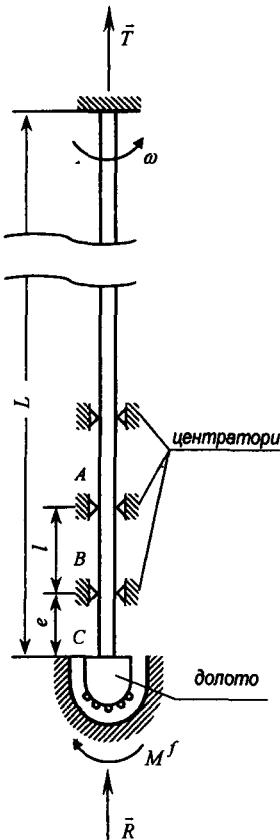


Рис. 1. Розрахункова схема

Роль додаткових опор у нижній частині БК відіграють центруючі пристрої (центратори), що встановлюються для забезпечення необхідної жорсткості конструкції в зоні буріння. Балка піддається дії крутного моменту сил різання M^f і поздовжньої сили стискання \bar{R} від реакції взаємодії долота і дна свердловини (рис. 1). На нижньому кінці БК має консольну ділянку довжиною e , до якої приєднано долото. Оскільки найбільш інтенсивні згинні коливання системи мають місце в нижньому прольоті БК і в її консольній частині, для спрощення задачі будемо нехтувати впливом верхньої частини БК на динамічний процес, умовно відокремимо нижній проліт AB з консоллю BC від іншої частини і приймемо, що в точці A реалізуються граничні умови шарнірного обпирання, в точці C – умови контактної взаємодії долота і дна свердловини.

Для постановки задачі і виведення розв'язувальних рівнянь введемо нерухому систему координат $OXYZ$ і пов'язану з БК, що обертається, систему $Oxyz$ з ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Початки обох систем співпадають і знаходяться в точці A . Осі OZ і Oz напрямлені вздовж осі труби БК. Введемо також жорстко

пов'язану з тілом долота систему координат $Cx_1y_1z_1$, осі якої Cx_1 , Cy_1 , Cz_1 в недеформованому стані паралельні осям Ox , Oy , Oz , відповідно, а при пружному згинанні консолі повертаються разом з долотом.

Вважаємо, що всі пружні переміщення і кути поворотів малі, тому задача розглядається в лінеаризованій постановці.

Двопрольотна балка ABC , що обертається, попередньо напружена крутним моментом $M_z = -M^f$ і поздовжньою стискаючою силою $T = -R$. Всередині труби БК міститься промивна рідина, яку будемо враховувати як приєднану масу. Коливання балки будемо вивчати в системі $Oxyz$, що обертається. Відносно цієї системи рух кожного елемента БК являється складним, тому при коливаннях на нього діють сили інерції відносного та переносного рухів, а також коріолісові сили інерції.

Рівняння динамічного пружного згинання БК при наявності вказаних факторів побудовані в [1; 2; 6]. Вони мають форму

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - M_z \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - \rho F \omega^2 u - 2\rho F \omega \frac{\partial v}{\partial t} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - T \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + M_z \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \rho F \omega^2 v + 2\rho F \omega \frac{\partial u}{\partial t} + \rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $u(z, t)$, $v(z, t)$ – пружні переміщення елемента труби БК у напрямках осей Ox , Oy , відповідно; EI – жорсткість труби БК при згині; ρ – густина матеріалу труби; F – площа поперечного перерізу стінки труби; t – час.

З урахуванням прийнятих припущень запишемо рівняння шарнірного обпирання на опорах A , B

$$u_A = v_A = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_A = \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_A = 0, \quad u_B = v_B = 0 \quad (2)$$

Другу групу граничних рівнянь в точці C сформулюємо, використовуючи рівняння Ейлера руху долота як твердого тіла відносно жорстко пов'язаних з ним осей Cx_1 , Cy_1 , Cz_1 .

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{K}_C = \vec{M}_C^{ex}, \quad (3)$$

де $\vec{K}_C = K_{x_1} \vec{i}_1 + K_{y_1} \vec{j}_1 + K_{z_1} \vec{k}_1$ – момент кількостей руху долота відносно точки C ; $\vec{\Omega}$ – вектор кутової швидкості рухомої системи координат $Cx_1y_1z_1$; \vec{M}_C^{ex} – момент всіх зовнішніх сил, прикладених до долота; знак \sim над d позначає символ локального диференціювання в рухомій системі $Cx_1y_1z_1$.

Серед моментів зовнішніх сил основну роль відіграють моменти M_x^f , M_y^f , викликані дією моменту різання \vec{M}^f при перекосі долота. Вони визначаються, в першу чергу, його конструкцією. В стані, коли пружна вісь БК строго вертикальна і вісь Cz_1 співпадає з віссю Cz , момент \vec{M}^f колінеарний з ортом \vec{k} і $M_{x_1}^f = M_{y_1}^f = 0$. Проте при згині БК долото повертається відносно осей Cx_1 , Cy_1 і, в залежності від його форми і конструкції, момент \vec{M}^f при малих кутах повороту може змінюватися або залишатися сталим в інерціальній системі $Oxyz$.

Умови такої взаємодії залежать, головним чином, від геометрії поверхонь тіла долота та дна свердловини і в загальному випадку можуть бути описані складними залежностями. Нехай тіло долота обмежене сферичною поверхнею, а поверхня дна свердловини – конічна. Тоді при повороті долота можливі три випадки (рис. 2).

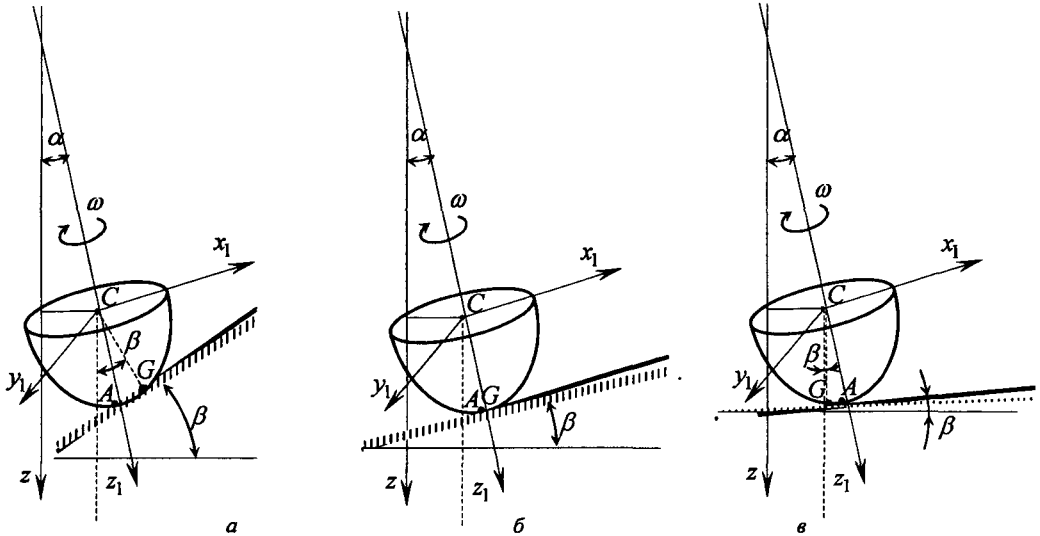


Рис. 2. Геометрія поверхонь тіла долота та дна свердловини

Перший режим виникає, коли момент M^{el} малий, а сила R велика. Тоді в точці контакту G швидкість долота дорівнює нулю і вона являється миттєвим центром швидкостей. В цьому випадку без різання породи долото буде перекочуватися по поверхні свердловини зі швидкістю кружляння ω_0 у напрямку, оберненому обертанню БК (обернене кружляння). Вважається, що такі коливання кружляння являються найбільш небезпечними.

Якщо $\alpha = \beta$ (рис. 2, б), то точки A та G суміщаються, і відбувається просте обертання долота навколо цих точок. При цьому точки A та G не переміщуються, явище коливань кружляння не відбувається, і в режимі буріння траєкторія свердловини, при переході через них, змінює свій напрям.

Випадок $\alpha > \beta$ (рис. 2, в) пов'язаний з розміщенням точки контакту G між точками O та A . Тому для вибраного напрямку обертання ω долото ніби перекочується по колу радіуса OG , і напрями обертання (ω) та кружляння (ω_0) співпадають (пряме кружляння). Такі коливання являються менш небезпечними.

Система граничних рівнянь на краю $z = l + e$ має вигляд

$$\begin{aligned} J_{y_1} \ddot{u}_C + (J_{z_1} - J_{x_1}) \omega \dot{v}_C + Elu_C'' - M^f v_C' \mp Rau_C' + kv_C' &= 0, \\ J_{x_1} \ddot{v}_C - (J_{z_1} - J_{y_1}) \omega \dot{u}_C + Elv_C'' + M^f u_C' \mp Rav_C' + kv_C' &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Якщо при деяких вибраних початкових збуреннях і значеннях характерних параметрів низу бурильної колони розв'язки побудованої системи мають вигляд спадаючих функцій, то відповідний стан балки являється стійким і коливання кружляння не збуджуються. Якщо амплітуди коливань зростають, то має місце їх самозбудження.

Результати чисельних досліджень. Інтегрування системи (1) з крайовими умовами (2, 4) проводиться чисельно за допомогою методу скінченних різниць по змінним z і t .

Якщо припустити, що в моменти часу $t = t_i - \Delta t$ і $t = t_i$ деформовані стани пружної системи відомі, то в дискретизованих рівняннях залишаються лише дві невідомі величини $u_{j,t+1}$ і $v_{j,t+1}$, кожна з яких може бути знайдена з рівняння, в яке вона входить. Тому, знаючи функції $u(z,0)$, $v(z,0)$ і $\dot{u}(z,0)$, $\dot{v}(z,0)$ в початковий момент часу $t = 0$, можна покроковим методом знайти деформовані стани відповідного прольоту БК в будь-які дискретні моменти часу. Описана скінченно-різницева схема інтегрування за часом називається явною. Вона являється умовно стійкою, оскільки приводить до стійких обчислень лише при значеннях кроку Δt , менших деякої граничної величини Δt_{st} , яка визначається методом підбору.

Значення геометричних і механічних параметрів прольоту AB (рис. 1) склали: $l = 8$ м, $r_1 = 0,09$ м, $r_2 = 0,08$ м, $E = 210$ ГПа. Довжина меншого прольоту BC вибрана рівною $e = 1$ м. Використані в системі (4) значення інерційних параметрів склали $J_{x_1} = J_{y_1} = 5$ кг/м², $J_z = 3,5$ кг/м². Коефіцієнт k , який визначає момент сил тертя в системі (4), вибирався рівним $k = \mu \cdot R \cdot r$, де $\mu = 0,2$ – коефіцієнт тертя, R – сила нормального тиску долота на дно свердловини.

Обчислення показали, що процес збудження коливань кружляння бурильної колони з відстанню e від центру опори до центру долота визначається сукупністю значень параметрів ω , M^f , $T = -R$. Так, якщо сукупність їх величин не перевищує критичної комбінації, то вихідні збудження, нав'язані системі у вигляді початкових прогинів, приводять до просторових коливань центру долота зі складними траєкторіями, які потім, в результаті дії сил дисипації, гасяться і відхилення $u(t)$ та $v(t)$ прямують до нуля. Відповідні цим станам форми руху осьової лінії долота в рухомій $Ox'y'$ та нерухомій OXY системах координат наведені на рис. 3, 4.

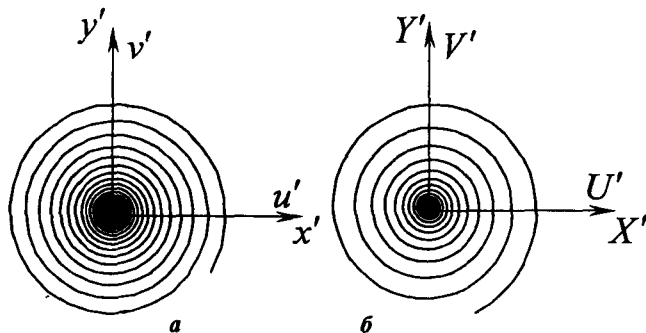


Рис. 3. Форми руху осьової лінії долота в рухомій $Ox'y'$ та нерухомій OXY системах координат

Якщо значення параметрів ω , M^f , $T = -R$ вибрати із закритичної області їх значень, то вісь долота починає рухатися по конічних поверхнях з швидкою зміною

значень кутів $u'(t)$ та $v'(t)$. Оскільки такі переміщення прямують до нескінченності, ці коливання можна вважати нестійкими.

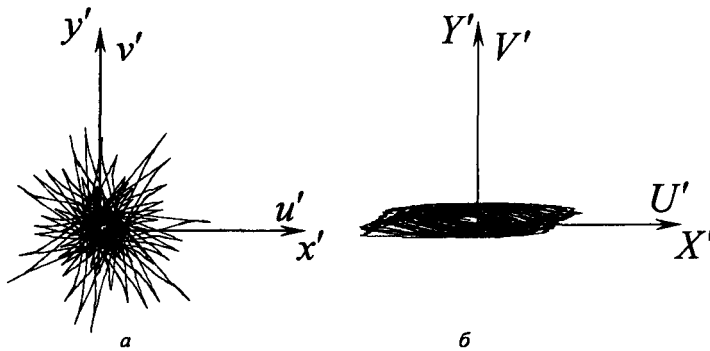


Рис. 4. Форми руху осьової лінії долота в рухомій Oxy та нерухомій OXY системах координат

Зазначимо, що всі наведені розрахунки отримані на основі лінеаризованої постановки задачі і в нестійких станах відображають лише тенденцію зростання амплітуд коливань. Для аналізу руху системи при розвинених коливаннях необхідно використовувати нелінійні рівняння.

Бібліографічні посилання

1. Борщ Е. И. Спиральные бегущие волны в упругих стержнях / Е. И. Борщ, Е. В. Ващилина, В. И. Гуляев // Известия РАН. Механика твердого тела – 2009. – №2. – С. 143 – 149.
2. Гуляев В. И. Цилиндрические спиральные волны во вращающихся закрученных упругих стержнях / В. И. Гуляев, Е. В. Ващилина, Е. И. Борщ // Прикладная механика. – 2008. Т. 44, №3. – С. 125 – 134.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М., 1961. – 834 с.
4. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций / Г. Циглер. – М., 1971. – 192 с.
5. Brett J. F. Bit whirl – A new theory of PDC bit failure / J. F. Brett, T. M. Warren, S. M. Behr // SPE Drilling Engineering. – 1990. – Vol.5. – P. 275–281.
6. Gulyayev V. I. The buckling of elongated rotating drill strings / V. I. Gulyayev, V. V. Gaidaichuk, I. L. Solovjov, I. V. Gorbunovich // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2009. – V.67. – P.140–148.
7. Gulyayev V. I. The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections / V. I. Gulyayev, S. N. Hudoly, L. V. Glovach // Intern. Journ. of Solids and Structures. – 2011. – Vol.48. – P.110–118.
8. Gulyayev V. I. Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes / V. I. Gulyayev, S. N. Hudoly, E. N. Andrusenko // Interaction and Multiscale Mechanics. – 2011. – Vol.4. – №.1. – P.1–16.

Надійшла до редколегії 29.04.11

УДК 539.3

А. П. Дзюба, О. Г. Василенко

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ ЗА КІНЦЕВИМ РІВНЕМ КОРОЗІЙНОГО УРАЖЕННЯ КОНСТРУКЦІЙ

Проаналізовано стан проблеми оптимального проектування елементів силових конструкцій, умови експлуатації яких пов'язані з впливом агресивних середовищ. Побудовано алгоритм вибору оптимальних параметрів конструкцій, що функціонують в агресивному середовищі, який ґрунтується на оцінюванні рівня корозійного ураження конструкції в кінцевий момент втрати нею несучої здатності. Наведено обґрунтування та продемонстрована ефективність підходу до розв'язування прикладних задач.

Ключові слова: алгоритм вагової оптимізації, корозійне ураження, пластинчато-стрижневі елементи та системи.

Проанализировано состояние проблемы оптимального проектирования элементов силовых конструкций, условия эксплуатации которых связаны с воздействием агрессивных сред. Построен алгоритм выбора оптимальных параметров конструкций, функционирующих в агрессивной среде, основанный на оценке уровня коррозионного износа конструкции в конечный момент потери ею несущей способности. Приведено обоснование и продемонстрирована эффективность подхода к решению прикладных задач.

Ключевые слова: алгоритм весовой оптимизации, коррозионный износ, пластинчато-стрижневые элементы и системы.

The state of the problem of optimal designing elements of loaded constructions, which operating conditions are connected with influence of corrosive environments. An algorithm for determining the parameters of optimum design that operate in the corrosive environment, is based on an assessment of the level of corrosion wear of material at the final moment of losing its load capacity. There the proving and demonstration of the efficiency of the approach for solving applied problems.

Keywords: algorithm of weight optimization, corrosion wear, plate-and-rod elements and systems.

Вступ. Для технологічних процесів багатьох галузей промисловості та будівництва, атомного виробництва і енергетики, підземних комунікацій, а також річкових і морських споруд характерна спільна дія нерівномірного силового навантаження та агресивного середовища на інженерні конструкції, яка призводить до значного зменшення несучої здатності та скорочення терміну їх служби внаслідок корозійного зношування. Високі вимоги до економічної доцільності та надійності таких конструкцій призводять до необхідності науково обґрунтованого прогнозування довговічності та раціонального вибору їх основних параметрів з урахуванням відповідних умов експлуатації ще на стадії проектування.

Огляд стану питання. Проблема оптимального проектування елементів силових конструкцій, умови експлуатації яких пов'язані з впливом агресивних робочих середовищ, є досить актуальною. На сьогоднішній день опублікована значна кількість робіт, де досліджуються різні аспекти зазначеної проблеми.

Результати дослідження напружено-деформованого стану та міцності елементів силових конструкцій в корозійному середовищі, а також окремі питання оптимізації їх параметрів розглядалися в роботах [11; 14; 20; 22; 25; 26; 28; 35; 36; 49]. Огляд наукових публікацій та різноманітні аспекти стану проблеми в цілому, подано у [15; 16; 19; 27; 29; 34; 42; 45; 46].

Дослідження впливу агресивних середовищ та напружень на параметри локальних корозійних процесів проводилися в [23, 24, 55-57].

Низка публікацій присвячена дослідженню корозійно-механічної поведінки та проблемам оптимального проектування окремих видів конструкцій: – у [1; 9; 18; 33; 46; 50; 51; 52] розглянуті задачі вибору оптимальних параметрів стрижневих

(балочних) елементів і стрижневих систем, що зазнають корозійного впливу під дією різних видів робочих агресивних середовищ (вологе повітряне середовище, електроліти, середовища, які містять водень); зміна форми поперечних перерізів стрижнів згинних конструкцій при вирішенні оптимізаційних задач враховується в [51]; – у [18] обговорюються нові алгоритми оптимального проектування таких конструкцій; – у [9; 26; 32; 33; 35; 38] досліджується їх довговічність.

При цьому в багатьох роботах, при розв'язуванні задач вибору оптимальних параметрів конструкцій, вплив агресивного середовища приймається у вигляді рівномірної атмосферної корозії, а в публікаціях [9; 43; 51] враховується взаємозв'язок механічних напружень і швидкості корозії.

Дослідження питань вибору оптимальних розмірів поперечних перерізів і довговічність статично невизначених стрижневих конструкцій розглядається в роботах [9]. При цьому, враховується лише атмосферний вплив на параметри конструкцій.

Оптимальному проектуванню підкріплених пластин і оболонок, які зазнають корозійного руйнування, присвячені роботи [10; 13; 17; 25; 26; 28; 35; 36; 39; 40; 48; 58]. Задача вагової оптимізації циліндричних оболонок в [25] формулюється і вирішується в термінах нелінійного математичного програмування, а пошук оптимального проекту роботи [32] здійснюється за допомогою генетичного алгоритму на прикладі підкріпленої пластини з урахуванням дискретного характеру розміщення ребер жорсткості.

Деякі аналітичні залежності для розрахунку довговічності тонких пластин із малими круговими отворами, що знаходяться під впливом навантаження та атмосферної корозії (в припущенні, що напружений стан пластин не змінює швидкості корозії їх матеріалу) наведені в роботі [51]. Питання корозійної деградації сталевих резервуарів для зберігання нафтопродуктів розглядалися в [10, 12].

Ряд робіт [18; 19; 22; 38; 47; 49; 44; 53; 54], присвячено розробці, порівнянню та обґрунтуванню вибору математичних моделей, які описують процес корозійного зносу в металевих елементах конструкцій. Особливості використання існуючих математичних моделей для розв'язування оптимізаційних задач, проаналізовані в роботі [51]. Там же зазначено, що, обираючи математичну модель потрібно враховувати умови протікання конкретного процесу корозійного руйнування. При цьому, не існує простого й чіткого критерію, керуючись яким можна було б обирати чи модифікувати одну з існуючих моделей.

Математичні моделі відповідних оптимізаційних задач в термінах задач нелінійного математичного програмування (НЛП) формулювалися у [38; 39; 44; 50; 51; 54] і реалізовувалися або (у більшості випадків) чисельно [9; 37; 50; 51], або з застосуванням аналітичних методів оптимізації [47]. В якості таких методів використовувалися необхідні і достатні умови оптимальності Куна-Таккера та метод множників Лагранжа. Проблема ідентифікації математичних моделей корозійного руйнування конструкцій та обчислювальні особливості цієї проблеми при оптимальному проектуванні конструкцій обговорювалися в [54].

Розробка принципів і методів оптимального проектування конструкцій (ОПК) в умовах агресивного середовища висвітлюється в [6; 9; 38; 41; 42; 47; 49; 50].

Вибір того або іншого методу для чисельного вирішення оптимізаційних задач визначається, як зазначено в [42; 49], специфікою розв'язування задачі. В основному використовуються такі методи, як метод випадкового пошуку з самонавчанням [9; 50], метод штрафних функцій, метод проекції градієнта [30], метод покоординатного спуску [51], метод ковзного допуску [31], принцип максимуму Потрягіна [21]. Для розрахунку НДС конструкцій у значній кількості робіт [30; 31; 37; 39; 50; 58] автори використовують чисельні методи, зокрема, метод скінченних елементів, причому в деяких з них жорсткість елементів вважається змінною [31], але в ряді робіт (див. [33]) вдається отримати і аналітичні формули розв'язку.

Загальним недоліком згаданих методів оптимізації слід вважати складність урахування досить великої кількості обмежень, які змінюються в часі, і, як результат, низьку збіжність оптимізаційних алгоритмів для виникаючої досить великої (оскільки

корозії зазнає вся поверхня конструкції) кількості варійованих змінних. Причому ця проблема носить принциповий характер і не завжди може бути вирішена навіть за допомогою сучасних потужних комп'ютерних засобів. Як наслідок, ряд прикладних аспектів проблеми все ще залишається недостатньо дослідженими.

Причиною такого стану справ є те, що застосування у таких випадках відомих алгоритмів оптимального проектування (узагальнена схема яких показана на рис. 1) пов'язане з необхідністю багаразової перевірки виконання вимог довговічності для кожного з елементів конструкції на кожному кроці оптимізаційного ітераційного алгоритму за допомогою інтегрування за змінною часу (від початкового до кінцевого моменту) диференціальних рівнянь вибраної математичної моделі корозійного ураження, в праву частину якої входять параметри напруженого стану, для кожної з точок поверхні силового елемента конструкції. Це приводить до значних обчислювальних витрат і накопичення похибок, особливо при ускладненні геометрії конструкції або зі збільшенням кількості обмежень на її функціонування. Як наслідок, більшість відомих робіт присвячені розв'язуванню оптимізаційних задач для спрощених розрахункових схем, а отримувані у них результати мають переважно наукове значення, можливість використання яких на практиці виглядає сумнівною.

В цілому ж спроби введення спрощуючих припущень приводять, як правило, до неадекватності побудованої моделі конструкції реальному об'єкту, що ставить під сумнів і вірогідність отримуваних результатів.

Слід при цьому зазначити, що експериментальні дослідження (які були б надійним критерієм достовірності отримуваних результатів) поведінки конструкцій в агресивному середовищі є тривалими та пов'язаними з досить суттєвими матеріальними витратами і тому фактично відсутніми.

Як наслідок, довгочасну надійність конструкцій, які експлуатуються в агресивному середовищі, часто доводиться збільшувати шляхом введення так званого «жертвовного» шару матеріалу, тобто частки матеріалу, умовно призначеної для її пошкодження корозією. Як правило, такий шар призначається рівномірним для всієї конструкції, як певний запас міцності. У той же час напруження по поверхні матеріалу розподіляються нерівномірно, що призводить до нерівномірності корозійного зношування і, як наслідок, до необґрунтованості такого підходу.

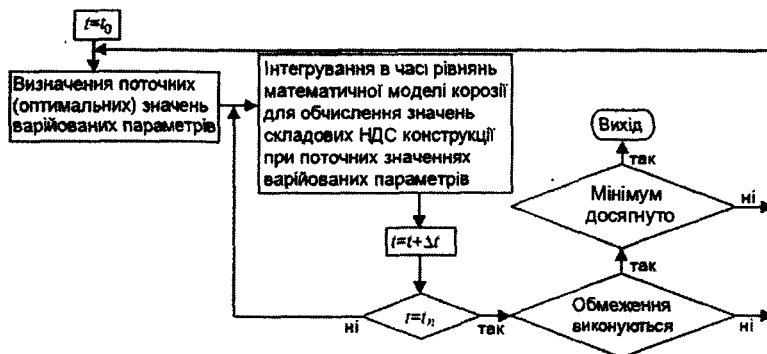


Рис. 1. Схема традиційного підходу до розв'язування задачі довговічності

В цілому з аналізу приведенного огляду публікацій видно, що незважаючи на проведення досить обширних досліджень проблеми оптимального проектування конструкцій з урахуванням одночасної дії силових навантажень та агресивного середовища, цілий ряд питань все ще потребує проведення подальших досліджень, зокрема:

– розробка ефективних підходів, методів та алгоритмів розв'язування задач оптимального проектування силових елементів конструкцій з урахуванням корозії, застосування яких дозволило б при мінімальній кількості необхідних обчислень з досить високою точністю отримувати достовірні результати комп'ютерного моделювання процесу корозійного ураження поверхні конструкції;

– вивчення залежності параметрів оптимальних проектів від ряду факторів: вигляду математичної моделі, що описує вплив корозійного середовища на конструкцію; рівня напружено-деформованого стану; властивостей агресивного середовища; спротиву матеріалу корозійному зношуванню;

– розв’язування конкретних задач зниження матеріалоемності конструкцій, що функціонують в агресивному середовищі, тощо.

Отже, метою роботи є вирішення досить актуальної проблеми: розробки ефективного методу оптимального проектування конструкцій з урахуванням корозії елементів, дослідження за допомогою цього методу впливу різних факторів на властивості оптимальних проектів та демонстрація його ефективності для розв’язування прикладних задач.

Сутність запропонованого методу. Ідея запропонованого досить оригінального методу оптимального проектування (рис. 2) полягає в оцінюванні рівня корозійного ураження конструкції в кінцевий момент призначеного терміну її експлуатації (момент вичерпання її несучої здатності), відшукуванні в цей момент деякого оптимального проекту, що задовольняє всім вимогам (як граничному стану існування конструкції) та подальшого нарощування отриманих таким чином геометричних розмірів поперечних перерізів конструкції (варійованих змінних) за допомогою зворотного інтегрування обраної моделі корозійної деградації від кінцевого до початкового моменту часу.

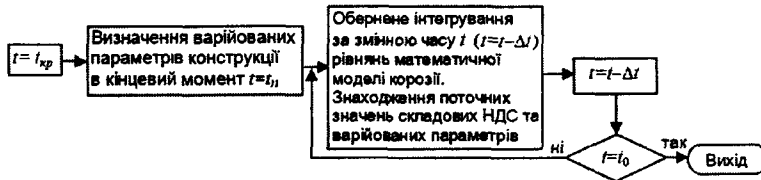


Рис. 2. Схема запропонованого підходу

Очевидно, що в цьому випадку, на відміну від показаної на рис. 1 схеми традиційно використовуваних алгоритмів оптимізації конструкцій з урахуванням впливу агресивного середовища, зникає необхідність перевірки виконання діючих обмежень після кожного змінювання варійованих параметрів на кожному кроці ітераційного оптимізаційного алгоритму для кожного з елементів конструкції. Як результат, отримувати таким чином в початковий момент часу геометричні розміри конструкції і будуть відповідати розв’язку вихідної задачі оптимізації з врахуванням впливу агресивного середовища, а обчислювальні витрати при оптимальному проектуванні конструкцій, що функціонують в умовах дії корозії, за допомогою такого підходу скорочуються в тисячі разів.

Обґрунтування достовірності запропонованого методу наведено в [2, 19], де проведено також дослідження стійкості запропонованого підходу в залежності від вибору методу та напрямку інтегрування (від початкового t_0 моменту часу до кінцевого t_n чи у зворотному напрямі) диференціальних рівнянь математичної моделі корозії, коефіцієнтів вибраної моделі корозії та ін.

Постановка задачі. Оптимальне проектування, наприклад, фермових конструкцій з застосуванням запропонованого методу за наявності, зокрема, обмежень міцності, жорсткості, стійкості (для стиснутих стрижнів) та конструктивних вимог подається наступним чином:

$$\min V(F_s(t_n)), \quad (s = 1, \dots, S); \quad (1)$$

$$\sigma_{\max}(F_s(t_n)) = [\sigma]; \quad (2)$$

$$w_{\max}(F_s(t_n)) = \Delta; \quad (3)$$

$$P_s^*(F_s(t_n)) \leq P_{kp} \cdot s^* \quad (s^* \in S) \quad (4)$$

$$F_s(t_0) \geq \bar{F}_0; \quad (a) \quad F_s(t_n) \geq \bar{F}_n; \quad (b) \quad (5)$$

$$t_0 \leq t \leq t_n. \quad (6)$$

де (1) – критерій оптимальності; (2), (3), (4), (5), (6) – відповідно обмеження міцності, жорсткості, стійкості (для стислих стрижнів s ферми), конструктивні вимоги та умови довговічності; S – кількість стрижнів ферми; t_0 – початковий момент часу; t_n – заданий час вичерпання несучої здатності конструкції, який настає, як вважається, при порушенні хоча б однієї з вимог (2)-(5) в період часу $t_0 \leq t \leq t_n$; n – кількість точок інтегрування за змінною часу; σ , Δ – відповідно, напруження і прогини елементів конструкції; $[\sigma]$, $[\Delta]$ – гранично припустимі значення напруження і прогинів; P_{s^*} – навантаження в s^* стислих стрижнях фермових конструкцій; $P_{кр, s^*}$ – критичне значення цього навантаження; \bar{F}_0 , \bar{F}_n – значення конструктивних обмежень геометричних розмірів перетину в початковий та кінцевий моменти часу.

Вплив агресивного середовища на поверхню матеріалу конструкцій пропонується описувати за допомогою однієї з трьох найбільш відомих математичних моделей корозійної деградації, що враховують вплив напруження на швидкість корозії [46]: моделей В. М. Долинського, І. Г. Овчинникова та Е. М. Гутмана

$$d\delta/dt = \varphi(t) \cdot (1 + k\sigma); \quad (7)$$

$$d\delta/dt = V_0(1 + \varepsilon \varepsilon); \quad (8)$$

$$d\delta/dt = v(t) \cdot e^{\gamma\sigma}, \quad (9)$$

k , γ – коефіцієнти, що відображають вплив напружень σ на швидкість корозії; $\varphi(t)$, $v(t)$ – у загальному випадку, функції, які приймаються у вигляді [49] $\varphi(t) = (a + b \cdot e^{(\beta t - 1)}) / e^{\beta t}$; $v(t) = \alpha e^{\eta t}$, що показують зміну в часі впливу агресивного середовища на швидкість корозійної деградації матеріалу конструкції; ε – питома енергія деформації, яка може бути знайдена за формулою

$$\varepsilon = E(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\nu)\sigma_{xy}^2) / 2,$$

a , b , α , β , η – коефіцієнти моделей, що характеризують властивості корозійного середовища та корозійної стійкості матеріалу, значення яких визначаються в результаті експериментів.

При проведенні чисельних досліджень вважалося, що $\varphi(t) = V_0 = const$. Алгоритм підходу в цілому описаний у [19].

Демонстрація ефективності запропонованого підходу. Ефективність застосування підходу для відшукування оптимальних параметрів інженерних конструкцій з врахуванням дії агресивного середовища демонструється шляхом проведення широкомасштабних числових експериментів для різних пластинчасто-стрижневих силових елементів конструкцій. При проведенні обчислень приймається, що властивості агресивного середовища і механізм її впливу на матеріал конструкції відомі і описуються однією з моделей (7) – (9) корозійного зносу. Крім того, враховується наявність сукупності всього спектру обмежень на напружено-деформований стан конструкції, і, зокрема, умов міцності (2), жорсткості (3), стійкості (4) і конструктивних вимог (5).

Порівняння ефективності застосування запропонованого методу та традиційного алгоритму оптимального проектування здійснюється на прикладі статично визначених та статично невизначених стрижневих конструкцій (балки, рами, ферми).

Як приклад на рис. 3 показані результати, отримані для деяких досліджених конструкцій [3; 5]: відповідно, зміна у часі (від початкового моменту t_0 до кінцевого $t_{кр}$) під впливом корозії розподілу висоти вздовж статично визначеної балки мінімальної ваги (рис. 3, а), висоти прямокутного перерізу стрижнів статично визначеної рами (рис. 3, б) та площ стрижнів статично невизначеної ферми (рис. 3, в), узагальнені геометричні схеми яких показані в кутках кожного з рисунків.

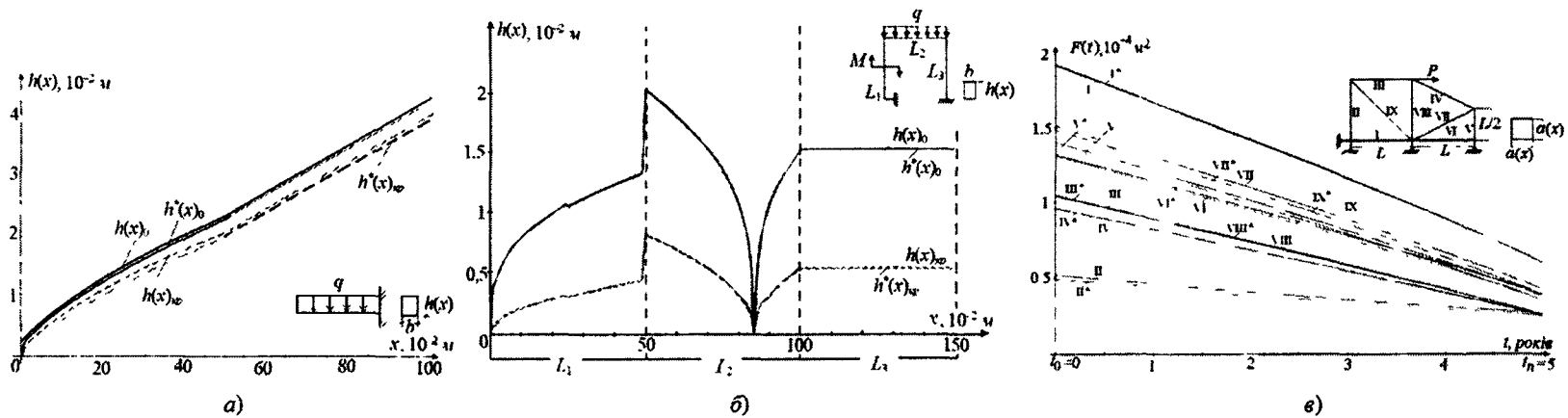


Рис. 3 – Результати оптимального проектування з застосуванням запропонованого підходу

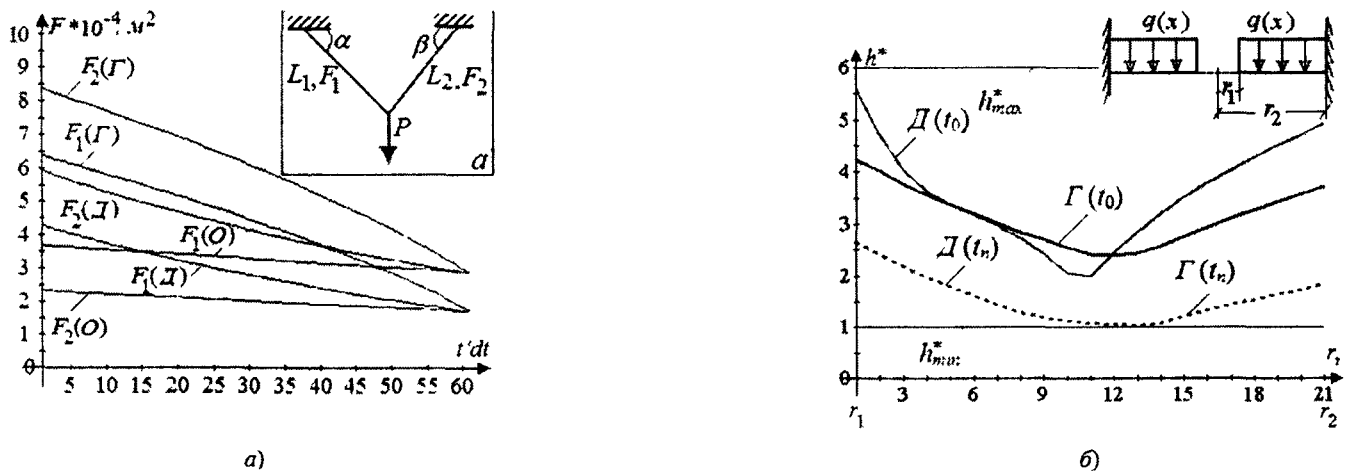


Рис. 4 – Зміна в часі геометричних розмірів конструкцій, отриманих за моделями В. М. Долинського (Д), І. Г. Овчинникова (О), Е. М. Гутмана (Г)

Тут $h_0(x)$, $h_0^*(x)$ та $h_{кр}(x)$, $h_{кр}^*(x)$ позначені, відповідно, зміну висоти прямокутного перерізу стрижнів, отриманих за традиційним та запропонованим "*" алгоритмами у початковий "0" та кінцевий "кр" моменти заданого періоду їх функціонування. Лінії I – IX показують зміну площ стрижнів з відповідним пошуком оптимальних проектів ферми, параметри яких було знайдено за традиційним та запропонованим "*" підходами.

При цьому встановлено, що параметри оптимальних проектів, отриманих за різними підходами відрізняються у межах 5%, що можна пояснити накопиченням похибок при багаторазовому інтегруванні рівнянь математичної моделі корозії, необхідному для розв'язування задачі оптимізації за традиційним алгоритмом, в той час як переваги запропонованого підходу в кількості необхідних прямих розрахунків складають більше 1000 разів.

На рис. 4 показані результати дослідження [4; 8] впливу деяких математичних моделей, що описують вплив корозійного середовища на властивості проектів конструкцій мінімальної ваги для параметрів $a=0,00044$ м/рік; $b=0,000153$ м/рік; $\beta=0,2$ рік⁻¹; $k=0,0089$ МПа⁻¹; $V_0=0,000217$ м/рік; $\zeta=0,00047$ МПа⁻¹; $\alpha=0,00048$ м/рік; $\eta=0,091$ рік⁻¹; $\gamma=0,00588$ МПа⁻¹, які приведені в [40]. Тут криві Д, О, Г показують зміни площ поперечних перерізів стрижнів 1, 2 двострижневої системи мінімальної ваги, отриманих, відповідно, за моделями В. М. Долинського (7), І. Г. Овчинникова (8) та Е. М. Гутмана (9) (рис. 4, а); криві на рис. 4, б – зображені зміни вздовж радіусу відносних величин товщини проектів тонкої кільцевої пластини під впливом корозії.

Для коректного порівняння процесу корозійної деградації за різними моделями додатково було проведено чисельний експеримент за принципом однакової витрати матеріалу на корозію (зношування за певний час) для вибору параметрів відповідних моделей. При цьому розбіжність між даними отриманими для різних моделей склала до 9% – 10,5%.

Далі приведені деякі результати дослідження [6] впливу параметрів математичних моделей корозії на властивості проектів мінімальної ваги. На рис. 5 показані графіки залежності об'єму матеріалу (рис. 5, а) $V(t_0)$ і питомої потенціальної енергії деформації (рис. 5, б) $\Xi=(\sigma_{12}+\sigma_{22})/(2E)$ для оптимальних проектів стрижневої системи, показаної на рис. 4, а в початковий момент часу t_0 від параметрів v_0 , k (див. (7)). Досліджувався проміжок зміни значень цих параметрів в діапазонах $v_0 \in [1; 3]$ мм/рік і $k \in [0,003; 0,005]$ МПа⁻¹, відповідно. Враховувалися умови міцності, жорсткості, конструктивні вимоги і обмеження довговічності.

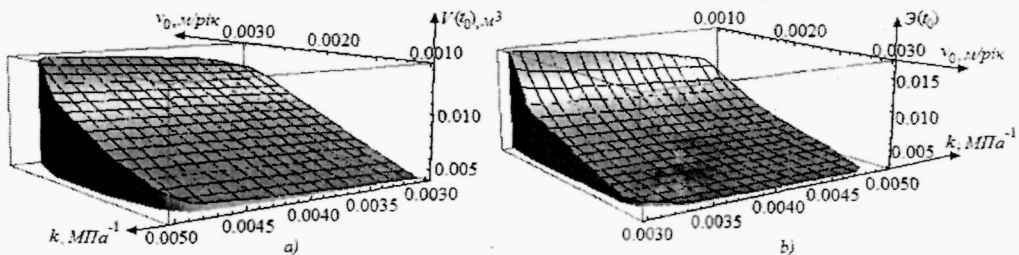


Рис. 5. – Зміна характеристик оптимальних проектів в залежності від параметрів рівняння математичної моделі корозії (7)

Особливістю використання моделі В. М. Долинського при цьому є те, що спостерігається більш суттєва залежність властивостей оптимальних проектів від зміни параметра агресивності середовища, ніж від параметра впливу напруги. Так, наприклад, варіювання значень коефіцієнтів k від $0,003$ МПа⁻¹ до $0,005$ МПа⁻¹ приводить до змін від 3% до 20% у вихідних об'ємах матеріалу та напруженнях у елементах проектів ферми, а збільшення коефіцієнта v_0 всього на $0,3$ мм/рік – до змін цих характеристик на 22%. Результати ж, отримані при більш помітному зростанні параметра агресивності середовища Δv_0 від $1,5$ до $2,0$ мм або одночасному зростанні обох кое-

фіцієнтів до межі проміжку дослідження $v_0 = 3 \text{ мм/рік}$ до $k = 0,005 \text{ МПа}^{-1}$, відрізняються в $2 \div 4$ рази.

Відзначимо, що в розрахунку було обрано діапазон припустимої похибки у виборі коефіцієнтів моделі корозії. При цьому, очевидно, що завищення їх значень приводить до надмірних витрат на «жертвний» шар матеріалу оптимального проекту конструкції, заниження ж, навпаки породжує ризик порушення вимог довговічності в запланований період її функціонування. Таким чином, показана важливість не лише адекватного вибору моделі корозії, але і точного визначення її параметрів, а також необхідності врахування впливу напруженого стану для забезпечення відповідності результатів математичного моделювання поведінці реальної досліджуваної конструкції.

Далі продемонстровано можливості запропонованого методу оптимального проектування за кінцевим рівнем корозійного зношування конструкції для великогабаритного фермового перекриття (рис. 6) і тонких кільцевих пластинок (рис. 7).

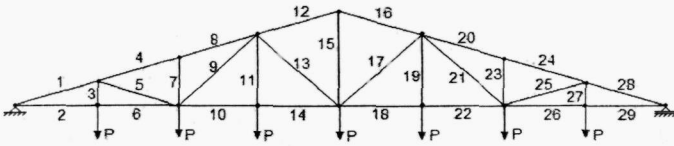


Рис. 6 – Схема фермового перекриття

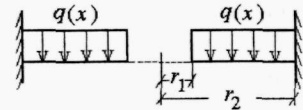


Рис. 7 – Схема та граничні умови для кільцевої пластинки: $M_1(r_1)=0, Q(r_1)=0$

Оскільки ферма симетрична, то на рис. 8 зображені зміни в часі відповідних характеристик лише для стрижнів 1 – 15: зокрема, відносних величин площ ($F(t) = F_s(t)/F_{const}(t_0)$) поперечних перерізів стрижнів ферми мінімальної ваги (рис. 8, а) та напружень ($\sigma(t) = \sigma_s(t)/[\sigma]$) в цих стрижнях (рис. 8, б) в координатах $F^*(t)-t\Delta t$ та $\sigma(t)-t\Delta t$ від початкового моменту t_0 до кінцевого t_n з кроком dt . Виявилось, що довговічність конструкції мінімальної ваги виявляється в 1,6 разів більшою (у розглянутому прикладі $t_n = 8 \text{ років}$ замість 5) ніж ферми з однаковими в початковий момент поперечними перерізами всіх стрижнів при рівних витратах матеріалу, що ще раз підтвердило ефективність використання раціональних конструкцій [7].

Далі проаналізовано вплив закону розподілу матеріалу уздовж радіусу (в початковий момент часу $t=t_0$) пластинок, поданих на рис. 7 [8]. Були розглянуті наступні види проектів тонких кільцевих пластинок, які позначені далі через *a, b, c, d*:

- *a* – проекти з однаковою для всіх $r_i \in [r_1, r_2]$ товщиною $h^{(a)} = const$;
- *b* – проекти, розподіл матеріалу у яких змінюється (лінійно зростає) вздовж радіусу r_i за законом

$$h^{(b)} = \frac{(h_{min}^{(b)} - h_{max}^{(b)})}{(r_1 - r_2)} \cdot r_i + \frac{(r_2 \cdot h_{min}^{(b)} - r_1 \cdot h_{max}^{(b)})}{(r_2 - r_1)}; \quad (10)$$

- *c* – проекти, товщина яких лінійно зменшується вздовж r_i згідно з формулою

$$h^{(c)} = \frac{(h_{max}^{(c)} - h_{min}^{(c)})}{(r_1 - r_2)} \cdot r_i + \frac{(r_2 \cdot h_{max}^{(c)} - r_1 \cdot h_{min}^{(c)})}{(r_2 - r_1)}; \quad (11)$$

- *d* – проекти оптимальної конфігурації, отримані при розв'язуванні задачі (1) – (6) за допомогою запропонованого підходу.

Зазначимо, що варійовані товщини пластинок *a – c* підбиралися таким чином, щоб їхня довговічність з *d* була однаковою, тобто вимагалось виконання вимог (2) – (4) до кінцевого моменту часу (6) включно. При цьому, у момент $t=t_n$ одна (або декілька) з вимог (2) – (4) досягала свого граничного значення. Знаходження параметрів проекту *d* здійснювалось із застосуванням методу визначення оптимальних параметрів за кінцевим станом [19] конструкції з урахуванням корозії.

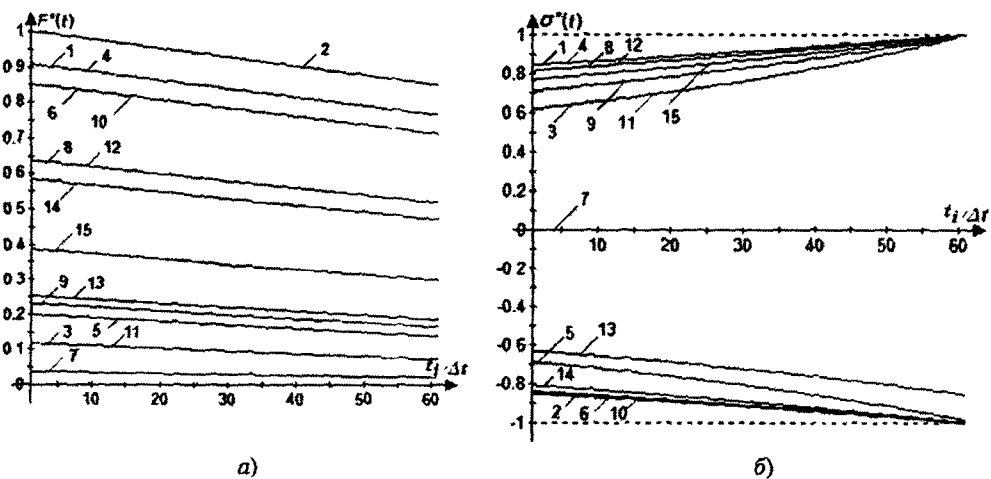


Рис. 8 – Зміна в часі властивостей форми мінімальної ваги, отриманої за запропонованим підходом

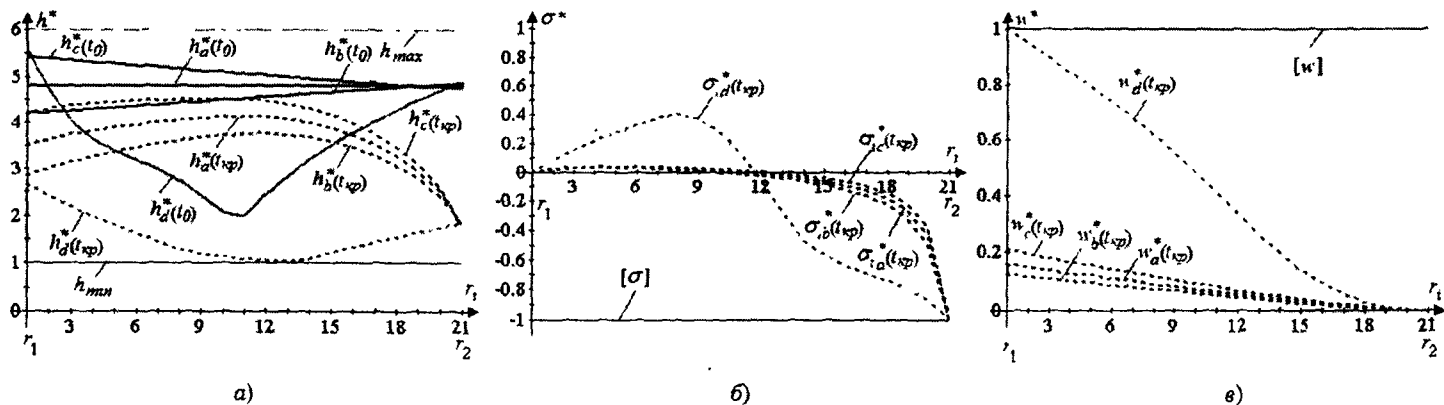


Рис. 9 – Параметри проектів *a*, *b*, *c*, *d* в початковий t_0 (неперервні лінії) та кінцевий t_n (пунктирні лінії) моменти часу відповідно моделі В. М. Долінського

В (10), (11) $h_{min}^{(b)}$, $h_{min}^{(c)}$ та $h_{max}^{(b)}$, $h_{max}^{(c)}$ – відповідно мінімальні та максимальні товщини проектів пластинок b , c , значення яких знаходяться у межах встановлених для проектів конструктивних обмежень h_{min} , h_{max} . Співвідношення зовнішнього та внутрішнього радіусів для всіх проектів приймається рівним $r_1/r_2=1/3$.

На рис. 9 показані, відповідно, зміна у часі розподілу відносної товщини (рис. 9, а) вздовж радіусів від r_1 до r_2 проектів $a-d$; напружень σ_1 на поверхні при $z=h/2$ (рис. 9, б) та прогинів (рис. 9, с) у кінцевий момент часу $t=t_n$.

Тут були введені наступні позначення: $h^*=h(r_i)/h_{min}$ та h_a^* , h_b^* , h_c^* , h_d^* – відносні величини висот відповідних проектів в початковий t_0 та кінцевий t_n моменти часу; $\sigma^*=\sigma_{1(t=exp)}/[\sigma]$ (де $[\sigma]=([\sigma_1]+[\sigma_2])/2$); $w^*=w_{max}/[w]$ – відносний прогин серединної площини. Уздовж осі абсцис на рис. 9 відкладені радіуси r , пластинок від $r=r_1$ до $r=r_2$ з кроком $\delta=0,01$ м.

Проведені дослідження підтвердили доцільність використання раціональних проектів пластинок у порівнянні з пластинками постійної та лінійно-змінної товщини (8), (9). Так, окрім значної економії матеріалу (19% – 53%) на виготовлення оптимального в початковий момент t_0 проекту d (порівняно з проектом a), до переваг використання методу оптимального проектування за оцінкою кінцевого рівня корозійного ураження матеріалу конструкції слід віднести також, що кількість ітерацій, витрачених на пошук оптимальних значень варійованих змінних при застосуванні цього методу, що визначає раціональний розподіл «жертвовного» шару матеріалу проектів d є значно меншою (до 3000 разів), ніж при використанні існуючих підходів до ітераційного відшукування цих величин.

Висновки. Запропоновано досить ефективний метод знаходження раціонального розподілу «жертвовного» шару матеріалу конструкцій в задачах оптимізації з урахуванням корозії, використання якого дозволяє з достатньою точністю і мінімумом обчислювальних витрат визначати оптимальні параметри таких конструкцій та досліджувати властивості оптимальних проектів, з урахуванням корозії поверхні матеріалу їх елементів.

Достовірність отриманих результатів забезпечується строгістю і коректністю постановки задач оптимального проектування, теоретичним обґрунтуванням розробленого підходу, використання відомих моделей корозії і методів оптимізації та даними проведеного порівняльного аналізу результатів чисельних експериментів з використанням запропонованого та загальновідомих методів.

Аналіз результатів досліджень впливу вигляду диференціальних рівнянь математичних моделей корозії та їх окремих параметрів на властивості оптимальних проектів, проведений на прикладі трьох найбільш відомих моделей показав, що застосування до комп'ютерного моделювання процесу корозійного ураження різних залежностей корозії та їх застосування для дослідження реальних проектів потребує наявності коректних експериментальних даних для визначення відповідних параметрів існуючих математичних моделей.

Таким чином, алгоритм оптимального проектування за оцінкою кінцевого рівня корозійного зношування конструкцій є досить ефективним засобом для визначення оптимальних параметрів реальних пластинчато-стрижневих інженерних конструкцій, що знаходяться в умовах одночасної дії силових навантажень і корозії, а також для дослідження властивостей існуючих математичних моделей корозійного зношування та характеристик отримуваних оптимальних проектів.

Бібліографічні посилання

1. Алексеевко Б. Г. О применении метода конечных элементов в расчетах прочности и долговечности стержневых систем, взаимодействующих с агрессивными средами / Б. Алексеевко, Ю. Почтман // Theoretical Foundations of Civil Engineering. – Warsaw. – 1999. – №7. – P. 11 – 15.

2. **Василенко О. Г.** Оптимізація елементів фермових конструкцій з урахуванням спільної дії силових навантажень та агресивного середовища / О. Г. Василенко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ, 2008. – Вип.12. – С. 20 – 33.
3. **Василенко О. Г.** Оптиміальне проектування статично невизначених стержневих конструкцій з урахуванням корозійної деградації / О. Г. Василенко // Foundations of Civil Engineering. Warsaw. – 2009. – P. 493 – 501.
4. **Василенко О. Г.** Дослідження ефективності алгоритмів розв’язування задач оптимізації конструкцій з урахуванням впливу агресивного середовища / О. Г. Василенко, А. П. Дзюба // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту. Серія «Механіка». – 2009. – Вип. 13, т. 2. – №5. – С. 18 – 28.
5. **Василенко О. Г.** Оптимізація статично невизначених стержневих систем з урахуванням взаємовпливу напруженого стану і корозії / О. Г. Василенко, А. П. Дзюба // Методи розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – Дніпропетровськ – Вип. 10. – 2009. – С. 48 – 57.
6. **Василенко О. Г.** Способ сокращения вычислительных затрат в задачах оптимизации конструкций, функционирующих в агрессивной среде / О. Г. Василенко, А. П. Дзюба // Питання оптимізації обчислень (ПОО - XXXV): праці Міжнародного симпоз. – К: Ін-т кібернетики НАНУ, 2009. – Т. 1. – С. 104-108.
7. **Василенко О. Г.** Оптиміальне проектування фермового перекриття з урахуванням впливу агресивного середовища / О. Г. Василенко, А. П. Дзюба // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ. – 2010. – Вип. 14. – С. 79 – 86.
8. **Василенко О. Г.** Алгоритм оптимального проектування кільцевих пластин за оцінкою кінцевого стану з урахуванням впливу агресивного середовища / О. Г. Василенко, А. П. Дзюба // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Дніпропетровськ. – 2011. – Вип. 16. – С. 79 – 85.
9. **Губенко В. С.** Определение оптимальных параметров и долговечность стержневых систем, подверженных влиянию агрессивной среды / В. С. Губенко, Ю. М. Почтман, Т. М. Криворучко //Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1988. – №3. – С. 22 – 25.
10. **Гудрамович В. С.** Особенности в слиянии коррозионной деградации на прочность тонкостенных конструкций резервуаров для нефтепродуктов / В. С. Гудрамович, А. П. Дзюба, В. М. Левин // “Міцність матеріалів конструкцій”. Тези доповідей докладов Міжнарод. наук.-техн. конф. (Київ, вересень 2010). – К.: ІПМ НАНУ, 2010. – Т. 1. – С. 116 – 117.
11. **Гудрамович В. С.** Несущая способность и долговечность элементов конструкций / В. С. Гудрамович, Е. С. Переверзев. – К. : Наук. думка, 1981. – 284 с.
12. **Гудрамович В. С.** Оценка напряженно-деформированного состояния вертикальных резервуаров для хранения нефтепродуктов с учетом утонения стенок вследствие коррозионного износа / В. С. Гудрамович, А. П. Дзюба, А. Ф. Деменков, А. В. Репринцев, Е. В. Самарская // Математичні проблеми технічної механіки: матеріали Міжнародної наук. конф. – Дніпропетровськ – Дніпродзержинськ, 2007. – С. 16.
13. **Гудрамович В. С.** Контактные взаимодействия и оптимизация оболочечных конструкций при локальном нагружении / В. С. Гудрамович, А. П. Дзюба // Математичні методи та фізико-математичні поля. – Львів. – 2008. – Т. 51. – № 2. – С. 188 – 201.
14. **Гутман Э. М.** Прочность газопромысловых труб в условиях коррозионного износа / [Э. М. Гутман, Р. С. Зайнулин, А. Т. Шаталов и др.]. – М., 1984. – 80с.
15. **Гутман Э. М.** Механохимия металлов и защита от коррозии, изд-во 2 / Э. М. Гутман. – М., 1981. – 270 с.
16. **Джонсон Г.** Влияние среды на разрушение высокопрочных материалов / Г. Джонсон // Разрушение. – М., 1976. – Т. 3. – С. 729-775.
17. **Дзюба А. П.** Оптимизация формы круглых пластин и оболочек вращения / А. П. Дзюба, Л. Д. Левитина. – Днепропетровск, 1985. – 124 с.
18. **Дзюба А. П.** Алгоритм зміни конфігурації поперечного перерізу стрижневого елемента при складному згині в умовах корозійного зношування / А. П. Дзюба, О. О. Кузьміна // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту, 2000. – С. 20-29.

19. Дзюба А. П. Про один підхід до розв'язання задач оптимізації елементів конструкцій з урахуванням спільної дії силових навантажень та агресивного середовища / А. П. Дзюба, О. Г. Василенко, О. А. Дзюба // *Методи розв'язування прикладних задач механіки твердого тіла.* – Дніпропетровськ, 2007. – Вип.8. – Т. 2. – С. 55 – 67.
20. Дзюба А. П. Комп'ютерне моделювання корозійної деградації поверхні нерівномірно навантажених елементів конструкції / А. П. Дзюба, А. П. Колодяжний, О. А. Дзюба // *Вісник Дніпропетр. ун-ту.* – Дніпропетровськ, 2006. – Вип. 10. – Т. 2. – С. 56 – 63.
21. Дзюба А. П. Оптимальное проектирование конструкций на основе принципа максимума Понтрягина / А. П. Дзюба. – Днепропетровск, 1984.–136 с.
22. Дзюба А. А. К задаче сравнительного анализа математических моделей коррозионного износа поверхности изгибаемых стержневых элементов // А. А. Дзюба, А. П. Колодяжний // *Theoretical Foundations of Civil Engineering: Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions.* Warsaw, – 2007. – №15 – P. 167 – 172.
23. Дмитрах І. М. Вплив корозійних середовищ на локальне руйнування металів біля концентраторів напружень / І. М. Дмитрах, В. В. Панасюк. – Львів. – 1999. – 343 с.
24. Дмитрах І. М. Вплив розтягуючих напружень на параметри корозійних процесів в модельних тріщинах-щілинах // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1990. – №4. – С. 22-25.
25. Долинский В. М. Изгиб тонких пластин, подверженных коррозионному износу / В. М. Долинский // *Динамика и прочность машин.* – Х., 1975. – Вып. 21. – С. 43 – 49.
26. Долинский В. М. Расчет элементов конструкций, подверженных равномерной коррозии / В. М. Долинский // *Исследования по теории оболочек.* – Казань, 1976. – Вып. 7. – С. 37 – 42.
27. Жук Н. П. Курс теории коррозии и защиты металлов / Н. П. Жук. – М., 1976. – 472 с.
28. Зеленцов Д. Г. О влиянии химически активных сред на напряженно-деформированное состояние и долговечность тонкостенных конструкций / Д. Г. Зеленцов, Ю. М. Почтман // *Изв. акад. Арм. ССР. Механика.* – 1990. – №5. – С. 38–43.
29. Зеленцов Д. Г. Обзор исследований по применению методов нелинейной математического программирования к оптимальному проектированию конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой / Д. Г. Зеленцов, Г. В. Филатов // *Вопросы химии и химической технологии.* – Днепропетровск, 2002. – №4. – С. 108 – 115.
30. Зеленцов Д. Г. Расчет конструкций с изменяющейся геометрией в агрессивных средах. Стержневые системы / Д. Г. Зеленцов. – Днепропетровск, 2006. – 168 с.
31. Зеленцов Д. Г. Конечно-элементное моделирование процесса деформирования балок при наводороживании и коррозионному износу / Д. Г. Зеленцов, Н. А. Солодка, В. И. Касьяненко // *Системные технологии*, 3(38)2005. – С. 38 – 45.
32. Зеленцов Д. Г. Исследование влияния агрессивных сред на длительную устойчивость подкрепленных пластин / Д. Г. Зеленцов, Ю. М. Почтман // *Прикладная механика.* – 1995. - №2. – С.55 – 62.
33. Зеленцов Д. Г. Исследование долговечности нагруженных балок двутаврового сечения, подверженных коррозионному износу / Д. Г. Зеленцов, Ю. М. Почтман // *Строительство. Материаловедение. Машиностроение. Сб. науч. трудов.* Вып. 9. – Ч. 1. – Днепропетровск, 1999. – 29–35.
34. Карпенко Г. В. Влияние среды на прочность и долговечность металлов / Г. В. Карпенко. – К., 1976. – 128 с.
35. Карпунин В. Г. Долговечность пластин и оболочек в условиях коррозионного воздействия среды / В. Г. Карпунин, С. И. Клещев, М. С. Корнишин // *Прочность и долговечность конструкций.* – К., 1980. – С. 38 – 45.
36. Карпунин В. Г. К расчету пластин и оболочек с учетом общей коррозии / В. Г. Карпунин, С. И. Клещев, М. С. Корнишин // *Тр. 10-й Всесоюзной конф. По теории оболочек и пластин.* Тбилиси: Мецниереба, 1975. – Т.1. – С. 166 – 174.
37. Колесник И. А. Об определении рациональной формы статически неопределимых стержневых конструкций с учетом воздействия агрессивных сред / И. А. Колесник, Д. Г. Зеленцов, Ю. А. Храпач // *Theoretical Foundations of Civil Engineering.* Warsaw. – 2001. – P. 89 – 94.
38. Колесник И. А. Об одном подходе к решению задачи долговечности статически определимых ферм, функционирующих в химически активных средах // И. А. Колесник, Д. Г. Зеленцов, Ю. А. Храпач // *Техническая механика.* – Днепропетровск., 2002. – №1. – С. 95 – 99.
39. Кольчик С. В. Оптимальное проектирование подкрепленных пластин с учетом неоднородности поля начальных скоростей коррозии по их областям / С. В. Кольчик // *Методы решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела.* – Днепропетровск, 1999. №4. – С. 66 – 73.

40. Овчинников И. Г. Тонкостенные конструкции в условиях коррозионного износа. Расчет и оптимизация / И. Г. Овчинников, Ю. М. Почтман. – Днепропетровск., 1995. – 192 с.
41. Овчинников И. Г. О задачах оптимального проектирования конструкций, подвергающихся воздействию агрессивных сред / И. Г. Овчинников // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1988. – №9. – С. 17 – 20.
42. Овчинников И. Г. Расчет и оптимальное проектирование конструкций, подверженных коррозионному износу / И. Г. Овчинников, Ю. М. Почтман. – Днепропетровск, 1994. – 112 с.
43. Овчинников И. Г. Об учете влияния напряженного состояния на кинетику коррозионного износа элементов конструкций / И. Г. Овчинников, А. Б. Рассада // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1986. – № 6. – С. 40-42.
44. Овчинников И. Г. К определению напряженно-деформированного состояния и долговечности цилиндрических оболочек с учетом коррозионного износа / И. Г. Овчинников, Х. А. Сабитов // Строит. механика и расчет сооружений. – 1986. – № 1. – С. 13-17.
45. Овчинников И. Г. Расчет и рациональное проектирование конструкций, подвергающихся коррозионному износу: Обзор / И. Г. Овчинников, Ю. М. Почтман // Физико-химическая механика материалов. – 1991. – Т. 27, № 2. – С. 7-19.
46. Петров В. В. Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой / В. В. Петров, И. Г. Овчинников, Ю. М. Шихов. – Саратов, 1987. – 288 с.
47. Почтман Ю. М. Некоторые модели задач оптимизации конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами / Ю. М. Почтман, Д. Г. Зеленцов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1987. – №12. – С. 39 – 43.
48. Почтман Ю. М. Оптимизация ребристых цилиндрических оболочек, контактирующих с агрессивными средами / Ю. М. Почтман, Т. М. Криворучко // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 6. – С. 44-47.
49. Почтман Ю. М. Методы расчета надежности и оптимального проектирования конструкций, функционирующих в экстремальных условиях / Ю. М. Почтман, М. М. Фридман. – Днепропетровск, 1997. – 134 с.
50. Почтман Ю. М. Оптимальное проектирование стержневых систем, взаимодействующих с агрессивными средами, на основе метода конечных элементов / Ю. М. Почтман, Б. Г. Алексеенко, Д. Г. Зеленцов // Сопrotивление материалов и теория сооружений, 1991. – Вып. 59. – С. 72 – 76.
51. Почтман Ю. М. Оптимальное проектирование изгибаемых элементов конструкций при комбинированном подходе к учету коррозии и защитных свойств покрытий / Ю. М. Почтман, М. М. Фридман // Theoretical Foundations of Civil Engineering. Warsaw, 2000. – P. 518 – 521.
52. Уразбахтин Ф. А. Особенности проектирования технических систем с заданным временем функционирования / Ф. А. Уразбахтин // Автоматизация решения задач прочности и оптимального проектирования конструкций. – К., 1991. – С. 57 – 62.
53. Филатов Г. В. К вопросу об оценке коэффициентов математических моделей коррозионного разрушения конструкций / Г. В. Филатов // ФХММ. – 1993. – Т. 29. – №6. – С. 59 – 64.
54. Филатов Г. В. Вычислительные особенности идентификации математической модели коррозионного разрушения при оптимальном проектировании конструкций / Г. В. Филатов // Вопросы химии и химической технологии. – Днепропетровск, 1999. – №2. – С. 54 – 56.
55. Brown B. F. Methods for studying the solution chemistry within stress corrosion cracks / B. F. Brown, C. T. Fujii, E. P. Dahederg // J. Electrochem. Soc. – 1969. – 116, № 2. – P. 218-219.
56. Carter C. S. Stress corrosion branching in high strength steels / C. S. Carter // Eng. Fract. Mech., 1971. – № 3. – P. 1-13.
57. Dmytrakh I. M. Determination and prediction of corrosion fatigue cracks nucleation from surface of the semicircular notches / I. M. Dmytrakh, V. V. Panasyuk // proc. European Conf. on Fracture (ECF-12), Sept., 1998. – Sheffield, UK: EMAS. – P. 1187-1192.
58. Dzjuba A. P. Contact interaction and optimization of locally loaded shell structures / A. P. Dzjuba, V. S. Hudramovich // Journal of Math. Sci. – Vol. 162. – № 2. – P. 231 – 245.

Надійшла до редколегії 01.06.11

УДК 539.3

С. А. Калоеров, Ю. С. Сенченко
 Донецький національний університет

ЗАДАЧИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ПЛИТ

Розвинуто засновану на методі малого параметра методику зведення задач згину в'язкопружних плит до послідовності задач класичної теорії згину тонких плит, що розв'язуються з використанням комплексних потенціалів. Отримано основні співвідношення для комплексних потенціалів наближень, граничні умови для їх визначення, загальні уявлення функцій у разі багатозв'язної області. Для низки задач наведено теоретичні розв'язки та описано результати чисельних досліджень з установленням закономірностей впливу на значення основних характеристик напружено-деформівного стану часу, геометричних характеристик плит і фізико-механічних властивостей їх матеріалів.

Ключові слова: в'язкопружність, згин плит, комплексні потенціали, конформні відображення, стаціонарний стан, пружний стан.

Развита основанная на методе малого параметра методика сведения задач изгиба вязкоупругих плит к последовательности задач классической теории изгиба тонких плит, решаемых с использованием комплексных потенциалов. Получены основные соотношения для комплексных потенциалов приближений, граничные условия для их определения, общие представления функций в случае многосвязной области. Для ряда задач даны теоретические решения и описаны результаты численных исследований с установлением закономерностей влияния на значения основных характеристик напряженно-деформированного состояния времени, геометрических характеристик плит, физико-механических свойств их материалов.

Ключевые слова: вязкоупругость, изгиб плит, комплексные потенциалы, конформные отображения, стационарное состояние, упругое состояние.

The method of reducing the problem of bending of viscoelastic plates to the task sequence of the classical theory of bending of plates based on the method of small parameter that can be solved by using complex potentials are developed. The basic relations for the complex potentials of approximations, the boundary conditions for their determination, the overall representation of functions in the case of a multiply connected domain, are obtained. The theoretical solutions for a number of problems are obtained and the numerical investigations with established regularities of influence on the values of the main characteristics of the deflected mode of the time, the geometrical characteristics of the plates and physical and mechanical properties of materials, are carried out.

Keywords: viscoelasticity, bending of plates, complex potential, conforming images, steady state, elastic state.

В связи с широким применением полимерных материалов при изготовлении элементов многих современных конструкций большое внимание в последние десятилетия уделяется разработке методов решения задач вязкоупругости и их приложений для решения конкретных задач. Этому посвящены работы Адамова А.А. [1], Гудрамовича В.С. [2], Иванова Г.М., Шкодиной Л.Н. [3], Иванова Г.М., Космодамианского А.С. [4], Каминского А.А. [10], Кристенсена Р. [11], Работнова Ю.Н. [12; 13], Розовского М.И. [14], Савина Г.Н. [15] и др. На основе разложений искомым решений в ряды по малому параметру в последние годы разработаны общие методы решения задач вязкоупругости для многосвязных изотропных пластинок с отверстиями и включениями, находящихся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния [5] или изгиба [7 – 9]. Аналогичные результаты для анизотропных пластинок, находящихся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, получены в [6]. В настоящей статье описан указанный метод решения задач изгиба многосвязных изотропных плит, для ряда задач получены теоретические решения и проведены численные исследования с установлением новых механических закономерностей.

Постановка задачі. Рассмотрим тонкую вязкоупругую изотропную плиту с эллиптическими отверстиями (контуры другой конфигурации можно аппроксимировать дугами эллипсов). Обозначим область, занимаемую плитой (рис. 1) через S , ее внешний контур – через L_0 , контуры отверстий, их полуоси, координаты их центров в выбранной прямоугольной системе координат Oxy – соответственно через L_l, a_l, b_l, x_l, y_l ($l = \overline{1, L}$). Плита находится под действием распределенных изгибающих моментов интенсивности M_l , действующих на ее контурах. В качестве частного случая, когда контур L_0 уходит в бесконечность, будем рассматривать бесконечную многосвязную плиту с эллиптическими отверстиями. В последнем случае будем считать, что на бесконечности задано однородное напряженное состояние, характеризуемое изгибающими моментами $M_x^\infty, M_y^\infty, H_{xy}^\infty$.

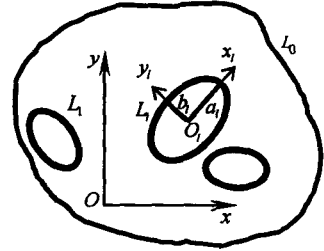


Рис. 1. Расчетная схема

Построение решения методами малого параметра и комплексных потенциалов. Решение задачи о вязкоупругом состоянии рассматриваемой плиты будем проводить с помощью принципа Вольтерра, по которому вначале нужно решить классическую задачу об изгибе плиты, затем в полученном решении заменить упругие постоянные соответствующими временными операторами и определить воздействия операторных функций на функции координат. Но это возможно лишь в простейших задачах, когда для исследуемых величин получаются аналитические формулы, в которые упругие постоянные входят явным образом. Для многосвязных областей такие решения получить невозможно. Поэтому непосредственное применение принципа Вольтерра к анализу напряженно-деформированного состояния (НДС) многосвязных плит невозможно. В связи с этим возникает необходимость и в этих случаях получить такие решения, которые явным образом содержали бы упругие постоянные.

Как известно, НДС изотропного тела зависит от двух постоянных: модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν . Введем модуль объемной деформации

$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ и выразим модуль Юнга через этот коэффициент по формуле

$E = 3K(1-2\nu)$. Тогда НДС тела будет зависеть от модуля объемной деформации

K и коэффициента Пуассона ν . Но изменение модуля объемной деформации K для упругих тел пренебрежимо мало. Поэтому можно считать, что во времени изменяется только коэффициент Пуассона ν . Этот коэффициент меньше единицы и его изменение во времени, тем более, меньше единицы. Поэтому изменение этого коэффициента можно взять за малый параметр, т. е. представить коэффициент Пуассона ν в виде

$$\nu = \nu_0 + \lambda, \quad (1)$$

где ν_0 – мгновенно-упругое значение этого коэффициента, λ – малый параметр, равный отклонению текущего ν от ν_0 .

Учитывая выражения (1), можно построить решение задачи, содержащее в окончательных выражениях напряжений и деформаций параметр λ .

Если решение задачи изгиба плиты проводится с использованием комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили, то оно сводится к определению функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ или $\varphi(z)$, $\omega(z)$ из соответствующих граничных условий, например, для функций $\varphi(z)$ и $\omega(z)$, если на границе заданы изгибающие моменты и перерезывающие силы, то граничные условия имеют вид

$$\varkappa\varphi(t) - (t - \bar{t})\overline{\varphi'(t)} - \overline{\omega(t)} = f(t) + ict + c^*, \tag{2}$$

если же контур жестко подкреплён, тогда условия имеют вид

$$\varphi(t) + (t - \bar{t})\overline{\varphi'(t)} + \overline{\omega(t)} = g(t). \tag{3}$$

Здесь $\varkappa = (3 + \nu)/(1 - \nu)$, $f(t)$, $g(t)$ – известные функции, зависящие от способа загрузки или подкрепления контура; c , c^* – постоянные, определяемые в процессе решения задачи.

В общем случае многосвязной области комплексные потенциалы имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \Gamma_1 z + A(z) + \varphi_0(z), \\ \psi(z) &= \Gamma_2 z + B(z) + \psi_0(z), \\ \omega(z) &= \Gamma_3 z + B(z) + \omega_0(z) \end{aligned} \tag{4}$$

где $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ – постоянные, равные нулю в случае конечной области и задаваемые выражениями

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= -\frac{M_x^\infty + M_y^\infty}{4(1 + \nu)}, \quad \Gamma_2 = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2(1 - \nu)}, \\ \Gamma_3 &= \Gamma_1 + \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2(1 - \nu)} \end{aligned} \tag{5}$$

для бесконечной области;

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{l=1}^L (A_l z + B_l) \ln(z - z_l) + \sum_{s=1}^J (A_s^0 z + B_s^0) \ln(z - z_s^0), \\ B(z) &= \sum_{l=1}^L \bar{B}_l \ln(z - z_l) + \sum_{s=1}^J \left[\bar{B}_s^0 \ln(z - z_s^0) - \frac{i(M_{xs}^0 + iM_{ys}^0)}{8\pi} \frac{\bar{z}_s^0}{z - z_s^0} \right]; \end{aligned} \tag{6}$$

$$A_l = \frac{P_l + P_{ql}}{8\pi}, \quad B_l = -\frac{(P_l + P_{ql})z_l + M_{yl} - iM_{xl} + M_{ql}}{8\pi},$$

$$A_s^0 = \frac{P_s^0}{8\pi}, \quad B_s^0 = -\frac{P_s^0 z_s^0 - i(M_{xs}^0 + iM_{ys}^0)}{8\pi},$$

$$P_{ql} = 8i \int_{L_l} \frac{\partial^3 w_0}{\partial z^2 \partial \bar{z}} dz, \quad M_{ql} = 8i \int_{L_l} (z - z_l) \frac{\partial^3 w_0}{\partial z^2 \partial \bar{z}} dz,$$

P_l и M_{xl} , M_{yl} – главный вектор и компоненты главного момента внешних усилий, приложенных к контуру отверстия L_l ; z_l – аффикс произвольной точки внутри этого контура; P_j^0 и M_{xj}^0 , M_{yj}^0 – сосредоточенная сила и компоненты сосредоточенного момента в точке z_j^0 ; $w_0(x, y)$ – частное решение дифференциального уравнения для прогиба плиты, зависящее от распределения усилий по верхнему основанию $\sigma_z = -q(x, y)$; $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$, $\omega_0(z)$ – функции, голоморфные в рассматриваемой многосвязной области.

Для того, чтобы ввести в решение задачи малый параметр λ , представим все величины, характеризующие НДС плиты, рядами по степеням этого параметра. В частности, для комплексных потенциалов имеем

$$(\varphi(z), \psi(z), \omega(z)) = \sum_{j=0} \lambda^j (\varphi_{0j}(z), \psi_{0j}(z), \omega_{0j}(z)). \quad (7)$$

Здесь $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$, $\omega_j(z)$ – комплексные потенциалы приближений. Подставив эти ряды в соответствующие граничные условия для комплексных потенциалов и приравняв в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях λ , приходим к следующей рекуррентной последовательности граничных условий для определения комплексных потенциалов приближений [5]:

1) для нагруженного края плиты:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \varphi_j(t) - \overline{t \varphi_j'(t)} - \overline{\psi_j(t)} &= \frac{\delta_j^0 - 1}{1 - \nu_0} \left[\varphi_{j-1}(t) + \overline{\varphi_{j-1}'(t)} + \overline{\psi_{j-1}(t)} \right] + \\ &+ ic_{jl}t + c_{jl}^* - \frac{\delta_j^0}{1 - \nu_0} \left[\int_0^s [M(s) + iQ(s)] dt - 8t \int_0^s \frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial \bar{t}} dt + \right. \\ &\left. + 8 \int_0^s t \frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial \bar{t}} dt - 2(1 - \nu_0) \frac{\partial w_0}{\partial \bar{t}} \right] - \frac{2\delta_j^1}{1 - \nu_0} \frac{\partial w_0}{\partial \bar{t}} \end{aligned} \quad (8)$$

в случае функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$,

$$\begin{aligned} \alpha_0 \varphi_j(t) - (t - \bar{t}) \overline{\varphi_j'(t)} - \overline{\omega_j(t)} &= \frac{\delta_j^0 - 1}{1 - \nu_0} \left[\varphi_{j-1}(t) + (t - \bar{t}) \overline{\varphi_{j-1}'(t)} + \overline{\omega_{j-1}(t)} \right] + \\ &+ ic_{jl}t + c_{jl}^* - \frac{\delta_j^0}{1 - \nu_0} \left[\int_0^s [M(s) + iQ(s)] dt - 8t \int_0^s \frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial \bar{t}} dt + \right. \\ &\left. + 8 \int_0^s t \frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial \bar{t}} dt - 2(1 - \nu_0) \frac{\partial w_0}{\partial \bar{t}} \right] - \frac{2\delta_j^1}{1 - \nu_0} \frac{\partial w_0}{\partial \bar{t}} \end{aligned} \quad (9)$$

в случае функций $\varphi(z)$ и $\omega(z)$;

2) для жестко подкрепленного края

$$\varphi_j(t) + t \overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)} = c_{jl} - 2\delta_j^0 \frac{\partial w_0}{\partial \bar{t}} \quad (10)$$

в случае функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$,

$$\varphi_j(t) + (t - \bar{t}) \overline{\varphi'_j(t)} + \overline{\omega_j(t)} = c_{jl} - 2\delta_j^0 \frac{\partial w_0}{\partial t} \quad (11)$$

в случае функций $\varphi(z)$ и $\omega(z)$. В приведенных формулах $\alpha_0 = (3 + \nu_0)/(1 - \nu_0)$;

$Q(s) = \int_0^s p(s) ds$; $M(s)$, $p(s)$ – заданные изгибающие моменты и поперечные си-

лы, действующие на контуре; δ_j^i – символ Кронекера. При выводе граничных условий учтено и разложение неизвестных постоянных в граничных условиях в ряды по степеням малого параметра λ с коэффициентами c_{jl} , c_{jl}^* .

Подставив функции (7) в разложения (4) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ , для комплексных потенциалов приближений получим их общие представления вида:

$$\begin{aligned} \psi_j(z) &= \Gamma_{2j} z + \delta_j^0 B(z) + \psi_{0j}(z), \\ \varphi_j(z) &= \Gamma_{1j} z + \delta_j^0 A(z) + \varphi_{0j}(z), \\ \omega_j(z) &= \Gamma_{3j} z + \delta_j^0 B(z) + \omega_{0j}(z), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{1j} &= \frac{(-1)^{j+1} (M_x^\infty + M_y^\infty)}{4(1 + \nu_0)^{j+1}}, & \Gamma_{2j} &= \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2(1 - \nu_0)^{j+1}}, \\ \Gamma_{3j} &= \Gamma_{1j} + \frac{M_y^\infty - M_x^\infty + 2iH_{xy}^\infty}{2(1 - \nu_0)^{j+1}}; \end{aligned} \quad (13)$$

$\varphi_{0j}(z)$, $\psi_{0j}(z)$, $\omega_{0j}(z)$ – функции, голоморфные в рассматриваемой многосвязной области (в случае бесконечной области, включая бесконечно удаленную точку). При получении соотношений (12) учтено, что функции $A(z)$, $B(z)$ от упругих постоянных, а следовательно, от λ не зависят, поэтому они в разложениях (7) входят в члены рядов при λ^0 .

После определения из соответствующих граничных условий функций приближений $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$, $\omega_j(z)$, заменив степени малого параметра λ^j временными операторами, получим значения функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\omega(z)$ и их производных в любой момент времени, а по ним изгибающие моменты и перерезывающие силы.

При таком подходе для нахождения λ^j операторный коэффициент Пуассона ν^* представляется в виде

$$\nu^* = \nu_0 \left(1 + \delta_* \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta_*) \right), \quad (14)$$

где $\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_*)$ – оператор Ю.Н. Работнова, воздействие которого на единицу имеет вид

$$\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_*) \cdot 1 = \frac{1}{\beta_*} \left[1 - e^{-\beta_* [(1-\alpha_*)t]^{1-\alpha_*}} \right]; \quad (15)$$

α_* , β_* , δ_* – реологические постоянные материала, связанные с изменением v во времени. Исходя из формул (1), (14) и из свойств возведения оператора (15) в степень, находим

$$\lambda^j = (v^* - v_0)^j = \left(\frac{v_0 \delta_*}{\beta_*} \right)^j \frac{1}{(j-1)!} \frac{\partial \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta_*)}{\partial (-\beta_*)^{j-1}}. \quad (16)$$

или

$$\lambda^j = \frac{v_0^j \delta_*^j}{\beta_*^j} \left[1 - e^{-\beta_* \tau} \sum_{r=0}^{j-1} \frac{(\beta_* \tau)^r}{r!} \right], \quad (17)$$

где $\tau = [(1 - \alpha_*)t]^{1-\alpha_*}$.

Таким образом, заменяя в разложениях (7) степени λ^j выражением (17), найдем комплексные потенциалы для любого момента времени, а по ним изгибающие моменты и перерезывающие силы. Рассмотрим решения конкретных задач.

Решение задачи для бесконечной плиты с круговым отверстием. Рассмотрим бесконечную плиту с круговым отверстием радиуса R . Контур отверстия свободен от внешних усилий или жестко подкреплен, на бесконечности действуют изгибающие моменты M_x^∞ , M_y^∞ . Крутящий момент $H_{xy}^\infty = 0$. В этом случае в приведенных формулах нужно принять $A_l = B_l = A_s^0 = B_s^0 = M_{x_s}^0 = M_{y_s}^0 = 0$, а функции $\varphi_{0j}(z)$, $\psi_{0j}(z)$, голоморфные вне кругового отверстия, включая бесконечно удаленную точку, можно разложить в ряды по отрицательным степеням z . Тогда комплексные потенциалы приближений (12) примут вид

$$\varphi_j(z) = \Gamma_{1j} z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{z^k}, \quad \psi_j(z) = \Gamma_{2j} z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{jk}}{z^k}, \quad (18)$$

$$\text{где } \Gamma_{1j} = \frac{(-1)^{j+1} (M_x^\infty + M_y^\infty)}{4(1 + v_0)^{j+1}}, \quad \Gamma_{2j} = \frac{M_y^\infty - M_x^\infty}{2(1 - v_0)^{j+1}};$$

a_{jk} и b_{jk} – неизвестные постоянные.

Подставив функции (18) в граничные условия (8) на неподкрепленном контуре отверстия и применив метод рядов, получим рекуррентную последовательность систем линейных алгебраических уравнений. После решения системы имеем

$$a_{01} = \frac{R^2 \bar{\Gamma}_{20}}{\alpha_0}, \quad b_{01} = (1 - \alpha_0) R^2 \Gamma_{10}, \quad b_{03} = a_{01} R^2,$$

$$a_{j1} = \frac{R^2 \bar{\Gamma}_{2j}}{\alpha_0} - \frac{1}{(1 - \nu_0) \alpha_0} [a_{j-1,1} + R^2 \bar{\Gamma}_{2j-1}],$$

$$b_{j1} = (\alpha_0 - 1) R^2 \Gamma_{1j} + \frac{1}{1 - \nu_0} [b_{j-1,1} + 2R^2 \Gamma_{1j-1}],$$

$$b_{j3} = a_{j1} R^2 + \frac{1}{1 - \nu_0} [-a_{j-1,1} R^2 + b_{j-1,3}] \quad (j = 1, 2, \dots);$$

$$a_{j2} = a_{j3} = b_{j2} = a_{jk} = b_{jk} = 0 \quad (k = 4, 5, \dots);$$

Следовательно, для функций приближений будем иметь выражения:

$$\varphi_j(z) = \Gamma_{1j} z + \frac{a_{j1}}{z}, \quad \psi_j(z) = \Gamma_{2j} z^2 + \frac{b_{j1}}{z} + \frac{b_{j3}}{z^3}. \quad (19)$$

В случае жесткого подкрепления контура отверстия для определения неизвестных коэффициентов рядов (18), используя граничные условия (10), получим аналогичное решение задачи. Это решение можно получить и из приведенного выше для случая отверстия, если в последнем принять $\alpha_0 = -1$. Функции приближений опять будут иметь вид (19), в котором

$$a_{01} = -R^2 \bar{\Gamma}_{20}, \quad b_{01} = 2R^2 \Gamma_{10}, \quad b_{03} = a_{01} R^2,$$

$$a_{j1} = -R^2 \bar{\Gamma}_{2j} + \frac{1}{1 - \nu_0} [a_{j-1,1} + R^2 \bar{\Gamma}_{2j-1}],$$

$$b_{j1} = -2R^2 \Gamma_{1j} + \frac{1}{1 - \nu_0} [b_{j-1,1} + 2R^2 \Gamma_{1j-1}],$$

$$b_{j3} = a_{j1} R^2 + \frac{1}{1 - \nu_0} [-a_{j-1,1} R^2 + b_{j-1,3}] \quad (j = 1, 2, \dots);$$

$$a_{j2} = a_{j3} = b_{j2} = a_{jk} = b_{jk} = 0 \quad (k = 4, 5, \dots). \quad (20)$$

Были проведены численные исследования распределения изгибающих моментов в зависимости от времени приложения нагрузки. Плита считалась изготовленной из алюминия или меди, упругие и реологические постоянные которых приведены в таблице. Исследованиями установлено, что при решении задач в рядах (7) достаточно оставлять степени λ от 6 до 10. Выявлен ряд механических закономерностей. Некоторые из них описаны ниже в таблице.

Таблица 1.

Материал	Постоянные материала					
	E , МПа	K , МПа	ν	$\alpha, c^{-0,5}$	$\beta \cdot 10^3, c^{-0,5}$	$\delta \cdot 10^3, c^{-0,5}$
Алюминий	71000	47333	0,25	0,5	6,65	6,15
Медь	123000	128125	0,34	0,5	9,2	6,65

На рис. 2а и 2б в зависимости от времени приведены графики изменения изгибающих моментов M_s (от нормальных напряжений σ_s на площадках, перпендикулярных к контуру) в точке A (где их относительные изменения максимальны)

плиты соответственно с круговым отверстием или жестким включением. Линии 1 и 2 относятся к плите из алюминия и меди. На рис. 3,а и б приведены графики распределения тех же моментов M_s около контура отверстия и включения в начальном и стационарном состояниях. Сплошные и пунктирные линии здесь и далее относятся к начальному и стационарному состояниям, когда значения моментов с течением времени практически не меняются. Из рисунков видно, что с течением времени значения моментов изменяются, стационарное состояние наступает примерно через 100 час., но значительные изменения они претерпевают в первые 50 час. При переходе в стационарное состояние значения моментов изменяются на 35 % в плите с отверстием, до 2,5 раз – в плите с жестким включением.

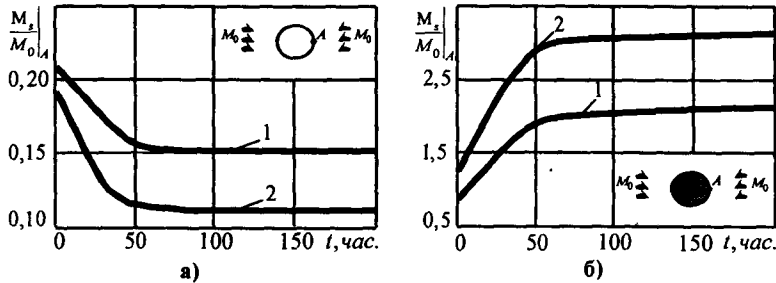


Рис. 2. Графики изменения изгибающих моментов M_s

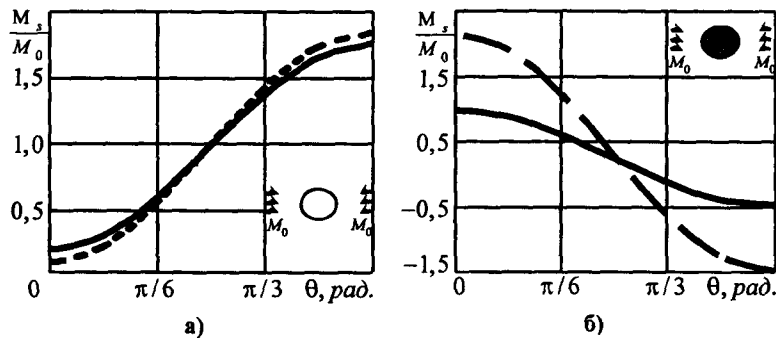


Рис. 3. Графики распределения тех же моментов M_s около контура отверстия и включения в начальном и стационарном состояниях

Заметим, что такие же результаты получаются при прямом использовании принципа Вольтерра, без использования предложенного приближенного метода малого параметра. Такое использование принципа Вольтерра в данном случае возможно, т. к. приведенное выше решение (18) – (20) является точным и в формулы для моментов входит коэффициент Пуассона ν . Заменяя в решении этот коэффициент Пуассона временным оператором и вычисляя изгибающие моменты и перерезывающие силы, получаем значения этих величин в любой момент времени. Так, для случая плиты с неподкрепленным отверстием для вычисления моментов имеем выражения:

$$M_x = \frac{M_0}{2} \operatorname{Re} \frac{R^2}{z^2} \left[2 \frac{z^2}{R^2} + \frac{4}{3 + \nu_0} \left(1 + \delta_1 \mathfrak{E}_{\alpha_*}^* (-\beta_1) \right) - 3 + \left(\frac{4}{3 + \nu_0} \left(1 + \delta_1 \mathfrak{E}_{\alpha_*}^* (-\beta_1) \right) - 1 \right) \left(\frac{2\bar{z}}{z} - \frac{3R^2}{z^2} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \frac{M_0}{2} \operatorname{Re} \frac{R^2}{z^2} \left[\frac{4}{3 + \nu_0} \left(1 + \delta_1 \mathfrak{A}_{\alpha_*}^* (-\beta_1) \right) - 1 - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{4}{3 + \nu_0} \left(1 + \delta_1 \mathfrak{A}_{\alpha_*}^* (-\beta_1) \right) - 1 \right) \left(\frac{2\bar{z}}{z} - \frac{3R^2}{z^2} \right) \right], \\
 H_{xy} &= \frac{M_0}{2} \operatorname{Im} \frac{R^2}{z^2} \left[1 - \frac{z^2}{R^2} - \left(\frac{4}{3 + \nu_0} \left(1 + \delta_1 \mathfrak{A}_{\alpha_*}^* (-\beta_1) \right) - 1 \right) \left(\frac{2\bar{z}}{z} - \frac{3R^2}{z^2} \right) \right], \quad (21)
 \end{aligned}$$

где $\delta_1 = -\frac{\nu_0 \delta_*}{3 + \nu_0}$, $\beta_1 = \beta_* + \frac{\nu_0 \delta_*}{3 + \nu_0}$; $\mathfrak{A}_{\alpha_*}^* (-\beta_1)$ – оператор Ю. Н. Работнова. Как показали расчеты, полученные значения моментов по этим формулам оказались практически совпадающими со значениями, найденными при использовании описанного выше приближенного метода малого параметра.

Решение задачи для плиты с конечным числом отверстий. В случае плиты с конечным числом отверстий, используя конформные отображения и разложение функций в ряды Лорана и по полиномам Фабера, для производных комплексных потенциалов приближений получаем выражения [5; 7]

$$\begin{aligned}
 \Phi_j(z) &= \Gamma_{1j} + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{ln}(z) a_{jln}, \\
 \Psi_j(z) &= \Gamma_{2j} + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\psi_{ln}(z) a_{jln} + \varphi_{ln}(z) \bar{b}_{jln} \right), \\
 \Omega_j(z) &= \Gamma_{3j} + \sum_{l=0}^{\mathcal{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\omega_{ln}(z) a_{jln} + \varphi_{ln}(z) \bar{b}_{jln} \right), \quad (22)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varphi_{0n}(z) &= \frac{n z^{n-1}}{R_0^n}, \quad \psi_{0n}(z) = \omega_{0n}(z) = 0; \quad \varphi_{ln}(z) = -\frac{n}{R_l \zeta_l^{n-1} (\zeta_l^2 - m_l)}, \\
 \omega_{ln}(z) &= -\frac{n}{\zeta_l^{n-1} R_l (\zeta_l^2 - m_l)^3} \left\{ c_{l3} \zeta_l^3 + c_{l2} \zeta_l^2 + c_{l1} \zeta_l + n \left[d_{l4} \zeta_l^4 + c_{l3} \zeta_l^3 + d_{l2} \zeta_l^2 - c_{l1} \zeta_l + d_{l0} \right] \right\}; \\
 \psi_{ln}(z) &= -\frac{n}{\zeta_l^{n-1} R_l (\zeta_l^2 - m_l)^3} \left\{ c_{l3}^* \zeta_l^3 + c_{l2}^* \zeta_l^2 + c_{l1}^* \zeta_l + n \left[d_{l4}^* \zeta_l^4 + c_{l3}^* \zeta_l^3 + d_{l2}^* \zeta_l^2 - c_{l1}^* \zeta_l + d_{l0}^* \right] \right\},
 \end{aligned}$$

где c_{ik} , d_{ik} , c_{ik}^* , d_{ik}^* – известные постоянные, зависящие от геометрических характеристик контуров; ζ_l – переменные, определяемые из конформных отображений

$$z = z_{0l} + R_l (\zeta_l + m_l / \zeta_l) \quad (23)$$

внешности единичной окружности на внешности контуров L_l ; $z_{0l} = x_{0l} + i y_{0l}$,

$$R_l = \frac{a_l + b_l}{2} e^{i\varphi_l}, \quad m_l = \frac{a_l - b_l}{a_l + b_l}; \quad a_{jln}, \quad b_{jln} \text{ – неизвестные постоянные, которые бу-}$$

дем определять из граничных условий на контурах плиты. Если внешний контур плиты отсутствует, то a_{j0n}, b_{j0n} равны нулю, а остальные a_{jln}, b_{jln} находятся из условий на контурах отверстий.

Для многосвязной области граничные условия на контурах следует использовать в дифференциальной форме. Дифференцируя по дуге контура s , например, условия (9), получаем

$$\begin{aligned} \alpha_0 \delta \Phi_j(t_l) - (\delta - \bar{\delta}) \overline{\Phi_j(t_l)} - \bar{\delta}(t_l - \bar{t}_l) \overline{\Phi'_j(t_l)} - \bar{\delta} \overline{\Omega_j(t_l)} = ic_{j1} \delta - \frac{\delta_j^0 M_l \delta}{1 - \nu_0} - \\ - \frac{\delta_j^0 - 1}{1 - \nu_0} \left[\delta \Phi_{j-1}(t_l) + (\delta - \bar{\delta}) \overline{\Phi_{j-1}(t_l)} + \bar{\delta}(t_l - \bar{t}_l) \overline{\Phi'_{j-1}(t_l)} + \bar{\delta} \overline{\Omega_{j-1}(t_l)} \right], \end{aligned} \quad (24)$$

где $\Phi_j(z) = \varphi'_j(z)$, $\Omega_j(z) = \omega'_j(z)$; $\delta = dt/ds$. Аналогичные представления получаются при дифференцировании других граничных условий.

Учитывая вид функций (22) и используя дискретный метод наименьших квадратов, из граничных условий, например, вида (24) для определения неизвестных коэффициентов членов рядов получаем рекуррентную последовательность систем линейных алгебраических уравнений, после решения которых комплексные потенциалы приближений становятся известными и по описанной выше схеме, заменяя степени λ^j временными операторами, находим изгибающие моменты и перерезывающие силы в любой момент времени.

Для различных задач проведены подробные численные исследования с установлением закономерностей изменения НДС плиты в зависимости от ее геометрических характеристик и времени. Приведем лишь некоторые из полученных результатов.

На рис. 4,а и б для изгибаемой по внешнему контуру равномерно распределенными моментами интенсивности M_0 круговой плиты с эллиптическим отверстием изображены графики изменения изгибающих моментов M_z в точках C и E перемычки

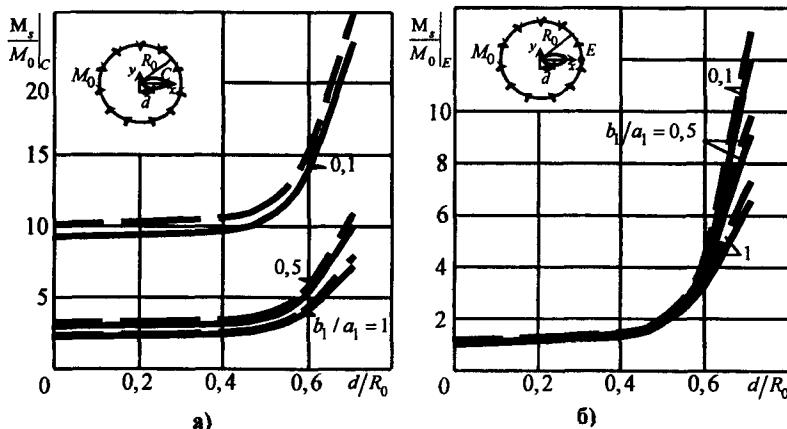


Рис. 4. Графики изменения изгибающих моментов M_z

для изгибаемой по внешнему контуру равномерно распределенными моментами интенсивности M_0 круговой плиты с эллиптическим отверстием

на внутреннем и внешнем контурах (где они достигают максимальных значений) для различных значений отношения b_1 / a_1 полуосей эллипса и отношения d / R_0 расстояния d между центрами диска и отверстия к радиусу диска R_0 . Данные этих рисунков относятся к случаю $a_1 / R_0 = 0,3$. Видно, что минимальные значения изги-

баюющие моменты получают, когда отверстие находится в центре диска ($d/R_0 = 0$). При сближении отверстия с внешним контуром происходит резкое увеличение значений моментов в точках малой перемычки между отверстием и внешним контуром. При этом увеличивается и относительное изменение моментов при переходе в стационарное состояние. Например, при $b_1/a_1 = 0,5$, если в точке C (где относительное изменение наибольшее) для $d/R_0 = 0$ это изменение равно 0,2%, то для $d/R_0 = 0,69$ оно составляет около 7%.

На рис. 5 для изгибаемой по внешнему контуру распределенными моментами интенсивности M_0 прямоугольной плиты с центральным круговым отверстием радиуса R_1 и расстояниями c и d от контура отверстия до сторон прямоугольника изображены графики распределения моментов около контура отверстия для различных отношений d/c расстояний от контура отверстия до сторон прямоугольника. Значения величин при $d/c = 1$ соответствуют квадратной плите с круговым отверстием. Из рис. 5 видно, что увеличение отношения d/c приводит к уменьшению значений моментов во всех точках (максимальных значений моменты достигают для квадратной плиты). При $d/c > 100$ прямоугольник можно рассматривать как всесторонне изгибаемую полосу с круговым отверстием. При переходе в стационарное состояние значения моментов претерпевают изменения, причем эти изменения увеличиваются с ростом длины прямоугольника. Так, для случая $c/R_1 = 0,1$ если при $d/c = 1$ в точке C это изменение составляет 0,4%, то при $d/c = 100$ оно составляет 2,5%.

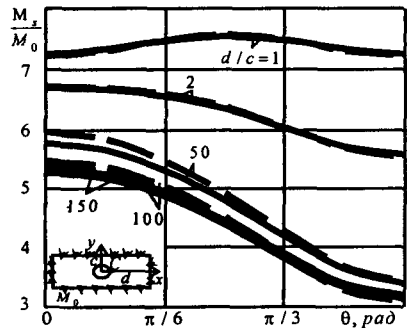


Рис. 5. Зависимость значений моментов от отношения d/c

На рис. 6 для изгибаемой моментами $M_y^\infty = M_0$ бесконечной плиты с двумя

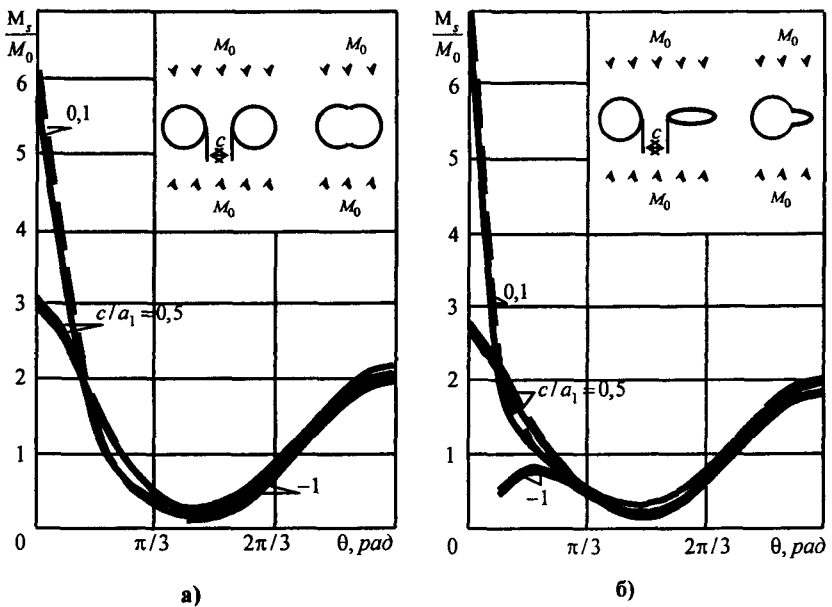


Рис. 6. Графики распределения моментов M_x вблизи контура левого отверстия для различных расстояний c между отверстиями

одинаковими круговими отвeрстиями радиуса a_1 изображены графики распределения моментов M_x вблизи контура левого отвeрстия для различных расстояний c между отвeрстиями. Отрицательные значения c / a_1 соответствуют случаям, когда контуры отвeрстий пересекаются. Видно, что с уменьшением расстояния между отвeрстиями значения изгибающих моментов в зоне между отвeрстиями значительно растут уже в упругой постановке, а при переходе в стационарное состояние они претерпевают большие относительные изменения. Так, если для $c / a_1 = 0,5$ значения моментов M_x в точке перемычки изменяются на 2,8 %, то для $c / a_1 = 0,1$ – на 4,3 %. Пересечение контуров отвeрстий приводит к резкому снижению моментов около контуров как в начальном, так и в стационарном состоянии. Аналогичные результаты получены для случая плиты с круговым и эллиптическим отвeрстиями. Они представлены на рис. 6. В отличие от предыдущего, в этом случае при сближении отвeрстий в точках перемычки возникает концентрация моментов более высокого уровня.

Библиографические ссылки

1. Адамов А. А. Методы прикладной вязкоупругости / А. А. Адамов, В. П. Матвеевко, Н.А. Труфанов, И.Н. Шардаков. – Екатеринбург, 2003. – 411 с.
2. Гудрамович В. С. Теория ползучести и ее приложения к расчету элементов тонкостенных конструкций / В. С. Гудрамович. – К., 2005. – 219 с.
3. Иванов Г. М. Напряженное состояние изотропной вязкоупругой плиты с отвeрстиями, подкрепленными жесткими кольцами / Г. М. Иванов, Л. Н. Шкодина // Прикладная механика. – 1975. – Т. 11, Вып. 8. – С. 26-32.
4. Иванов Г. М. Напружно-деформований стан в'язкопружних багатозв'язних середовищ / Г. М. Иванов, О. С. Космодаміанський // ДАН УРСР. – 1970. – Сер. А. – Вып. 9. – С. 813-816.
5. Калоеров С. А. Исследование вязкоупругого состояния пластинки с жесткими эллиптическими или линейными включениями / С. А. Калоеров, А. Б. Мироненко // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2005. – Вип. 1, ч. 1. – С. 71-78.
6. Калоеров С. А. Определение вязкоупругого состояния анизотропной пластинки с жесткими включениями / С. А. Калоеров, М. А. Коломиец // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, №4. – С. 202-211.
7. Калоеров С. А. Определение вязкоупругого состояния многосвязных изотропных плит / С. А. Калоеров, А. И. Баева, Ю. С. Шипоша // Теорет. и прикладная механика. – 2008. – Вып. 44. – С. 80-95.
8. Калоеров С. А. Циклическая задача о вязкоупругом изгибе плиты с отвeрстиями / С. А. Калоеров, Ю. С. Шипоша // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А: Природн. науки. – 2009. – Вип. 1. – С. 100-110.
9. Калоеров С. А. Циклическая задача о вязкоупругом изгибе кусочно-однородной плиты / С. А. Калоеров, Ю. С. Сенченко // Теорет. и прикладная механика. – 2010. – Вып. 1 (47). – С. 35-44.
10. Каминский А. А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами / А. А. Каминский. – К., 1990. – 310 с.
11. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен. – М., 1974. – 338 с.
12. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М., 1966. – 752 с.
13. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. – М., 1977. – 384 с.
14. Розовский М. И. Механика упруго-наследственных сред / М. И. Розовский. – Итоги науки. Упругость и пластичность, 1965. – М., 1967. – С. 95-103.
15. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отвeрстий / Г.Н. Савин. – К., 1968. – 888 с.

Надійшла до редкології 20.04.11

УДК 539.3

Б. Я. Кантор, С. Ю. Мисюра

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЛОСКИХ ЛИНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ФОРМУ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Запропоновано методику оптимізації плоских контурів, яка не потребує великих обчислювальних витрат. Як приклад, поставлена й розв'язана задача оптимізації форми отворів у ребрах жорсткості складної циклічно симетричної оболонкової конструкції (кришки радіально-осьової гідротурбіни).

Ключові слова: оптимізація плоских контурів, кришка гідротурбіни, оптимізація форми, ребра жорсткості.

Предложена методика оптимизации плоских контуров, не требующая больших вычислительных затрат. В качестве примера поставлена и решена задача оптимизации формы отверстий в ребрах жесткости сложной циклически симметричной оболочечной конструкции (крышки радиально-осевой гидротурбины).

Ключевые слова: оптимизация плоских контуров, крышка гидротурбины, оптимизация формы, ребра жесткости.

Optimization technique of plane contours which doesn't require large calculations was proposed. As an example the optimization problem of the hole shape in ribs of complex cyclically symmetric shell structure (the radial-axial hydroturbine cover) was stated and solved.

Key words: optimization of plane contours, hydroturbine cover, shape optimization, ribs of rigidity.

Оптимизация конструкций является востребованной в процессе проектирования машин, приборов и сооружений. Одними из первых публикаций, в которых для ее решения применены методы нелинейного математического программирования (НМП), являются [1; 2]. Обзор многих НМП приведен в [3; 4], посвященных созданию высокоэффективных методов минимизации нелинейных функционалов при наличии ограничений. Существенная экономия вычислительных затрат в этих методах достигается применением гибридизации и адаптации процесса поиска решения к ситуации, возникающей на каждом шаге. Одним из примеров применения такого подхода является [8].

Методы оптимизации используются, в частности, для оптимизации формы тел [9; 5]. Определенный интерес вызывает проблема экономии при оптимизации формы плоских контуров (меридианы оболочек и тел вращения, аэродинамические профили и т. п.). Примером подобной задачи является минимизация формы гофра линзового компенсатора [7].

В данной статье предложен один из возможных подходов такой экономии за счет рационального выбора параметров оптимизации. Методика иллюстрируется на задаче оптимизации контура отверстий в пластинчатых ребрах жесткости крышки гидротурбины. Напряженно-деформированное состояние (НДС) ее изучено в [6].

Постановка задачі. При проектуванні різних технічних об'єктів. Контури розглядаваного тіла можуть бути представлені сплайнами, проходящими через точки, координати яких відомі з чертежа.

При постановці задачі оптимізації в якості функції цілі приймемо максимальну інтенсивність напружень (ИН). Особливе значення має вибір параметрів оптимізації. Простий (но мало вдалий) спосіб полягає в виборі параметрів, представляючих собою сукупність координат X і Y вказаних точок. Кількість цих параметрів рівно удвоєному числу цих точок, що веде до збільшенню вичислювальних витрат. Зменшити вдвоє число параметрів можна двома способами. Перший з них полягає в фіксуванні сукупності координат X (або Y) і прийнятті в якості параметрів Y (або X). Другий спосіб – во введенні локальної полярної системи координат з центром в точці, близькій до центру сечення (пластини і т. п.), і прийнятті в якості параметрів довжин радіус-векторів, що з'єднують центр з точками на контурі. При цьому кути між радіус-векторами і точками вважаємо фіксованими і рівними їх значенням в вихідній конструкції

$$\varphi_k = \arcsin((y_k - y_0)/r_k), \quad r_k = \sqrt{((x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2)},$$

де індексом нуль відзначені координати полюса полярної системи координат.

Більш ефективним вважається запропонований авторами підхід, в якому довжини радіус-векторів вважаються функцією кута і представляються в вигляді ряду Фур'є

$$r_k(\varphi) = \sum_{i=0}^m c_i \cdot \cos(i \cdot \varphi_k). \quad (1)$$

Коефіцієнти ряду вважаються рішенням системи рівнянь, що випливають з умови мінімізації функціонала невязки між координатами заданих і визначених формулою (1) точок. Як буде показано нижче, число $m+1$ шуканих параметрів оптимізації c_i може бути прийнято меншим числа точок на лінії n .

В якості прикладу використовуємо задачу оптимізації контура отвору в пластині, що є одним з елементів циклічно-симетричної тонкостінної конструкції (кришки гідротурбіни), показаної на рис. 1.

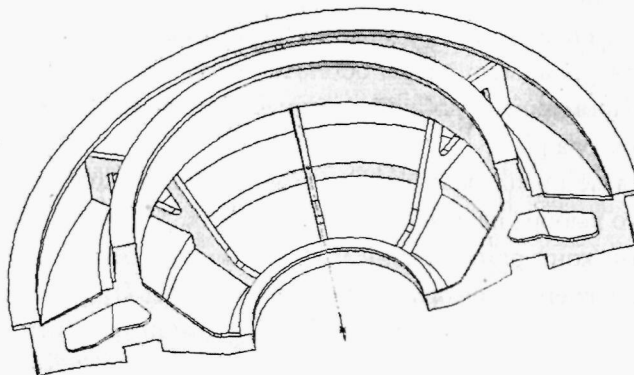


Рис. 1. Діаметральний розріз кришки гідротурбіни

Расчетом конструкции выявлено, что зона максимальной ИН расположена в правой части контура отверстия. Заметим, что при постановке задачи оптимизации в данном случае необходимо введение ограничений на длины некоторых из радиус-векторов этой зоны, так как в отверстии располагаются трубопроводы, не показанные на рисунке и размещенные внутри крышки. Эти ограничения имеют вид

$$d = \max |(R_i - r_i) / R_i| \leq d_*, \quad (2)$$

где R_i и r_i – длины радиус-векторов исходной и оптимизируемой конструкции, i – номера точек, на радиусы которых накладывається ограничение, а d_* – предельное сверху относительное отклонение радиусов от исходных величин.

Отметим, что эти ограничения функциональные, их значения вычисляются на каждом шаге процесса по найденным параметрам оптимизации (по коэффициентам ряда Фурье). На рис. 2 приведена одна из радиальных пластин.

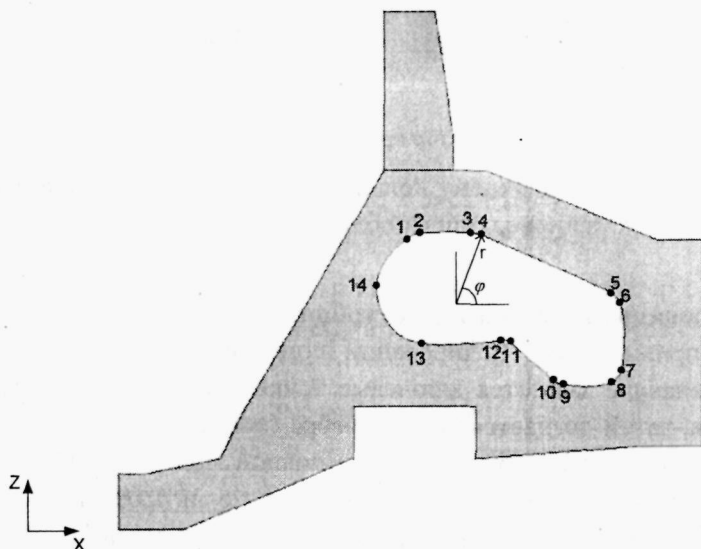


Рис. 2. Радиальная пластина с выделенными ключевыми точками

Описание конструкции. Крышка гидротурбины является трехмерной циклически симметричной конструкцией, состоящей из тонкостенных оболочек вращения, объединенных k -ребрами – меридиональными пластинами сложной конфигурации. В ребрах для размещения механизмов и снижения массы предусмотрены вырезы. Габаритные размеры крышки: диаметр – 4,76 м, высота – 1,45 м.

Конструктивно крышка изготавливается из листового проката стали Ст20 или его аналога ASTM A516 Gr.60 с толщинами в диапазоне от 20 до 50 мм. Механические свойства материала: модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона – 0,3, плотность – 7850 кг/м³, предел текучести $\sigma_T = 215$ МПа, временное сопротивление $\sigma_B = 430$ МПа.

Для решения задачи оптимизации на каждом ее шаге проводится решение статической задачи определения НДС. При осесимметричной нагрузке конструкцию можно рассматривать как циклически симметричную. При этом расчетная

схема может быть принята в виде сектора крышки с углом раствора $360/k$ с условиями симметрии на краях (рис. 3).

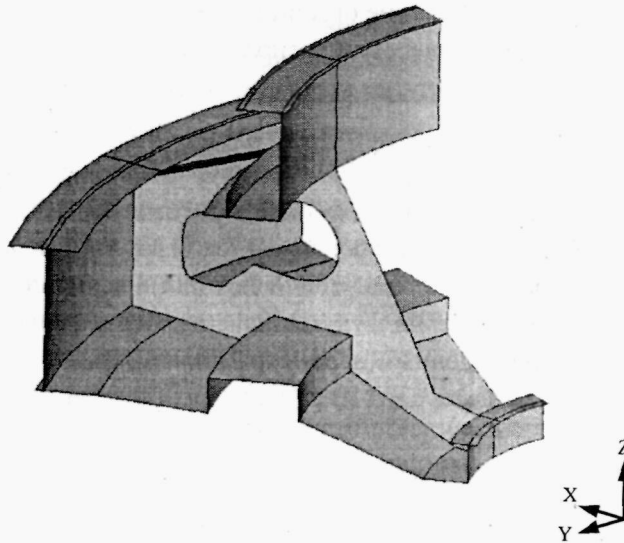


Рис. 3 Сектор крышки гидротурбины

Крышка крепится к верхнему кольцу направляющего аппарата турбины с помощью шпилек. Нижние поверхности облицовки крышки находятся под действием давления воды.

Моделирование крышки гидротурбины. Поясним основные моменты и использованные приемы при моделировании геометрии крышки. При построении модели сектора вначале задаются ключевые точки в плоскости ребра, по которым строятся линии, затем создается модель ребра (поверхность пластины). Для получения оболочечных частей конструкции и полной модели сектора (рис. 3) линии сечений поверхностей оболочек поворачиваются по- и против часовой стрелки на угол $360/2k$. Далее на нее наносится конечноэлементная сетка, после чего на гранях сектора вводятся условия циклической симметрии. Отношение толщины элементов крышки к характерному размеру не превышает $1/10$, поэтому применяется теория тонких оболочек. Вводятся условия закрепления крышки к фланцу верхнего кольца направляющего аппарата, который считается абсолютно жестким – упрощение в принятой расчетной схеме. Сектор закрепляется по окружности, соответствующей оси расположения шпилек фланцевого соединения. Затем к днищу прикладывается гидравлическое давление q и приведенная к эквивалентному давлению сила веса установленных на крышку деталей и узлов; учитывается собственный вес конструкции (рис. 4). Давление приложено на оболочки и для наглядности показано стрелками на меридианах в плоскости ребра.

Для решения задачи используется треугольный упругий оболочечный конечный элемент с тремя узлами. Элемент в каждом узле имеет шесть степеней свободы: перемещения в направлении осей X , Y , Z и повороты вокруг осей X , Y , Z .

Итоговая конечноэлементная модель крышки гидротурбины (рис. 5) насчитывает 26481 элементов, 13728 узлов и 41184 степеней свободы.

Анализ НДС исходной конструкции. Проведены расчеты исходной конструкции крышки гидротурбины для двух режимов работы: эксплуатационного (при расчетном напоре) и аварийного (срыва уплотнения между крышкой турбины и ступицей радиально-осевого колеса). В табл. 1 представлены значения максимальной ИН σ_{max} , полученные в результате численного исследования.

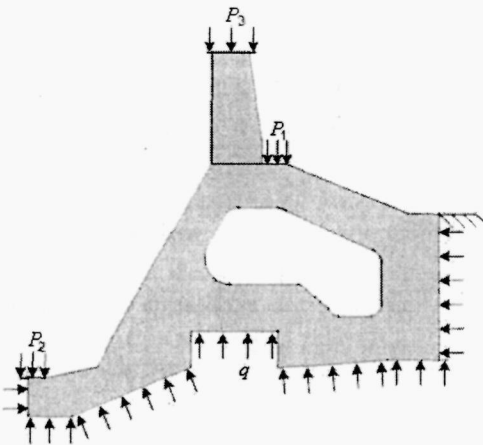


Рис. 4. Приведенные к давлению весовые нагрузки и давление воды

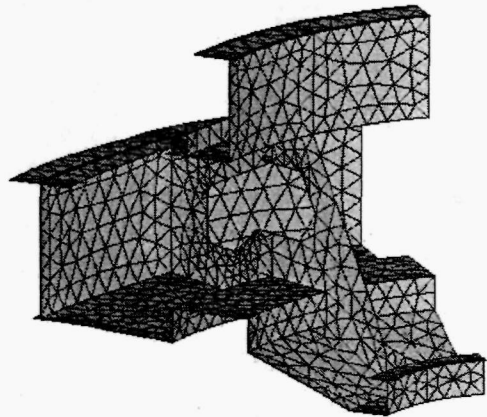


Рис. 5. Конечноэлементная модель крышки гидротурбины

Распределение ИН σ имеет резко неравномерный характер с локальными областями максимальных напряжений σ_{max} в зоне скруглений выреза в ребре.

Таблица 1

Расчетные данные

Режим работы	Максимальная ИН σ_{max} , МПа
Эксплуатационный	113,3
Аварийный	160,6

Распределение ИН в секторе при аварийном режимах показано на рис. 6.

С целью уменьшения концентрации напряжений на скруглениях выреза в ребре выполнены расчеты по оптимизации контура отверстия, используя описанную выше методику.

Контур отверстия в ребре образован сплайном, проведенным через ключевые точки (рис. 2), их количество равно 14.

Расчеты проводились для случая аварийного нагружения при различном числе членов ряда Фурье (1). При этом было установлено, что приемлемая точность достигается при $m = 6$. Оптимизация выполнялась гибридным адаптивным методом.

В процессе оптимизации установлено, что при отсутствии ограничений правая часть контура сдвигается влево. Это связано с тем, что уменьшение площади отверстия снижает уровень напряжений. Так как в отверстиях ребер жесткости расположены трубопроводы, а так же необходимы отверстия для технического обслуживания и доступа персонала, то на длины радиус-векторов с номерами далее наложены функциональные ограничения (2). Принято $d = 0,2$.

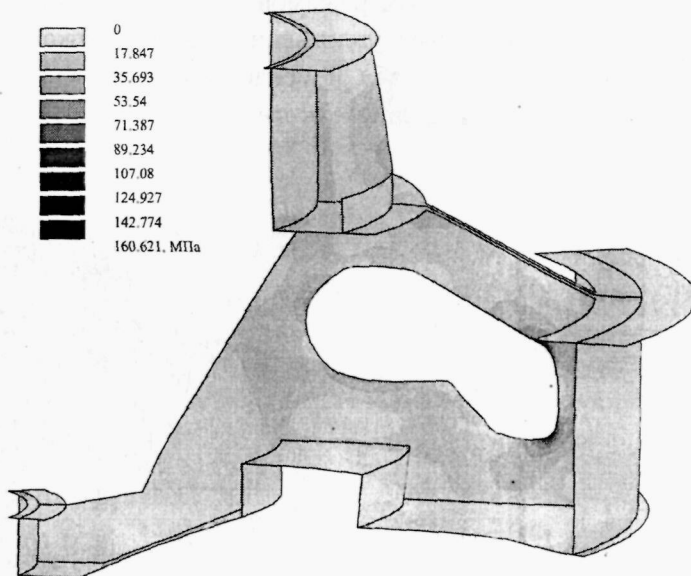


Рис. 6. Распределение ИН при аварийном режиме, МПа

В результате оптимизации наибольшая ИН (рис. 7) уменьшилась от 160,6 до 105,9. На рис. 8 показаны исходный (сплошная линия) и оптимальный (пунктир) контуры отверстия.

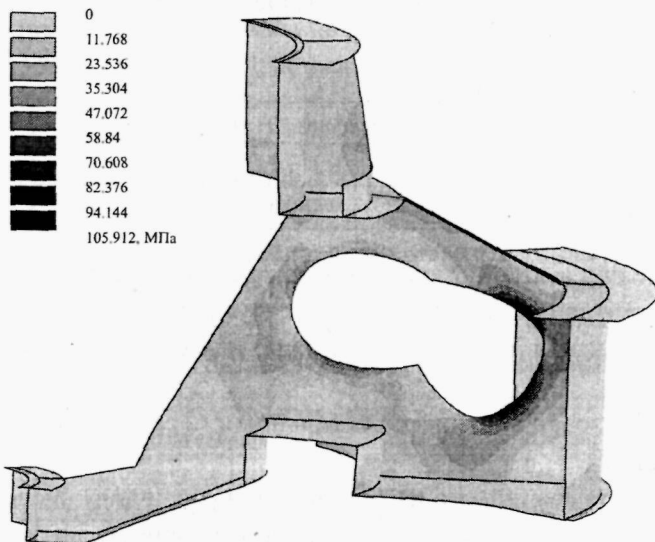


Рис. 7. Распределение ИН в модели с оптимизированным контуром при аварийном режиме

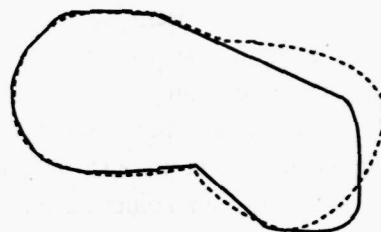


Рис. 8. Исходный (сплошная линия) и оптимальный (пунктир) контуры

Приведенный пример подтверждает эффективность предложенной методики.

Библиографические ссылки

1. **Кантор Б. Я.** Об одной реализации метода оврагов с адаптацией величины овражного шага по экспоненциальному закону / Б. Я. Кантор, Г. А. Шелудько, Л. А. Старосельский // Журн. вычислит. математики и математической физики, 1968. – Т.8. – № 5. – С. 1161–1167.
2. **Кантор Б. Я.** Оптимизация по весу подкрепленных цилиндрических оболочек, сжатых в осевом направлении / Б. Я. Кантор, И. Н. Гинзбург // Изв. ВУЗов. Авиационная техника, 1974. – № 1. – С. 51-54.
3. **Кантор Б. Я.** К оптимальному проектированию компенсаторов осевых перемещений / Б. Я. Кантор, Э. С. Шишкина // Пробл. машиностроения, 1980. – Вып.12. – С. 52-56.
4. **Кантор Б. Я.** Метод гиперсингулярных уравнений в задаче весовой оптимизации лопастей ветроустановок / Б. Я. Кантор, Е. А. Еселева, В. В. Науменко, Е. А. Стрельникова // Вестник Запорожского государственного университета, 2002. – № 1. – С. 71-75.
5. **Кантор Б. Я.** Исследование напряженно-деформированного состояния крышкм гидротурбины и возможностей совершенствования конструкции / Б. Я. Кантор, С. А. Андрущенко, С. Ю. Мисюра // Вісник НТУ «ХПІ». Динаміка і міцність машин». – 2010. – Вип. 69. –С. 58-67.
6. **Леонтьев В. Г.** Аэродинамическое проектирование и оптимизация формы крыловых профилей и профилей гидродинамических решеток: Дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 – Казань, 2003. – 108 с. РГБ ОД, 61:04-1/244-6
7. **Троицкий В. А.** Оптимизация формы упругих тел / В. А. Троицкий, Л. В. Петухов. – М., 1982, – 432 с.
8. **Шелудько Г. А.** Гибридные методы в задачах оптимального проектирования. 1.Поисковые методы / Г. А. Шелудько, Е. А. Стрельникова, Б. Я. Кантор – Харьков, 2008. – 188 с. (ISB № 978-966-18-14-3)
9. **Шелудько Г. А.** Гибридные методы в задачах оптимального проектирования. 2. Оптимальное проектирование / Г. А. Шелудько, Е. А. Стрельникова, Б. Я. Кантор – Харьков, 2009. – 148 с.

Надійшла до редколегії 14.04.11

УДК 539.3

В. Г. Карнаухов¹, В. И. Козлов¹, Т. В. Карнаухова²

¹Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины,

²Национальный технический университет Украины «КПИ»

ТЕПЛОВОЕ РАЗРУШЕНИЕ НЕУПРУГОЙ ШАРНИРНО ОПЕРТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРАМИ И АКТУАТОРАМИ ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ РЕЗОНАНСНЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Досліджено теплове руйнування непружної шарнірно опертої прямокутної пластини з п'єзоелектричними сенсорами та актуаторами при вимушених резонансних згинних коливаннях, викликане температурою дисипативного розігріву при досягненні нею точки Кюрі п'єзоактивного матеріалу. Розроблено чисельно-аналітичні методи. Визначено критичні значення механічного навантаження для різних типів нелінійності, а також критичний час ефективної роботи сенсорів та актуаторів.

Ключові слова: теплове руйнування пластини, згинні коливання, дисипативний розігрів, п'єзоактивний матеріал, сенсори, актуатори.

Исследовано тепловое разрушение неупругой шарнирно опертой прямоугольной пластины с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при вынужденных резонансных изгибных колебаниях, вызванных температурой диссипативного разогрева при достижении ею точки Кюри пьезоактивного материала. Разработаны численно-аналитические методы. Определены критические значения механической нагрузки для разных типов нелинейности, а также критическое время эффективной работы сенсоров и актуаторов.

Ключевые слова: тепловое разрушение пластины, изгибные колебания, диссипативный разогрев, пьезоактивный материал, сенсори, актуаторы.

The thermal fracture of nonlinear rectangular plates with piezoactive sensors and actuators under the conditions of forced in results of dissipative heating resonance bending oscillations defined by Curie point is researched. The numerical-analytical methods for study of this phenomenon are developed. Critical time for effective functioning of sensors and actuators is defined.

Key words: thermal fracture of plate, bending oscillations, dissipative heating, piezoactive material sensors, actuators.

Тонкие прямоугольные вязкоупругие композитные пластины из пассивных (без пьезоэффекта) неупругих материалов находят широкое применение во многих конструкциях современной техники. При действии на них гармонических механических нагрузок с частотой, близкой к резонансной, возникает опасность их разрушения из-за высокого уровня амплитуды колебаний. Поэтому возникает необходимость в пассивном и активном демпфировании вынужденных резонансных колебаний таких пластин. Одним из основных методов активного демпфирования колебаний тонкостенных элементов является метод, основанный на совместном использовании сенсоров и актуаторов [19]. На эффективность такого типа активного демпфирования колебаний влияет много факторов, в частности, температура диссипативного разогрева. В [8 – 10] представлены основные соотношения термомеханики вязкоупругих пластин с распределенными сенсорами и актуаторами и дан краткий обзор по данному вопросу.

Обзор исследований по тепловому разрушению элементов конструкций из неупругих пассивных материалов представлен в [1]. В то же время исследования по тепловому разрушению элементов из пьезоактивных диэлектриков в литературе практически отсутствуют. Исследование теплового разрушения пьезоактивных элементов усложняется наличием точки Кюри, когда элемент теряет свое функци-

ональное назначение из-за деполяризации материала при превышении температурой диссипативного разогрева этой точки. По-видимому, первые результаты по теплообразованию в пьезоактивных элементах конструкций вообще и, в частности, по их тепловому разрушению из-за достижения температурой разогрева точки Кюри получены в [2; 3; 18].

В настоящей работе исследуется тепловое разрушение шарнирно опертой прямоугольной неупругой пластины с сенсорами и актуаторами при действии на нее изменяющегося по гармоническому закону во времени равномерного давления с частотой, близкой к резонансной. Рассматриваются три типа нелинейности: 1) нелинейность, обусловленная зависимостью механических характеристик пассивного материала от температуры и зависимостью диссипативной функции от деформаций и температуры; 2) нелинейность, порождаемая зависимостью механических характеристик пассивного материала от деформаций; 3) геометрическая нелинейность, обусловленная нелинейной зависимостью деформаций от перемещений. Гистерезисные потери в пьезоактивном материале не учитываются. Аналитическое решение всех перечисленных задач получено при помощи метода Бубнова–Галеркина. Приравнивая максимальную температуру точке Кюри пьезоактивного материала, получаем выражение для критической механической нагрузки, при превышении которой управлять колебаниями пластины невозможно.

Тепловое разрушение неупругой прямоугольной пластины при учете нелинейности первого типа. Рассмотрим пластину с размерами $a \times b$, составленную из пассивного среднего слоя толщиной h_0 , лежащего между верхним и нижним противоположно поляризованными пьезоактивными слоями одинаковой толщины h_1 . Свойства этих пьезослоев отличаются только знаками пьезоконстанты. Комплексные механические характеристики пассивного материала зависят от температуры. Пластина нагружена равномерным давлением $p_0 \cos \omega t$, изменяющимся по гармоническому закону во времени с частотой, близкой к первой резонансной частоте пластины.

Задача сводится к решению следующей нелинейной комплексной системы дифференциальных уравнений в декартовых координатах (x, y) относительно комплексного прогиба $w = w' + iw''$ и температуры T диссипативного разогрева [2; 8 – 10]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[2(1-\nu) D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] - \\ & - (\gamma h) \omega^2 w - p_0(x, y) - \left(\frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2} \right) = 0; \\ & \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{2\alpha}{(\lambda h)} (T - T_c) + \frac{\omega G''(T) h^3}{12 a^2 (1-\nu) (\lambda h)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right) + \right. \\ & \left. + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $D = \frac{(G' + iG'')h^3}{6(1-\nu)}$ – комплексная изгибная жесткость; $G = (G' + iG'')$ – комплексный модуль сдвига; ν – действительный коэффициент Пуассона; α – коэффициент теплообмена; λ – коэффициент теплопроводности; M_0 – электрическая нагрузка [11; 12].

При решении конкретных задач ограничимся случаем, когда действительная и мнимая составляющие комплексного модуля сдвига пассивного материала (полиэтилена) с достаточно хорошей точностью аппроксимируются линейным законом:

$$G = G' + iG'', \quad G' = G'_0 - G'_1 T, \quad G'' = G''_0 - G''_1 T.$$

Для разных материалов величины G'_1, G''_1 могут быть как положительными, так и отрицательными. Механические и теплофизические свойства полиэтилена представлены в [14], при этом G'_1, G''_1 положительны.

Решение нелинейной задачи (1) для случая шарнирного опирания торцов пластины представлено в [11, 12]. Прогиб аппроксимировался выражением

$$\hat{w} = \sin k_1 x \sin p_1 y, \quad k_1 = \frac{\pi}{a}, \quad p_1 = \frac{\pi}{b}. \quad (2)$$

Для заданной на контуре пластины постоянной температуры T_c выбиралась аппроксимация температуры выражением

$$\theta = T - T_c = \theta_0 \sin k_1 x \cdot \sin p_1 y. \quad (3)$$

С использованием метода Бубнова-Галеркина получено кубическое уравнение для безразмерной величины $T_0 = \theta_0 + T_c$

$$T_0^3 - d_2 T_0^2 + d_1 T_0 - d_0 = 0, \quad (4)$$

где

$$d_0 = \frac{C_1 q_0 / C_0}{b_1^2 + b_2^2} = \hat{d}_0 q_0, \quad d_1 = \frac{B_1^2 + B_2^2 + C_2 q_0^2 / C_0}{b_1^2 + b_2^2} = \tilde{d}_1 + \hat{d}_1 q_0^2, \\ d_2 = \frac{B_1^2 + B_2^2 + C_2 q_0^2 / C_0}{b_1^2 + b_2^2} = \tilde{d}_1 + \hat{d}_1 q_0^2, \quad d_2 = 2 \frac{b_1 B_1 + b_2 B_2}{b_1^2 + b_2^2},$$

а выражения для $C_i (i = 0, 1, 2)$, $B_i, b_i (i = 1, 2)$ представлены в [11; 12].

Приравнявая T_0 точке Кюри T_k , получаем квадратное уравнение для определения критического значения параметра механического нагружения, после достижения которого управлять колебаниями невозможно

$$q_0^2 - \frac{\hat{d}_0}{\hat{d}_1 T_k} \frac{q_0 T_k^2}{\hat{d}_1} - \frac{d_2 T_k}{\hat{d}_1} + \frac{\tilde{d}_1}{\hat{d}_1 T_k} = 0. \quad (5)$$

Для теплоизолированного контура все формулы остаются без изменения, за исключением того, что

$$C_0 = 2\alpha a^2, \quad C_1 = \frac{\omega}{2} D_0'' \frac{\pi^4}{a^2}, \quad C_2 = \frac{\omega}{2} D_1'' \frac{\pi^4}{a^2}.$$

Тепловое разрушение пластины при учете физической нелинейности второго типа. Анализ теплового разрушения пластины для этого типа физической нелинейности выполним с использованием результатов [7]. Для описания механического поведения материала применялась модели, разработанные, например, в [6; 13]. Согласно этим моделям действительная и мнимая составляющие комплексного модуля сдвига являются функциями интенсивности девиатора деформаций Γ

$$G' = G'(\Gamma), \quad G'' = G''(\Gamma). \quad (6)$$

Так, например, приведенные в [16; 17] экспериментальные данные для модуля сдвига физически нелинейного материала с достаточно высокой точностью можно аппроксимировать такими функциями:

$$G' = a_1 - b_1 \Gamma^2, \quad G'' = a_2 - b_2 \Gamma^2. \quad (7)$$

Здесь для указанного выше материала

$$a_1 = 2,410 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad a_2 = 1,810 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad b_1 = 0,537 \cdot 10^7 \text{ Па}, \quad b_2 = 0,380 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

При помощи метода Бубнова–Галеркина для решения нелинейной задачи механики получена следующая формула для температуры

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 \cos 2k_m x + \theta_2 \cos 2p_n y + \theta_3 \cos 2k_m x \cos 2p_n y, \quad (8)$$

где величины θ_i ($i = 0, 1, 2, 3$) приведены в [7]. Приравнявая максимальную температуру точке Кюри θ_k , найдем выражение для критического значения амплитуды колебаний

$$w_k^2 = \theta_k / (\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3). \quad (9)$$

Полученное методом Бубнова–Галеркина кубическое уравнение для амплитуды колебаний имеет вид:

$$y^3 - \frac{2(C_1' C_2' + C_1'' C_2'')}{(C_2')^2 + (C_2'')^2} \frac{1}{h_0^2} y^2 + \frac{(C_1')^2 + (C_1'')^2}{(C_2')^2 + (C_2'')^2} \frac{1}{h_0^4} y - \frac{1}{(C_2')^2 + (C_2'')^2} \frac{q_0^2}{h_0^6} = 0. \quad (10)$$

С использованием (9) находим $y_k = \frac{|w_k|^2}{h_0^2}$. Подставляя y_k в (10), получим

критическое значение механической нагрузки q_k , после достижения которой управлять колебаниями становится невозможным. Остальные обозначения представлены в [7].

Тепловое разрушение гибкой шарнирно опертой вязкоупругой прямоугольной пластины. Задача о колебаниях и диссипативном разогреве гибкой шарнирно опертой вязкоупругой прямоугольной пластины с нанесенными на ее поверхность пьезовключениями рассмотрена в [5]. Ее решение получено методом Бубнова–Галеркина в сочетании с методом гармонического баланса для решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения. Из решения уравнения энергии найдена температура диссипативного разогрева. Приравнявая максимальную температуру точке Кюри, получено критическое значение параметра механического нагружения p_k , после достижения которого управлять колебаниями пластины становится невозможным

$$p_k = 2\omega C_k \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{1}{4\omega} \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4} \alpha_1 C_k^2 \right]^2}, \quad (11)$$

где

$$C_k^2 = \frac{\theta_k}{\hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 + \hat{\theta}_3},$$

$$\theta_0 = \frac{\hat{W}_0}{2\alpha}, \quad \theta_1 = \frac{\hat{W}_1}{2\alpha + 4h\bar{\lambda}_{11}k_1^2}, \quad \theta_2 = \frac{\hat{W}_1}{2\alpha + 4h\bar{\lambda}_{11}p_1^2}, \quad \theta_3 = \frac{W_2}{2\alpha + 4h\bar{\lambda}_{11}k_1^2 + 4h\bar{\lambda}_{11}p_1^2}.$$

$$\hat{W}_0 = \hat{W}_2 = \frac{\omega}{8} D''(k_1^2 + p_1^2)^2, \quad \hat{W}_1 = \frac{\omega}{8} D'' \left[(k_1^2 - p_1^2)^2 + 4\nu k_1^2 p_1^2 \right].$$

Здесь приняты обозначения [5].

Определение критического времени. Пусть механическая нагрузка превышает критическое значение. Тогда возникает задача об определении критического момента времени t_k , при котором температура достигает точки Кюри. Величина t_k определяет время эффективной работы процесса управления колебаниями пластины. Для расчета t_k необходимо в системе (1) рассматривать нестационарное уравнение энергии. Рассмотрим простейший случай, когда механические характеристики не зависят от температуры, а на торцах пластины задана постоянная температура T_c . Тогда задача сводится к решению нестационарного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - 2\alpha V + \frac{\omega G'' h^3}{12a^2(1-\nu)} \times \left\{ \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w''}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w''}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w''}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} = ch\dot{\theta} \end{aligned} \quad (12)$$

при заданной на контуре нулевой температуре и нулевыми начальными условиями. Здесь c – теплоемкость материала.

Для шарнирного опирания торцов пластины вычисление диссипативной функции с аппроксимацией прогиба выражением (9) приводит к необходимости решать нестационарную задачу теплопроводности

$$\begin{aligned} (\lambda h) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) - 2\alpha \theta + \frac{\omega G'' h^3 |w_0| 2}{12a^2(1-\nu)} \times \left[(k_1^4 + p_1^4 + 2\nu k_1^2 p_1^2) \sin^2 k_1 x \sin^2 p_1 y + \right. \\ \left. + 2((1-\nu)k_1^2 p_1^2) \cos^2 k_1 x \cos^2 p_1 y \right] = h\dot{\theta} \end{aligned} \quad (13)$$

с нулевыми начальными и граничными условиями. Аппроксимируя температуру выражением (3), автоматически удовлетворяющем граничным условиям, методом Бубнова – Галеркина получим следующее уравнение первого порядка по времени с нулевым начальным условием для определения θ_0 :

$$\dot{\theta}_0 = c_1 - c_2 \theta_0, \quad (14)$$

где

$$c_1 = \frac{\omega G^* h^3 |w_0| 2}{12 a^2 (1-\nu) abch} \left[\frac{4(a_1 + a_2)}{k_1 p_1} + \frac{4(a_1 + a_2)}{9k_1 p_1} + \frac{8(a_2 - a_1)}{3k_1 p_1} \right],$$

$$c_2 = \frac{ab\lambda h(k_1^2 + p_1^2) + 2\alpha ab}{ch},$$

$$a_1 = k_1^4 + p_1^4 + 2\nu k_1^2 p_1^2, \quad a_2 = 2(1-\nu)k_1^2 p_1^2. \quad (15)$$

Интегрируя уравнение (14), получим следующее выражение для t_k

$$t_k = \frac{c_2}{c_1} + \frac{c_2}{c_2 \theta_k - c_1}. \quad (16)$$

При предположении о независимости механических характеристик от температуры это выражение имеет место для всех рассмотренных выше задач.

Если механические свойства неупругих материалов зависят от температуры по произвольному закону, тогда вместо представленных выше простых формул получим более сложные выражения как для амплитудно-частотных, так и для температурно-частотных характеристик. Для вычисления критических значений параметра механического нагружения из трансцендентных уравнений необходимо привлекать численные методы. Для определения критического времени вместо (16) получим выражение

$$\int_0^{\theta_k} \frac{d\theta}{\Phi(\theta)} = t_k, \quad (17)$$

где функция $\Phi(\theta)$ определяется аппроксимацией экспериментальных данных о зависимости механических характеристик от температуры.

Для расчета критической нагрузки при вынужденных колебаниях и диссипативном разогреве неупругих тонкостенных элементов авторами статьи разработаны также численные методы, основанные на итерационных процедурах, сводящих исходную нелинейную задачу к последовательности линейных задач механики и линейных задач теплопроводности с известным источником тепла. Для решения указанных линейных задач разработан метод конечных элементов. Такой подход позволяет решать задачи с произвольной зависимостью механических характеристик от температуры и амплитуд деформаций, а также нелинейные задачи о колебаниях гибких тонкостенных элементов. Однако при этом критическая механическая нагрузка находится путем перебора. Расчет начинается с некоторой нагрузки, при которой максимальная температура диссипативного разогрева не достигает точки Кюри. Затем задается некоторое малое приращение механической нагрузки и для этой новой нагрузки снова решается нелинейная задача. Этот процесс продолжается до тех пор, пока при некотором значении механической нагрузки температура достигнет точки Кюри. Это значение и будет критическим.

Библиографические ссылки

1. Карнаухов В.Г. Тепловое разрушение полимерных элементов конструкций при моногармоническом деформировании / В. Г. Карнаухов // Прикладная механика – 2004. – Т. 40, № 6. – С. 30-70.
2. Карнаухов В.Г. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек / В.Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок. – К., 1986. – 222 с.

3. **Карнаухов В. Г.** Механика связанных полей в элементах конструкций / В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок. Электротермовязкоупругость. – Т.4. – К., 1988. – 320 с.
4. **Карнаухов В. Г.** Вынужденные гармонические колебания и диссипативный разогрев вязкоупругих тонкостенных элементов / В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок // Успехи механики. Издание в 6 томах. Под ред. А. Н. Гузя. Т.1. – К., 2005. – С. 107–130.
5. **Карнаухов В. Г.** Моделювання вимушених резонансних коливань і дисипативного розігріву гнучких в'язкопружних пластин із розподіленими актуаторами / В. Г. Карнаухов, В. І. Козлов, Т. В. Карнаухова // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вип.8. – С.48–68.
6. **Карнаухов В. Г.** Нелинейные одночастотные колебания и диссипативный разогрев неупругих пьезоэлектрических тел. / В. Г. Карнаухов, В. В. Михайленко. – Житомир, 2005. – 428 с.
7. **Карнаухов В. Г.** Влияние физической нелинейности на резонансные колебания и диссипативный разогрев неупругих прямоугольных пластин / В. Г. Карнаухов, В. М. Сичко, А. С. Карпенюк // Математические методы и физико-механические поля. – 2008. – 51, №3. – С. 90–98.
8. **Карнаухова Т. В.** Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными актуаторами при моногармоническом нагружении / Т. В. Карнаухова, Е. В. Пятецкая // Прикладная механика – 2009. – 44, №2. – С. 107–123.
9. **Карнаухова Т. В.** Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными сенсорами / Т. В. Карнаухова, Е. В. Пятецкая // Прикладная механика – 2009. – 44, №6. – С. 100–112.
10. **Карнаухова Т. В.** Основные соотношения теории термовязкоупругих пластин с распределенными сенсорами и актуаторами / Т. В. Карнаухова, Е. В. Пятецкая // Прикладная механика. – 2010. – 45, №.1. – С.94–104.
11. **Карнаухова Т. В.** Демпфирование изгибных резонансных колебаний шарнирно опертой пластины с использованием актуаторов / Т. В. Карнаухова, Е. В. Пятецкая // Прикладная механика – 2009. – 44, №4. – С.122–132.
12. **Карнаухова Т. В.** О резонансных колебаниях шарнирно опертой вязкоупругой прямоугольной пластины / Т. В. Карнаухова, Е. В. Пятецкая // Прикладная механика – 2009. – 44, №7. – С.88–99.
13. **Пальмов В. А.** Колебания упругопластических тел. / В. А. Пальмов. – М., 1976. – 328 с.
14. Свойства полимеров и нелинейная акустика. 14. Физическая акустика / Под ред. У. Мезона. Т.2. Ч.Б. – М., 1969. – 420 с.
15. **Gabbert U. and Tzou H.S.** Smart Structures and Structronic Systems. – Dordrecht / Boston / London, 2001. – 384 p.
16. **Gandhi F. and Wolons D.** Characterization of the pseudoelastic damping behavior of shape memory alloy wires using complex modulus // Smart Mater. Struct. - 8 -1999. – 8. – P. 49-56.
17. **Gandhi F.** Influence of Nonlinear Viscoelastic Material Characterization on Performance of Constrained Layer Damping Treatment//AIAA Journal, - 2001. – V.39, №5. – P. 924-931.
18. **Karnaikhov V.G.** Thermomechanics of coupled fields in passive and piezoactive inelastic bodies under harmonic deformations // Journal of Thermal Stresses. – V. 28, № 6-7. – P. 783-815.
19. **Tzou H.S., Bergman L.A.** Dynamics and control of distributed systems. – Cambridge, 1998. – 400 p.

Надійшла до редколегії 14.04.11

УДК 539.3:519,6

Д. В. Клименко¹, А. М. Тонконоженко¹, С. А. Рябоконт²

¹ГКБ «Южное» им. М. К. Янгеля

²Институт технической механики НАН Украины и ГКА Украины

ВЗАИМОВЛИЯНИЕ ОТВЕРСТИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ И КРУГОВОЙ ФОРМЫ В ПЛАСТИНЧАТО-ОБОЛОЧЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

На основі проєкційно-ітераційних схем реалізації методу скінчених елементів проведено дослідження взаємовпливу кругового та прямокутного люків у пластинчато-оболонкових відсіках тонкостінних конструкцій при врахуванні пластичних деформацій. Варіюються розміри отворів та відстань між ними для матеріалів зі зміцненням.

Ключові слова: пружно-пластичне деформування, круговий та прямокутний отвори, метод скінчених елементів, проєкційно-ітераційні схеми.

На основе проекционно-итерационных схем реализации метода конечных элементов проведено исследование взаимовлияния круглого и прямоугольного люков в пластинчато-оболочечных отсеках тонкостенных конструкций при учете пластических деформаций. Варьируются размеры отверстий и расстояние между ними для упрочняющихся материалов.

Ключевые слова: упругопластическое деформирование, круглое и прямоугольное отверстия, метод конечных элементов, проекционно-итерационные схемы.

The interaction circular and rectangular holes in the plate-shell compartments of thin-walled structures with allowance plastic deformation is developed on based the projective-iterative schemes of the finite element method. Sizes of holes and distance among them for hardening materials are varied.

Key words: elastoplastic deformation, circular and rectangular holes, finite element method, projective-iterative schemes.

Введение. Элементы неоднородных оболочечно-пластинчато-стержневых систем различных отраслей техники из конструктивных соображений могут иметь различные отверстия (люки), вызывающие концентрацию напряжений. Определение напряжено-деформированного состояния (НДС) в окрестности отверстий представляет значительный интерес [2; 7; 10]. Большое значение имеет оценка взаимовлияния отверстий различной формы. В зависимости от формы, размеров отверстий и расстояний между ними НДС в окрестности одного отверстия в большей или меньшей степени влияет на НДС другого отверстия. При высоких уровнях нагрузок происходит деформирование материала за пределами упругости. Наличие пластических деформаций существенно изменяет НДС и усложняет расчетные схемы его определения. Обычно методы расчета элементов пластинчато-оболочечных конструкций при учете пластических деформаций основаны на построении схем последовательных приближений, в каждом из которых решается задача неоднородной теории упругости (с дополнительными нагрузками или деформациями, переменными параметрами упругости). В окрестности отверстий – люков возникает концентрация напряжений и деформаций, что может привести к разрушению конструкций. Взаимное влияние отверстий при пластическом деформировании материала, которое усиливается при уменьшении расстояния между отверстиями, должно быть исследовано с целью достоверной оценки прочности конструкций с несколькими отверстиями (люками).

В статье проводится оценка взаимовлияния двух рядом расположенных отверстий прямоугольной и круговой формы разных размеров при учете пластических деформаций.

Пластинчатые элементы моделируют поведение оболочечно-пластинчатых конструкций. Влияние краевых условий для пластины – панели имеет важное значение. Однако при рассмотрении НДС панели с отверстиями наиболее важна оценка концентрации НДС возле краёв отверстий. Приемлема расчетная схема, которая не учитывает размеры панели в направлении действия нагрузки. Этот вопрос исследовался в [11], где показано, что для такой схемы размер стороны панели должен быть \sim в 5 раз больше характерного размера отверстия.

Отметим, что подобные расчетные схемы используются во многих проектных организациях, занимающихся, в частности, проектированием и прочностным расчетом различных башенных сооружений, представляющих оболочечно-пластинчатые конструкции [9].

В статье рассматриваются задачи НДС при сжимающей нагрузке. Это, в частности, соответствует расчетным схемам для НДС расположенных вертикально башенных сооружений [9] или конструкций, нагруженных сжимающими силами (различные случаи эксплуатации конструкций ракет, резервуаров и др.).

Отметим, что некоторые вопросы исследования НДС пластин и оболочек с отверстиями с учетом физической нелинейности материала рассмотрены, в частности, в [7; 11; 12].

Постановка задачи. Проведем исследование НДС прямоугольного пластинчатого элемента конструкции с двумя отверстиями (прямоугольным и круговым) при равномерном сжатии распределенной нагрузкой q (рис. 1). Решение построено для различных соотношений размеров отверстий. На рисунке диаметр кругового отверстия меньше стороны квадратного, однако, может быть и наоборот. Центры отверстий отстоят на расстоянии l друг от друга. Величина нагрузки и параметры пластины таковы, что в ней возникают пластические деформации. В процессе решения определяются границы между зонами упругого и пластического деформирования, поля напряжений, деформаций и перемещений.

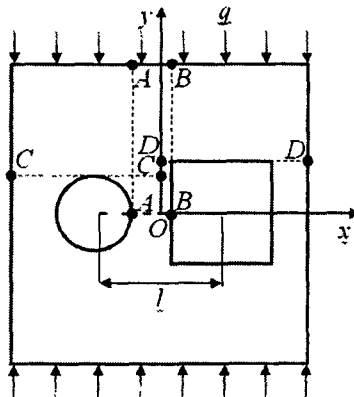


Рис. 1. Прямоугольный пластинчатый элемент конструкции с двумя отверстиями (прямоугольным и круговым) при равномерном сжатии распределенной нагрузкой q

Метод решения. Исследование проводится на основе проекционно-итерационных схем метода конечных элементов (МКЭ) [2; 4 – 6; 13]. Известно, что такие схемы значительно уменьшают время расчета на ПК по сравнению с обычным МКЭ [8]. Для многих задач плоскодеформируемых пластинчатых элементов с отверстиями экономия времени расчета – в десятки раз. Исследование новых задач, рассмотренных в этой работе, проводится на основе разработанного программного

комплекса, с помощью которого можно определить НДС пластинчатых элементов с различными отверстиями при учете пластических деформаций [2; 5; 6; 13]. Решение упругопластической задачи находится в процессе последовательных приближений метода переменных параметров упругости [1; 3] (схема реализации метода переменных параметров упругости показана на рис. 2).

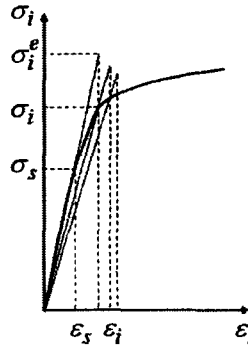


Рис. 2. Схема реализации метода переменных параметров упругости

В каждом приближении на основе проекционно-итерационных схем реализации МКЭ решается неоднородная задача теории упругости в вариационной постановке (задача минимизации функционала (1))

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\bar{\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\bar{\nu}}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dy dx - \int_{\Gamma_q} q v dx, \quad (1)$$

где u, v – перемещения точек пластины; Ω – область поверхности пластины; Γ_q – граница пластины, на которой действует сжимающая нагрузка q ; $\bar{E}, \bar{\nu}$ – переменные модуль упругости и коэффициент Пуассона (для начального первого приближения $\bar{E} = E, \bar{\nu} = \nu$, E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала).

На диаграмме деформирования материала (рис. 2) находится интенсивность напряжений σ_i , которая соответствует интенсивности деформаций ϵ_i , найденной по формуле

$$\epsilon_i = \frac{2}{3} \left(\frac{1-\bar{\nu} + \bar{\nu}^2}{(1-\bar{\nu})^2} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy})^2 - 3\epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \frac{3}{4}\gamma_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

В начале каждого приближения, начиная со второго, из предыдущего приближения определяются \bar{E} и $\bar{\nu}$ по формулам:

$$\bar{\nu} = \frac{E\psi - 1 + 2\nu}{2E\psi + 1 - 2\nu}; \quad \bar{E} = \frac{3E}{2E\psi + 1 - 2\nu}; \quad \psi = \frac{3\epsilon_i}{2\sigma_i}. \quad (3)$$

Решение проводится до достижения заданной точности между двумя соседними приближениями.

Численный анализ. Расчёты проведены для элемента конструкции в виде пластины со сторонами $2a = 2b = 0,3$ м, с комбинациями кругового и прямоуголь-

ного (квадратного) отворстий разных размеров (круговые отворстия с радиусами: 0,02 м; 0,03 м; квадратные отворстия с размерами: 0,04 × 0,04 м; 0,06 × 0,06 м). Сжимающие нагрузки q изменялись от 40 МПа до 160 МПа. Расстояния между центрами отворстий l : 0,06 м; 0,08 м; 0,1 м; 0,12 м. Материал – алюминниевый сплав Д16Т, взята реальная диаграмма деформирования этого материала.

Были найдены нагрузки, при которых происходит смыкание зон пластического деформирования. Так для пластины с круговым (радиус 0,02 м) и квадратным (0,04 × 0,04 м) отворстиями смыкание зон пластического деформирования происходит: для $l = 0,08$ м при $q = 132$ МПа (рис. 3, а); для $l = 0,1$ м при $q = 147$ МПа (рис. 3, б); для $l = 0,12$ м при $q = 158$ МПа (рис. 3, в).

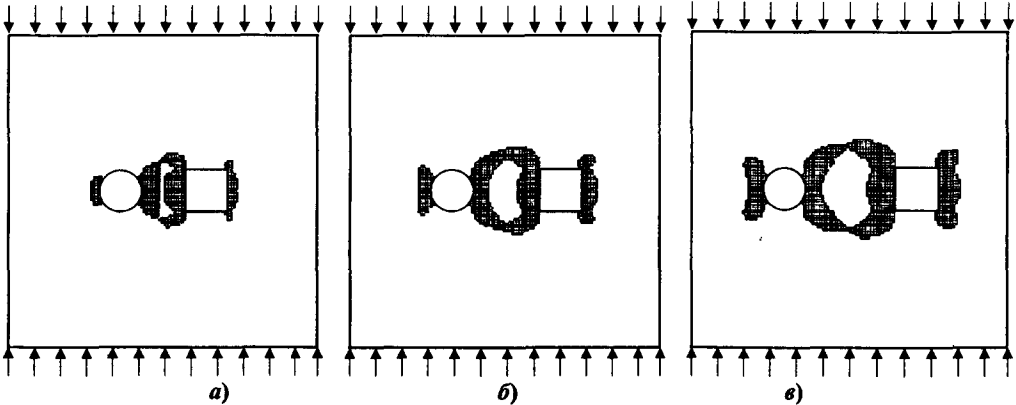


Рис. 3. Смыкание зон пластического деформирования для пластины с круговым (радиус 0,02 м) и квадратным (0,04 × 0,04 м) отворстиями.

На рис. 4 и рис. 5 приведены зоны пластических деформаций для пластины с двумя отворстиями при $l = 0,1$ м (рис. 4: радиус кругового отворстия 0,02 м, квадратное отворстие с размерами 0,06 × 0,06 м; рис. 5: радиус кругового отворстия 0,03 м, квадратное отворстие с размерами 0,04 × 0,04 м). При нагрузке $q = 130$ МПа в пластинах происходит смыкание зон пластического деформирования. В пластине с большим квадратным отворстием площадь зон пластического деформирования больше чем в пластине с большим круговым отворстием.

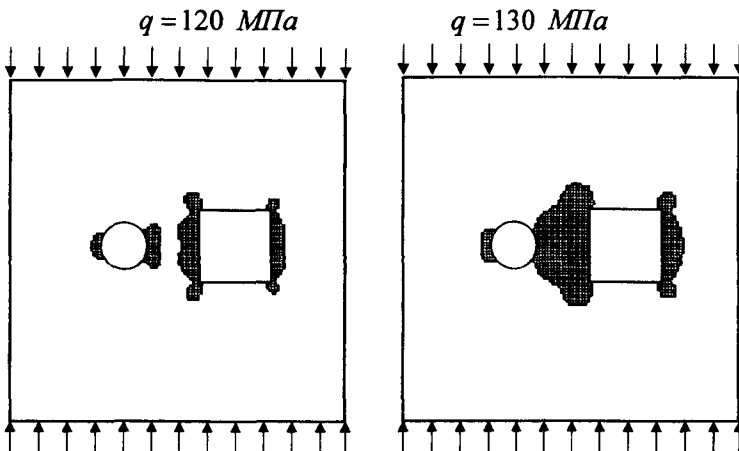


Рис. 4. Зоны пластических деформаций для пластины с двумя отворстиями при $l = 0,1$ м (радиус кругового отворстия 0,02 м, квадратное отворстие с размерами 0,06 × 0,06 м)

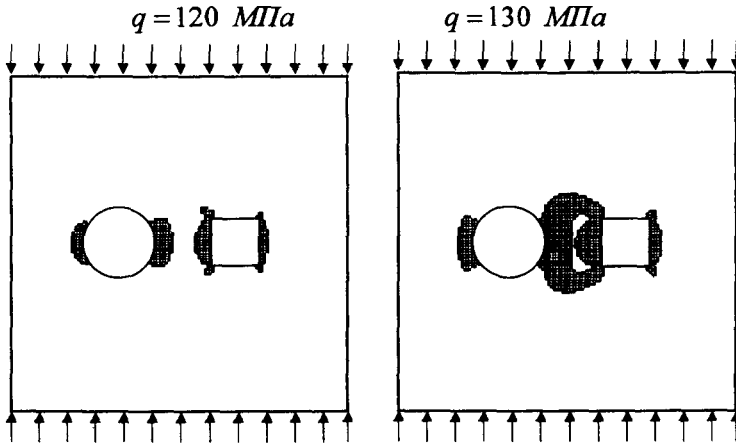


Рис. 5. Зони пластических деформаций для пластины с двумя отверстиями при $l = 0,1$ м (радиус кругового отверстия $0,03$ м, квадратное отверстие с размерами $0,04 \times 0,04$ м)

На рис. 6 показано распределение относительных напряжений в характерных сечениях указанных пластин, обозначенных на рис. 1, при $q = 130$ МПа (линии — для пластины с большим круговым отверстием; линии --- для пластины с большим квадратным отверстием).

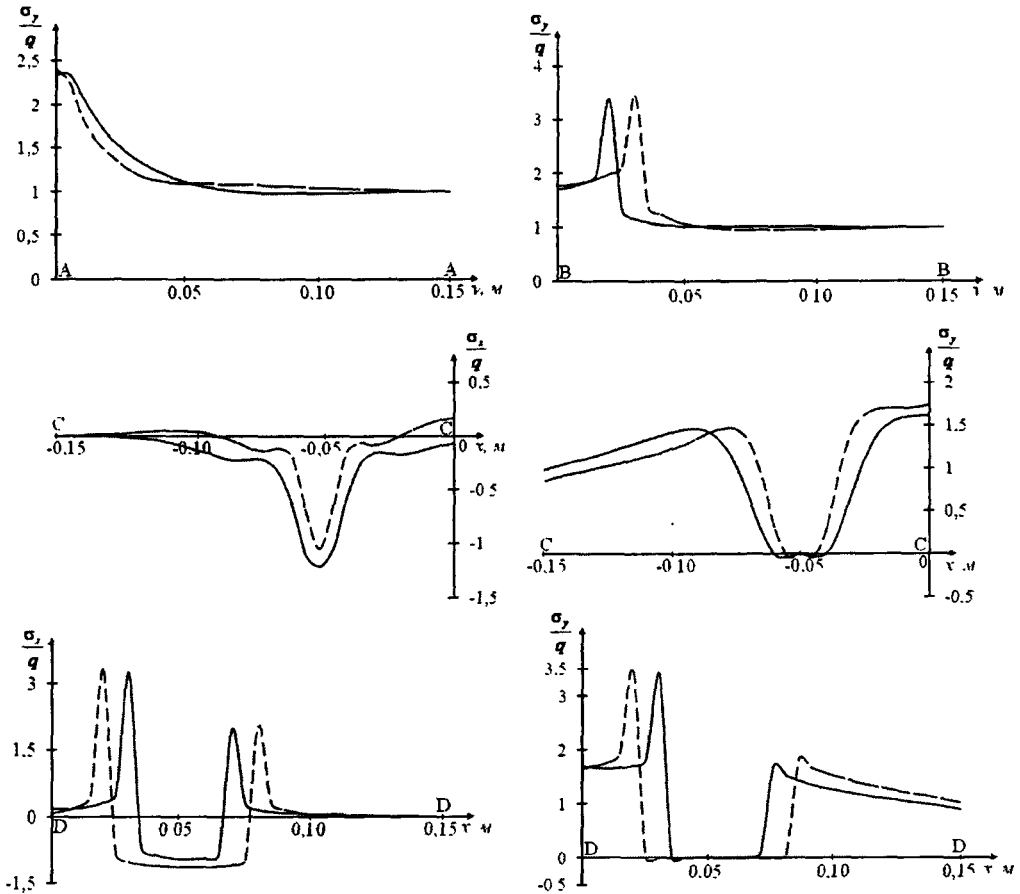


Рис. 6. Распределение относительных напряжений в характерных сечениях

На рис. 7 показаны зоны пластических деформаций для пластины с двумя отверстиями при $l = 0,12$ м (рис. 7, а: радиус кругового отверстия 0,02 м, квадратное отверстие с размерами 0,06 × 0,06 м; рис. 7, б: радиус кругового отверстия 0,03 м, квадратное отверстие с размерами 0,04 × 0,04 м). При нагрузке $q = 145$ МПа в пластинах происходит смыкание зон пластического деформирования.

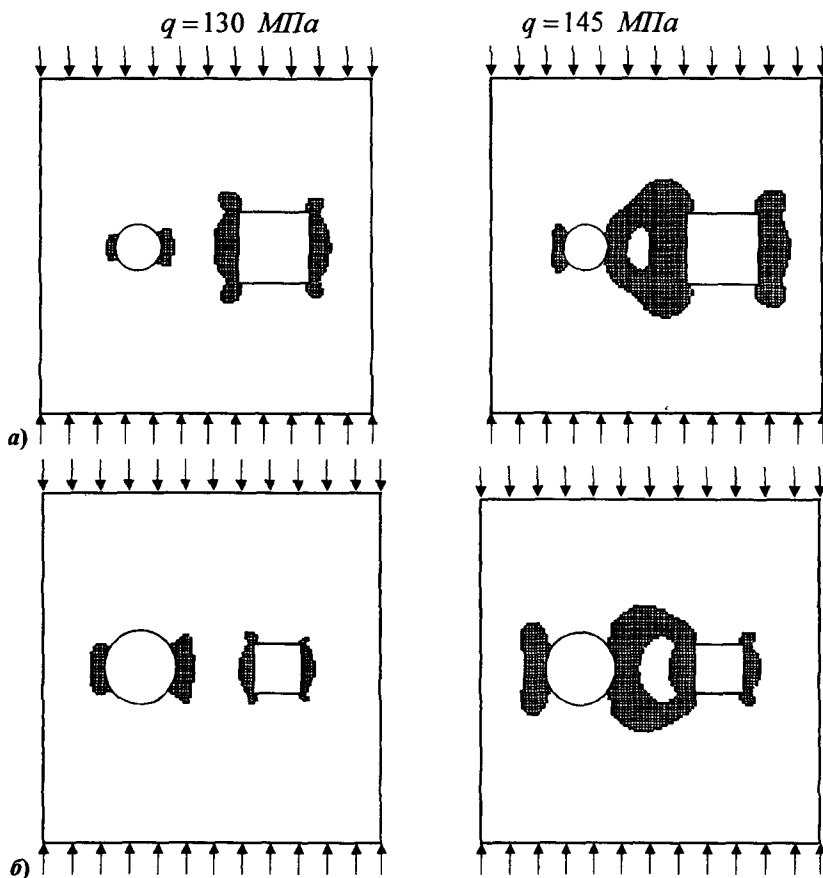


Рис. 7. Зоны пластических деформаций для пластины с двумя отверстиями

Выводы. С помощью созданного программного комплекса, основанного на [2; 4 – 6; 13], можно эффективно проводить исследование напряженно-деформированного состояния с учётом пластических деформаций и взаимовлияния отверстий разной формы и размеров в прямоугольных пластинчатых элементах при сжатии. Для рассмотренных пластин при разных размерах отверстий, расстояниях между отверстиями и нагрузках построены распределения напряжений и зоны пластического деформирования.

Библиографические ссылки

1. Биргер И. А. Общие алгоритмы решения задач теорий упругости, пластичности и ползучести / И. А. Биргер // Успехи механики деформируемых сред. – М., 1975. – С. 51–73.
2. Гарт Э. Л. Напряженно-деформированное состояние пластинчатых элементов тонкостенных конструкций с прямоугольными отверстиями различного размера при учёте пластических деформаций / Э. Л. Гарт, В. С. Гудрамович, Д. В. Клименко, С. А. Рябоконт // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 15. – С. 45–52.

3. **Гудрамович В. С.** Устойчивость упруго-пластических оболочек / В. С. Гудрамович. – К., 1987. – 216 с.
4. **Гудрамович В. С.** Применение проекционно-итерационного варианта метода конечных элементов к решению упруго-пластических задач для пластин с отверстиями / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, С. А. Рябоконт // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2009. – Вип. 10. – С. 76–83.
5. **Гудрамович В. С.** Упругопластическое деформирование прямоугольных пластин с двумя отверстиями различной формы / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт, С. А. Рябоконт // Техническая механика. – 2009. – № 4. – С. 102–110.
6. **Гудрамович В. С.** Проекционно-итерационные схемы реализации метода конечных элементов в задачах упругопластического деформирования пластин с отверстиями / В. С. Гудрамович, Э. Л. Гарт // Упругость и неупругость. Матер. Междун. Симп. Посв. 100-летию со дня рождения А. А. Ильюшина. – М., 2011. – С. 144–147.
7. **Гузь А. Н.** Методы расчета оболочек: в 5 т. Т. 1. Теория оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, В. Н. Чехов [и др.] – К., 1980. – 636 с.
8. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. Пер. с англ. / О. Зенкевич. – М., 1975. – 542 с.
9. **Левин В. М.** Железобетонные башенные конструкции сооружения. Исследования, расчет / В. М. Левин. – Макеевка, 1999. – 230 с.
10. **Прображенский И. Н.** Вырезы в несущих конструкциях / И. Н. Преображенский, И. А. Цурпал. – М., 1984. – 112 с.
11. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий / Г. Н. Савин. – К., 1968. – 888 с.
12. **Цурпал И. А.** Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов / И. А. Цурпал. – К., 1976. – 174 с.
13. **Hudramovich V. S.** Elastoplastic deformation of nonhomogeneous plates / V. S. Hudramovich, E. L. Hart, S. A. Rjabokon' // Journ. of Eng. Math. – 2011. – DOI: 10.1007/s 10665–010–9409–5. – Режим доступа : <http://www.springerlink.com/content/100287>

Надійшла до редколегії 17.05.11

УДК 539.3

А. П. Колодяжний, Е. Ф. Прокопало

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С СИСТЕМОЙ ОТВЕРСТИЙ ПРИ ОСЕВОМ СЖАТИИ

Наведені результати експериментального дослідження стійкості великої серії циліндричних оболонок з круговими отворами при їх різних діаметрах та кількості. Розроблена методика експерименту дозволила одержати стабільні результати визначення стійкості чутливих до початкових недосконалостей тонких оболонок при стиску. Надано детальний аналіз залежності критичних навантажень стиснутих оболонок від розташування, діаметра та кількості отворів.

Ключові слова: циліндрична оболонка, стійкість, отвір, експеримент.

Представлены результаты экспериментального исследования устойчивости большой серии цилиндрических оболочек с круговыми отверстиями при разных их диаметрах и количествах. Разработанная методика эксперимента позволила получить стабильные результаты определения устойчивости чувствительных к начальным несовершенствам тонких оболочек при сжатии. Приведен детальный анализ зависимости критических нагрузок испытываемых оболочек от месторасположения, диаметра и количества отверстий.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, устойчивость, отверстие, эксперимент.

The results of an experimental research of stability of large series of cylindrical shells with circular holes are presented in dependence on their diameters and amounts. The developed technique of experiment permitted to receive stable results in the mass experiments of determination of stability of sensitive to initial imperfections at compression of thin shells. The detailed analysis of dependence of critical loadings of examinees shells from a site, diameter and amount of holes is resulted.

Key words: cylindrical shell, stability, holes, experiment.

Состояние проблемы. Постановка задачи. Цилиндрические оболочки, ослабленные одним или несколькими вырезами, являются весьма распространенными элементами тонкостенных конструкций, широко используемых в авиации, судостроении, ракетной технике, строительстве и многих других областях машиностроения. Обычно такие отверстия заранее предусматриваются при изготовлении элементов конструкций, что вызвано технологическими или эксплуатационными требованиями к ним. Они, как правило, имеют простую геометрическую форму (круговые, квадратные, прямоугольные).

Обеспечение несущей способности тонкостенных деформируемых систем, которая во многом определяется критической нагрузкой, является одной из важнейших проблем, решаемых при проектировании летательных аппаратов, конструкций различных машин и других несущих инженерных сооружений. В связи с этим, естественной является постановка задачи о влиянии различных отверстий на деформирование и устойчивость тонкостенных конструкций.

Теории устойчивости сплошных оболочек посвящено значительное количество публикаций, среди которых следует отметить работы С.П. Тимошенко [17], В.В. Болотина [2], В. Койтера [11], А.С. Вольмира [3], Э.И. Григолюка и В.В. Кабанова [4]. К сегодняшнему дню эта задача достаточно хорошо изучена как в теоретическом, так и в экспериментальном плане.

Отверстия являются концентраторами напряжений и вызывают существенную неоднородность напряженно-деформированного состояния, которое достаточно подробно изучено и освещено в работах А.И. Лурье [13], Г.Н. Савина [15], А.Н. Гузя [8 – 9], Э.И. Григолюка и Л.А. Фильштинского [5]. А.Н. Гузь [10] пред-

ложил рассматривать три подхода для определения напряженно-деформированного состояния и его концентрации возле отверстий в зависимости от их величины. Для малых круговых отверстий ($0 < \omega < 1$ $\omega = r/\sqrt{R \cdot h}$, r – радиус выреза, R , h – радиус и толщина оболочки) следует использовать метод А.И. Лурье [13] (решение основного уравнения представляется в виде ряда по малому параметру, пропорциональному ω^2). Для отверстий среднего размера ($1 \leq \omega \leq 4$) используется теория пологих оболочек, напряженное состояние разделяется на основное – без выреза и возмущенное. Для больших вырезов $\omega > 4$ используются общие уравнения теории оболочек.

С практической точки зрения, наиболее важна задача о влиянии отверстий на устойчивость оболочек. Теоретическое решение ее является чрезвычайно сложным. Ю.А. Ашмарин и А.Н. Гузь [1] подчеркивают, что при решении проблем устойчивости тонкостенных упругих оболочек с вырезами необходимо преодолеть целый ряд специфических, вызванных наличием отверстия трудностей. Сложность проблемы обуславливается тем, что еще задолго до достижения критического значения нагрузки возможно значительное перераспределение напряжений, вызванное взаимодействием двух полей – основного напряженного состояния, распределяющегося по всей поверхности оболочки, и зоны возмущения около отверстия. А это, в свою очередь, усугубляется невозможностью при решении задачи устойчивости разделить напряженное состояние на сумму двух – основного и дополнительного, вызванного наличием отверстия, как это принято при исследовании концентрации напряжений в оболочках с вырезами.

Одной из форм проявления влияния отверстия на деформирование оболочечной конструкции является появляющаяся в процессе нагружения локальная потеря устойчивости, характеризуемая образованием вмятин в окрестности отверстия, что приводит к дополнительным значительным осложнениям напряженно-деформированного состояния. Как показывают экспериментальные исследования авторов дальнейшее поведение оболочки, в зависимости от относительных размеров отверстия, может идти тремя путями. Первый – практически одновременно с локальной происходит общая потеря устойчивости, которая характеризуется исчерпанием несущей способности оболочки. Второй – при неизменной нагрузке, соответствующей локальной потере устойчивости наблюдается развитие локальных вмятин, заканчивающееся общей потерей устойчивости. Длительность этого процесса, связанного с ползучестью, может составлять несколько минут. И, наконец, третий путь. После локального выпучивания оболочка продолжает нести возрастающую нагрузку, локальные вмятины увеличиваются и при некотором значении осевой силы происходит общая потеря устойчивости.

Попытки преодоления математических трудностей, возникающих при решении проблемы определения критических усилий для тонкостенных оболочек с отверстиями, к настоящему времени не привели к получению приемлемых для расчетной практики результатов. Такое состояние обсуждаемого вопроса в теоретическом плане, казалось бы, должно было перенести основной центр тяжести на экспериментальные методы исследования. Однако этого не произошло. Объясняется это, очевидно, определенными техническими трудностями, возникающими при постановке соответствующих экспериментальных исследований. Среди известных следует отметить работы Р. Теннисона [18], Ю.Г. Коноплева [12], Д.Г. Старнса [16], И.Н. Преображенского [14], В.С. Гудрамовича [6; 7].

Опубликованные к настоящему времени данные по исследованию цилиндрических оболочек с вырезами представляют экспериментальные результаты испытаний сравнительно незначительного количества моделей и, в связи с этим, охватыва-

вают лишь небольшую область изменения размеров отверстий и их количества (это, как правило, модели с одним, а в некоторых случаях – с двумя – шестью отверстиями, геометрические центры которых располагались в среднем поперечном сечении оболочки). Кроме того, поскольку приводимые различными авторами результаты исследований относятся к оболочкам, изготовленным из различных материалов, по различным технологиям, имеющим различные размеры и испытанным по различным методикам, сопоставление этих результатов является достаточно проблематичным. Поэтому, значительный интерес представляет проведение широкомасштабного эксперимента, направленного на исследование влияния месторасположения отверстий по поверхности оболочки, их размеров и количества.

В статье представлены результаты экспериментального исследования влияния расположения неподкрепленных круговых отверстий, на докритическое деформирование и устойчивость гладких ортотропных цилиндрических оболочек при нагружении осевой силой.

Технология изготовления и геометрия моделей. В качестве материала для изготовления моделей была использована чертежная бумага марки «В» ГОСТ 597-73. Основные механические характеристики материала: модули упругости $E_x = 6,6$ Гпа, $E_y = 3,45$ Гпа, коэффициенты Пуассона $\mu_x = 0,3$, $\mu_y = 0,3$. Толщина бумаги составляла $h = 0,23$ мм. Следует отметить высокое, по сравнению с другими материалами, используемыми для подобных исследований, отношение предела текучести к модулю упругости, что позволяет проводить эксперименты в упругой области на моделях, имеющих сравнительно большую относительную толщину. С увеличением относительной толщины уменьшается влияние начальных геометрических несовершенств на докритическое поведение оболочки и величину критических нагрузок. Отметим также стабильность всех механических характеристик и высокую технологичность этого материала, проявляющуюся при изготовлении и испытаниях моделей.

Для изготовления оболочек из листа ватмана вырезались прямоугольные заготовки таким образом, чтобы их стороны были параллельны главным направлениям ортотропии бумаги. Направление E_x всегда совпадало с направлением образующей оболочки, а E_y – с её направляющей. На заготовках при помощи специальных высечек пробивались круговые отверстия. Их диаметр изменялся от $d = 4$ мм до $d = 50$ мм. Количество отверстий варьировалось в диапазоне $n = 2 \div 10$ шт. Во всех случаях отверстия располагались регулярно в одном поясе. Положение пояса отверстий изменялось по длине оболочки. Всего испытано 4 серии моделей с параметром расположения $\lambda = 2a/L = 1; 0,6; 0,3; 0,1$, где a – расстояние от края оболочки до центра отверстия, L – рабочая длина моделей. В таблице 1 для каждой серии оболочек указаны количество отверстий и значения их диаметров.

Оболочки склеивались на металлических цилиндрах клеем БФ-2. Ширина клеевого шва составляла 5 мм. Все оболочки имели одинаковые геометрические размеры: внутренний радиус $R = 3,75 \cdot 10^{-2}$ м, рабочую длину $L = 7,5 \cdot 10^{-2}$ м. Полная длина оболочки составляла $L_{\text{п}} = 11,5 \cdot 10^{-2}$ м. С каждой стороны оболочки использовались полосы шириной $v = 2 \cdot 10^{-2}$ м, к которым приклеивались цилиндрические торцы, служившие для передачи к ней внешних нагрузок. Такое закрепление обеспечивало жесткое защемление торцов и возможность равномерной передачи внешних усилий по криволинейным кромкам оболочки.

Для испытания, оболочка нижним торцом устанавливалась на горизонтальной плите, неподвижно закрепленной на жесткой металлической треноге. В центральной части верхнего торца шарнирно крепилась тяга, которая проходила через отверстия в нижнем торце и в плите. Нагружение проводилось через тягу поэтапно по

схеме «мертвого груза» при помощи стандартных гирь второго класса точности. Такая схема нагружения обеспечивала равномерность осевых смещений по периметру оболочки в ее крайних поперечных сечениях.

Таблица 1.

Перечень вариантов оболочек с отверстиями указанных диаметров d и их количества n

№ серии	Кол-во отверстий	$d=4$ мм	$d=10$ мм	$d=20$ мм	$d=30$ мм	$d=40$ мм	$d=50$ мм
1 ($\lambda=1,0$)	$n=2$	+	+	+	+	+	+
	$n=4$	+	+	+	+	+	+
	$n=6$	+	+	+	+		
	$n=8$	+	+	+			
	$n=10$	+	+				
2 ($\lambda=0,6$)	$n=2$	+	+	+	+	+	+
	$n=4$	+	+	+	+	+	+
	$n=6$	+	+	+	+		
	$n=8$	+	+	+			
	$n=10$	+	+	+			
3 ($\lambda=0,3$)	$n=2$	+	+	+	+	+	+
	$n=4$	+	+	+	+	+	+
	$n=6$	+	+	+	+		
	$n=8$	+	+	+			
	$n=10$	+	+				
4 ($\lambda=0,1$)	$n=2$	+	+				
	$n=4$	+	+				
	$n=6$	+	+				
	$n=8$	+	+				
	$n=10$	+	+				

Анализ результатов. Выводы. На рис. 1÷5 и 8÷12 представлены зависимости относительной критической нагрузки $\bar{P} = P_{кр} / P_{кр}^*$, где $P_{кр}$ – критическая нагрузка для оболочки с отверстиями,

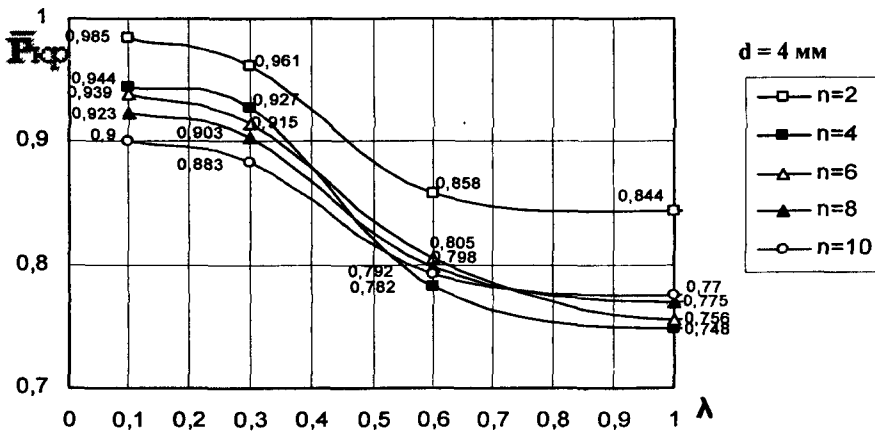


Рис. 1. Зависимость относительных критических нагрузок от расположения пояса вырезов с диаметром $d = 4$ мм при разных их количествах

$P_{кр}^*$ – средняя критическая нагрузка для сплошной оболочки, определенная по результатам испытаний пяти моделей, от параметра расположения пояса отверстий по длине оболочки $\bar{P} = f(\lambda)$.

На рис. 1 ÷ 5 иллюстрируются зависимости критических нагрузок от параметра λ для оболочек с отверстиями постоянного диаметра. Каждая кривая на этих рисунках соответствует определенному количеству отверстий.

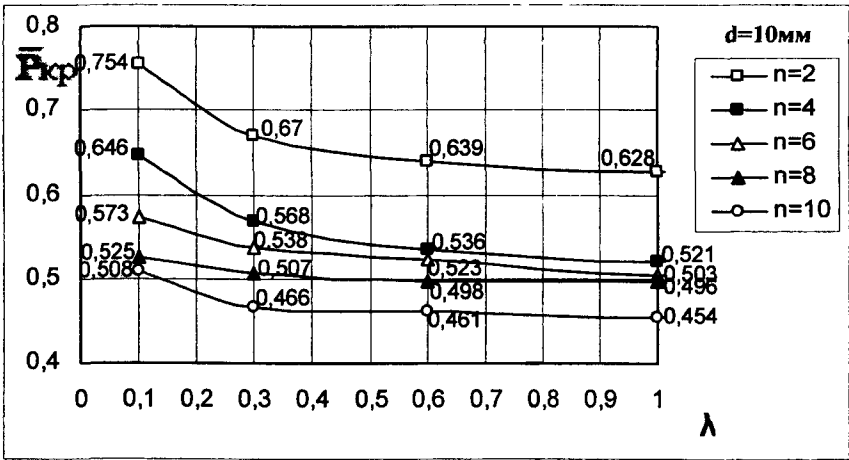


Рис. 2. Зависимость относительных критических нагрузок от расположения пояса вырезов с диаметром $d = 10$ мм при разных их количествах

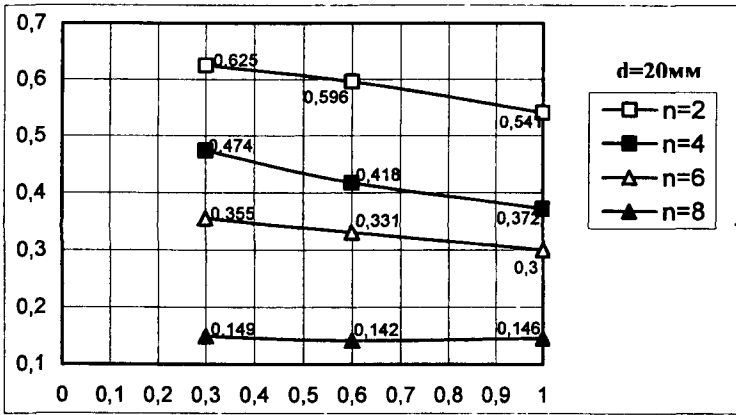


Рис. 3. Зависимость относительных критических нагрузок от расположения пояса вырезов с диаметром $d = 20$ мм при разных их количествах

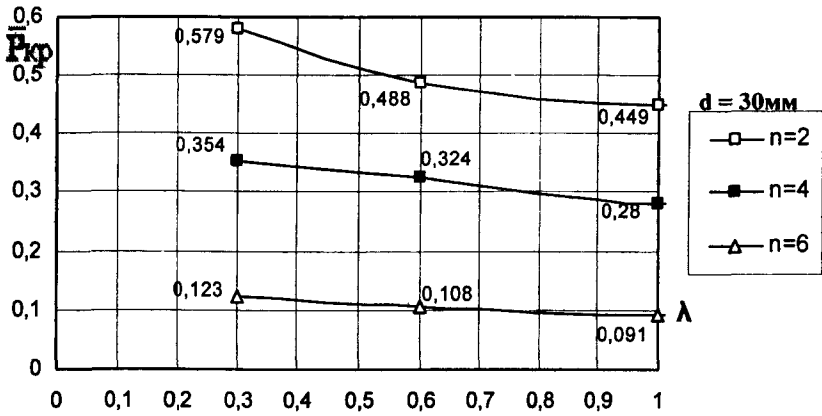


Рис. 4. Зависимость относительных критических нагрузок от расположения пояса вырезов с диаметром $d = 30$ мм при разных их количествах

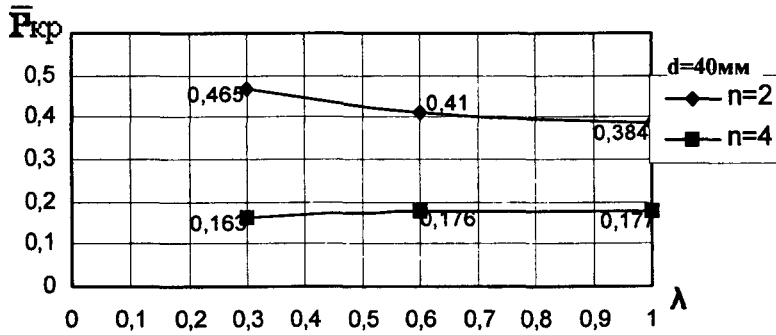


Рис. 5 Залежність відносних критических навантажень від розташування пояса вирізів с діаметром $d = 40$ мм при різних їх кількостях

Результати досліджень, представлені на рис. 1÷5 свідчать про те, що для оболонок з отворами одного діаметра, незалежно від їх кількості, криві $\bar{P} = f(\lambda)$ якісно є практично подібними. Загальною тенденцією для всіх досліджуваних моделей незалежно від розмірів і кількості отворів, за винятком, може бути, оболонок з чотирма отворами діаметром $d = 40$ мм, є чітко прослідковуваний спад критических зусиль при зсуві пояса отворів від краю оболонки до її середнього поперечного перерізу.

Слід зазначити, що для оболонок з малими отворами ($d = 4$ мм) залежності $\bar{P} = f(\lambda)$ суттєво відрізняються від таких же залежностей, отриманих для оболонок з отворами середніх і великих розмірів (рис. 1). При розташуванні отворів в поясах, близьких до краю оболонки ($\lambda = 0,1$; $\lambda = 0,3$), спостерігається очікуваний спад критических навантажень з збільшенням кількості отворів. При подальшому збільшенні параметра λ ($\lambda > 0,4+0,5$) для оболонок з кількістю отворів $n = 4 \div 10$ відбувається інверсія значень критических навантажень, тобто мінімальна критическа навантаження відповідає оболонкам з чотирма отворами, а максимальна – з десятьма отворами, що не відповідає загальноприйнятим представленням. Критическі навантаження для оболонок з двома отворами суттєво вище інших залежностей $\bar{P} = f(\lambda)$ і не беруть участі в інверсії. Такі ж особливості мають залежності $\bar{P} = f(\lambda)$ при $n = 2$ і для оболонок з отворами середнього розміру (рис. 2÷3).

Для всіх оболонок середнього і великого розміру з збільшенням кількості отворів спостерігається зменшення критических навантажень (рис. 2÷5). Для оболонок з максимальною кількістю отворів (рис. 2 – $n = 10$; рис. 3 – $n = 8$; рис. 4 – $n = 6$; рис. 5 – $n = 4$) криві критических навантажень розташовані помітно нижче інших кривих. Це пояснюється тим, що в цьому випадку між отворами залишаються вузькі панелі, для яких реалізуються панельні і близькі до стержневих форми втрати стійкості (рис. 6, 7).

На кожному з рис. 8÷12 показані залежності відносних критических навантажень від місця розташування отворів при їх різних діаметрах і фіксованих кількостях

Приведені результати досліджень свідчать про те, що критическі навантаження для оболонок з малими отворами суттєво вище відповідних навантажень для оболонок з отворами середнього і великого розміру. Зсув пояса отворів до середнього поперечного перерізу при малих отворах супроводжується зменшенням критических зусиль, причому для оболонок з різною кількістю отворів це зменшення є найбільш суттєвим при зміні параметра λ від 0,3 до 0,6. Для оболонок з отворами $d=10$ мм, на відміну від оболонок з малими

отверстиями критическая нагрузка оказывается наиболее чувствительной к месторасположению отверстий в диапазоне изменения λ от 0,1 до 0,3. При смещении месторасположения пояса отверстий с большими диаметрами к среднему поперечному сечению оболочки критические нагрузки заметно уменьшаются (рис.8-11), исключение составляют оболочки с отверстиями $d = 40$ мм; 50 мм, $n = 4$ и $d = 20$ мм, $n = 8$ (рис. 9, 11).

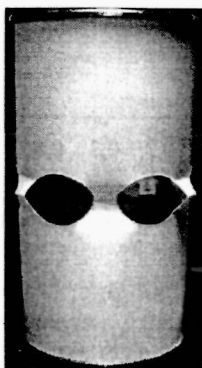


Рис. 6. «Стержневая» форма потери устойчивости

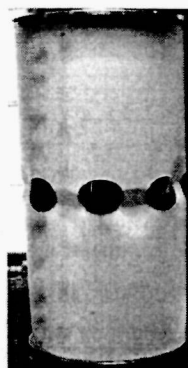


Рис. 7. «Панельная» форма потери устойчивости

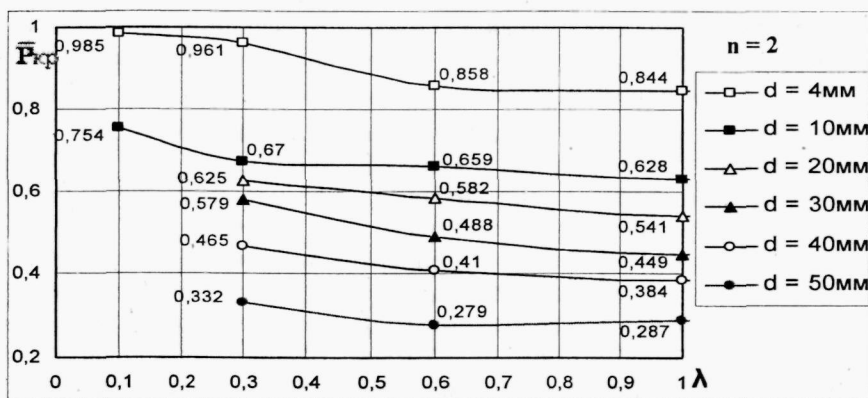


Рис. 8. Зависимость относительных критических нагрузок от расположения двух вырезов при разных d

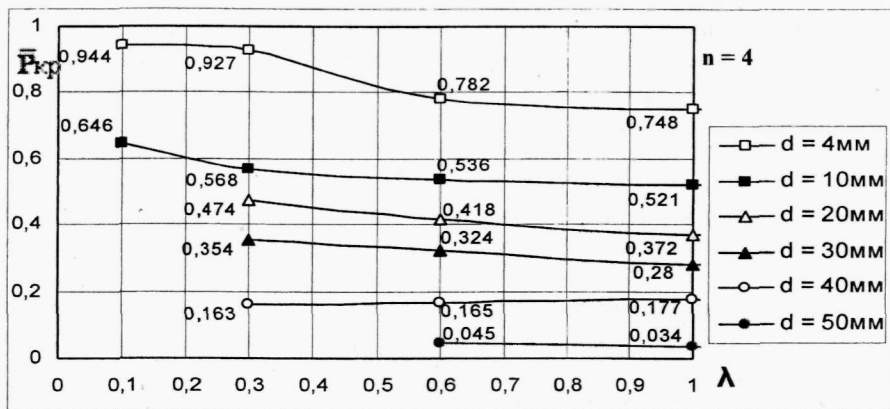


Рис. 9. Зависимость относительных критических нагрузок от расположения 4-х вырезов при разных d

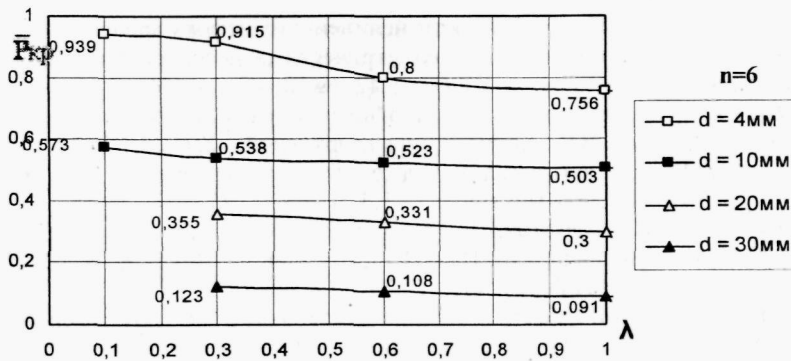


Рис. 10. Зависимость относительных критических нагрузок от расположения 6-ти вырезов при разных d

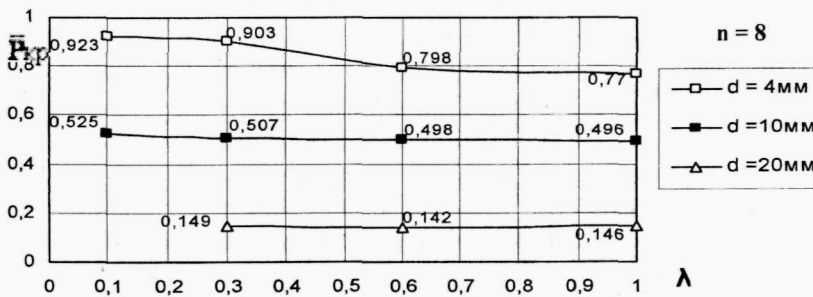


Рис. 11. Зависимость относительных критических нагрузок от расположения 8-ми вырезов при разных d

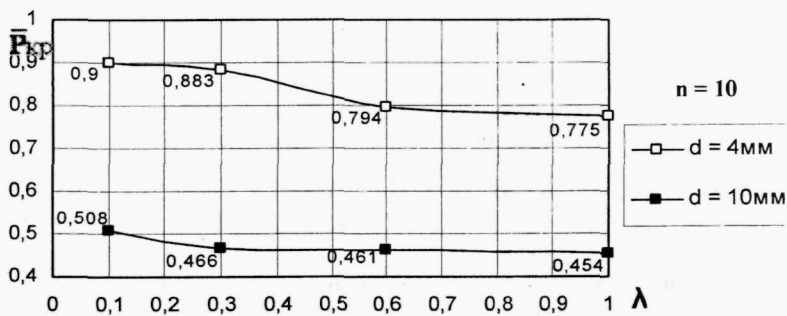


Рис. 12. Зависимость относительных критических нагрузок от расположения 10-ти вырезов при разных d

Библиографические ссылки

1. Ашмарин Ю.А. Устойчивость оболочек, ослабленных отверстиями (обзор) / Ю.А. Ашмарин, А.Н. Гузь // Прикл. механика. – Т. IX. – В.4. – 1973. – С. 3 – 15.
2. Болотин В.В. Вопросы общей теории упругости. / В.В. Болотин // Прикл. мат. и мех. – Т. XX. – 1956. – №5. – С. 561 – 577.
3. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир // –М., 1967. – 984 с.
4. Григолюк Э.И. Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов // –М., 1987. – 360 с.
5. Григолюк Э.И. Перфорирование пластины и оболочки / Э.И. Григолюк, Л.А. Фильштинский // –М. – 1970. – 556 с.
6. Гудрамович В.С. Устойчивость упруго-пластических оболочек / В.С. Гудрамович // –К., 1987. –216 с.

7. Гудрамович В.С. Особенности нелинейного деформирования и критические состояния оболочечных систем с геометрическими несовершенствами / В.С. Гудрамович // Прикладная механика, 2006. – Т.42. № 12. –С. 3 – 47
8. Гузь А. Н. О постановке задач устойчивости пластин и оболочек, ослабленных отверстиями. / А.Н. Гузь // В кн. Концентрация напряжений. – Киев, 1971. – Вып. 3. – С. 51 – 63.
9. Гузь А.Н. Концентрация напряжений около отверстий в тонких оболочках / А.Н. Гузь // Прикладная механика. – Т.5. – В.3. – 1969. – С. 1 – 7.
10. Гузь А.Н. Исследования по теории тонких оболочек с отверстиями (обзор). / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, Вал. Н. Чехов, Вик. Н. Чехов, К.И. Шнеренко // Прикл. Механика. – 1979. – XV. – № 11. – С. 3 – 36.
11. Койтер В. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем / В. Койтер // «Механика». – ИЛ. – 1960. – № 5. – С. 99 – 110.
12. Коноплев Ю. Г. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрической оболочки, ослабленной отверстием / Ю. Г. Коноплев // Исследования по теории пластин и оболочек. – Казань. – 1970. – С. 500 – 503.
13. Лурье А.И. Концентрация напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра / А.И. Лурье // Прикл. мат. и мех. – Т. X. – Вып. 3. – 1946. – С. 22 – 30.
14. Преображенский И. Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями / И. Н. Преображенский // – М., 1981. – 189 с.
15. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. / Г. Н. Савин // –К., – 1968. – 887 с.
16. Старнс Д. Г. Влияние вырезов на устойчивость тонких оболочек / Д. Г. Старнс // Тонкостенные оболочечные конструкции. – М. – 1980. – С. 303 – 319.
17. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем / С.П. Тимошенко // – М., 1955, 567 с.
18. Tennysson R. C. The effects of unzeinforced circular cutouts on the buckling of circular cylsndrical shells under axial compression / R. C. Tennysson // Trans. – ASME. – 1968. – 90. – № 4. – P. 541 – 546.

Надійшла до редколегії 11.05.11

УДК 532.5

Т. С. Краснопольська, В. М. Спектор
Інститут гідромеханіки НАНУ

ПОВЕРХНЕВІ ХВИЛІ У ПРЯМОКУТНОМУ БАСЕЙНІ З ХВИЛЕПРОДУКТОРОМ

Сформульовано нову математичну проблему та запропоновано методику отримання рішення, яке описує безпосередню перекачку енергії від хвилепродуктора в хрестоподібні хвилі на вільній поверхні прямокутного басейну.

Ключові слова: хвилі на вільній поверхні рідини, хрестоподібні хвилі, метод суперпозиції Ламе.

Сформулирована новая математическая проблема и предложена методика получения решения, которое описывает процесс непосредственной перекачки энергии волнопродуктором в крестовидные волны на свободной поверхности прямоугольного бассейна.

Ключевые слова: волны на свободной поверхности, крестовидные волны, метод суперпозиции Ламе.

A new mathematical model and methodology of it's solution are developed, which show how directly from a wavemaker cross-waves are excited on a fluid free surface in a rectangular basin.

Key words: waves on a fluid free surface, cross-waves, superposition method of Lamé.

Занурені в рідину тіла, що коливаються, створюють навколо себе на її вільній поверхні хвилі різного походження. Деякі з такого роду хвиль досі не отримали повного пояснення механізму свого збудження. Це, насамперед, так звані «хрестоподібні

хвилі» («cross-waves»), які вперше були віднайдені в 1831 році та описані Фарадеєм в [1]. Саме в цій роботі Фарадей також навів повний опис своїх досліджень про появу хвиль на вільній поверхні шару рідини при вертикальних коливаннях. Ці хвилі пізніше отримали назву фарадеевських чи параметричних і на сьогоднішній день мають досить повне теоретичне пояснення, яке почалось з Релея [2]. В тій же роботі було докладно описан наступний цікавий експеримент: при зануренні в рідину вертикально одним кінцем дерев'яної дощечки та її горизонтальних коливаннях по обидва боки дощечки, перпендикулярно до неї, виникали хвилі, що нагадують зубці гребінки, яка лежить горизонтально. Такі хвилі, які утворюють прямий кут в горизонтальній площині з напрямком руху дощечки, отримали назву «хрестоподібні», «cross-waves». Такого гатунку хвилі виникають навколо сфери, циліндра та інших тіл, що коливаються в рідині і розходяться, як спиці в колесі від поверхні тіла. Саме ці хвилі виникають в бокалах що «співають», перпендикулярно до крайці стакану, якщо водити вздовж крайці мокрим пальцем руки [1].

Окрім хрестоподібних хвиль тіла-хвилепродуктори, що коливаються на поверхні рідини, збуджують також звичайні резонансні хвилі, які розповсюджуються уздовж напрямку коливань хвилепродуктора. Такі хвилі збуджуються при низьких частотах і мають амплітуди, менші по величині, ніж хрестоподібні. Інтерес представляє аналіз переходу від одного класу хвиль до іншого, класифікація та умови резонансів, порівняння теоретичних висновків з результатами експериментальних досліджень. Саме таким питанням присвячена дана робота, в якій розглядаються можливі хвильові структури на вільній поверхні рідини в прямокутному басейні, коли один його торець є хвилепродуктором.

При припущенні, що рідина є нев'язкою і нестисливою, розглянемо хвилі на її поверхні в басейні довжини L , ширини b та глибини h (рис. 1). Для теоретичного розгляду задачі введемо декартову систему координат з початком O на вільній незбудженій поверхні рідини. Хвилепродуктор розташований в торці при $x = 0$.

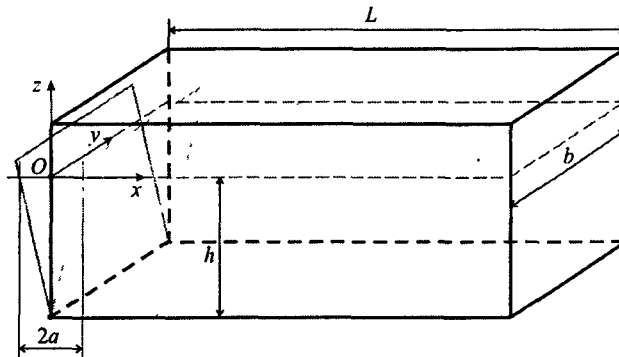


Рис. 1 Басейн з хвилепродуктором

Переміщення хвилепродуктора в напрямку \bar{x} описуються функцією

$$u(z, t) = F(z) \sin(\omega t) = \left(a + \frac{a}{h} z \right) \sin(\omega t), \quad (1)$$

де $2a$ - розмах коливань хвилепродуктора на поверхні рідини; ω - кругова частота.

При експериментальних дослідженнях частота хвилепродуктора $f_e = \omega / (2\pi)$ змінювалась в діапазоні $0 < f_e \leq 3$ Гц. При відносно низьких частотах f_e збуджуються лише хвилі в напрямку Ox , потім при підвищенні f_e - і в напрямку Oy , тобто хрестоподібні хвилі. Вважаючи рідину ідеальною, а її рух - безвихровим,

вводимо для поля швидкостей потенціал $\varphi(x, y, z, t)$, при $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$. Тоді для φ з умови нерозривності маємо рівняння

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad \text{при} \quad F(z)\cos(\omega t) \leq x \leq L, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq \xi(x, y, t), \quad (2)$$

де $\xi(x, y, t)$ - зміщення вільної поверхні.

Динамічна і кінематична умова на вільній поверхні мають, відповідно, вигляд

$$\varphi_t + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\varphi)^2 + g\xi = P(t) \quad \text{при} \quad z = \xi(x, y, t); \quad (3)$$

$$\varphi_z = \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\xi + \xi_t \quad \text{при} \quad z = \xi(x, y, t), \quad (4)$$

де g - прискорення вільного падіння; $P(t)$ - довільна функція часу [5], нижні індекси x, y, z, t позначають часткові похідні.

Крім того, маємо наступні однорідні граничні умови. Нормальна складова швидкості рідини дорівнює нулеві при жорстких границях

$$\begin{cases} \varphi_z = 0 & \text{при} \quad z = -h; \\ \varphi_y = 0 & \text{при} \quad y = 0; \quad y = b; \\ \varphi_x = 0 & \text{при} \quad x = L. \end{cases} \quad (5)$$

Кінематична умова на хвилепродукторі, що коливається, має вигляд

$$\varphi_x = \omega F(z)\cos\omega t + F'(z)\varphi_z \sin\omega t \quad \text{при} \quad x = F(z)\sin\omega t. \quad (6)$$

Експериментальні спостереження свідчать про те, що спочатку хвилепродуктор створює вимушені стоячі хвилі в напрямку свого руху по осі $O\bar{x}$, а потім поблизу хвилепродуктора з'являються стоячі хвилі в напрямку, перпендикулярному його руху, вздовж осі $O\bar{y}$, причому кількість гребенів хвиль змінюється при збільшенні швидкості коливань ω хвилепродуктора. Таким чином, хрестоподібні хвилі (cross-waves) мають резонансний характер, кожна окрема хвильова структура має свою «власну» частоту.

Вважаємо, що ці хвильові структури можуть бути апроксимовані такими динамічними характеристиками, як власні форми, що є розв'язками лінійних задач. Тому необхідно розглянути лінійні крайові задачі, що відповідають нелінійній проблемі (2) – (6). Крім того, вважаємо, що розмах коливань хвилепродуктора $2a$ малий порівняно з характерним розміром, тобто можна ввести, скажімо, малий параметр $\varepsilon_0 = a\omega^2 / g$.

Розглянемо розв'язок наступної лінійної крайової задачі

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq L; \quad 0 \leq y \leq b; \quad -h \leq z \leq 0; \quad (7)$$

$$\begin{cases} \varphi_z = \xi_t & \text{при} \quad z = 0; \\ \varphi_z = 0 & \text{при} \quad z = -h; \\ \varphi_x = \tilde{F}_t(z, y, t) & \text{при} \quad x = 0; \\ \varphi_x = 0 & \text{при} \quad x = L; \\ \varphi_y = 0 & \text{при} \quad y = 0; \\ \varphi_y = 0 & \text{при} \quad y = b. \end{cases} \quad (8)$$

Розв'язок лінійної задачі (7) – (8) може бути знайдений методом Грінберга, що традиційно застосовується. В даній роботі пропонується використовувати аналітичний метод суперпозиції, оскільки він дає ясну фізично прозору картину перекачування енергії від хвилепродуктора в коливання вільної поверхні рідини. Ідею метода суперпозиції вперше висунув Ламе [4]. Згідно цього методу, потенціал φ може бути записаний у вигляді суми трьох гармонічних функцій

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2. \tag{9}$$

Потенціал φ_0 є розв'язком наступної граничної задачі

$$\nabla^2 \varphi_0 = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq L; \quad 0 \leq y \leq b; \quad -h \leq z \leq 0; \tag{10}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\varphi_0)_z = (\xi_0(t))_t & \text{при} \quad z = 0; \\ (\varphi_0)_z = 0 & \text{при} \quad z = -h; \\ (\varphi_0)_x = (\tilde{F}_0(t))_t & \text{при} \quad x = 0; \\ (\varphi_0)_x = 0 & \text{при} \quad x = L; \\ (\varphi_0)_y = 0 & \text{при} \quad y = 0; \\ (\varphi_0)_y = 0 & \text{при} \quad y = b, \end{array} \right. \tag{11}$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_0(t) = \frac{1}{bL} \int_0^b \int_0^L \xi(x, y, t) dx dy, \\ \tilde{F}_0(t) = \frac{1}{hb} \int_0^b \int_{-h}^0 \tilde{F}(z, y, t) dy dz; \text{ (якщо від у не залежить, то } \tilde{F}_0(t) = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \tilde{F}(z, t) dz). \end{array} \right. \tag{12}$$

Якщо $F(z) = a + \frac{a}{h}z$, то

$$\tilde{F}_0(t) = \frac{\sin \omega t}{h} \int_{-h}^0 \left(a + \frac{a}{h}z \right) dz = \frac{\sin \omega t}{h} \left(az - \frac{a}{2h}z^2 \right) \Big|_{-h}^0 = \frac{\sin \omega t}{h} \left(ah - \frac{ah}{2} \right) = \frac{a \sin \omega t}{2}. \tag{13}$$

$\xi_0(t)$, $\tilde{F}_0(t)$ описують коливання середнього рівня вільної поверхні рідини та усереднено по поверхні переміщення хвилепродуктора. Ці величини зв'язані співвідношенням

$$(\xi_0)_t bL - \tilde{F}_{0t}(t) hb = 0, \tag{14}$$

що виражає закон збереження маси для нестисливої рідини. Таким чином, для випадку руху хвилепродуктора, що розглядається (1), (13)

$$\xi_{00}(t) = \frac{ah \sin \omega t}{2L} = \left(\frac{ah}{2L} \right) \sin \omega t. \tag{15}$$

Потенціал φ_1 визначається з розв'язку наступної лінійної задачі

$$\nabla^2 \varphi_1 = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq L; \quad 0 \leq y \leq b; \quad -h \leq z \leq 0; \tag{16}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\varphi_1)_z = (\xi - \xi_0)_t & \text{при } z = 0; \\ (\varphi_1)_z = 0 & \text{при } z = -h; \\ (\varphi_1)_x = 0 & \text{при } x = 0; \\ (\varphi_1)_x = 0 & \text{при } x = L; \\ (\varphi_1)_y = 0 & \text{при } y = 0; \\ (\varphi_1)_y = 0 & \text{при } y = b, \end{array} \right. \quad (17)$$

При цьому для φ_1 граничні умови (17) є однорідними в напрямках абсцис і ординат, тобто $O\bar{x}$ та $O\bar{y}$, а неоднорідними (похідна по z не дорівнює нулю) в напрямку $O\bar{z}$. Тому φ_1 згідно теоремі Стеклова про розв'язок задачі Штурма-Ліувілля буде представлятись у вигляді суми по повним і ортогональним системам власних функцій по x та y , а по z функції не будуть становити собою повну систему.

Для потенціалу φ_2 гранична задача формулюється наступним чином

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq L; \quad 0 \leq y \leq b; \quad -h \leq z \leq 0; \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\varphi_2)_z = 0 & \text{при } z = 0; \\ (\varphi_2)_z = 0 & \text{при } z = -h; \\ (\varphi_2)_x = (\tilde{F} - \tilde{F}_0)_t & \text{при } x = 0; \\ (\varphi_2)_x = 0 & \text{при } x = L; \\ (\varphi_2)_y = 0 & \text{при } y = 0; \\ (\varphi_2)_y = 0 & \text{при } y = b. \end{array} \right. \quad (19)$$

Оскільки φ_2 має однорідні граничні умови по y та z , і неоднорідні по x , то потенціал φ_2 може бути представлений у вигляді суми по повним і ортогональним системам власних функцій по y та z . Слід відмітити, що потенціал φ_2 не створює змін швидкості ξ на вільній поверхні при $z = 0$, він створює компоненту тиску, як впливає з динамічної умови на вільної поверхні (3). Причому ця компонента має частоту коливань хвилепродуктора $\tilde{F}(t)$ в лінійному наближенні задачі.

Важливо зауважити, що крайові задачі (10) – (11), (16) – (17) и (18) – (19) є задачами Неймана, коли задана нормальна похідна гармонічної функції. Для отримання розв'язку без особливостей в кутових точках друга теорема Гріна вимагає, щоб ці задані значення задовольняли умови нульового потоку через границю. Ця властивість задовольняється для всіх трьох граничних задач. Розв'язок крайової задачі для φ_0 може бути знайдено у вигляді

$$\varphi_0 = -\dot{\tilde{F}}_0(t) \frac{(x-L)^2}{2L} + \dot{\xi}_0 \frac{(z+h)^2}{2h} \quad (20)$$

(тут точка означає похідну по часу). При цьому, з огляду на умову (14), яка дає

$$\dot{\xi}_0 = \dot{\tilde{F}}_0 \frac{h}{L}, \text{ рівняння Лапласа для}$$

$$\varphi_0 = \frac{\dot{\tilde{F}}}{2L} \left[-(x-L)^2 + (z+h)^2 \right] \quad (21)$$

задовольняється тотожно.

Розв'язок лінійної задачі (16) – (17) може бути записаний у вигляді

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{\operatorname{ch} [k_{nm}(z+h)]}{\operatorname{ch}(k_{nm}h)} \quad (22)$$

по повним системам функцій $\cos(n\pi x/L)$ та $\cos(m\pi y/b)$ з невідомими амплітудами $\varphi_{nm}(t)$, де

$$k_{nm} = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2}}. \quad (23)$$

Система функцій $\cos(n\pi x/L)$ та $\cos(m\pi y/b)$ є повною ортогональною системою, тому довільна функція, яка залежить від x та y , може бути представлена як ряд Фур'є по цим функціям. Тому функція переміщень, тобто хвиль, вільної поверхні рідини $\xi(x, y, t) - \xi_0(t)$ може бути представлена у вигляді

$$\xi(x, y, t) - \xi_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b}. \quad (24)$$

Гранична умова (17) виду $(\varphi_1)_z = (\xi - \xi_0)_t$ дає співвідношення між амплітудами рядів (22) та (24)

$$\varphi_{nm} = \dot{\xi}_{nm} (k_{nm} \operatorname{th} k_{nm} h)^{-1}. \quad (25)$$

Потенціал швидкості $\varphi_2(x, y, z, t)$ може бути записаний в формі рядів Фур'є по повним системам $\cos(m\pi y/b)$ і $\cos(j\pi z/h)$, тому загальний розв'язок має вигляд

$$\varphi_2 = \sum_m \sum_j \Phi_{mj}(t) \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\operatorname{ch} [\alpha_{mj}(x-L)]}{\operatorname{ch}(\alpha_{mj}L)}; \quad (26)$$

$$\alpha_{mj} = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{j^2\pi^2}{h^2}}. \quad (27)$$

Використовуючи граничну умову (19) при $x=0$ виду $(\varphi_2)_x = (\tilde{F} - \tilde{F}_0)_t$, маємо

$$\dot{F}_{mj}(t) = \tilde{\Phi}_{mj}(t) = \frac{\operatorname{ch}(\alpha_{mj}L)}{\alpha_{mj} \operatorname{sh}[\alpha_{mj}(-L)]} \frac{b}{hb} \int_0^b \int_{-h}^0 \left(\dot{\tilde{F}} - \dot{\tilde{F}}_0 \right) \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} dy dz. \quad (28)$$

Для визначення невідомих функцій $\xi_{nm}(t)$ (24), які представляють амплітуди хвиль, що безпосередньо збуджуються на вільній поверхні, ми повинні використовувати лінеаризовану динамічну умову на вільній поверхні

$$\varphi_t + g\xi = P(t) \quad \text{ї} \quad \delta z = 0, \quad (29)$$

де φ - повний потенціал швидкості (9). Нехай (як це завжди робиться) $P(t) \equiv 0$. Підстановка (9) в (29) при $z = 0$ приводить до функціонального рівняння по x в інтервалі $(0, L)$. Оскільки φ_1 і φ_2 при $z = 0$ є рядами Фур'є по y , то необхідно

представити функції $\frac{\text{ch}[\alpha_{mj}(x-L)]}{\text{ch}(\alpha_{mj}L)}$ в формі розкладань в ряди Фур'є по $\cos(n\pi x/L)$ крім того треба представити функцію $(x-L)^2$, яка входить в (21), також в ряд Фур'є по $\cos(n\pi x/L)$. Тоді, нехай

$$(x-L)^2 = a_{00} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{0i} \cos \frac{i\pi}{L} x; \quad (30)$$

$$\frac{\text{ch}[\alpha_{mj}(x-L)]}{\text{ch}(\alpha_{mj}L)} = b_{mj0} + \sum_{i=1}^{\infty} b_{mji} \cos \frac{i\pi}{L} x,$$

де коефіцієнти - постійні величини. В результаті з динамічної умови (29) для амплітуд функції коливань (30) маємо рівняння

$$\frac{\ddot{\xi}_{n0}(t)}{k_{n0} \text{th}(k_{n0}h)} + g \xi_{n0}(t) = \frac{\ddot{F}_0 a_{0n}}{2L} - \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{F}_{0j} b_{0jn}; \quad \frac{\ddot{\xi}_{nm}(t)}{k_{nm} \text{th}(k_{nm}h)} + g \xi_{nm}(t) = - \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{F}_{mj} b_{mjn}.$$

Таким чином, отримуємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\xi}_{n0}(t) + \omega_{n0}^2 \xi_{n0}(t) = \frac{\ddot{F}_0}{2L} a_{0n} - \sum_{j=1}^{\infty} F_{0j} b_{0jn} b_{n0}; \\ \ddot{\xi}_{nm}(t) + \omega_{nm}^2 \xi_{nm}(t) = - \sum_{j=1}^{\infty} F_{mj} b_{mjn} b_{nm}, \end{array} \right. \quad (31)$$

де $\omega_{nm} = (g k_{nm} \text{th} k_{nm} h)^{1/2}$; $b_{nm} = k_{nm} \text{th} k_{nm} h$.

Лінійні рівняння (31) представляють традиційні рівняння для випадку змушених коливань з власною частотою ω_{ij} . Розв'язуючи ці лінійні диференціальні рівняння при заданих початкових умовах і заданих $\ddot{F}_0(t)$ та $F_{nm}(t)$, можна легко визначити амплітуди $\xi_{nm}(t)$ коливань вільної поверхні рідини в явному вигляді.

Тут слід зауважити, що якщо функція коливань хвилепродуктора \ddot{F} , котра входить до формулювання граничних умов для потенціалу φ_2 така, що не залежить від поперечної координати y (по ширині каналу), то всі функції $F_{mj}(t) \equiv 0$ окрім випадку $m = 0$, тобто система (31) в цьому випадку має вигляд

$$\ddot{\xi}_{n0}(t) + \omega_{n0}^2 \xi_{n0}(t) = \frac{\ddot{F}_0}{2L} a_{0n} - \sum_{j=1}^{\infty} F_{0j} b_{0jn} b_{n0}; \quad n = 1, 2, \dots,$$

тобто зводиться до рівнянь відносно амплітуд хвиль, які розповсюджуються вздовж координати x , тобто вздовж каналу. Ніяких хрестоподібних хвиль не збуджується,

бо при лінійному формулюванні задачі немає підживлення цих хвиль від хвилепродуктора. Саме такою є ситуація при коливаннях хвилепродуктора по функції (1). Для того, щоб розглянути механізм збудження хрестоподібних хвиль при заданому русі (1) хвилепродуктора, необхідно враховувати нелінійні члени в динамічній та кінематичній умовах на вільній поверхні (3) і (4), але принципово важливо повністю врахувати нелінійну кінематичну умову на поверхні хвилепродуктора (6). Така умова дає пояснення можливості реалізації параметричних резонансних хвиль на вільній поверхні рідини, якими є хрестоподібні хвилі.

Докладні розв'язки нелінійних задач на вільній поверхні прямокутного каналу будуть представлені в наступних публікаціях авторів роботи внаслідок обмеженості об'єму цієї статті. Наведемо тут короткий розв'язок нелінійної задачі.

Якщо вільну поверхню апроксимувати коливаннями по власній формі

$$\xi \approx \xi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} + \xi_{00} \quad (32)$$

при $\omega \approx 2\omega_{nm}$, то $\varphi_1 \approx \varphi_{nm}(t) \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{b} \frac{\text{ch}[k_{nm}(z+h)]}{\text{ch}(k_{nm}b)}$.

Використовуючи нелінійну граничну умову (6) для потенціалу $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2$, застосовуючи розкладання в околиці $x=0$ і зберігаючи члени $O(\varepsilon_1^{3/2})$ (де

$\varepsilon_1 = \frac{a}{g} \omega_{nm}^2$), в результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \varepsilon_1 \cos \omega t \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_{0j}(t) \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\text{ch}[\alpha_{0j}(x-L)]}{\text{ch} \alpha_{0j}} + \\ + \varepsilon_1 \sin \omega t \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Phi}_{mj}(t) \cos \frac{m\pi y}{b} \cos \frac{j\pi z}{h} \frac{\text{ch}[\alpha_{mj}(x-L)]}{\text{ch} \alpha_{mj}}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\text{де } \tilde{\Phi}_{0j} = \frac{-4g}{\omega_{nm}^2 \alpha_{0j} \text{th}(\alpha_{0j}L)} \int_{-h}^0 \frac{z}{h} \cos \frac{j\pi z}{h} dz;$$

$$\tilde{\Phi}_{mj} = -\frac{g \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2}{\omega_{nm}^2 \alpha_{mj} \text{th} \alpha_{mj} L k_{nm} \text{th}(k_{nm}h)} \int_{-h}^0 \frac{z}{h} \cos \frac{j\pi z}{h} dz, \quad j \neq 0; \quad (34)$$

$$\tilde{\Phi}_{m0} = -\frac{g \left[\frac{3}{2} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{k_{nm} \text{th} k_{nm} h}{h} \right]}{\omega_{nm}^2 h \alpha_{m0} \text{th} \alpha_{m0} L (k_{nm} \text{th} k_{nm} h)}, \quad j=0.$$

Знайдений вигляд потенціалу φ_2 вказує на можливість параметричного збудження хрестоподібних хвиль (оскільки $\tilde{\Phi}_{mj} \neq 0$ при $m \neq 0$), якщо φ_2 підставити у динамічну (3) та кінематичну (4) граничні умови.

Таким чином, вперше сформульовано математичну проблему та запропоновано методику отримання рішення, яке описує безпосередню перекачку енергії від хвиле-

продуктора в хрестоподібні хвилі. Всі попередні рішення [7] базувались на математичних моделях для напівнескінчених каналів, де глибина чи довжина були нескінченними.

Бібліографічні посилання

1. Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces / M. Faraday // Phil. Trans. R. Soc. London. - 1831. - A121. - P. 299-340.
2. Rayleigh. On the crispations of fluid resting on a vibrating support / Rayleigh // Phil. Mag. (Ser. 5). - 1883. - 16. - P. 50-58.
3. Garrett C. J. R. Cross waves / C. J. R. Garrett // J. Fluid Mech. - 1970. - 41. - P. 837-849.
4. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides / G. Lamé. - Paris: Bachelier, 1852. - 335 p.
5. Ламб Г. Гидродинамика. Пер. с англ. / Г. Ламб. - М.-Л.: Гостехтеориздат, 1947. - 928 с.
6. Miles J. W. Surface-wave damping in closed basins / J. W. Miles // Proc. R. Soc. London. - 1967. - A297. - P. 459-475.
7. Miles J. W. Parametrically excited, standing cross-waves / J. W. Miles // JFM. - 1988. - 186. - P. 119-127.

Надійшла до редколегії 01.05.11

УДК 539.3: 531.252.3

В. І. Кузьменко, Т. В. Хитрова

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО ТІЛА

Звертається увага на деякі класи обернених задач і вказуються напрямки практичного застосування розв'язків таких задач. Розглядаються підходи до розв'язання, що ґрунтуються на формулюваннях у вигляді операторних рівнянь та задач оптимального керування, а також на використанні загальних розв'язків та функцій Гріна. Відзначається некоректність більшості обернених задач і пропонуються деякі прийоми регуляризації.

Ключові слова: обернена задача, функціональне рівняння, екстремальне формулювання, загальні розв'язки, функція Гріна.

Обращается внимание на некоторые классы обратных задач и указываются направления практического применения решений таких задач. Рассматриваются подходы к решению, основанные на формулировках в виде операторных уравнений и задач оптимального управления, а также на использовании общих решений и функций Грина. Отмечается некорректность большинства обратных задач, и предлагаются некоторые приемы регуляризации.

Ключевые слова: обратная задача, функциональное уравнение, экстремальная формулировка, общие решения, функция Грина.

Attention to some classes of the inverse problems and ways of practice use of such problem's solutions are indicated is paid. The solution approaches, which are based on formulation as operator equations and optimal control problems, and also on general solutions and Green functions, are considered. Non-correctness of the most inverse problems is mentioned and some methods of regularization are proposed.

Key words: inverse problem, functional equation, extreme formulation, general solutions, Green function.

Пряма задача вивчення технічних систем полягає в аналізі функціонування систем фіксованої структури за відомих зовнішніх впливів. Однак практика проектування систем вимагає відповіді на питання іншого характеру. Якою повинна бути будова системи, як сформулювати зовнішню дію на систему, щоб забезпечити потрібне її функціонування? Саме це коло питань і створює проблематику обернених задач.

Спочатку сформулюємо пряму задачу механіки деформованого тіла. Нехай відомі форма тіла та механічні властивості матеріалу, які характеризуються певними визначальними співвідношеннями. Вважаються заданими зовнішні сили, що діють на тіло. Пряма задача полягає у визначенні параметрів напружено-деформованого стану всередині тіла.

Згідно із логікою, при формулюванні обернених задач слід вважати відомими (повністю або частково) параметри напружено-деформованого стану. Обернена задача полягає у визначенні характеристик, які вважаються відомими у разі постановки прямої задачі. Очевидна непевність у формулюванні обернених задач обумовлена сутністю проблеми. На відміну від прямої задачі, єдине формулювання відповідної оберненої задачі неможливе. Існує низка задач, які можуть вважатись оберненими за відношенням до конкретної прямої задачі.

Робота має на меті постановку деяких перспективних класів обернених задач, які, з одного боку, мають очевидне практичне значення, і, з іншого боку, для яких сформульовані підходи до їх розв'язання і отриманні перші результати.

Обернені задачі калібрування технологічного інструменту. Низка процесів прецизійної обробки металів тиском відбувається за відносно малих пластичних деформацій, що мають один порядок із пружними деформаціями заготовки та інструменту. Тому після розвантаження і пружного відновлення форма готового виробу може істотно відрізнитись від форми заготовки у момент початку розвантаження. Задача калібрування інструменту полягає у визначенні його, за якої виріб після деформування і розвантаження набуває потрібного вигляду.

Розглянемо один з можливих підходів до розв'язання такого класу обернених задач. Нехай на частині поверхні Γ заготовка знаходиться під дією інструмента, форма якого описується рівнянням $\Phi(x) = 0; x \in \Gamma$. Форма поверхні готового виробу повинна описуватись рівнянням $\Psi_0(x) = 0$. Після пружно-пластичного деформування і пружного розвантаження поверхня заготовки набуває форми, яка описується функцією $\Psi(x)$. Обернена задача формулюється як задача визначення функції $\Phi(x)$, за якою залишкова форма поверхні виробу описується рівнянням $\Psi_0(x) = 0$.

Подано обернену задачу у вигляді задачі розв'язання функціонального рівняння. Нехай $\bar{q}_p(x)$ – розподіл контактних напружень у момент початку розвантаження. Введемо оператор Q_p , який кожній формі інструменту ставить у відповідність розподіл контактних напружень, отриманих як розв'язок прямої задачі

$$\bar{q}_p(x) = Q_p[\Phi(x)].$$

Оператор Q_e також ставить у відповідність $\Phi(x)$ розподіл контактних напружень, але отриманих у припущенні про пружну деформацію матеріалу заготовки

$$\bar{q}_e(x) = Q_e[\Phi(x)].$$

Через Q_e^{-1} позначимо оператор, обернений до оператора Q_e . Утворимо суперпозицію $Q_e^{-1}Q_p$ операторів, яка кожній формі інструменту ставить у відповідність зміну форми заготовки лише внаслідок пружного розвантаження. Тоді залишкову форму поверхні заготовки характеризує функція

$$\Psi(x) = \Phi(x) - Q_e^{-1}Q_p[\Phi(x)].$$

Задача калібрування інструменту зводиться до розв'язання функціонального рівняння

$$\Phi(x) = P[\Phi(x)], \quad P[\Phi(x)] = \Phi_0(x) + Q_e^{-1} Q_p \Phi(x). \quad (1)$$

Розв'язок такого рівняння можна отримати за допомогою ітераційного процесу

$$\Phi_{n+1}(x) = P[\Phi_n(x)], n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Після введення відповідного банахового простору, до якого належать функції $\Phi(x), \Psi(x), \Psi_0(x)$, вдалось довести, що оператор P є оператором стиснення [1]. З використанням принципу С. Банаха доведено існування єдиного розв'язку функціонального рівняння (1) та обґрунтована збіжність ітераційного процесу (2). Установлено також, що, на відміну від більшості обернених задач, задача калібрування інструменту є коректна за 3-ю умовою Адамара. Цей висновок можна пояснити тим, що як задана, так і шукана функції належать до одного і того ж функціонального простору.

Приклади розв'язання деяких задач калібрування інструменту наводяться в [1; 6].

Обернені задачі створення потрібного напружено-деформованого стану. Нехай тіло займає область Ω , обмежену поверхнею Γ . В області Ω виділяється область ω , у якій параметри напружено-деформованого стану повинні задовольняти певні умови. Джерелом таких умов можуть бути конструктивні або технологічні вимоги, а також умови безпечної експлуатації. Укажемо на проблему визначення додаткового навантаження, за якого в області ω блокувався б процес поширення тріщин, або на проблему створення умов для «заліковування» дефектів. Як обернені задачі можуть бути сформульовані задачі покращення кристалічної структури металів під пластичною деформацією, або задачі створення попередніх напружень, за яких зменшуються енерговитрати при обробці металів тиском.

Обернена задача полягає у визначенні зовнішніх зусиль на поверхні Γ , за яких в області ω виконуються зазначені умови. Формалізуємо ці умови за допомогою системи рівностей та нерівностей. Позначимо через $\bar{u}(x), \hat{\sigma}(x)$ вектор переміщень та тензор напружень у точці $x \in \omega$. Тоді умови, що накладаються на $\bar{u}(x), \hat{\sigma}(x)$ запишемо у вигляді

$$\Phi_m(x, \bar{u}, \hat{\sigma}) = 0; x \in \omega; m = 1, 2, \dots, M, \quad \Psi_n(x, \bar{u}, \hat{\sigma}) \geq 0; x \in \omega; n = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Оскільки джерело умов (3) лежить поза межами механіки деформованого тіла, то і виконання цих умов може суперечити виконанню умов рівноваги та сумісності деформацій. Тому замінимо умови (3) більш слабкою умовою мінімуму середньоквадратичного відхилення від виконання цих умов у такому вигляді

$$I = \sum_{m=1}^M \alpha_m \int_{\omega} \Phi_m^2(x, \bar{u}, \hat{\sigma}) d\omega + \sum_{n=1}^N \beta_n \int_{\omega} \{ \max[0, \Psi_n(x, \bar{u}, \hat{\sigma})] \}^2 d\omega, \quad (4)$$

де α_m, β_n – вагові коефіцієнти.

Прикладемо до поверхні тіла навантаження $\bar{q}(x), x \in \Gamma$. Під $\bar{u}(x), \hat{\sigma}(x), x \in \omega$ будемо розуміти вектор переміщень та тензор напружень, отримані як розв'язок відповідної крайової задачі, для них виконуються рівняння рівноваги та умови сумісності. Якщо ввести певний клас вектор-функцій $\bar{q}(x)$, то тоді йому відповідає клас розв'язків крайової задачі. Саме на цьому класі і будемо розшукувати розв'язок задачі мінімізації функціоналу I , який фактично є функціоналом від $\bar{q}(x)$.

Слід очікувати, що в конкретних задачах цього класу виявиться їх некоректність за третью умовою Адамара. Причину цього явища треба шукати в тому, що за значних змін у зовнішньому навантаженні (за умови збереження інтегральних характеристик) зміни у напружено-деформованому стані всередині області, згідно із принципом Сен-Венана, можуть бути незначними.

Розглянемо два можливих підходи до розв'язання обернених задач цього типу в разі лінійно-пружних тіл. Один з них ґрунтується на використанні загальних розв'язків рівнянь теорії пружності, інший – на використанні функцій Гріна [2; 4; 8; 11].

Пояснимо ідею використання загальних розв'язків в обернених задачах на прикладі задачі визначення напружень на Γ , за яких в області ω виникає потрібне поле переміщень \vec{u}^* .

Помістимо область ω в кулю ω_R з радіусом R і доповнимо означення \vec{u}^* на всю кулю ω_R . Введемо сферичну систему координат $0r\theta\phi$ з початком у центрі кулі. Вважаємо, що $u_\phi = 0$, а u_r, u_θ не залежать від ϕ . Відомо [9], що функції

$$\begin{aligned} u_r^{(k)}(r, \theta) &= \left[A_k \left(\frac{r}{R} \right)^{k+1} (k+1)(k-2+4\nu) + B_k \left(\frac{r}{R} \right)^{k-1} \cdot k \right] P_k(\cos\theta), \\ u_\theta^{(k)}(r, \theta) &= \left[A_k \left(\frac{r}{R} \right)^{k+1} (k+5-4\nu) + B_k \left(\frac{r}{R} \right)^{k-1} \right] \frac{dP_k(\cos\theta)}{d\theta} \end{aligned} \quad (5)$$

є розв'язками системи рівнянь Ляме за будь яких значень A_k, B_k . В (5) позначено через $P_k(\cos\theta)$ – поліноми Лежандра, через ν – коефіцієнт Пуассона.

Утворимо лінійну комбінацію цих розв'язків:

$$u_r^{(n)} = \sum_{k=1}^n u_r^{(k)}; u_\theta^{(n)} = \sum_{k=1}^n u_\theta^{(k)}$$

і позначимо через V_n множину таких лінійних комбінацій $\{u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}\}$. Тоді задача полягає у знаходженні такого елемента $\{\tilde{u}_r^{(n)}, \tilde{u}_\theta^{(n)}\} \in V_n$, для якого функціонал

$$I(u_r^{(n)}, u_\theta^{(n)}) = \int_{\omega_R} \left[(u_r^{(n)} - u_r^*)^2 + (u_\theta^{(n)} - u_\theta^*)^2 \right] d\omega$$

набуває найменшого значення на V_n . Фактично задача зводиться до мінімізації квадратичної форми від A_k, B_k ($k=1, 2, \dots, n$). Використовуючи необхідну умову екстремуму, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Завдяки властивостям ортогональності поліномів Лежандра така система розпадається на сукупність незалежних систем із двох рівнянь відносно A_k, B_k .

Некоректність такої оберненої задачі виявляється у тому, що ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_r^{(k)}(r, \theta), \sum_{k=1}^{\infty} u_\theta^{(k)}(r, \theta)$$

є розбіжні при $r > R$. Для подолання цієї проблеми доцільно скористатися методом регуляризації сум узагальнених рядів Фур'є [10]. За допомогою такого підходу можна досягти збіжності рядів і поза областю ω_R , більше того, контролювати ступінь гладкості сум рядів. Для отримання шуканих зусиль на Γ достатньо обчислити напруження за даними переміщеннями і знайти їх слід на поверхні Γ .

Якщо для відповідної прямої задачі фактично побудована тензор-функція Гріна, то розв'язання оберненої задачі можна звести до задачі оптимального керування. Позначимо через $G^{(k)}(P, Q)$ тензор напружень у точці $Q \in \Omega$ як результат дії одиничної сили, прикладеної в точці $P \in \Gamma$ у напрямку осі Ox_k декартової системи координат Ox_1, x_2, x_3 . Нехай на поверхні Γ діє розподілене навантаження $\bar{S}(P) = (S_1(P), S_2(P), S_3(P))$. Під дією цього навантаження в точці $Q \in \Omega$ виникає напружений стан, який характеризується тензором

$$\hat{\sigma}(Q) = \int_{\Gamma} \sum_{k=1}^3 G^{(k)}(P, Q) S_k(P) d\Gamma. \quad (6)$$

Тоді обернена задача зводиться до визначення вектор-функції $\bar{S}(P)$, для якої напруження, визначені згідно із (6), надають значення точної нижньої грані функціоналу (4). Для регуляризації задачі зручно скористатись методом А. М. Тихонова [10], обираючи за стабілізатор функціонал

$$T(\bar{S}) = \int_{\Gamma} (\bar{S} \cdot \bar{S} + \text{grad} S_k \cdot \text{grad} S_k) d\Gamma.$$

Дискретизація екстремальної задачі ґрунтується на розбитті поверхні Γ та області ω на елементарні підобласті, в межах яких підінтегральні функції вважаються сталими. Виникає скінченно-вимірна екстремальна задача, для розв'язання якої можна рекомендувати застосування методу локальних варіацій.

Приклади застосування функцій Гріна в обернених задачах плоскої деформації наводяться в [2; 4].

Обернені задачі з'єднання матеріалів. При виготовленні шаруватих композитів істотне значення має міцність та довговічність з'єднання окремих шарів між собою. Зазвичай таке з'єднання реалізується шляхом склеювання чи дифузійного зварювання. Найважливішими чинниками для міцності з'єднувального шва є напруження та температура на поверхнях з'єднання у процесі виготовлення композитних виробів. Оптимальні умови з'єднання визначаються експериментально. Обернена задача з'єднання матеріалів формулюється як задача визначення зовнішнього навантаження та теплового потоку, за яких умови на поверхнях з'єднання будуть оптимальними. При постановці обернених задач цього класу слід брати до уваги можливість малого пружно-пластичного деформування в умовах досить високих температур.

Приклад розв'язування оберненої задачі про з'єднання двох шарів дифузійним зварюванням за умови пружної деформації та сталої температури розглядається в [3].

Обернені задачі та експериментально-розрахункові методи. Експериментальні дослідження дають безпосередню інформацію про напружено-деформований стан деформованого тіла, не спотворену апріорними припущеннями. Однак можливості експериментальних методів досить обмежені. Значні труднощі виникають у разі вимірювання всередині тіла або на контактних поверхнях. Зазвичай вдається виміряти параметри напружено-деформованого стану лише в окремих точках чи областях тіла. Тому виникає проблема відновлення переміщень та напружень за неповною експериментальною інформацією.

Застосування відомих методів інтерполяції та екстраполяції дає принципову можливість обчислення переміщень або напружень в усій області поза точками вимірювань. Однак відновлені у такий спосіб поля переміщень, взагалі кажучи, не задовольняють рівняння Ляме, а поля напружень – рівняння рівноваги та рівняння сумісності. Тому задачу відновлення за експериментальними даними слід форму-

лювати як задачу побудови полів переміщень (або напружень), які в усіх точках області Ω задовольняють відповідні рівняння, а в точках вимірювання будуть близькими до експериментальних значень. За критерій близькості зручно обирати середньоквадратичну різницю розрахункових і експериментальних величин.

У разі відсутності масових сил можна скористатись відомими розв'язками рівнянь Ляме і принципом суперпозиції. Нехай $\bar{\varphi}_1(x), \bar{\varphi}_2(x), \dots, \bar{\varphi}_n(x)$ – лінійно незалежні розв'язки рівнянь Ляме. Утворимо лінійну комбінацію цих розв'язків

$$\bar{u}^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n C_i \bar{\varphi}_i(x),$$

яка теж задовольняє рівняння Ляме. Коефіцієнти C_1, C_2, \dots, C_n знаходимо із умови мінімального середньоквадратичного відхилення значень $\bar{u}^{(n)}(x)$ від експериментальних значень $\bar{u}^*(x)$. Така умова приводить до задачі мінімізації квадратичної функції змінних C_1, C_2, \dots, C_n . Кількість n доданків у лінійній комбінації слід обирати так, щоб відмінність між $\bar{u}^{(n)}(x)$ та $\bar{u}^*(x)$ мала порядок похибки експерименту. Більш детальний розвиток такого підходу можна знайти в [7].

Особливо складним і водночас важливим є вимірювання контактних напружень. Зокрема, це важливо для вивчення закономірностей тертя та інших особливостей контактної взаємодії. Один із можливих шляхів визначення контактних напружень може полягати у вимірюванні напружень поза межами поверхні контакту із подальшим перерахунком. Такий перерахунок ґрунтується на розв'язанні оберненої задачі визначення зусиль на поверхні тіла, зокрема, на контактній поверхні, за експериментальними вимірюваннями поза поверхнею контакту.

Проблеми розташування та розміру бази вимірювань, оцінка впливу цих факторів на точність відновлення контактних напружень обговорюються в [5].

Висновки. Безпосередні запити практики потребують розв'язання саме обернених задач. Група таких задач, на відміну від прямих, не має чіткої проблематики. В роботі розглянуті лише деякі класи обернених задач та вказані можливі підходи до їх дослідження. Своєрідність постановок та відсутність єдиної методології розв'язання, поряд із можливостями широкого практичного застосування, мають стимулювати подальший розвиток цього напрямку механіки деформованого тіла.

Бібліографічні посилання

1. Кузьменко В. И. К обратным контактным задачам теории пластичности / В. И. Кузьменко // ПММ, 1986. – Т.50. – №3. – С. 475 – 483.
2. Кузьменко В. И. Нелинейные обратные задачи теории упругости / В. И. Кузьменко // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. - №6. – С. 90 – 97.
3. Кузьменко В. И. О реализации оптимального давления при выполнении клеевых и диффузионных соединений / В. И. Кузьменко // Изв. вузов. Машиностроение, 1989. - №11. – С. 132 –134.
4. Кузьменко В. И. Обратные контактные задачи для упругой полуплоскости / В.И. Кузьменко // Трение и износ, 1990. – Т. 11. - №3. – С. 416 – 422.
5. Кузьменко В. И. Расчёт контактных напряжений по результатам измерений внутри детали / В. И. Кузьменко // Пробл. машиностроения и надежности машин, 1990. - №5. –С. 50 – 55.
6. Данченко В. Н. Компьютерное моделирование процессов обработки металлов давлением / В. Н. Данченко, А. А. Миленин, В. И. Кузьменко, В. А. Гринкевич. – Дн., 2005. – 448 с.
7. Кузьменко В. І. Про один підхід до відновлення фізичних полів за неповною або неточною інформацією. / В. І. Кузьменко, В. Д. Ламзюк, Т. В. Кузьменко // Науковий вісник НГУ, 2006. – №3. – С. 60 – 62.

8. Кузьменко Т. В. Загальні розв'язки в обернених задачах теорії пружності. / Т. В. Кузьменко, В. Д. Ламзюк // Математичні проблеми технічної механіки – 2007 Міжн. наук. конф.: тези доп. – С. 111.
9. Партон В. З. Методы математической теории упругости / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М., 1981. – 688 с.
10. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М., 1986. – 288 с.
11. Хитрова Т. В. Обернені задачі створення напружено-деформованого стану / Т. В. Хитрова // Математичні проблеми технічної механіки – 2011: Міжн. наук. конф.: тези доп. – Т. 1. – С. 51.

Надійшла до редколегії 21.04.11.

УДК 539.3

Р. М. Кушнір, А. В. Ясінський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

ОПТИМІЗАЦІЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ РЕЖИМІВ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ПРУЖНОПЛАСТИЧНИХ ТІЛ

Сформульовано математичну постановку та побудовано алгоритми числового розв'язування задач оптимального за швидкодією керування нагріванням однорідних термочутливих тіл канонічної форми. Визначено керування (температуру нагрівального середовища, тепловий потік на одній із граничних поверхонь), яке за мінімальний час переводить тіло з початкового теплового стану до кінцевого, що характеризується заданою середньоінтегральною температурою. При цьому враховано обмеження як на функцію керування, так і на максимальне значення інтенсивності дотичних напружень чи накопиченої пластичної деформації зсуву.

Ключові слова: оптимальне керування, температурні напруження, обернена задача, пружнопластичний стан.

Сформулирована математическая постановка и построены алгоритмы численного решения задач оптимального по быстродействию управления нагревом однородных термочувствительных тел канонической формы. Определено управление (температура греющей среды, тепловой поток на одной из граничных поверхностей), которое за минимальное время переводит тело с начального теплового состояния в конечное, характеризуемое заданной среднеинтегральной температурой. При этом учтены ограничения как на функцию управления, так и на максимальные значения интенсивности касательных напряжений либо накопленной пластической деформации сдвига.

Ключевые слова: оптимальное управление, температурные напряжения, обратная задача, упругопластическое состояние.

A mathematical statement has been formulated and algorithms for solving problems on fast operation optimal heating control of homogeneous thermosensitive canonical form bodies has been developed. We have determined the control (the surrounding temperature at one of the boundary surfaces or heat flux at one of the boundary surfaces) which in a minimal time carries the body from the initial thermal state to the final one, characterized by the given mean-integral temperature. In addition, restrictions on the control function and the maximal tangential stress intensity or accumulated plastic shear strain have been considered.

Key words: optimal control, thermal stresses, inverse problem, elastoplastic state.

Низка сучасних технологічних процесів виготовлення та експлуатації елементів конструкцій, зокрема в металургійній та машинобудівній галузях промисловості, передбачає їх термічну обробку. З точки зору підвищення продуктивності таких процесів та мінімізації енергетичних затрат актуальною є проблема мінімізації часу нагрівання чи охолодження виробу на етапі термічної обробки [1 – 3; 9]. Нерівномірний розподіл температури в тілі приводить до виникнення в ньому полів напружень, перевищення якими допустимих значень може зумовити появу і розвиток пластичних деформацій [4; 5; 10; 11]. Тому з метою забезпечення відповідних міцнісних характе-

ристик і проектних функціональних властивостей елементів конструкцій при визначенні режимів їх найшвидшого нагрівання (охолодження) потрібно враховувати обмеження на параметри теплового і напружено-деформованого станів [1 – 3; 6; 9; 12 – 14]. Оскільки більшість таких процесів відбувається за умов інтенсивного теплового навантаження тіла та у широкому діапазоні температур, то важливим є врахування залежності фізико-механічних властивостей матеріалу від температури [8; 11].

Постановка задачі оптимізації. Розглянемо вільне від зовнішнього силового навантаження ізотропне термочутливе тіло, яке займає деяку область V з границею Σ . Нехай зміна температури тіла відбувається внаслідок конвективного теплообміну з навколишнім середовищем за законом Ньютона. Температурне поле тіла $T(x, \tau_*)$, коли в ньому відсутні внутрішні теплові джерела і можна знехтувати теплотворенням від деформування, задовольняє рівняння теплопровідності

$$\operatorname{div}(\lambda_* \operatorname{grad} T(x, \tau_*)) = c_V^* \frac{\partial T(x, \tau_*)}{\partial \tau_*} \quad (x \in V, \tau_* > 0) \quad (1)$$

де $\lambda_* = \lambda_*(T)$ – коефіцієнт теплопровідності; $c_V^* = c_V^*(T)$ – питома об'ємна теплоємність; $x = (x_1, x_2, x_3)$ – точка з області V ; τ_* – час.

Вважатимемо, що можна керувати температурою середовища $u(x, \tau_*)$, яке оточує деяку частину граничної поверхні тіла Σ_u , тобто на частині граничної поверхні Σ_u теплообмін

$$\lambda_* \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_u (T - u) = 0 \quad (x \in \Sigma_u) \quad (2)$$

є керований, а на решті поверхні $\Sigma_\theta = \Sigma \setminus \Sigma_u$ – заданий

$$\lambda_* \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha_\theta (T - \theta) = 0 \quad (x \in \Sigma_\theta). \quad (3)$$

Тут α_u, α_θ – коефіцієнти теплообміну на поверхнях Σ_u і Σ_θ відповідно; $\theta(x, \tau_*)$ – задана температура середовища, яке оточує частину граничної поверхні Σ_θ ; n – зовнішня нормаль до поверхні Σ .

Задача оптимізації полягає у визначенні такого керування $u(x, \tau_*)$, яке задовольняючи умову

$$U_1(x, \tau_*) \leq u(x, \tau_*) \leq U_2(x, \tau_*) \quad (x \in \Sigma_u, \tau_* \geq 0) \quad (4)$$

та забезпечуючи виконання обмеження

$$RT(x, \tau_*) \leq N(T, \tau_*) \quad (x \in \bar{V}), \quad (5)$$

за мінімальний час $\tau_0 = \min \tau_*$ переведе тіло із початкового стану

$$T(x, 0) = T_0(x) \quad (x \in \bar{V}) \quad (6)$$

у кінцевий, що характеризується заданою середньоінтегральною температурою

$$T_c(\tau_0) = \frac{1}{V_*} \int_V T(x, \tau_0) dV = T_* \quad (7)$$

Тут $U_i(x, \tau_*)$ ($i=1,2$) – відповідно нижня ($i=1$) та верхня ($i=2$) границі обмеження на функцію керування; $RT(x, \tau_*)$ – деякий оператор, за допомогою якого виражаються параметри напружено-деформованого стану тіла, на які накладається задане обмеження $N(T, \tau_*)$; $T_0(x)$ – початкова температура тіла; V_* – об'єм області V ; T_* – задана середньоінтегральна температура; $\bar{V} = V \cup \Sigma$.

За оператор R в умові (5) братимемо максимальне значення інтенсивності дотичних напружень в тілі $S = (s_{ij}s_{ij}/2)^{1/2}$ або максимальну величину накопиченої пластич-

ної деформації зсуву $\Gamma_p = \int_0^{\tau_*} \left(\frac{1}{2} \dot{e}_{ij}^{(p)} \dot{e}_{ij}^{(p)} \right)^{1/2} d\tau_*$ [10, 11], де s_{ij} – компоненти девіатора

напружень; $\dot{e}_{ij}^{(p)}$ – похідна за часом від компонент девіатора пластичних деформацій.

При побудові розв'язків сформульованих задач оптимізації припускається керованість розглядуваного процесу, тобто вважається, що умови теплового навантаження забезпечують виникнення і розвиток у тілі пластичних деформацій, а функції $U_i(x, \tau_*)$ ($i=1,2$), $N(T, \tau_*)$, $T_0(x)$ та стала T_* задані так, що можливим є досягнення кінцевої мети нагрівання (7).

Зазначимо, що за функцію керування може бути вибраний також тепловий потік на поверхні Σ_u , оскільки з граничної умови третього роду (2) можна отримати граничну умову другого роду.

Алгоритм розв'язання задачі. Для побудови розв'язку сформульованої задачі оптимізації використаємо метод оберненої задачі термомеханіки [2; 3]. Згідно з ним оптимальне за швидкодією керування приймаємо рівним верхній межі гранично допустимого обмеження

$$u(x, \tau_*) = U_2(x, \tau_*) \quad (x \in \Sigma_u, \tau_* \geq 0). \quad (8)$$

або таким, що забезпечує виконання рівності

$$RT(x, \tau_*) = N(T, \tau_*). \quad (9)$$

Це означає, що найшвидше нагрівання тіла за обмежень (4) та (5) здійснюється по верхній межі одного із цих обмежень. Очевидно, що при такому підході найшвидше охолодження тіла буде здійснюватися по нижній межі одного із наведених обмежень. Через це розв'язання задачі оптимального за швидкодією керування нагріванням тіла здійснюємо поетапно.

Етап 1. На першому етапі припускаємо, що початковий розподіл температури $T_0(x)$ задовольняє умову (5) і розв'язуємо пряму задачу термопластичності за умови (8). Якщо у процесі нагрівання тіла за законом (8) умова (5) завжди виконується, то оптимальне за швидкодією керування визначаємо із умови (8) до моменту досягнення кінцевої мети нагрівання (7).

Оскільки задача теплопровідності (1) – (3), (6) є нелінійною, то її розв'язок будемо визначати числово за допомогою методу скінченних елементів [7].

Пружнопластичне деформування тіла будемо досліджувати в межах теорії неізотермічного деформування елементів тіла за траєкторіями малої кривини [11]. Відповідно до цієї теорії за основну систему диференціальних рівнянь виберемо рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (10)$$

та рівняння сумісності Сен-Венана

$$\varepsilon_{ij,km} + \varepsilon_{km,ij} + \varepsilon_{ik,jm} + \varepsilon_{jm,ik} = 0 \quad (i, j, k, m = 1, 2, 3). \quad (11)$$

де σ_{ij} , ε_{ij} – компоненти тензора напружень та повних деформацій.

Компоненти тензора напружень задовольняють однорідні граничні умови

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Sigma} = 0. \quad (12)$$

де n_j ($j = 1, 2, 3$) – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні тіла у відповідній точці.

Визначальні фізичні рівняння, які пов'язують між собою компоненти тензора напружень і деформацій матимуть вигляд [11]

$$de_{ij} = \frac{ds_{ij}}{2G} - \frac{s_{ij}}{2G^2} \frac{\partial G}{\partial T} dT + de_{ij}^{(p)},$$

$$de_{ij}^{(p)} = \frac{d\Gamma_p}{S} s_{ij} = (F_s dS + F_T dT) s_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (13)$$

де F_s і F_T визначаємо на основі миттєвої термомеханічної поверхні $\sigma = f(\varepsilon, T)$

[11]. Тут $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}$, $e_{ij}^{(p)} = \varepsilon_{ij}^{(p)}$ – відповідно компоненти девіатора повних і пластичних деформацій;

$\varepsilon_{ij}^{(p)}$ – компоненти тензора пластичних деформацій;

$\varepsilon_0 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})/3$ – середнє видовження; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$ – компоненти девіатора напружень;

$\sigma_0 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ – середнє напруження; δ_{ij} – дельта-символ

Кронекера; G – модуль зсуву.

Оскільки сформульована вище задача термопластичності є нелінійною, то для її розв'язання скористаємося методом додаткових деформацій [10, 11]. З цією метою, аналогічно до задачі теплопровідності, процес деформування елементів тіла розбиваємо на ряд малих етапів за часом. Інтегруючи співвідношення (13) вздовж усього шляху деформування і сумуючи при цьому прирости пластичних деформацій за етап, в кінці m -го етапу навантаження отримаємо залежності

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E_0} \left((1 + \nu_0) \sigma_{ij} - 3\nu_0 \sigma_0 \delta_{ij} \right) + \varepsilon_T \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^0, \quad (14)$$

де

$$\varepsilon_{ij}^0 = \frac{E(1 + \nu_0)}{E_0(1 + \nu)} \sum_{k=1}^m \Delta_k e_{ij}^{(p)} + \left(1 - \frac{E(1 + \nu_0)}{E_0(1 + \nu)} \right) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_0 \delta_{ij}) + \left(1 - \frac{E(1 - 2\nu_0)}{E_0(1 - 2\nu)} \right) (\varepsilon_0 - \varepsilon_T) \delta_{ij},$$

$\varepsilon_T = \alpha_T (T - T_0)$ – теплова деформація; $\alpha_T = \alpha_T(T)$ – коефіцієнт лінійного теплового розширення; E_0, ν_0 – значення відповідно модуля Юнга $E(T)$ і коефіцієнта Пуассона $\nu(T)$ при початковій температурі; $\Delta_k e_{ij}^{(p)}$ – приріст компонент девіатора пластичних деформацій за етап.

Співвідношення (14) виражають узагальнений закон Гука для ізотропного однорідного тіла зі сталими параметрами пружності та додатковими деформаціями ε_{ij}^0 , що враховують як пластичне деформування матеріалу, так і залежність механічних характеристик від температури [10; 11].

Отже, розв'язання задачі термопластичності зведено до розв'язання на кожному етапі навантаження послідовності задач термопружності для однорідного ізотропного тіла з додатковими деформаціями, що залежать від напружено-деформованого стану і температури.

Етап 2. У момент часу $\tau_* = \tau_k$, коли порушується умова (5), здійснюємо перемикування керування (8) на керування, яке забезпечує виконання умови (9). Ця умова служить умовою спряження температурних режимів, визначених на першому та другому етапах керування, і використовується для визначення часу перемикування τ_k . Отже, починаючи з моменту часу τ_k , переходимо до розв'язання оберненої задачі термопластичності: за заданим допустимим обмеженням $RT(x, \tau_*) = N(T, \tau_*)$ визначаємо відповідну теплову дію – функцію керування $u(x, \tau_*)$.

Для визначення керування дискретний аналог відповідної задачі теплопровідності з невідомою тепер, крім температури, функцією $u(x, \tau_*)$, доповнюємо умовою (9), яка замикає цю систему рівнянь. Умову (9) записуємо через розподіл температури і додаткових деформацій на основі розв'язку задачі термопружності з додатковими деформаціями.

Невідомий в момент часу $\tau_* = \tau_k$ розподіл пластичної деформації, а отже і керування, визначаємо методом послідовних наближень. За початкове наближення для розрахунку пластичних деформацій у момент часу $\tau_* = \tau_k$ приймаємо розподіл пластичних деформацій у момент часу $\tau_* = \tau_{k-1}$. За формулами для ε_{ij}^0 визначаємо початкове наближення додаткових деформацій і розв'язуємо розширену систему рівнянь (1) – (3), (6), (9), тобто визначаємо початкові наближення функції керування і температурного поля у тілі. За знайденим наближенням функції керування на основі розв'язку прямої задачі термопластичності визначаємо перше наближення розподілу пластичних деформацій $(\varepsilon_{ij}^{(p)})^{(k)}$, а за формулами для ε_{ij}^0 – перше наближення додаткових деформацій у момент часу $\tau_* = \tau_k$. У результаті розв'язання оберненої задачі за знайденим наближенням додаткових деформацій визначаємо нове наближення функції керування і температурного режиму. Процес послідовних наближень для моменту часу $\tau_* = \tau_k$ продовжуємо до збігання з наперед заданою точністю двох послідовних наближень керування.

При досягненні функцією керування гранично допустимого значення здійснюємо перехід на перший етап алгоритму розв'язання задачі керування. З умови (8) визначаємо момент перемикування керування. Обчислення припиняємо при досягненні кінцевої мети нагрівання (7).

Числові результати. Розглянемо реалізацію запропонованого алгоритму на прикладі оптимізації температурного режиму для довгого порожнистого циліндра, виготовленого із сталі EI-437 [11]. Приймали, що теплоізольований по внутрішній поверхні циліндр нагрівається через зовнішню поверхню тепловим потоком, який вибрано за функцію керування.

Задача оптимізації полягає у визначенні такого керування, яке, задовольняючи умову (4), за мінімальний час переведе тіло із початкового стану в кінцевий, що характеризується заданим максимальним значенням інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву

$$\max_{\rho \in [k, 1]} \Gamma_P = \Gamma_P^*, \quad (15)$$

та середньоінтегральною температурою (7). Тут Γ_P^* – гранично допустиме значення накопиченої пластичної деформації.

Величина Γ_p – міра накопиченої пластичної деформації в точці і компоненти девіатора пластичних деформацій $e_{ij}^{(p)}$ взаємопов'язані. Зокрема, взаємозв'язок між їх приростами задається співвідношенням (13). Тому умова (15) задає також обмеження на величини $e_{ij}^{(p)}$ і навпаки – обмеження на максимальне значення абсолютної величини однієї з компонент девіатора пластичних деформацій може бути виражене через обмеження (15) на Γ_p .

Відповідно до описаного вище алгоритму, побудову розв'язку задачі оптимізації здійснюємо поетапно.

На *першому* етапі припускаємо виконання умови (8) і розв'язуємо пряму задачу термопластичності.

У момент часу $\tau_* = \tau_k$, коли максимальне значення Γ_p перевищує допустиме Γ_p^* , здійснюємо перехід на *другий* етап алгоритму і визначаємо керування, яке забезпечує виконання умови (15). Для цього дискретний аналог відповідної задачі теплопровідності з невідомою тепер, крім температури, функцією $u(\tau)$ доповнюємо умовою

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)^{(k-1)} + \frac{\sigma^{(k-1)}}{\left(E^{(k-1)} \right)^2} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)^{(k-1)} \right) dT^{(k)} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{E_1^{(k-1)}} + \frac{1}{E^{(k-1)}} \right) dS^{(k)} = \\ = d\Gamma_p^{(k)} = \Gamma_* - \Gamma_p^{(k-1)}, \quad \varepsilon = \frac{S\sqrt{3}}{E} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\Gamma_p, \quad E_1 = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}. \end{aligned} \quad (16)$$

На етапі забезпечення виконання умови (16) можливі два випадки:

$$T_c(\tau_k) < T_c(\tau_0). \quad (17)$$

або

$$T_c(\tau_k) > T_c(\tau_0). \quad (18)$$

Якщо має місце випадок (17), то керування визначаємо аналогічно, як і у момент часу $\tau_* = \tau_k$, поклавши в умові (16) $d\Gamma_p^{(k+1)} = 0$. Задане керування забезпечує додатний приріст температури в точці при її нейтральному навантаженні, тобто рух по термомеханічній поверхні у напрямку збільшення температури. Рух по термомеханічній поверхні в напрямку зменшення температури і збільшення границі текучості є неможливим, оскільки в межах сформульованої задачі нагрівання тіла зменшення температури в максимально навантаженій точці ($dT^{(k+1)} < 0$) зумовлює її пружне розвантаження ($dS^{(k+1)} < 0$). Якщо в деякий момент часу $\tau_* = \tau_m$ знайдене керування перевищує гранично допустиме обмеження, то в цей момент часу переходимо на *перший* етап алгоритму.

У випадку (18) розрахунки проводимо як і на *першому* етапі алгоритму, поклавши при $\tau_* \in [\tau_{k+1}, \tau_0]$ $u(\tau_*) = U_1(\tau_*)$.

На рис. 1 – 4 наведено числові результати розв'язування задачі оптимізації

для циліндра з внутрішнім безрозмірним радіусом $k = R_1/R_2=0,5$, де R_i ($i=1,2$) – відповідно його внутрішній та зовнішній радіуси. Кривою 1 (суцільна лінія) на рис. 1 зображено поведінку в часі оптимального керування, коли $\Gamma_* = 0,001$, $T_* = 270^\circ\text{C}$ і $T_0 = 20^\circ\text{C}$, а кривою 2 (суцільна лінія) – поведінку в часі максимального значення інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву, що відповідає знайденому керуванню. Тут $\tau = \lambda_0 \tau_* / (c_V^0 R_2^2)$ – безрозмірний час; λ_0, c_V^0 – значення коефіцієнта теплопровідності і питомої об’ємної теплоємності за початкової температури. Суцільними лініями 1 – 3 на рис. 2 зображено поведінку в часі величин

$$\max_{\rho \in [k,1]} (\bar{S}), \max_{\rho \in [k,1]} T \text{ та } T_c,$$

які відповідають оптимальному керуванню. Тут $\bar{S} = S\sqrt{3}$. Штрихові лінії 2 на рис. 1 та 1 – 3 на рис. 2, які продовжують суцільні, зображають поведінку відповідних величин у випадку, коли тепловий потік приймає гранично допустиме значення (штрихова лінія 1 на рис. 1) протягом усього процесу нагрівання і обмеження на інтенсивність накопиченої пластичної деформації зсуву відсутнє. З рисунків видно, що знайдене оптимальне керування на проміжках $\tau \in [0, \tau_1]$ та $\tau \in [\tau_2, \tau_0]$ рівне гранично допустимому, в момент часу $\tau = \tau_1$ забезпечує виконання умови (15), а на проміжку $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ забезпечує нейтральне навантаження зовнішньої граничної поверхні.

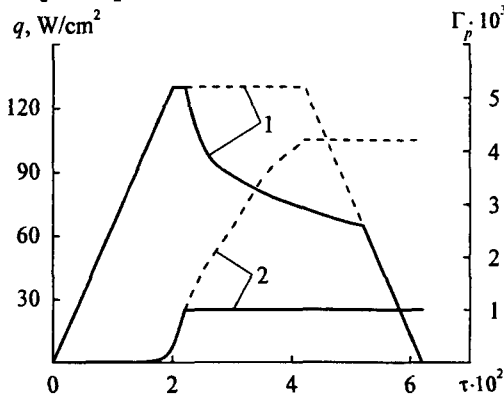


Рис. 1 Поведінка за часом функцій керування (лінія 1) та максимального значення інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву (лінія 2) циліндра

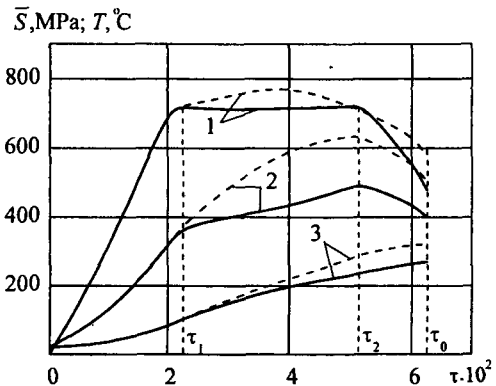


Рис. 2 Поведінка за часом максимального значення інтенсивності дотичних напружень (лінія 1), максимальної (лінія 2) та середньої (лінія 3) температур циліндра

Розподіл за радіусом інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву після зняття теплового навантаження зображено на рис. 3. Суцільна лінія відповідає режиму оптимального керування нагріванням циліндра за наявності обмеження на максимальну величину інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву, а штрихова – режиму за відсутності цього обмеження. Як видно із рисунка, наявність обмеження на максимальну величину інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву приводить також і до зменшення величини пластичної зони. Тут $\rho = r/R_2$ – безрозмірна радіальна координата; r – радіальна координата.

На рис. 4 зображено розподіл за радіусом залишкових напружень. Суцільні лінії відповідають режиму оптимального керування нагріванням циліндра за наявності обмеження на максимальну величину інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву, а штрихові – за його відсутності. Як видно із рисунка, наявність

обмеження на максимальну величину інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву обмежує максимальне значення залишкових напружень.

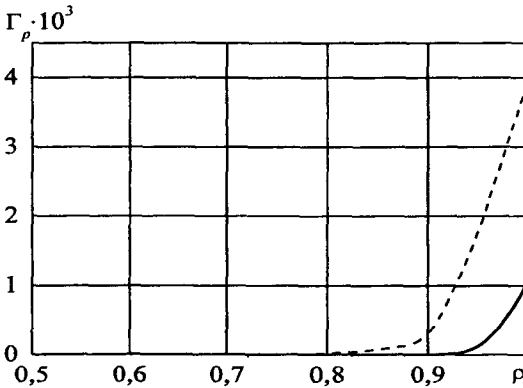


Рис. 3 Розподіл за радіальною координатою інтенсивності накопиченої пластичної деформації зсуву в циліндрі після зняття теплового навантаження

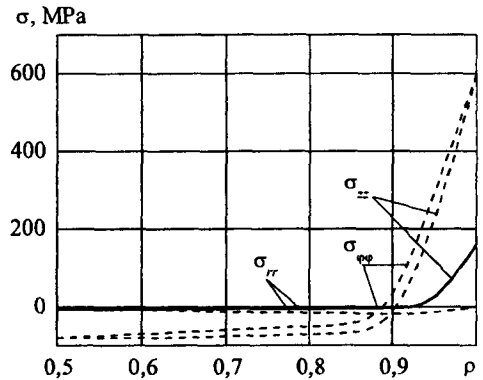


Рис. 4. Розподіл за радіальною координатою залишкових напружень у циліндрі

Аналіз величин радіусів кривини траєкторій деформування максимально навантаженої точки циліндра, побудованих у двовимірному просторі Ільюшина [11], підтвердив правомірність використання для розрахунку напружено-деформованого стану циліндра визначальних співвідношень теорії процесів деформування елементів тіла за траєкторіями малої кривини.

Висновки. Для випадку пружнопластичного деформування матеріалу сформульовано постановки задач оптимального за швидкодією керування нагріванням термочутливих тіл канонічної форми за обмежень на функцію керування (тепловий потік на одній із граничних поверхонь, температура нагрівального середовища) та максимальну величину інтенсивності дотичних напружень або накопиченої пластичної деформації зсуву. За фізичні рівняння вибрано співвідношення, які описують неізотермічні процеси деформування елементів тіла за траєкторіями малої кривини.

На основі методу оберненої задачі термомеханіки побудовано числові алгоритми розв'язання сформульованих задач оптимізації, що передбачають зведення їх до послідовності прямих та обернених задач термопластичності. Нелінійні задачі теплопровідності розв'язані методом скінченних елементів, а лінеаризацію і розв'язання задач термопластичності здійснено за допомогою методу додаткових деформацій.

Знайдені оптимальні за швидкодією температурні режими нагрівання термочутливих тіл дають змогу, шляхом вибору відповідних значень обмежуючих параметрів, керувати рівнем залишкових деформацій і напружень у тілі, що важливо з погляду забезпечення їх міцнісних і функціональних властивостей.

Подальший розвиток досліджень на основі запропонованого вище підходу здійснено також стосовно двовимірних задач оптимізації, зокрема його застосування до їх розв'язування наведено у [13].

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проекту № 04-01-10 (номер держреєстрації 0110U004143) за спільним конкурсом НАН України і РФФД.

Бібліографічні посилання

- Бутковский А.Г. Управление нагревом металла / А.Г. Бутковский, С.А. Малый, Ю.Н. Андреев. –М., 1981. –271 с.
 Вигах В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами / В.М. Вигах. –К., 1979. –360 с.

- Вигак В.М.** Управление температурными напряжениями и перемещениями / В.М. Вигак. –К., 1988. –312 с.
- Гудрамович В.С.** Упругопластические конструкции с несовершенствами формы и остаточными напряжениями / В.С. Гудрамович, А.Ф. Деменков. –К., 1991. –176 с.
- Гудрамович В.С.** Теория ползучести и ее приложения к расчету элементов тонкостенных конструкций / В.С. Гудрамович. –К., 2005. –224 с.
- Гудрамович В.С.** Контактные взаимодействия и оптимизация оболочечных конструкций при локальном нагружении / В.С. Гудрамович, А.П. Дзюба // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 2008. – Т.51. –№ 2. –С. 188 – 201.
- Зенкевич О.** Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. –М., 1986. –319 с.
- Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Т.3: Термопружність термочутливих тіл / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. –Л., 2009. –412 с.**
- Рапопорт Э.Я.** Оптимизация процессов индукционного нагрева металла / Э.Я. Рапопорт. –М., 1993. –280 с.
- Термопрочность деталей машин / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, И.В. Демянушко, Р.А. Дульнев. –М., 1975. –455 с.**
- Шевченко Ю.Н.** Термовязкопластичность / Ю.Н. Шевченко, В.Г. Савченко. –К., 1987. –263 с.
- Ashida F.** Control of transient thermoelastic displacement in a composite disk / F. Ashida, T.R. Tauchert // *J. Thermal Stresses*, 2002. –Vol. 25. –P. 99 – 121.
- Kushnir R.M.** Optimal heating control of thermosensitive rectangular domain under restrictions on stresses in a plastic zone / R.M. Kushnir, A.V. Yasinsky // *J. Thermal Stresses*, 2010. –Vol. 33. –P. 251 – 261.
- Nyashin Y.** Control of thermal stresses and strain / Y. Nyashin, V. Kiryukhin, F. Ziegler // *J. Thermal Stresses*, 2000. –Vol. 23. –P. 309 – 326.

Надійшла до редколегії 04.05.11

УДК 539.3

В. М. Левин, В. А. Митраков

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

ОСОБЕННОСТИ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В МОДЕЛИ КАНТОРОВИЧА – ВЛАСОВА – МИЛЕЙКОВСКОГО

Запропонована координатна система методу часткової дискретизації для можливих переміщень мембранного та згінного станів складчастої системи. Показана необхідність урахування неklasичних узагальнених переміщень ребер складки. Проаналізовано шляхи виключення вироджених ступенів свободи системи.

Ключові слова: складчасті системи, баштові споруди, аппроксимация переміщень, модель Кантаровича – Власова – Милейковського, узагальнені переміщення.

Предложенная координатная система метода частичной дискретизации для возможных перемещений мембранного и изгибного состояния складчатой системы. Показанная необходимость учета неклассических обобщенных перемещений ребер складки. Проанализированы пути исключения вырожденных степеней свободы системы.

Ключевые слова: складчатые системы, башенные сооружения, аппроксимации перемещений, модель Кантаровича – Власова – Милейковського, обобщенные перемещения.

Coordinate system for method of partially discretization in possible strains of the folding system membrane and bending state is proposed. The necessity of nonclassic generalized displacement for ribs of folds is demonstrated. The ways of degenerated degrees of freedom eliminate are analyzed.

Keywords: folding system, tower structures, strains approximations, Kantorovich – Vlasov – Mileikovskiy model, generalized displacements.

Введение. Широкое распространение в различных областях техники складчатых систем (башенные и ёмкостные сооружения, некоторые типы гражданских зданий [1], большепролётные покрытия, металлические коробчатые подкрановые балки, пролётные строения и опоры мостов, стрелы мобильных подъёмных кранов, конструкции летательных аппаратов [2], некоторые другие машиностроительные конструкции и т.д.) обусловили интерес исследователей и расчётчиков к специальным методам их расчёта. Сформировалось особое направление исследований тонкостенных конструкций – теория складок.

Вначале (Г. Элерс, Г. Кремер, Е. Грубер, Дж. Гаафар, Г. Симпсон, В. Тетцлаф, Д. Итцхаки, В.З. Власов, П.Л. Пастернак, И.Е. Милейковский и др.) развиваемые в рамках этой теории методы ориентировались, в основном, на простые задачи расчёта складок покрытия. Они базировались на упрощающих гипотезах, исключающих возможность анализа состояний, характерных для других областей применения складок. Основные из этих допущений – о линейном характере распределения продольных нормальных напряжений и поперечных изгибающих моментов по ширине грани.

Появившиеся позднее работы значительно расширили возможности расчётчиков, в частности, за счёт использования точных решений теории упругости для прямоугольных пластин, базирующихся на разложении перемещений в тригонометрические ряды вдоль продольной координаты (решения Рибьера и Файлона для плосконапряжённого состояния и аналогичные им решения для изгибной задачи). Они были направлены, в основном, на решение задач, возникающих при проектировании либо пролётных строений мостов – К. Клоппель и Ф. Тиль, Б.Е. Улицкий, А.В. Александров, В.Я. Лащенко, либо стальных коробчатых подкрановых балок – Б.Б. Лампси. Применения таких разложений накладывало определённые ограничения на граничные условия на торцах складки, не позволяло рассчитывать складки с проёмами или с переменной толщиной грани (в том числе – кусочно-постоянной в продольном направлении).

Более универсальный характер (однако, без возможности учёта местных состояний) имели появившиеся позднее работы В. З. Власова и И. Е. Милейковского.

Приложение этой теории к расчёту авиационных складчатых конструкций, в том числе – кессонного типа, с переменным или многосвязным поперечным сечением осуществлялось в ряде работ И. Ф. Образцова, А. Н. Елпатьевского, Б. А. Коновалова. Они применяли полигональные и полиномиальные (вдоль поперечной тангенциальной координаты) координатные функции.

Существенным развитием данной теории был метод, предложенный И. Е. Милейковским и названный им «методом исходных уравнений». Этот метод предусматривал составление разрешающей системы уравнений, состоящей из двух подсистем. Первая подсистема формулировала деформационные соотношения в обобщённых параметрах напряжённо-деформированного состояния системы – обобщённых перемещениях (линейные перемещения и повороты окрестности ребра складки), их производных и обобщённых усилиях, соответствующих этим перемещениям, вторая – уравнения равновесия элемента длины складки в обобщённых перемещениях, обобщённых усилиях и их производных. Такая структура разрешающей системы уравнений обладала рядом преимуществ: во-первых, она приводила к системам обыкновенных дифференциальных уравнений каждого первого порядка (а решение краевых задач для таких систем может быть осуществлено методом ортогональной прогонки С.К. Годунова); во-вторых, она позволяла особенно просто формулировать граничные условия на торцах и на границах участков длины

складки, обусловленных скачкообразным изменением толщины, проёмами, местными нагрузками. Обобщённые усилия и перемещения приравнялись либо заданным на торцах параметрам, либо соответствующим параметрам смежных сечений сопрягаемых участков.

В то же время, ряд особенностей некоторых объектов не мог быть адекватно описан предлагавшимися методами. В частности, возникла необходимость создания методики, позволяющей учесть: 1) наличие высокоградиентных зон возмущения полей мембранных и изгибных напряжений и деформаций; 2) неупругость материала при различных сложных режимах нагружения.

Теоретические основы и практические аспекты применения методов решения обеих задач проанализированы, систематизированы и развиты уважаемым юбиляром – членом-корреспондентом Национальной академии наук Украины Вадимом Сергеевичем Гудрамовичем [3 – 6].

Выполнение указанных требований не должно снижать конкурентоспособности методики по сравнению с таким мощным и хорошо разработанным методом (к тому же прекрасно обеспеченным компьютерными программами и хорошо приспособленным для популярного изложения своих основ), как МКЭ. Один из возможных вариантов такой методики был предложен и проанализирован в [7 – 9]; некоторые результаты её применения показаны в [1].

Постановка задачи. Объект исследования – пространственные системы с высокой степенью ответственности, обусловившей стремление к повышенной адекватности используемых моделей. Их геометрия может быть достаточно сложной, а режимы нагружения, как правило, включают как длительные, так и кратковременные этапы, и для такого материала как бетон это может иметь большое значение. Для того, чтобы обеспечить возможность учёта основных особенностей рассматриваемых систем, пришлось пожертвовать универсальностью и ориентировать методику на конкретный класс объектов – складчатые системы (рис. 1).

Складчатые системы в самом общем случае – это оболочки с изломами срединной поверхности. Линии излома называются рёбрами, участки между рёбрами – гранями. В рёбрах могут сопрягаться более двух граней.

В настоящей работе рассматриваются складчатые системы более частного вида, которые, как указывалось, могут быть расчётными схемами конструкций и сооружений различных классов. Очертание таких систем может быть получено поступательным перемещением плоской фигуры (в виде ломаной с прямыми или криволинейными звеньями, открытой или замкнутой, возможно – многосвязной) вдоль некоторого характерного для данной складки направления. Будем называть эту фигуру сечением складки. Введём в плоскости сечения две координатные оси; третья координата может отсчитываться вдоль траектории начала координат. Эта фигура может рассматриваться как граф, но, в отличие от обычного графа, будем приписывать его вершинам определённые координаты, которые могут изменяться при его перемещении. Назовём вершины графа узлами сечения, их траектории – рёбрами складки, а поверхности, описываемые рёбрами графа, гранями складки. Если траектории узлов сечения прямолинейны и параллельны друг другу, то складка называется призматической. Если направление движения сечения совпадает с нормалью к его плоскости, складка называется прямой.

Топология графа при этом должна сохраняться.

Методы решения. Два обстоятельства предопределили выбор схемы дискретизации: постоянство топологии сечения вдоль складки и наличие зон возмущения напряжённо – деформированного состояния. Первое из них позволяет сохранять размерность пространства обобщённых перемещений для всех поперечных сечений складки, второе обуславливает необходимость повышения точности решения. Из

этих соображений был выбран метод неполной дискретизации, использующий для аппроксимации решения краевой задачи метод И. Г. Бубнова – Б. Г. Галёркина (модель Л. В. Канторовича – В. З. Власова). Позднее он был удачно модифицирован И.Е. Милейковским, благодаря чему приобрел два полезных для численной реализации качества. Так, он 1) приводит к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (в нормальной форме), а не второго (и более), что позволяет сразу использовать для её решения имеющееся программное обеспечение, реализующее универсальный метод ортогональной прогонки С.К. Годунова, и 2) существенно упрощает расчёт системы со скачкообразным изменением свойств граней складки в поперечном и продольном направлениях.

При аппроксимации перемещений в дискретно – континуальной модели складки возникла в определённом смысле нестандартные ситуации, которые, на наш взгляд, могут представить некоторый интерес. Рассмотрим их подробнее.

Согласно идее метода неполной дискретизации, подвергнем дискретизации складку только в направлении поперечной тангенциальной координаты, а в продольном направлении сохраним её континуальный характер. При этом между узлами сечения складки, отвечающими её геометрии, введём дополнительные узлы (а также соответствующие рёбра), обеспечивающие более высокую адекватность полученной дискретно – континуальной модели. Очевидно, рёбра, пересекающие окрестность зон возмущения полей деформаций, следует для повышения адекватности модели сгущать.

Дальнейшие рассуждения проведём на примере призматической складки (рис. 2). Введём прямоугольную декартову глобальную систему координат складки (2а) и на каждой грани – свою локальную систему координат, для призматической складки – также декартову (2б).

Для деформаций грани примем гипотезу С.П. Тимошенко – Г. Генки – Е. Рейсснера – П.М. Нагди – в деформированном состоянии нормаль к срединной поверхности остаётся прямой, но не перпендикулярной к ней (интегральный учёт деформаций сдвига для пластин и оболочек средней толщины). Введём обозначения: $u_x(x^M, y^M)$, $u_y(x^M, y^M)$, $w(x^M, y^M)$, $\theta_y(x^M, y^M)$, $\theta_x(x^M, y^M)$ для компонент перемещения точек срединной поверхности грани и поворотов нормали к ней вокруг осей Oy^M и Ox^M (в силу принятой гипотезы о поведении нормали эти повороты являются самостоятельными обобщёнными перемещениями грани). На сечении вводятся системы координатных функций $\varphi_{pk}(x^M)$ поперечной тангенциальной координаты x^M для мембранных ($k = 1, 2$) и изгибных ($k = 3..6$) перемещений; здесь p – номер грани. По аналогии с методом конечных элементов, это финитные функции с носителем $[0, l_p]$, где l_p – ширина p -ой грани. Они должны принадлежать области определения оператора задачи, быть линейно независимыми и их система должна быть полной в энергетическом пространстве оператора задачи. Выполнение этих требований обеспечивается в процессе их конструирования. Остановимся на этом подробнее.

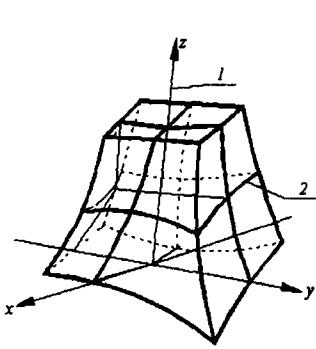


Рис. 1. Расчетная модель

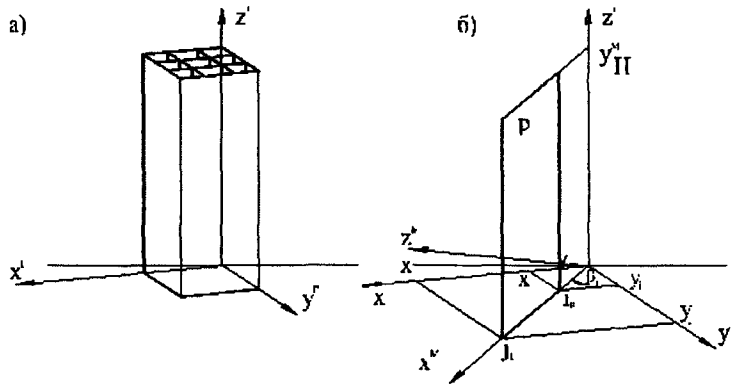


Рис. 2. Призматическая складка

Вначале будем строить решение в пространстве перемещений.

Для того, чтобы функция принадлежала области определения оператора задачи, она должна: 1) иметь производную того же порядка, что и порядок дифференциального уравнения задачи; 2) иметь столько параметров, чтобы удовлетворять произвольным (линейным) граничным условиям при $x^M = 0$ и $x^M = l_p$, иначе говоря, каков порядок дифференциального уравнения задачи в перемещениях. Примем эти функции в виде многочленов первого порядка $\widehat{\varphi}_{pk}(x^M) = a_1 x^M + b_1$ ($k=1,2$) для мембранных перемещений $u_x(x^M, y^M)$, $u_y(x^M, y^M)$ и третьего порядка (балка Тимошенко) $\widehat{\varphi}_{pk}(x^M) = a_2 (x^M)^3 + b_2 (x^M)^2 + c x^M + d$ – для изгибных перемещений $w(x^M, y^M)$, $\theta_y(x^M, y^M)$, $\theta_z(x^M, y^M)$ таким образом, чтобы было легко обеспечивать совместность перемещений сопрягаемых граней и условия на свободных рёбрах граней:

$$\widehat{\varphi}_{p1}(x^M) : \widehat{\varphi}_{p1}(0) = 1; \widehat{\varphi}_{p1}(l_p) = 0;$$

$$\widehat{\varphi}_{p2}(x^M) : \widehat{\varphi}_{p2}(0) = 0; \widehat{\varphi}_{p2}(l_p) = 1;$$

$$\widehat{\varphi}_{p3}(x^M) : \varphi_{p3}(0) = 1; \theta_{y3}(0) = 0; \widehat{\varphi}_{p3}(l_p) = 0; \theta_{y3}(l_p) = 0;$$

$$\widehat{\varphi}_{p4}(x^M) : \varphi_{p4}(0) = 0; \theta_{y4}(0) = 1; \widehat{\varphi}_{p4}(l_p) = 0; \theta_{y4}(l_p) = 0;$$

$$\widehat{\varphi}_{p5}(x^M) : \varphi_{p5}(0) = 0; \theta_{y5}(0) = 0; \widehat{\varphi}_{p5}(l_p) = 1; \theta_{y5}(l_p) = 0;$$

$$\widehat{\varphi}_{p6}(x^M) : \widehat{\varphi}_{p6}(0) = 0; \theta_{y6}(0) = 0; \widehat{\varphi}_{p6}(l_p) = 0; \theta_{y6}(l_p) = 1.$$

Эти граничные условия обуславливают такой вид координатных функций:

$$\widehat{\varphi}_{p1}(x^M) = 1 - x^M/l_p, \tag{1}$$

$$\widehat{\varphi}_{p2}(x^M) = x^M/l_p, \tag{2}$$

$$\widehat{\varphi}_{p3}(x^M) = 1 - \frac{\alpha_p - 1}{\alpha_p} \left(\frac{x^M}{l_p} \right) - \frac{3}{\alpha_p} \left(\frac{x^M}{l_p} \right)^2 + \frac{2}{\alpha_p} \left(\frac{x^M}{l_p} \right)^3, \tag{3}$$

$$\widehat{\varphi}_{p4}(x^M) = l_p \left[\frac{\alpha_p + 1}{2\alpha_p} \left(\frac{x^M}{l_p} \right) - \frac{3 + \alpha_p}{2\alpha_p} \left(\frac{x^M}{l_p} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_p} \left(\frac{x^M}{l_p} \right)^3 \right], \tag{4}$$

$$\widehat{\varphi}_{p5}(x^M) = \frac{\alpha_p - 1}{\alpha_p} \left(\frac{x^M}{l_p} \right) + \frac{3}{\alpha_p} \left(\frac{x^M}{l_p} \right)^2 - \frac{2}{\alpha_p} \left(\frac{x^M}{l_p} \right)^3, \quad (5)$$

$$\widehat{\varphi}_{p6}(x^M) = l_p \left[-\frac{\alpha_p - 1}{2\alpha_p} \left(\frac{x^M}{l_p} \right) - \frac{3 - \alpha_p}{2\alpha_p} \left(\frac{x^M}{l_p} \right)^2 + \frac{1}{\alpha_p} \left(\frac{x^M}{l_p} \right)^3 \right], \quad (6)$$

где $\alpha_p = 1 + \frac{2h_p^2/l_p^2}{k(1-\mu) + 2c^2}$; h_p – толщина p -ой грани; k – коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений τ_{xz} по толщине грани; $c^2 = h_p^2/(12R_p^2)$, для плоской грани $c=0$; R_p – радиус кривизны поперечного сечения грани; μ – коэффициент Пуассона материала грани.

Функции, предназначенные для аппроксимации перемещений изгибного состояния, получены решением соответствующих краевых задач для балки С.П. Тимошенко.

Теперь можно сконструировать аппроксимирующие линейные комбинации:

$$u_{px}(x^M, y^M) = u_{pk}(0, y^M) \varphi_{p1}(x^M) + u_{pk}(l_p, y^M) \varphi_{p2}(x^M); \quad z = x, y; \quad k = 1, 2; \quad (7)$$

$$(x^M, y^M) = w_p(0, y^M) \varphi_{p3}(x^M) + \theta_{py}(0, y^M) \varphi_{p4}(x^M) + w_p(l_p, y^M) \varphi_{p5}(x^M) + \theta_{py}(l_p, y^M) \varphi_{p6}(x^M); \quad (8)$$

$$\theta_{py}(x^M, y^M) = w_p(0, y^M) \left(\varphi'_{p3}(x^M) + \frac{\alpha_p - 1}{\alpha_p l_p} \right) + \theta_{py}(0, y^M) \left(\varphi'_{p4}(x^M) + \frac{\alpha_p - 1}{2\alpha_p} \right) + w_p(l_p, y^M) \left(\varphi'_{p5}(x^M) - \frac{\alpha_p - 1}{\alpha_p l_p} \right) + \theta_{py}(l_p, y^M) \left(\varphi'_{p6}(x^M) + \frac{\alpha_p - 1}{2\alpha_p} \right). \quad (9)$$

Особенностью линейной комбинации (8) является использование в качестве граничного условия не производной искомой функции, а линейно зависящей от неё переменной – угла поворота нормали. Распределение углов поворота θ_x целесообразно принять по аналогии с (8):

$$\theta_{px}(x^M, y^M) = \theta_{px}(0, y^M) \varphi_{p3}(x^M) + \frac{\partial \theta_{px}}{\partial x^M} \Big|_{x^M=0} \varphi_{p4}(x^M) + \theta_{px}(l_p, y^M) \varphi_{p5}(x^M) + \frac{\partial \theta_{px}}{\partial x^M} \Big|_{x^M=l_p} \varphi_{p6}(x^M). \quad (10)$$

В этом случае в качестве одного из параметров, обеспечивающих возможность задания произвольных граничных условий, является производная угла поворота по поперечной тангенциальной координате, которая является не линейным или угловым перемещением, а слагаемым одной из изгибных деформаций – кривизны кручения. Она может быть представлена в виде

$$\frac{\partial \theta_{px}}{\partial x^M} = \frac{\partial^2 u_y^*(x^M, y^M, z^M)}{\partial x^M \partial z^M}, \quad (11)$$

где $u_y^*(x^M, y^M, z^M)$ – тангенциальное перемещение точки, отстоящей от серединной поверхности грани на z^M .

Смешанная производная в правой части (11) может считаться мерой деформации сечения (кривизной его кручения).

Таким образом, одним из условий сопряжения граней в ребре в предлагаемой модели является соответствие левой части (11) мере деформации окрестности узла сечения, стоящей в правой части (11). Эта деформация в простейшем случае может быть представлена в глобальной системе координат в виде

$$u_z^{**} = \Theta_{\psi_1} x^r y^r + \Theta_{\psi_2} \frac{(y^r)^2 - (x^r)^2}{2}, \quad (12)$$

где $\Theta_{\psi_1}, \Theta_{\psi_2}$ – параметры, обеспечивающие произвольную ориентацию деформированной части сечения в плоскости $0x^r y^r$.

Преобразование координат даёт связи граничных обобщённых перемещений грани с обобщёнными перемещениями того ребра, на котором данная грань сопрягается с другими гранями.

$$\theta_{py} = \Theta_z, \quad (13)$$

$$\theta_{px} = \Theta_y \sin \beta_p + \Theta_x \cos \beta_p, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x^M} = \Theta_{\psi_1} \cos 2\beta_p + \Theta_{\psi_2} \sin 2\beta_p, \quad (15)$$

где $\Theta_x, \Theta_y, \Theta_z$ – углы поворота окрестности узла сечения вокруг соответствующих осей глобальной системы координат; $\Theta_{\psi_1}, \Theta_{\psi_2}$ – параметры деформации окрестности узла сечения по (12).

Таким образом, углы поворота $\Theta_x, \Theta_y, \Theta_z$ и параметры $\Theta_{\psi_1}, \Theta_{\psi_2}$ выступают в роли обобщённых перемещений окрестности узла сечения (наряду с линейными перемещениями).

В соответствии с приведенными выше требованиями, использованные координатные функции имеют (нулевые) вторую (при $k=1,2$) и четвёртую (при $k=3...6$) производные. Никакие коэффициенты линейных комбинаций этих функций не могут обеспечить одновременное равенство нулю левых и правых граничных условий, следовательно, они линейно независимы. Все координатные функции, относящиеся к различным граням, также линейно независимы, так как у них различные носители. Полнота системы этих функций в пространстве перемещений модели также обеспечена благодаря возможности задавать произвольные перемещения узлов сечений.

Описанное выше пополнение числа обобщённых перемещений узла сечения деформацией окрестности узла сечения позволило выполнить расчёт, например, такого объекта, как железобетонная восьмигранная диспетчерская вышка аэропорта (высота 48 м, сечение – на рис. 3).

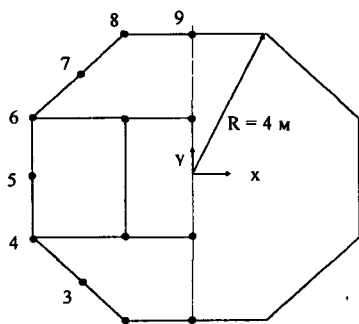


Рис. 3. Железобетонная восьмигранная диспетчерская вышка аэропорта

Приняты следующие модели деформирования материалов. Для матрицы (бетона) при кратковременном нагружении принята до образования трещин в нём специализированная деформационная теория пластичности бетона (В. М. Круглов, А. И. Козачевский [12]), для арматуры принята диаграмма Прандтля, но с конечной длиной площадки текучести; для железобетона после образования трещин используется дисперсная теория деформирования железобетона с трещинами (Н. И. Карпенко [13]). Линеаризация задачи осуществлялась дискретным методом продолжения по параметру нагрузки [14] с итерационным уточнением на каждом шаге модифицированным методом Ньютона [15] (производная Фреше определялась для начала первого шага по нагрузке, то есть, для естественного состояния, а в начале каждого шага в качестве начального приближения принималось решение, полученное на предыдущем шаге). Роль производной Фреше играл оператор задачи упругого деформирования.

В механике деформируемого твёрдого тела такая процедура известна как метод фиктивных нагрузок А.А. Ильюшина, в механике железобетона – как шагово-итерационный метод.

Этот расчёт был выполнен с учётом пластических деформаций бетона и арматуры и образования трещин в бетоне. При этом были сделаны некоторые упрощающие допущения. В частности, в связи с низким уровнем изгибных деформаций, соответствующие им внутренние усилия определялись без учета неупругости материала, и эти усилия принимались в уравнениях равновесия. Некоторые результаты расчёта представлены на рис. 4 – 9. Эпюры нормальных напряжений в горизонтальных сечениях бетона представлены на рис. 4 (эпюра вдоль поперечной тангенциальной координаты, развёртка наружных стен), рис. 6 (эпюра вдоль продольной тангенциальной координаты, самая сжатая грань), рис. 8 (эпюра вдоль продольной тангенциальной координаты, самая растянутая грань). Эпюры напряжений в вертикальных арматурных стержнях вдоль соответствующих линий показаны на рис. 5, рис. 7, рис. 9. Цифрами 1..4 помечены эпюры, соответствующие 12; 26,7; 53,3; 100% горизонтальной нагрузки (она приложена в рёбрах по всей высоте и направлена вдоль оси Oy^r). Её полная интенсивность в каждом ребре – $0,03 \text{ Мн/м}$. Цифрой 5 помечены эпюры в такой же складке, но выполненной из упругих материалов.

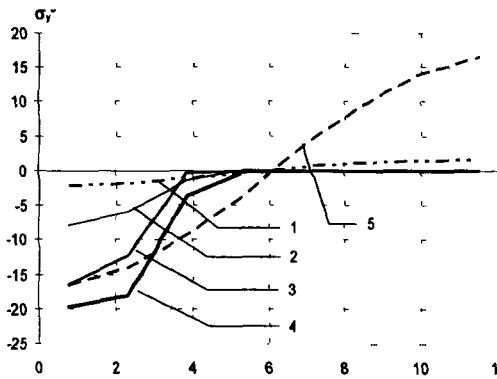


Рис. 4. Епюра нормальних напружень в горизонтальних сеченнях бетону вдоволь поперечної тангенціальної координати, розв'язка назовнішніх стін

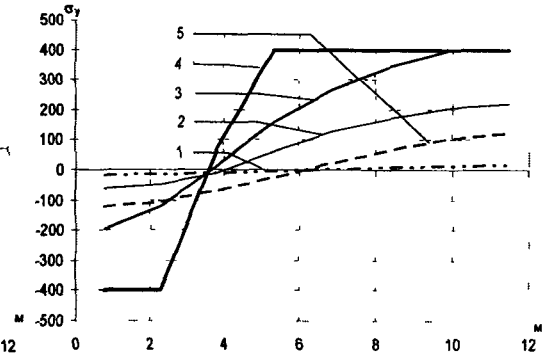


Рис. 5. Епюра напружень в вертикальних арматурних стержнях вдоволь поперечної тангенціальної координати

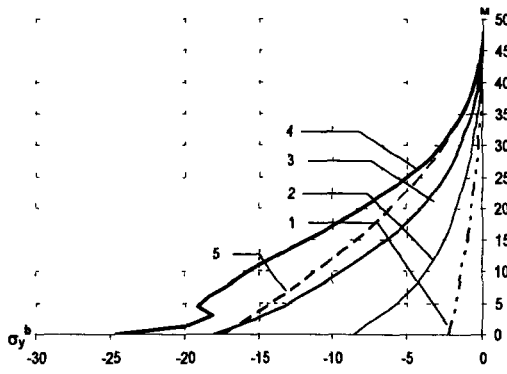


Рис. 6. Епюра нормальних напружень вдоволь продольної тангенціальної координати, сама́я сжата́я грань

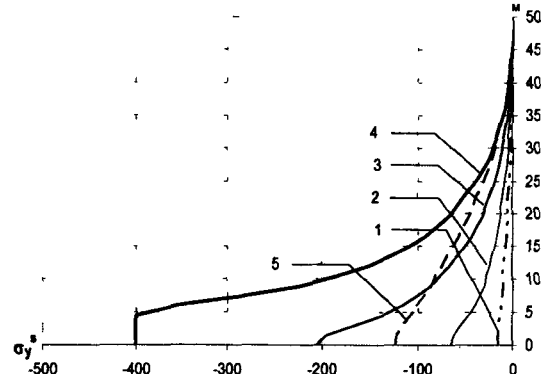


Рис. 7. Епюра напружень в вертикальних арматурних стержнях вдоволь продольної тангенціальної координати

На этих рисунках можно наблюдать участки с нулевыми напряжениями в бетоне на площадках трещин (рис. 4, рис. 8, эпюры 2 – 4) и с выходом вертикальной сжатой и растянутой арматуры на площадку текучести (рис. 5, рис. 9, эпюры 3 и 4; рис. 7, эпюра 4).

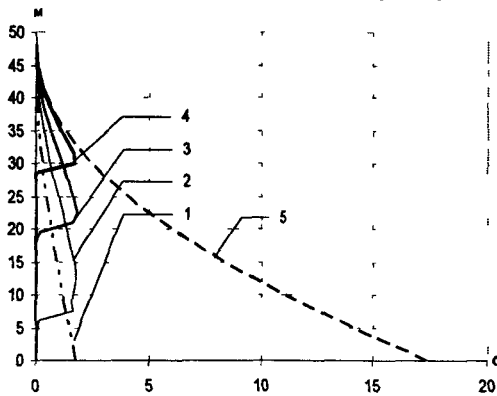


Рис. 8. Епюра нормальних напружень вдоволь продольної тангенціальної координати, сама́я растяну́тая грань

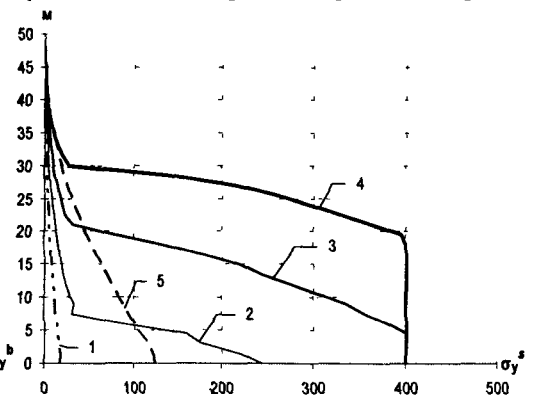


Рис. 9. Епюра напружень в вертикальних арматурних стержнях

Выводы. Таким образом, использование в качестве обобщённых перемещений складки перемещений, углов поворота окрестностей узлов сечения и мер их депланации позволяет построить дискретно – континуальную модель складки сложного многосвязного сечения на базе модели В. З. Власова – В. Л. Канторовича – И. Е. Милейковского с предложенными координатными функциями для аппроксимации функций прогибов и углов поворота нормали грани.

Такая модель позволяет учесть наличие проёмов и местных нагрузок, произвольную геометрию сечения (в том числе – его многосвязность), неупругое деформирование армированного материала и определить участки разрушения матрицы и выхода на площадку текучести армирующих стержней.

Эпюры напряжений в бетоне и арматуре при расчёте с учётом неупругого деформирования качественно отличаются от таких же эпюр для упругой складки, в особенности – там, где в бетоне образуются трещины и в местах выхода сжатых и растянутых арматурных стержней на площадку текучести. Нормальные напряжения в бетоне на горизонтальных площадках существенно превышают такие же напряжения в упругой складке вследствие перераспределения напряжений в сечении после того, как в нём образовалась трещина, а также после выхода арматуры на площадку текучести.

Всё это даёт возможность использовать предложенный метод расчёта складок для анализа напряжённо – деформированного состояния стен башенных и ёмкостных сооружений, пролётных строений и тонкостенных опор железобетонных мостов, складчатых покрытий, а также некоторых авиационных конструкций, стрел мобильных подъёмных кранов, металлических коробчатых подкрановых балок и подобных им складчатых систем.

Библиографические ссылки

1. Левин В.М. Численный анализ напряжённого состояния неупругих складок в окрестности отверстий / В.М. Левин // Вісник Дніпропет. ун-ту, 2006. – № 2/2.-. 103 – 109.
2. Образцов И.Ф. Вариационные методы расчёта тонкостенных авиационных пространственных конструкций / И.Ф. Образцов. – М., 1966. – 392 с.
3. Гудрамович В.С. Несущая способность и долговечность элементов конструкций / В.С. Гудрамович, Е.С. Переверзев. – К., 1981. – 284 с.
4. Гудрамович В.С. Предельные состояния оболочек при сложном нагружении и ползучести материала / В.С. Гудрамович, В.П. Герасимов, В.С. Коноваленков, В.П. Пошивалов. – К., 1984.–216 с.
5. Гудрамович В.С. Предельный анализ элементов конструкций / В.С. Гудрамович, В.П. Герасимов, А.Ф. Деменков. – К., 1990. – 135 с.
6. Гудрамович В.С. Устойчивость упругопластических оболочек / В.С. Гудрамович – К., 1987. – 216 с.
7. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложения в технике / В.З. Власов. – М., 1949. – 784 с.
8. Милейковский И.Е. Метод исходных уравнений при расчёте пологих оболочек на ЭЦВМ / И.Е. Милейковский // Новые методы расчёта строительных конструкций. – М., 1968. – с. 28-35.
9. Левин В.М. Башенные сооружения. Исследования, расчёт / В.М. Левин. – Макеевка: ДонГАСА, 1999. – 230 с.
10. Левин В.М. Полудискретная математическая модель деформирования неупругой складчатой системы / В.М. Левин // Вісник Донецького ун-ту. – Серія А «Природничі науки». - Ч. 1. – 2004. – С. 171 – 178.
11. Левин В.М. Определение напряжённого состояния неупругих армированных пластинок и пластинчатых систем с проёмами / В.М. Левин // Вісник Донецького ун-ту. – Серія А «Природничі науки». – Ч. 1. – 2006. – С. 171 – 175.
12. Круглов В.М. Основные физические соотношения для бетона в плоском напряжённом состоянии / В.М. Круглов, А.И. Козачевский // Сопротивление материалов и теория сооружений. – Вып. 55. –К., 1989. – С. 71 – 77.
13. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона / Н.И. Карпенко. – М., 1966. – 416 с.

14. Григолюк Э.И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения по параметру в нелинейных задачах механики твёрдого деформируемого тела / Э.И. Григолюк, В.И. Шалашилин. – М. – 1988. – 232 с.
15. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц. – М., 1969. – 447 с.

Надійшла до редколегії 13.04.11

УДК 539.4

В. В. Мелешко¹, С. О. Папков²

¹Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,

²Севастопольский национальный технический университет

ЗАКОН АСИМПТОТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ БУБНОВА-КОЯЛОВИЧА

Представлений короткий аналіз підходу І. Г. Бубнова та Б. М. Кояловича до розгляду асимптотики поведінки невідомих у нескінченній системі алгебраїчних рівнянь, що виникає при вирішенні методом суперпозиції класичної задачі про згин жорстко защемленої прямокутної пластинки рівномірним нормальним навантаженням.

Ключові слова: жорстко закріплена прямокутна пластинка, бігармонічна задача, нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь.

Представлен краткий анализ подхода И. Г. Бубнова и Б. М. Кояловича к рассмотрению асимптотики поведения неизвестных в бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, возникающей при решении методом суперпозиции классической задачи об изгибе жестко защемленной прямоугольной пластинки равномерной нормальной нагрузкой.

Ключевые слова: жестко защемленная прямоугольная пластинка, бигармоническая задача, бесконечная система линейных алгебраических уравнений.

A short account of the method of superposition employed by I. G. Bubnov and B. M. Koyalovich to analytically solve the problem of flexure of a clamped rectangular plate by a uniform normal loading. Fundamentals of the asymptotic law for the unknowns in the infinite system are considered.

Key words: clamped rectangular plate, biharmonic problem, infinite systems of linear algebraic equations.

Чтение оригинальных трудов дает изучающему любой предмет большое преимущество, ибо наука всегда наиболее полно усваивается в стадии зарождения.

Дж. Максвелл [10, с.15]

Задача об изгибе тонкой изотропной упругой прямоугольной пластинки, нагруженной равномерно распределенной нормальной нагрузкой и жестко защемленной по всем сторонам, сводящаяся к решению классической бигармонической задачи, является одной из наиболее трудных задач линейной теории тонких пластин; детальный обзор работ приведен в [19; 20]. Среди пионерских работ, посвященных решению этой задачи, выделяются адъюнкская диссертация И.Г. Бубнова [2] в Санкт-Петербургском политехническом институте и докторская диссертация Б.М. Кояловича [7] в Санкт-Петербургском университете. В этих работах аналитическое решение задачи было получено способом, который сейчас называется методом суперпозиции [6]. Диссертация И.Г. Бубнова была ранее опубликована последовательно в четырех статьях (из них [1] относится к теме данной публикации) и прошла апробацию на международном уровне [16, с. 736; 17]; она полностью воспроизведена в [4]. Детальный очерк о жизни и деятельности И.Г. Бубнова (1872–1919)

с приложением списка всех его трудов дан в очерке А.С. Вольмира [4, с.311–401], а биография Б.М. Кояловича (1867–1941) описана в [12].

Основная идея метода суперпозиции для решения бигармонических задач в прямоугольной области состоит в представлении искомой функции (прогиб пластинки) в виде суммы двух рядов Фурье по полным системам тригонометрических функций. Такая сумма тождественно удовлетворяет бигармоническому уравнению и включает такие последовательности коэффициентов Фурье, чтобы иметь возможность выполнить произвольные граничные условия для функции, и ее производной на всех четырех сторонах прямоугольника. В силу неортогональности функций, выражение для коэффициентов одного ряда зависит от всех коэффициентов другого ряда и, наоборот. Это приводит к необходимости решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов Фурье. В [2, 7] решения вызвали громоздкие вычисления, так как ряды оказывались недостаточно быстро сходящимися и в некоторых случаях необходимо было удерживать до 12 – 15 членов ряда. Эти трудности были преодолены и в результате были получены расчетные формулы, графики и таблицы для прогиба, наибольших напряжений, поперечных сил и реактивных давлений.

И.Г. Бубнов в докладе подчеркивал [1, с.132; 4, с.74], что «решение принадлежит профессору Б.М. Кояловичу»

Однако, хотя Б.М. Коялович и дал детальное рассмотрение задачи об изгибе пластинки он ограничился анализом математической стороны проблемы. Любопытно отметить, что выпускник Санкт-Петербургского Института инженеров путей сообщения С.П. Тимошенко, посетив в феврале 1903 года защиту диссертации Б.М. Кояловича на степень доктора чистой математики спустя 60 лет вспоминал [15, с.74]:

«Попал также на защиту диссертации Кояловича. Тут я в первый раз увидел известных тогда русских математиков. Официальными оппонентами были Коркин и Марков. Диссертация давала новый метод расчета равномерно нагруженной прямоугольной пластинки с заделанными краями. Это было первое строгое решение, данное для этой важной технической задачи. Техническая важность работы никем на диспуте не была подчеркнута. Дискутировались главным образом условия сходимости рядов, которыми решение было представлено. Я в то время еще не знал теории изгиба пластинок и не мог как следует оценить работу Кояловича. Меня интересовала лишь внешняя обстановка защиты диссертации.»

И.Г. Бубнов провел численное решение конечной системы из $9 + 9$ уравнений способом последовательных приближений (вопрос о времени вычислений стоял тогда достаточно остро) и дал таблицу первых девяти коэффициентов в двух рядах Фурье для отношения сторон пластинки 2:1 (типичный размер для водонепроницаемых переборок в кораблях). Для последующих коэффициентов он привел без обоснования их эмпирический закон убывания, обратно пропорциональный кубу номера. Как смог И.Г. Бубнов усмотреть из своих результатов такое асимптотическое поведение, останется загадкой. (В последующие годы И.Г. Бубнов был Главным конструктором линейных кораблей и подводных лодок российского флота [24] и на научные публикации у него было слишком мало времени.)

Позднее Б.М. Коялович [8] вернулся к результатам своей докторской диссертации [7] и на основании созданной им теории лимитант провел обширные вычисления для такого же соотношения сторон пластинки, представленные с большими подробностями о десяти (!) последовательных приближений

Мы решили проверить численные выкладки И.Г. Бубнова – наличие компьютеров существенно облегчает этот процесс. Был обнаружен один чрезвычайно любопытный, на наш взгляд, результат. Изложение его и составляет основной предмет данной статьи.

Ниже мы используем обозначения работ И.Г. Бубнова [1; 4]. Дифференциальное уравнение для прогиба срединной плоскости $y(x, z)$ тонкой упругой прямоугольной пластинки $-a \leq x \leq a$, $-b \leq z \leq b$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = \frac{12(1-\mu^2)}{Et^3} p_0, \quad (1)$$

где t – толщина пластинки; p_0 – равномерная постоянная нормальная нагрузка; E и μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона изотропного упругого материала.

Граничные условия для жестко защемленного контура пластинки суть:

$$\begin{aligned} \text{при } x = \pm a \quad y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \\ \text{при } z = \pm b \quad y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Решение неоднородного бигармонического уравнения (1) имеет вид

$$\begin{aligned} y(x, z) = \frac{(1-\mu^2)p_0 t}{2E} \left(\frac{b}{t}\right)^4 \left[\left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right)^2 + \right. \\ \left. C + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_{2k} \Phi_{2k}(x) \cos \frac{k\pi z}{b} + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_{2n} \Psi_{2n}(z) \cos \frac{n\pi x}{a} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{2k}(x) = \frac{(\omega \operatorname{ch} k\omega + \operatorname{sh} k\omega) \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b} - \frac{k\pi x}{b} \cdot \operatorname{sh} k\omega \cdot \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b}}{k\omega + \operatorname{ch} k\omega \cdot \operatorname{sh} k\omega}, \quad \omega = \pi \frac{a}{b}, \\ \Psi_{2n}(z) = \frac{(\omega_1 \operatorname{ch} n\omega_1 + \operatorname{sh} n\omega_1) \operatorname{ch} \frac{n\pi z}{a} - \frac{n\pi z}{a} \cdot \operatorname{sh} n\omega_1 \cdot \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{a}}{n\omega_1 + \operatorname{ch} n\omega_1 \cdot \operatorname{sh} n\omega_1}, \quad \omega_1 = \pi \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (4)$$

и через A_{2k} и B_{2n} обозначены постоянные коэффициенты, зависящие только от отношения сторон пластины. Постоянная величина C определяется из условия, что прогиб пластинки на контуре должен обращаться в нуль.

Исходя из представления (3), несложно убедиться, что граничные условия (2) для нормальной производной на контуре выполнены тождественно. Граничные условия для самой функции $y(x, z)$ с учетом значений

$$\Phi_{2k}(a) = 1, \quad \Psi_{2n}(b) = 1 \quad (5)$$

и разложений в ряды Фурье

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right)^2 = \frac{8}{15} - \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \frac{48}{(k\pi)^4} \cos \frac{k\pi z}{b}, \\ \Psi_{2n}(z) = \frac{\operatorname{ch} 2n\omega_1 - 1}{\operatorname{sh} 2n\omega_1 + 2n\omega_1} \left[\frac{2a}{n\pi b} + \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^k \frac{4n^3 b^3}{\pi a^3 (k^2 + n^2 b^2 / a^2)^2} \cos \frac{k\pi z}{b} \right] \\ \Phi_{2k}(x) = \frac{\operatorname{ch} 2k\omega - 1}{\operatorname{sh} 2k\omega + 2k\omega} \left[\frac{2b}{k\pi a} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{4k^3 b}{\pi a (n^2 b^2 / a^2 + k^2)^2} \cos \frac{n\pi x}{a} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

приводит к двум (!) уравнениям для определения одной постоянной C

$$\frac{8}{15} + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_{2n} (-1)^n \frac{ch2n\omega_1 - 1}{sh2n\omega_1 + 2n\omega_1} \cdot \frac{2a}{n\pi b} + C = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} A_{2k} (-1)^k \frac{ch2k\omega - 1}{sh2k\omega + 2k\omega} \cdot \frac{2b}{k\pi a} + C = 0 \quad (7)$$

и к парной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$A_{2k} = \frac{48(-1)^k}{(k\pi)^4} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{b}{a}\right)^3 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{k+n} n^3}{(k^2 + n^2 b^2 / a^2)^2} \cdot \frac{ch2n\omega_1 - 1}{sh2n\omega_1 + 2n\omega_1} \cdot B_{2n}$$

$$B_{2k} = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{b}{a} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{k+n} n^3}{(n^2 + k^2 b^2 / a^2)^2} \cdot \frac{ch2n\omega - 1}{sh2n\omega + 2n\omega} \cdot A_{2n} \quad (8)$$

Наша бесконечная система (8) отличается знаками при суммах в правых частях (кроме замены индекса суммирования i на n) от соответствующей системы (36) у И.Г. Бубнова [1, с.132]. Этот вывод подтверждается и сравнениями с другими публикациями. Так, для прямоугольника с отношением сторон $\frac{b}{a} = 2$, имеем $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega_1 = 2\pi$ и система (8) принимает вид

$$A_{2k} = \frac{48(-1)^k}{(k\pi)^4} - \frac{32}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{k+n} n^3}{(k^2 + 4n^2)^2} \cdot \frac{ch4n\pi - 1}{sh4n\pi + 4n\pi} \cdot B_{2n},$$

$$B_{2k} = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{k+n} n^3}{(n^2 + 4k^2)^2} \cdot \frac{ch\pi n - 1}{sh\pi n + \pi n} \cdot A_{2n} \quad (9)$$

Вводя замену неизвестных

$$A_{2k} = \tilde{A}_k \frac{shk\pi + k\pi}{chk\pi - 1} \cdot \frac{(-1)^k}{k^3}, \quad B_{2k} = \tilde{B}_k \frac{sh4\pi k + 4\pi k}{ch4\pi k - 1} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{4k^3} \quad (10)$$

и меняя местами индексы k и n , систему (9) можно записать в таком виде

$$\tilde{A}_n s'_n = \frac{48}{n\pi^4} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{8n^3}{\pi(n^2 + 4k^2)^2} \tilde{B}_k, \quad \tilde{B}_n s_n = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{32n^3}{\pi(4n^2 + k^2)^2} \tilde{A}_k, \quad (11)$$

где обозначено

$$s_n = \frac{e^{4n\pi} - e^{-4n\pi} + 8n\pi}{e^{4n\pi} + e^{-4n\pi} - 2}, \quad s'_n = \frac{e^{n\pi} - e^{-n\pi} + 2n\pi}{e^{n\pi} + e^{-n\pi} - 2}. \quad (12)$$

В диссертации Б.М. Кояловича [7, с.108] основная бесконечная система относительно неизвестных c_k и d_k для такого же отношения сторон имеет вид

$$s_n c_n = \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{n+k+1} \frac{8k^3}{\pi(k^2 + 4n^2)^2} d_k, \quad s'_n d_n = \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{n+k+1} \frac{32k^3}{\pi(4k^2 + n^2)^2} c_k + \frac{48}{(n\pi)^4} (-1)^n. \quad (13)$$

В [8, с.96] эта же бесконечная система имеет вид

$$s_n x_n = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{8n^3 y_k}{\pi(k^2 + 4n^2)^2}, \quad s'_n y_n = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{32n^3 x_k}{\pi(4k^2 + n^2)^2} + \frac{48}{\pi n^4}. \quad (14)$$

Очевидны соотношения между неизвестными в системах (11), (13) и (14)

$$\tilde{A}_k = (-1)^k d_k k^3 = 4y_k, \quad \tilde{B}_k = (-1)^{k+1} c_k 4k^3 = 4x_k \quad (15)$$

и мы сделали вывод о возможных описках (или опечатках при наборе) в общей системе (36) в статье [1, с.132] ([4, с.75]), тем более, что знаки неизвестных после решения конечных систем у нас совпали.

И.Г. Бубнов предложил решать бесконечную систему (8) способом последовательных приближений следующим образом [1, с.133]:

Полагаем сперва все коэффициенты B_{2k} равными нулю, и находим из первого уравнения приближенные величины коэффициентов A_{2k} , которые, будучи подставлены во второе уравнение, дадут первое приближение для количеств B_{2k} ; подставляя их в первое уравнение, снова находим более точные величины A_{2k} и т.д. повторяя последовательные подстановки, пока все коэффициенты A_{2k} и B_{2k} не подойдут к некоторым определенным пределам. Найдя эти величины, вычислим по уравнению поверхности стрелку для одной из точек контура и приравняв ее, согласно условию, нулю, найдем постоянное C .

Этот алгоритм требует некоторых комментариев. Во-первых, Б.М. Коялович [7] доказал, опираясь, по существу, на понятие вполне регулярной бесконечной системы, что для данной системы способ последовательных приближений сходится. Во-вторых, несколько загадочным выглядит рецепт нахождения постоянной C с использованием лишь одной (какой?) точки контура.

Сам И.Г. Бубнов произвел численное решение системы (9) для $9 + 9$ уравнений и получил с точностью до пяти значащих цифр:

$$\begin{aligned} A_2 &= -0,52066 (-0,52016), & B_2 &= +0,06027 (+0,05962), \\ A_4 &= +0,00468 (+0,00454), & B_4 &= -0,00113 (-0,00096), \\ A_{12} &= +0,00135 (+0,00127), & B_{12} &= -0,00034 (-0,00024), \\ A_{16} &= +0,00056 (+0,00051), & B_{16} &= -0,00014 (-0,00008), \\ A_{18} &= -0,00040 (-0,00035), & B_{14} &= +0,00010 (+0,00005), \end{aligned} \quad (16)$$

$$C = -0,51229 (-0,51230) \quad (17)$$

Для значений при $k \geq 10$ он заключил, что с достаточной точностью выполнено соотношение

$$A_{2k} = -4B_{2k} = \frac{0,2886}{k^3} (-1)^k \quad (18)$$

Наше решение конечной редуцированной системы (9) при помощи метода Гаусса дало значения коэффициентов, указанные в (16) в круглых скобках. На первый взгляд, расхождение представляется незначительным, особенно, если учесть возможные неточности «ручных» вычислений в начале XX века. Однако, переход согласно (10) к неизвестным \tilde{A}_k и \tilde{B}_k привел к существенным различиям в результатах: например, $\tilde{A}_9 = 0,29160$ и $0,25515$, $\tilde{B}_9 = 0,29160$ и $0,14580$, соответственно. Такое расхождение вряд ли могло быть обусловлено неточностями расчета.

После удивления результатам И.Г. Бубнова, мы записали его предположение об асимптотическом поведении неизвестных в виде

$$\tilde{A}_k = \tilde{B}_k = 0,28860 \quad k \geq 10 \quad (19)$$

и пришли к выводу о том, И.Г. Бубнов учел свой угаданный асимптотический закон (18) при решении конечной системы. В терминах (11) он решал такую редуцированную систему

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n s'_n &= \frac{48}{n\pi^4} + \sum_{k=1}^{k=9} \frac{8n^3}{\pi(n^2 + 4k^2)^2} \tilde{B}_k + 0,2886 \sum_{k=10}^{k=\infty} \frac{8n^3}{\pi(n^2 + 4k^2)^2}, \\ \tilde{B}_n s_n &= \sum_{k=1}^{k=9} \frac{32n^3}{\pi(4n^2 + k^2)^2} \tilde{A}_k + 0,2886 \sum_{k=10}^{k=\infty} \frac{32n^3}{\pi(4n^2 + k^2)^2}, \quad n = 1, 2, \dots, 9 \end{aligned} \quad (20)$$

или если учесть, что

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{8n^3}{\pi(n^2 + 4k^2)^2} = s'_n - \frac{4}{n\pi}, \quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{32n^3}{\pi(4n^2 + k^2)^2} = s_n - \frac{1}{n\pi}, \quad (21)$$

и ввести обозначения

$$\xi_k = \tilde{A}_k - 0,2886, \quad \eta_k = \tilde{B}_k - 0,2886. \quad (22)$$

то, эквивалентно, конечную систему

$$\begin{aligned} \xi_n &= \frac{48}{n\pi^4 s'_n} + \sum_{k=1}^{k=9} \frac{8n^3}{\pi(n^2 + 4k^2)^2} \eta_k - \frac{0,2886 \cdot 4}{n\pi s'_n}, \\ \eta_n &= \sum_{k=1}^{k=9} \frac{32n^3}{\pi(4n^2 + k^2)^2} \xi_k - \frac{0,2886}{n\pi s_n}, \quad n = 1, 2, \dots, 9. \end{aligned} \quad (23)$$

Такой алгоритм, по существу, и был предложен Б.М. Кояловичем [8, с.167].

Наши расчеты при решении системы (23) полностью подтвердили данные И.Г. Бубнова, приведенные в (16). Сравнение с данными Б.М. Кояловича [8, с.124] для интервалов в которых заключены все неизвестные бесконечной системы, найденные по методу лимитант, (Таблица 1) также подтвердило интуицию И.Г. Бубнова (приведем результаты расчета для нечетных n).

Мы также провели решение основной бесконечной системы (11) методом лимитант Б.М. Кояловича [8], удерживая по 200 (!) уравнений вместо его 9. Оказалось, что у первых пяти неизвестных совпали шесть знаков у верхней и нижней границ и потому имеем $\tilde{B}_1=0,241084$, $\tilde{B}_3=0,288037$, $\tilde{B}_5=0,290705$. Следовательно, отличие от результата И.Г. Бубнова имеется только в третьем знаке (!). Предельное значение неизвестных при этом заключено в интервале (0,28980 – 0,28982).

Таблица 1

Неизвестные из бесконечных систем (20) и (14)

n	\tilde{A}_n	интервал для $4u_n$	\tilde{B}_n	интервал для $4x_n$
1	0,37540	0,37539 – 0,37542	0,24106	0,24096 – 0,24114
3	0,30998	0,30996 – 0,31026	0,28836	0,28752 – 0,28843
5	0,29375	0,29392 – 0,29451	0,29000	0,28986 – 0,29158
7	0,29155	0,28982 – 0,29068	0,28812	0,28974 – 0,29215
9	0,29160	0,28850 – 0,28962	0,29160	0,28939 – 0,29234
>9	0,28860	0,28706 – 0,29248	0,28860	0,28706 – 0,29248

К данной ситуации вполне применима фраза Э. Пикара [13, с.8], высказанная им как раз в связи с оценкой подхода Фурье к решению бесконечных систем: «Так творцы анализа умели скользкими путями прийти к правильным результатам.»

Ответ на вопрос, какое из уравнений (7) можно использовать для определения постоянной C оказывается несколько неожиданным: *любое!* Дело в том, что коэффициенты A_{2k} и B_{2k} в силу системы (8) (куда величина C не входит) связаны «*aequatio identica satis abstrusa* (хорошо скрытым тождеством)», как К. Якоби называл сходные ситуации.

Действительно, обратившись для простоты к частному случаю системы (11), разделим первую строчку на n^3 , вторую – на $4n^3$ и просуммируем по n каждую из них. Переменив местами в правых частях полученных равенств порядок суммирования двойных рядов по n и по k , значениями сумм (21), после несложных преобразований приходим к двум уравнениям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \frac{s'_n}{n^3} = \frac{8}{15} + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \frac{s_k}{4k^3} - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \frac{1}{4k^4\pi}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n \frac{s_n}{4n^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \frac{s'_k}{k^3} - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \frac{4}{k^4\pi} \quad (24)$$

Складывая их, приходим к соотношению

$$\frac{8}{15} - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n \frac{1}{4n^4\pi} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k \frac{4}{k^4\pi} \quad (25)$$

в правой и левой части которого мы узнаем, с учетом обозначений (10), выражения для $-C$ из первого и второго уравнения (7), соответственно.

Следует отметить, что И.Г. Бубнова прежде всего интересовал вопрос о максимальных напряжениях в стальной защемленной прямоугольной переборке. Оказалось, что эти напряжения достигаются в *середине* длинных сторон $x = \pm a$, $z = 0$ (при $b > a$), а не в *угловых точках*, как это предполагал Г.Н. Вруан [17], выступая в дискуссии по докладу И.Г. Бубнова. Значения этих напряжений определяется приближенной формулой

$$\sigma_{max} = 1,82 p_0 (a/t)^2. \quad (26)$$

Занимающее заключительную часть диссертации [2] обсуждение пределов применимости этой формулы, практических выводов и рекомендаций сегодня представляет значительный интерес.

В 1914 году И.Г. Бубнов, будучи уже профессором в Морской академии, в лекциях [3] вернулся к рассмотрению задачи об изгибе жестко защемленной прямоугольной пластинки $0 \leq z \leq 2a$, $0 \leq y \leq 2b$. Результаты лекций [3] и изложены в [4, сс.144-170].) При этом он снова неявно использовал правильную асимптотику поведения коэффициентов в рядах Фурье [19, 21] и подробно рассмотрел вычисление контактного давления на контур. (Отметим, что этому вопросу для более сложных оболочечных конструкций посвящены и многие работы В.С. Гудрамовича, обзор которых приведен в [18].) И.Г. Бубнов привел график (рис. 1а) распределения нормальных реакций r'_z и r'_y вдоль сторон $y=0$ и $z=0$, соответственно. Он отметил [4, с.159], что «что некоторые соображения ... заставляют думать, что в этих четырех [угловых] точках давления r'_y и r'_z будут равны нулю» и сомневался в достоверности своих результатов вблизи углов, упомянув о 10 % ошибке в определении опорных реакций при удержании даже 14 членов в двух рядах Фурье и связав это с их плохой сходимостью на границе при походе к угловым точкам. В статье [19], в которой решение задачи было получено тем же методом суперпозиции (см. [20, 23] для деталей решения), отмечалось ненулевое значение (рис. 1б) этих реакций.

В действительности картина выглядит значительно сложнее. Это связано с следующим членом в асимптотическом поведении коэффициентов в рядах Фурье, который играет определяющую при вычислении нормальных реакций на контуре (факти-

чески, третьих производных от прогиба). Установлено [11, 24], что этот член имеет поведение вида $Re(G_\lambda n^{-\lambda})$, где $\lambda_1 = 1.73959 + i1.11902$ – комплексный корень трансцендентного уравнения $\cos(\frac{1}{2}\pi\lambda) + \lambda + 1 = 0$ с наименьшей действительной частью, а G – комплексная постоянная. Учет этой асимптотики [11] приводит к осциллирующему поведению нормальных реакций (рис. 1 в,г) вблизи угловой точки. Такое поведение реакций является следствием двумерной постановки бигармонической задачи.

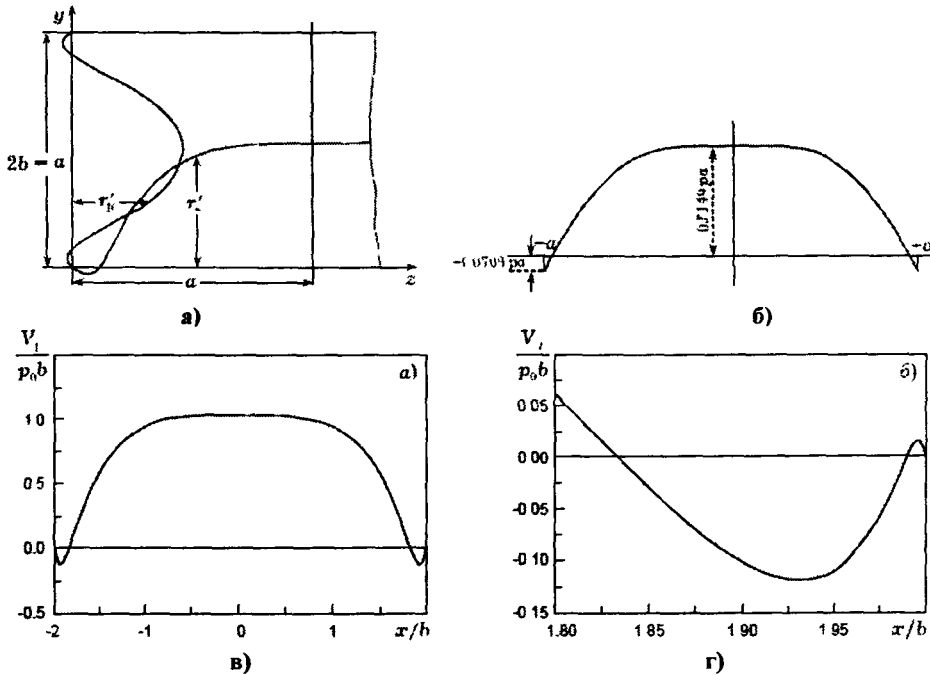


Рис. 1 Опорные реакции для жестко защемленной прямоугольной пластинки с отношением сторон 2:1:

а – Бубнов (1914) [3], б – Inglis (1925) [20], в, г – Meleshko, Gomilko, Gourjii (2001) [22]

Преждевременная смерть И.Г. Бубнова в марте 1919 года в Петрограде не дала ему возможность продолжить эти математические и прикладные исследования. Работы и результаты *корабельного инженера профессора Ивана Бубнова* (так он подписал свой отзыв 1911 года о работах С.П. Тимошенко, в котором он кратко описал свой знаменитый метод Бубнова (Галеркина) [5]) заслуживают дальнейшего изучения и развития.

В заключение, учитывая особый характер данного выпуска, отметим следующее. Во вступлении к курсу механики деформируемых тел М. Планк писал [14, с.10]:

Самая важная и в то же время самая трудная для физика-теоретика задача при математической формулировке проблемы заключается в том, чтобы внести именно те упрощающие допущения, которые имеют существенное значение для интересующих его особенностей исследуемого физического явления, и в то же время пренебречь всеми влияниями меньшего порядка величин, которые ничего бы существенного не изменили бы в основных результатах и вошли бы в рассуждения лишь в качестве математического балласта.

Это высказывание в полной мере относится и к член-корреспонденту НАН Украины профессору Вадиму Сергеевичу Гудрамовичу, поскольку его научное творчество также имеет такую характерную черту. В своих работах (частично их детальный обзор приведен в [18]) он стремится выявить основные характеристики сложных механических конструкций, с которыми ему приходится иметь дело вот уже на протяжении 50 лет, и на этой основе составить ясное и простое представление об их поведении.

Библиографические ссылки

1. **Бубнов И.Г.** Напряжения в обшивке судов от давления воды / И.Г. Бубнов // Морской сборник, 1902. – Т.312. – № 10. – С. 119 – 138.
2. **Бубнов И.Г.** Напряжения в обшивке судов от давления воды / И.Г. Бубнов. – Санкт-Петербург, 1904. – 93 с.
3. **Бубнов И.Г.** Строительная механика корабля. Часть 2 / И.Г. Бубнов. – Санкт-Петербург, 1914. – 310 с.
4. **Бубнов И.Г.** Труды по теории пластин / И.Г. Бубнов. – М., 1953. – 423 с.
5. **Григолюк Э.И.** Метод Бубнова. Истоки. Формулировка. Развитие / Э.И. Григолюк. – М., 1996. – 58 с.
6. **Гринченко В.Т.** Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров / В.Т. Гринченко. – К., 1978. – 264 с.
7. **Коялович Б.М.** Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка / Б.М. Коялович. – Санкт-Петербург, 1902. – 125 с.
8. **Коялович Б.М.** Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений / Б.М. Коялович // Изв. Физ.-Мат. ин-та им. В.А. Стеклова, 1930. – Т. 3. – С. 41 – 167.
9. **Крылов А.Н.** Воспоминания и очерки / А.Н. Крылов. – М., 1956. – 884 с.
10. **Максвелл Дж.К.** Трактат об электричестве и магнетизме / Дж.К. Максвелл. – М., 1989. – Т.1. – 416 с.
11. **Мелешко В.В.** Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность / В.В. Мелешко // Мат. методы и физ.-мех. поля, 2006. – Т.47. – № 3. – С. 45 – 68.
12. **Михельсон Н.Н.** Борис Михайлович Коялович / Н.Н. Михельсон // Ист.-матем. исслед., 1973. – Т. 18. – С. 310 – 321.
13. **Пикар Э.** О развитии за последние сто лет некоторых основных теорий математического анализа / Э. Пикар. – Харьков, 1912. – 100 с.
14. **Планк М.** Введение в механику деформируемых тел / М. Планк. – М.-Л., 1929. – 207 с.
15. **Тимошенко С.** Воспоминания / С. Тимошенко. – К., 1993. – 424 с.
16. **Berry W.J.** The influence of mathematics on the development of Naval architecture / W.J. Berry // Proc. of the Intern. Math. Congress (Toronto, August), 1924. – Vol. 2. – P. 719 – 736.
17. **Boobnoff I.G.** On the stresses in a ship's bottom plating due to water pressure / I.G. Boobnoff // Trans. Inst. Naval Arch., 1902. – Vol. 44. – P. 15 – 52.
18. **Hudramovych V.S.** Contact mechanics of shell structures under local loading / V.S. Hudramovich // Int. Appl. Mech., 2009. – Vol. 45. – № 7. – P. 708 – 729.
19. **Inglis C.E.** On the stresses in a ship's bottom plating due to water pressure / C.E. Inglis // Trans. Inst. Naval Arch., 1925. – Vol. 67. – P. 147 – 165.
20. **Meleshko V.V.** Bending of an elastic rectangular clamped plate: Exact versus engineering solutions / V.V. Meleshko // J. Elasticity, 1997. – Vol. 48. – № 1. – P. 1 – 50.
21. **Meleshko V.V.** Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem / V.V. Meleshko // Appl. Mech. Reviews, 2003. – Vol. 56. – № 1. – P. 33 – 85.
22. **Meleshko V.V.** Normal reactions a clamped elastic rectangular plate / V.V. Meleshko, A.M. Gomilko, A.A. Gourjii // J. Eng. Math., 2001. – Vol. 40. – № 4. – P. 377 – 398.
23. **Meleshko V.V.** Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle: further discussion / V.V. Meleshko, A.M. Gomilko // Proc. Roy. Soc. London, 2004. – Vol. A460. – P. 807 – 819.
24. **Spassky I.D.** Five colours of time / I.D. Spassky. – St-Petersburg, 2001. – 42 p.

Надійшла до редколегії 05.05.11

УДК 536:621.455

Н. Е. Науменко, И. Ю. Хижка

Институт технической механики

Национальной академии наук и Национального космического агентства Украины

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИКИ СТАРТА РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ С ЖИДКОСТНЫМИ РАКЕТНЫМИ ДВИГАТЕЛЯМИ

Розглянуто задачу динаміки старту ракети-носія пакетного компоновання з урахуванням особливостей взаємодії РН КА з пусковою установкою. Застосовано методи скінченних елементів та обернених ітерацій у підпросторі, а також процедури прямого чисельного інтегрування. Дано оцінку частот та форм просторових коливань ракети-носія пакетного компоновання та досліджено динамічну навантаженість її конструкцій під час старту.

Ключові слова: ракета-носії космічних апаратів, метод скінченних елементів, старт, коливання, динамічна навантаженість.

Рассмотрена задача динамики старта ракеты-носителя пакетной компоновки с учетом особенностей взаимодействия ракеты-носителя космического аппарата с пусковой установкой. Используются методы конечных элементов и обратных итераций в полупространстве, а также процедуры прямого численного интегрирования. Дана оценка частот и форм пространственных колебаний ракеты-носителя пакетной компоновки и исследована динамическая нагруженность её конструкции во время старта.

Ключевые слова: ракета-носитель космических аппаратов, метод конечных элементов, старт, колебания, динамическая нагруженность.

Problem of the launch dynamics for the rockets with packet arrangement is developed. The finite elements method, rotary iterations method and direct integration procedures are used. The estimate of frequencies and forms of the space oscillations and dynamics stability of the carrier rockets are developed.

Key words: carrier rocket of space apparatus, finite elements method, launch, oscillations, dynamics loading.

Введение. Расчетные схемы. Ракеты-носители (РН) космических аппаратов (КА) представляют собой сложные структуры и в зависимости от целей исследования могут быть использованы различные их расчетные схемы. Результаты теоретических и экспериментальных исследований [1 – 4] показали, что с достаточной для практики точностью корпус ракеты-носителя может быть представлен в виде тонкостенного стержня переменного сечения с произвольно распределенными по длине интенсивностью массы и жесткостью. При оценке динамических характеристик и нагруженности элементов конструкций на участке старта РН тандемной и пакетной схем компоновок используются расчетные схемы, представляющие собой соответственно упруго вязкий неоднородный тонкостенный стержень и систему упруго связанных стержней с произвольно распределенными массой и жесткостью. Кроме того, в различных сечениях стержней могут быть расположены как жестко закрепленные, так и упруго присоединенные сосредоточенные массы.

Упруго присоединенными массами моделируются колебания отдельных амортизированных элементов конструкций РН и космического аппарата, а также колебания жидкого заполнения баков окислителя и горючего. Колебания свободной поверхности жидкости баков в продольном направлении имитируются осцилляторами, которые соответствуют тонам колебаний жидкости, учитываемым при исследовании, и закрепляются в нижних торцах баков. Учет поперечных колебаний жидкости осуществляется введением осцилляторов, расположенных в верхней части топливных баков на уровне свободной поверхности жидкого заполнения. Таким образом, колебания каждого осциллятора являются механическим аналогом соот-

ветствующего тона осесимметричных колебаний жидкости в упругом баке. Оставшаяся часть жидкости в баках представляется в виде сосредоточенных масс, жестко прикрепленных в сечениях корпуса, где расположены днища баков горючего и окислителя. Поскольку в движение в продольном и поперечном направлениях вовлекаются различные массы жидкости, распределенные параметры инерционных характеристик топливных баков имеют разные значения в осевом и поперечном направлениях. В крутильных колебаниях конструкций РН жидкость, заполняющая баки, представляющие собой цилиндрические оболочки, практически не участвует. Система удержания РН в предстартовой позиции состоит из опор, через которые осуществляется связь РН и пусковой установки в осевом и поперечном направлениях. Опираение РН на пусковую установку имитируется упругим закреплением соответствующих сечений рассматриваемой стержневой конструкции. Корпус головного обтекателя РН представляется упругим стержнем постоянного сечения, присоединенным к конструкции РН в соответствующем сечении.

Метод решения. Для решения задач динамики упругих стержневых конструкций с кусочно-постоянными распределенными параметрами применяются приближенные численные методы, среди которых наиболее универсальным и гибким является метод конечных элементов (МКЭ) [5 – 7]. Дискретизация континуальной среды позволяет свести систему уравнений в частных производных к системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\}, \quad (1)$$

где $[M], [C], [K]$ – соответственно ленточные матрицы масс, демпфирования и жесткости конструкции в общей системе координат; $\{q\}, \{\dot{q}\}, \{\ddot{q}\}$ – векторы-столбцы обобщенных узловых перемещений, скоростей и ускорений; $\{F\}$ – вектор внешней узловой нагрузки.

При исследовании пространственных колебаний стержневых конструкций в качестве конечного элемента (КЭ) выбирается одномерный элемент балочного типа, работающий на растяжение-сжатие, кручение и изгиб в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. При конечно-элементной схематизации ракет-носителей наряду со стержневыми КЭ в расчетных схемах могут быть учтены сосредоточенные включения в виде жестко прикрепленных и упруго подвешенных масс, упругих закреплений некоторых сечений, а также наличие в системе твердых тел. Если стержни упруго связаны между собой, упругая связь моделируется безмассовым стержневым элементом единичной длины.

Инерционные, демпфирующие и жесткостные свойства системы определяются из характеристик отдельных конечных элементов. Матрицы $[M], [C], [K]$ имеют ленточную структуру, и способ их построения не зависит от типа КЭ, что особенно существенно для систем, расчетные схемы которых состоят из различных комбинаций конечных элементов.

При решении проблемы собственных значений для конечно-элементных задач с большой размерностью ленточных матриц $[K]$ и $[M]$ используется метод итераций в подпространстве [8]. Алгоритм обратных итераций позволяет весьма эффективно вычислять собственные векторы с одновременным определением соответствующих собственных чисел.

Особенность переходных режимов движения ракеты-носителя как тандемной, так и пакетной компоновок на участке старта обусловлена изменением структуры РН вследствие расфиксации удерживающих связей. Внешние сосредоточенные нагрузки задаются в узловых точках конструкции и располагаются в соответствующих элементах вектора правых частей. Задание распределенной нагрузки по

длине конструкции требует замены ее эквивалентным вектором узловых сил [6]. Вектор внешней узловой нагрузки учитывает как статическую нагрузку F_1 , так и интенсивности возмущающих сил $F_2(t)$, изменяющихся во времени, т.е.

$$\{F\} = \{F_1\} + \{F_2(t)\}. \quad (2)$$

Статическая составляющая вектора внешней нагрузки на участке старта РН включает: силы собственного веса РН, заправленной топливом, ветровую нагрузку, переменной интенсивности по длине РН, радиальные и осевые усилия, характеризующие работу кабель-мачты. Силы тяги, прикладываемые в опорных сечениях, и дополнительные силы, сопровождающие РН после расфиксации опор, представляють динамические силы, действующие на начальном участке движения РН.

Одними из эффективных методов динамического анализа конструкций являются методы прямого интегрирования, которые не требуют дополнительных преобразований, и позволяют получить решение системы дифференциальных уравнений (1) в исходной форме. Решение строится на заданном временном интервале с шагом по времени Δt с применением различных конечно-разностных аппроксимаций для перемещений, ускорений и скоростей внутри интервала. Анализ методов прямого интегрирования показал, что для систем переменной структуры необходимо выбирать те методы, которые в конечно-разностных выражениях для скорости и ускорения не содержат вторых производных по времени. К таким методам относятся методы Хоболта и Парка [8, 9].

Анализ результатов решения. Разработка эффективной системы стабилизации управления полетом РН требует определения собственных частот и форм упругих колебаний РН на различных участках полета (например, при старте системы, на активном участке полета по мере выгорания топлива). Проведены исследования динамических характеристик РН КА пакетной схемы, компоновка которой выполнена в виде связки из четырех блоков (трех боковых блоков первой ступени и центрального блока второй ступени), на участке старта. Боковые блоки ($j = 2, 3, 4$) расположены вокруг центрального блока ($j = 1$) так, что угол между ними составляет 120° . Все блоки связаны между собой двумя поясами упругих связей. Конструкция межблочных связей верхнего пояса допускает перемещения вдоль продольной оси и накладывает ограничения в поперечных направлениях. Для нижнего пояса ограничения накладывались по всем трем направлениям. Общий вид расчетной схемы РН КА пакетной компоновки представлен на рис. 1.

Опираение конструкции РН КА на пусковую установку моделировалось упругим закреплением торцевых сечений боковых блоков первой ступени в трех точках ($A_j, B_j, C_j, j = 2, 3, 4$). Точки закрепления торцевых сечений и межблочных связей располагались с эксцентриситетами, равными радиусу конструкции. Подвижность жидкости в топливных баках схематизировалась введением осцилляторов, моделирующих I-й тон колебаний жидкости в продольном направлении. Подвижность жидкости в поперечном направлении согласно [4] не учитывалась, и масса жидкости в указанном направлении принималась равномерно распределенной по длине баков горючего и окислителя. Жесткостные и инерционные параметры системы взяты такими же, как в [9].

Проведены исследования частот пространственных колебаний РН КА пакетной компоновки как для свободной системы, так и в случае упругого закрепления торцевых сечений боковых блоков. Получены спектры собственных частот высокой плотности. Так для свободной системы в диапазоне до 4 Гц располагаются 12 собственных частот, для закрепленной – 16 частот. Анализ форм колебаний РН КА, закрепленной на пусковом столе, показал, что кратные частоты 0,39 Гц соответствуют из-

гибным колебаниям всех блоков в плоскостях $O'x'y'$ и $O'x'z'$. При колебаниях с частотой порядка 1,21 Гц отмечалось кручение центрального стержня и изгибно-крутильные колебания боковых блоков. Изгибные колебания центрального стержня с кратными частотами 1,36; 1,71 и 2,14 Гц сопровождалось продольно-изгибными колебаниями боковых стержней. При колебаниях с частотой 2,18 Гц наблюдались продольные колебания центрального блока и продольно-изгибные колебания боковых стержней. Таким образом, для конструкций РН КА пакетной компоновки является характерным связанным продольных, изгибных и крутильных колебаний.

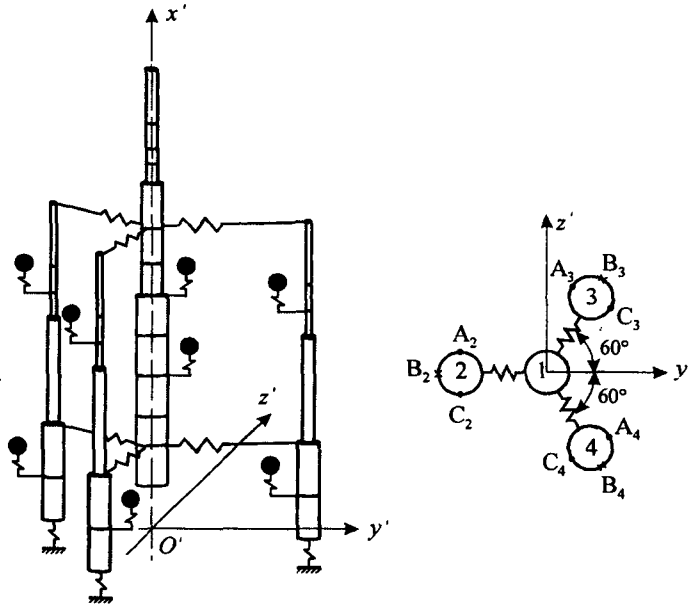


Рис. 1. Общий вид расчетной схемы РН КА пакетной компоновки

Проведены исследования нагруженности РН КА пакетной компоновки на начальном участке старта с учетом переменности структуры, вызванной освобождением системы от удерживающих связей в момент отрыва от пусковой установки. Расфиксация всех опор происходит одновременно по равенству силы тяги двигателей и веса конструкции. Сила тяги двигателей первой ступени аппроксимировалась кусочно-линейной функцией и прикладывалась в сечениях x_y боковых блоков. В сечениях центрального блока на участке движения $[0; \Delta x]$ действовали удерживающие усилия, направленные под углом 60° от блока 2 к блоку 3. Действие радиальных и осевых усилий сведено к центру масс соответствующих сечений центрального блока. Величины радиальных P_{r_i} и осевых P_{z_i} усилий и места их приложения, а также параметры работы двигателей I-ой ступени приведены в [9]. Учитывалось также, что на РН КА действует ветровая нагрузка, направленная под углом γ к плоскости $O'y'z'$, с различной интенсивностью для каждого из блоков. Рассмотрены варианты, когда угол обдува γ составлял 0° и 30° . Максимальное воздействие ветра (интенсивность ветровой нагрузки \bar{q}_{11}) испытывает центральный стержень при $\gamma = 0^\circ$. Интенсивность действия ветровой нагрузки на блоки 2, 3, 4 составляла $0 \cdot \bar{q}_{11}$; $0,5 \cdot \bar{q}_{11}$; $0,5 \cdot \bar{q}_{11}$, а в случае $\gamma = 30^\circ - 0,5 \cdot \bar{q}_{11}$; $0,2 \cdot \bar{q}_{11}$; $0,3 \cdot \bar{q}_{11}$; $0,4 \cdot \bar{q}_{11}$ соответственно для блоков 1, 2, 3, 4. Интенсивность силы ветра, действующей на обтекатель, равна $0,6 \cdot \bar{q}_{11}$.

Начальные перемещения РН КА, вызванные действием ветровой нагрузки, удерживающих сил и действием собственного веса конструкции, определялись из решения уравнения

$$[K]\{q\} = \{F_1\}. \quad (3)$$

Интенсивность ветровой нагрузки и направление ее действия оказывают существенное влияние на начальное положение, занимаемое конструкцией РН на пусковой установке. Под действием ветровой нагрузки как центральный, так и боковые блоки имеют начальные перемещения не только в продольном направлении, вызванные собственным весом конструкции, но также поперечные перемещения вдоль осей $O'y'$ и $O'z'$.

На рис. 2, 3 приведены распределения усилий и ускорений, возникающих в сечениях конструкции РН пакетной компоновки в момент ее отрыва от пусковой установки, когда ветровая нагрузка действует на элементы РН под углом 30^0 .

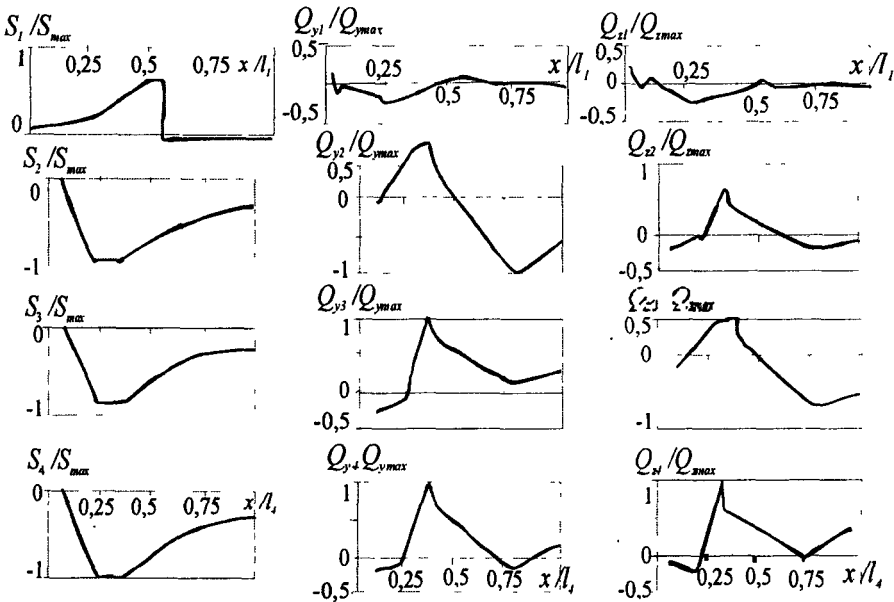


Рис. 2. Распределения усилий, возникающих в сечениях конструкции РН пакетной компоновки в момент ее отрыва от пусковой установки

Как видно из графиков, приведенных на рис. 2, сечения центрального стержня, расположенные ниже места крепления верхних межблочных связей, находятся в растянутом состоянии, верхние сечения сжаты. Боковые блоки на участке старта характеризуются деформациями сжатия, уровень поперечных деформаций незначительный. Максимальные же ускорения в системе (см. графики рис. 3) наблюдаются в момент расфиксации блоков первой ступени в местах приложения сил тяги.

Дана оценка нагруженности элементов конструкции РН КА при действии ветровой нагрузки разной направленности и интенсивности на начальном участке старта. Получено, что максимальные значения перерезывающих усилий Q_x , Q_y , возникающих в сечениях конструкции, отличаются незначительно, но характер их распределения по длине системы различен. Значения усилий, возникающих в межблочных связях конструкции РН, несущественно зависят от направления действия ветровой нагрузки. Наибольший уровень ускорений наблюдается при ветровой нагрузке, характеризуемой углом $\gamma = 0^0$. При этом максимальные значения ускорений получены вдоль оси $O'y'$, что вызвано значительными начальными перемещениями в этом направлении [9].

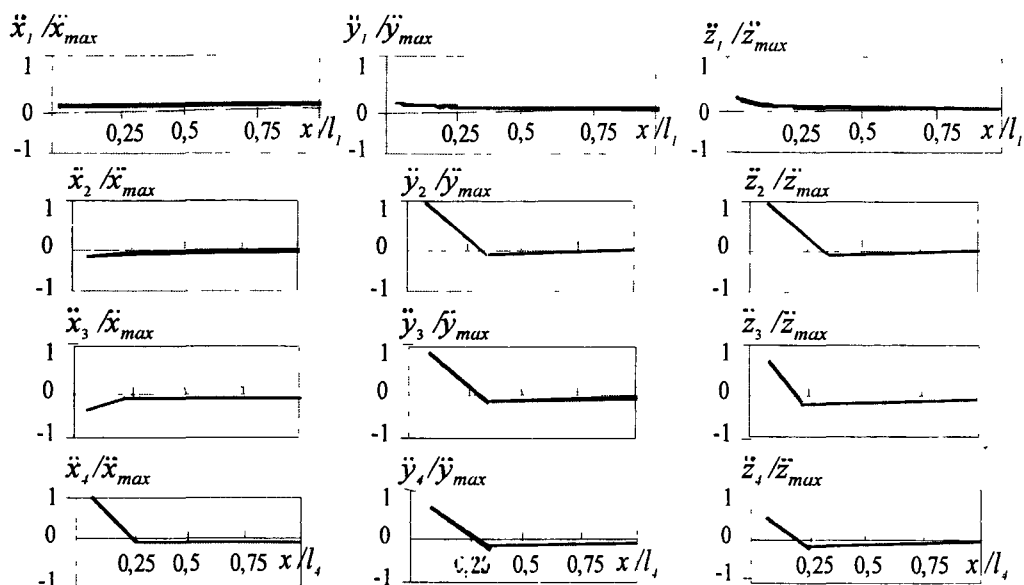


Рис. 3. Распределения ускорений, возникающих в сечениях конструкции РН пакетной компоновки в момент ее отрыва от пусковой установки

Выводы. Проведенные исследования динамических характеристик и нагруженности элементов конструкции РН КА пакетной компоновки на участке старта позволили сделать ряд выводов. Для конструкций РН КА пакетной компоновки является характерным связанность продольных, изгибных и крутильных колебаний. Максимальные ускорения в блоках первой ступени наблюдаются в момент расфиксации их связей с пусковой установкой в сечениях приложения сил тяги. В центральном блоке максимальные ускорения возникают в момент времени, соответствующий освобождению системы от удерживающих сил. Нагруженность центрального блока характеризуется растяжением сечений, расположенных до верхних межблочных связей, и сжатием верхней части блока. Уровень поперечных деформаций как для центрального, так и боковых блоков незначительный.

Библиографические ссылки

1. Гладкий В. Ф. Динамика конструкции летательного аппарата / В. Ф. Гладкий. – М., 1969. – 496 с.
2. Колесников К. С. Динамика ракет / К. С. Колесников. – М., 1980. – 276 с.
3. Рабинович Б. И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов / Б. И. Рабинович. – М., 1975. – 416 с.
4. Микишев Г. Н. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость / Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович. – М., 1977. – 563 с.
5. Образцов И. Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов. – М., 1985. – 392 с.
6. Постнов В. А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В. А. Постнов, И. Я. Хархурим. – Л., 1974. – 342 с.
7. Богомаз Г. И. Конечно-элементный подход к исследованию динамики конструкций, содержащих емкости с жидкостью / Г. И. Богомаз, Н. Е. Науменко, И. Ю. Хижа // Питання прикладної математики і математичного моделювання: Збірник наукових праць. – Дн., 2002. – С. 14 – 21.
8. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате, Е. Вилсон. – М., 1982. – 448 с.
9. Богомаз Г. И. Динамика старта жидкостных ракет-носителей космических аппаратов / Г. И. Богомаз, Н. Е. Науменко, М. Б. Соболевская, И. Ю. Хижа. – К., 2005. – 248 с.

Поступила в редколлегию 26.04.11

УДК 621.744:666.798.2

М. В. Новіков, О. О. Лещук, Т. О. Цисар
 Інститут надтвердих матеріалів ім. В. М. Бакуля НАН України

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ ІНЖЕКЦІЙНОГО ФОРМУВАННЯ ВИРОБІВ З ФУНКЦІОНАЛЬНОЇ КЕРАМІКИ

Представлені результати комп'ютерного моделювання процесів теплоперенесення та інжекційного лиття при формуванні керамічних виробів. Отримані розподіли температури в робочому тракті інжекційної установки та прес-формі. Установлені залежності часу остигання термопластичної маси у прес-формі до температури затвердіння зв'язуючого від характерних розмірних параметрів виробу, що формується, та його теплофізичних характеристик. Визначений розподіл тиску в порожнині прес-форми у процесі інжектування. Установлені залежності зміни тиску в прес-формі під час її заповнення, часу заповнення прес-форми від розмірних характеристик виробу та оптимальне місцерозташування інжекційного отвору, при якому спостерігається мінімальна довжина ліній спаю у виробі в кінці процесу.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання, інжекційне формування, інжекційне лиття, теплоперенесення, заповнення прес-форми.

Представлены результаты компьютерного моделирования процессов теплопереноса и инъекционного литья при формировании керамических изделий. Получены распределения температуры в рабочем тракте инъекционной установки и пресс-форме. Установлены зависимости времени остывания термопластичной массы в пресс-форме до температуры затвердевания связующего от характерных размерных параметров формируемого изделия и его теплофизических характеристик. Определено распределение давления в полости пресс-формы в процессе инъектирования. Установлены зависимости изменения давления во времени заполнения пресс-формы, времени заполнения пресс-формы от размерных параметров изделия и оптимальное месторасположение инъекционного отверстия, при котором наблюдается минимальная длина линий спаивания в изделии в конце процесса.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, инъекционное формование, инъекционное литье, теплоперенос, заполнение пресс-формы.

The results of computer simulation of the heat transfer and injection moulding processes during the ceramic items forming have been presented. The temperature fields in the injection barrel and mould have been calculated. The dependences of thermoplastic mass cooling time in the mould up to the temperature of binder hardening on the diameter of item and its thermal conductivity have been derived. The pressure fields in the mould cavity during the injection have been determined. The dependences of pressure on mould filling time, of mould filling time on diameter of items, and optimal local position of the injection openings, when a minimal length of weld lines in item at the end of process is observed, have been determined.

Key words: computer simulation, injection moulding, injection casting, heat transfer, mould filling.

В останні роки в промислових країнах проявляють великий інтерес до технології інжекційного формування (ІФ) виробів складної форми з керамічних матеріалів. Її суть полягає в отриманні термопластичної маси, що складається з порошку твердого матеріалу та органічного зв'язуючого, з наступним інжектуванням цієї маси до металевої прес-форми та охолодженням у ній до температури затвердіння зв'язуючого. При цьому формується заготовка з конфігурацією порожнини прес-форми. Далі заготовку підігрівають для відгонки зв'язуючого та спікають для отримання кінцевого виробу. Основні закономірності отримання керамічних виробів методом ІФ описані в [6].

Основними параметрами інжекційного лиття є температура термопластичної маси, швидкість інжектування, тиск у матеріалі маси, швидкість охолодження заготовки. Параметри процесу підбирають з використанням наступних правил: швидкість інжектування повинна бути постійною та забезпечувати заповнення критичних ділянок прес-форми, при заповненні термопластична маса не повинна кристалізуватися.

Основними задачами при розробці технології масового виробництва виробів методом ІФ є розрахунок процесів теплоперенесення та течії термопластичної маси

у прес-формі на стадії інжекційного лиття. Це дозволяє визначати поле температури в робочому тракті, залежності характерного часу остигання термопластичної маси у прес-формі від зовнішнього діаметра виробу, поле тиску в порожнині прес-форми, час її заповнення інжектіваним матеріалом, картину розподілу ліній спаю у виробі, що формується, для різних типів прес-форм, різних значень їх розмірних параметрів та різних типів інжектіваних у них матеріалів. Такий набір розрахункових даних дозволяє проводити оптимальне комп'ютерне проектування технології ІФ.

У світовій практиці для дослідження процесів ІФ найбільш широко використовуються комерційні комп'ютерні програми C-Mold, Moldflow, ProCAST [5]. Для розрахунку процесів теплоперенесення на стадії лиття в даній роботі використовували розроблений нами пакет програм [1; 2]. Для комп'ютерного моделювання процесу заповнення термопластичною масою прес-форми використовували спеціальне програмне забезпечення для розрахунку гідродинамічних процесів [3]. Обидва пакети програм використовують скінченноелементну методику моделювання відповідних процесів.

Процеси теплоперенесення в установці інжекційного лиття. Тепловий стан трьохвимірної області V з граничною поверхнею S визначається шляхом вирішення крайової задачі нелінійної нестационарної теплопровідності, яка може бути сформульована у вигляді квазілінійного диференційного рівняння параболічного типу. Припускаючи неоднорідність матеріалу та ізотропію властивостей, маємо:

$$c(T, r) \rho(T, r) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}[\lambda(T, r) \nabla T] + Q(r, t), \quad (1)$$

де c – питома теплоємність, T – температура, r – радіус-вектор точок об'єму V , ρ – густина, t – час, λ – коефіцієнт теплопровідності, Q – питома потужність внутрішніх джерел тепла.

Розглянемо граничні умови на поверхні $S = S_T + S_h + S_a$:

– граничні умови 1-го роду на частині поверхні S_T

$$T(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t); \quad (2)$$

– граничні умови 2-го роду на частині поверхні S_h

$$h_n(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{n} \cdot \lambda(T, \mathbf{r}) \nabla T, \quad (3)$$

де h_n – проекція вектора теплового потоку на зовнішню нормаль \mathbf{n} до поверхні S ;

– граничні умови 3-го роду на частині поверхні S_a , коли задається умова конвективного теплообміну між об'ємом V та зовнішнім середовищем за законом Ньютона

$$h_n(\mathbf{r}, t) = \alpha(\mathbf{r}) [T - \Theta(\mathbf{r}, t)] = -\mathbf{n} \cdot \lambda(T, \mathbf{r}) \nabla T, \quad (4)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, Θ – температура зовнішнього середовища.

Початкові умови визначають розподіл температури в області V у момент часу t_0

$$T(\mathbf{r}, t_0) = T_n(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Рівняння (1) – (5) визначають розподіл температури T у кінцевій області V та на її поверхні S у кожний момент часу та є математичною моделлю процесу нелінійної нестационарної теплопровідності.

Термопластична маса в робочому тракті установки інжекційного лиття нагрівається за рахунок підведення тепла від нагрівача, що розташований вздовж робочого циліндру, де циркулює рідина, яку нагрівають до визначеної температури. Температуру рідини у нагрівачі потрібно підібрати таким чином, щоб забезпечити однорідний прогрів термопластичної маси у робочому тракті до температури $\sim 80^\circ\text{C}$.

Після розрахунку стаціонарного прогріву термопластичної маси в робочому тракті необхідно моделювати нестационарні теплові процеси на етапах під'єднання

прес-форми, після інжектування до неї термопластичної маси та під час вільного остигання прес-форми поза установкою.

Схема установки інжекційного лиття приведена на рис.1. Розрахунок теплового стану установки розділили на чотири етапи, що відповідають реальному технологічному процесу: стаціонарний стан після нагріву термопластичної маси у робочому тракті до під'єднання прес-форми (в області DEFGHI передбачували наявність повітря) (етап 1); нестационарне теплоперенесення в усій установці на протязі 15 с після під'єднання прес-форми (етап 2); нестационарне теплоперенесення в усій установці на протязі 20 с після інжектування термопластичної маси до прес-форми (етап 3); нестационарний стан при охолодженні прес-форми поза установкою (в областях ABCDI та EFGH передбачали наявність повітря) (етап 4).

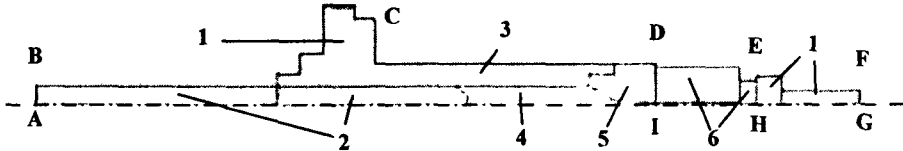


Рис. 1. Розрахункова схема установки інжекційного лиття:

1 – сталеві конструкційні елементи; 2 – сталевий поршень зі штоком гідроциліндру; 3 – сталевий циліндр; 4 – робочий тракт із термопластичною масою; 5 – сталеве сопло; 6 – прес-форма

Розглянемо граничні та початкові умови для задачі теплопровідності, що відповідають кожному з етапів розрахунку.

Етап 1. На поверхнях AB і FG, досить віддалених від робочої зони, задавали температуру 20°C ; на зовнішній поверхні циліндру CD – умову конвективного теплообміну з водою ($\alpha = 7600 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$, $\Theta = 80^{\circ}\text{C}$); на іншій частині граничної поверхні – умову конвективного теплообміну з повітрям ($\alpha = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$, $\Theta = 20^{\circ}\text{C}$ на поверхні BC і $\Theta = 40 \div 20^{\circ}\text{C}$ вздовж поверхні DEF).

Етап 2. Граничні умови ті ж. Початкові умови: в області ABCDI задавали розподіл температури, що був розрахований на етапі 1; в області DEFGHI приймали однорідний розподіл температури (20°C).

Етап 3. Граничні умови ті ж. Початкові умови: в усій області задавали розподіл температури, що розрахований на етапі 2, крім порожнини в прес-формі, де початкова температура визначається температурою інжектваної в неї термопластичної маси, розігрітої до 80°C .

Етап 4. На поверхнях AB і FG задавали температуру 20°C ; на іншій частині граничної поверхні – умову конвективного теплообміну з повітрям ($\alpha = 50 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$, $\Theta = 20^{\circ}\text{C}$ на поверхнях BCD, EF і $\Theta = 40 \div 30^{\circ}\text{C}$ вздовж поверхні DE). Початковий розподіл температури приймали рівним розрахованому на етапі 3 – в області прес-форми DEHI та 20°C – в інших областях, заповнених повітрям.

Розрахунок проводили для процесів інжекційного лиття виробів у формі сопла, кулі з осьовим циліндричним отвором, кільця та суцільної кулі, що формуються з керамічних матеріалів на основі AlN, WC та SiC.

Чисельне моделювання процесу теплоперенесення на етапі 1 показало, що в робочому тракті температура розподіляється практично однорідно та більшою частиною дорівнює $75\text{--}80^{\circ}\text{C}$. Такі умови нагрівання дозволяють формувати практично однорідну термопластичну масу матеріалу, що буде інжектуватися у прес-форму.

Сопло. Розглянемо результати комп'ютерного моделювання процесів теплоперенесення в елементах установки інжекційного лиття сопел, що отримані для етапів 2 – 4. Основна мета розрахунків на цих етапах полягає у визначенні температурно-часових залежностей витримки виробу в прес-формі до температури 40°C , що забезпечує надійне затвердіння зв'язуючого інжектваної маси.

Результати для етапу 2 свідчать про достатньо динамічний нагрів прес-форми в області її примикання до робочого циліндру, де через 15 с температура досягає 58° С. На етапі 3 спочатку максимум температури локалізується в частині сопла, що примикає до робочого тракту. Найбільші градієнти температури мають місце у поперечних перетинах стінки сопла. Приблизно через 10 с остигання прес-форми зникає зона локального максимуму температури вздовж стінки сопла, а через 20 с в усьому соплі температура розподіляється порівняно рівномірно. При цьому максимальне значення температури складає 56° С.

У процесі остигання прес-форми поза установкою (етап 4) точка максимуму температури постійно знаходиться у верхній частині сопла. Повний час остигання до температури 40° С складає 36 с.

На рис. 2 а представлені графіки залежностей характерного часу остигання у прес-формі термопластичних мас на основі порошків різних керамічних матеріалів від зовнішнього діаметра сопла. Загальний час остигання на етапах 3 та 4 збільшується за лінійним законом зі збільшенням розмірних характеристик сопла. При цьому час, необхідний для остигання маси на основі WC, декілька нижчий, ніж для мас на основі інших матеріалів.

Отримані залежності використовують в якості тарувальних для налагодження технологічних процесів інжекційного лиття сопел різних типорозмірів.

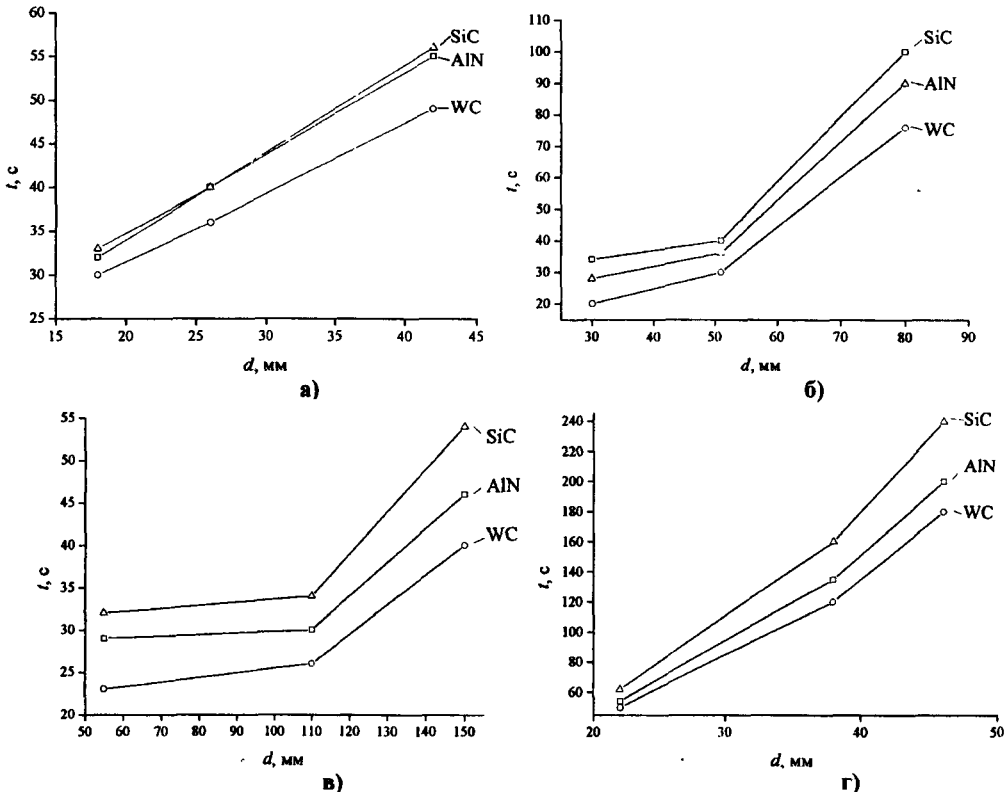


Рис. 2. Залежності часу остигання термопластичних мас на основі AlN, WC та SiC у порожнині прес-форми (етап 3 та 4) від зовнішнього діаметра вхідного отвору сопла (а), від діаметру кулі з отвором (б), від зовнішнього діаметра кільця (в), від діаметра суцільної кулі (г)

Куля з осевим циліндричним отвором. Результати моделювання прогрівання прес-форми для виготовлення куль з отвором на етапі 2 показують, що прес-форма достатньо динамічно нагрівається в області її примикання до робочого циліндру, де через 15 с температура досягає 61° С. Картина зміни температурного поля у прес-формі після інжектування в її порожнину термопластичної маси (етап 3) наступна: спочатку мак-

симум температури локалізується в області кулі, найбільші градієнти температури мають місце на границі контакту кулі з елементами прес-форми; приблизно через 14 с максимум температури переміщується в область примикання прес-форми до робочого циліндру; через 20 с максимальне значення температури в кулі складає 48°C .

У процесі остигання прес-форми поза установкою (етап 4) спочатку спостерігається локальний максимум температури в центрі сфероїдального сегменту кулі, потім він поступово усувається, і вже через 18 с остигання перепад температури у кулі не перевищує 10°C .

Графіки зміни часу остигання маси на основі AlN, WC та SiC для кулі різного діаметру представлені на рис. 2 б.

Кільце. Результати моделювання процесу прогрівання прес-форми для виготовлення кілець (етап 2) показують, що в області примикання прес-форми до робочого циліндру через 15 с температура досягає 63°C . Картина зміни температурного поля у прес-формі після інжектування в її порожнину термопластичної маси (етап 3) наступна: початковий максимум температури локалізується в області кільця, найбільші градієнти температури утворюються на границі контакту кільця з елементами прес-форми; приблизно через 14 с максимум температури зміщується в область примикання прес-форми до робочого циліндру; через 20 с максимальне значення температури в кільці складає 50°C , а картина її розподілу стає порівняно рівномірною.

Температура у прес-формі на етапі остигання поза установкою розподіляється рівномірно. Її максимум завжди розташований у місці попереднього примикання прес-форми до робочого циліндру установки.

Час остигання маси на основі AlN, WC та SiC залежить від діаметру кільця і змінюється відповідно представленим на рис. 2 в графікам.

Суцільна куля. Результати моделювання процесу прогрівання прес-форми для виготовлення суцільної кулі на етапі 2 показали, що прес-форма достатньо швидко нагрівається в області її примикання до робочого циліндру, де через 15 с температура досягає 61°C (рис. 3 а).

На етапі 3 максимум температури спочатку локалізується в центрі кулі, при цьому найбільші градієнти температури мають місце на границі контакту кулі з елементами прес-форми. Через 20 с максимум температури зміщується в область примикання прес-форми до робочого циліндру, однак розподіл температури в області кулі залишається достатньо нерівномірним (рис. 3 б).

У процесі остигання на етапі 4 спочатку спостерігається локальний максимум температури в центрі кулі, який поступово зміщується у сторону попереднього примикання прес-форми до робочого циліндру. Через 36 с остигання перепад температури в кулі не перевищує 7°C (рис. 3 в).

Вплив розмірних параметрів кулі на час її остигання можна проаналізувати, виходячи з графіків, наведених на рис. 2 г. Представлені на рис. 2 графіки використовують у технологічних процесах виготовлення відповідних керамічних виробів.

Таким чином, розроблено чисельну методику поетапного моделювання процесів теплоперенесення в установці інжекційного лиття керамічних матеріалів, яка враховує багатоелементність конструкції, різномодульність її матеріалів, умови конвективного теплообміну з навколишнім середовищем. Розраховано стаціонарний розподіл температури в установці, з якого видно, що її перепад у робочому тракті не перевищує 5°C і термопластична маса є практично однорідною. Проведено поетапне моделювання процесів теплоперенесення в установці інжекційного лиття у часі прогрівання прес-форми, після інжектування в її порожнину термопластичної маси, при остиганні прес-форми поза установкою. Розглянуто процес інжекційного лиття сопел, куль з отвором та без нього, кілець з термопластичної маси на основі порошків керамічних матеріалів AlN, WC, SiC. Виявлено небезпечні зони концентрації температури для кожної прес-форми та інжектваного до неї матеріалу. Установлено залежності часу остигання до температури затвердіння зв'язуючого від характерних розмірних параметрів литого виробу та його матеріалу.

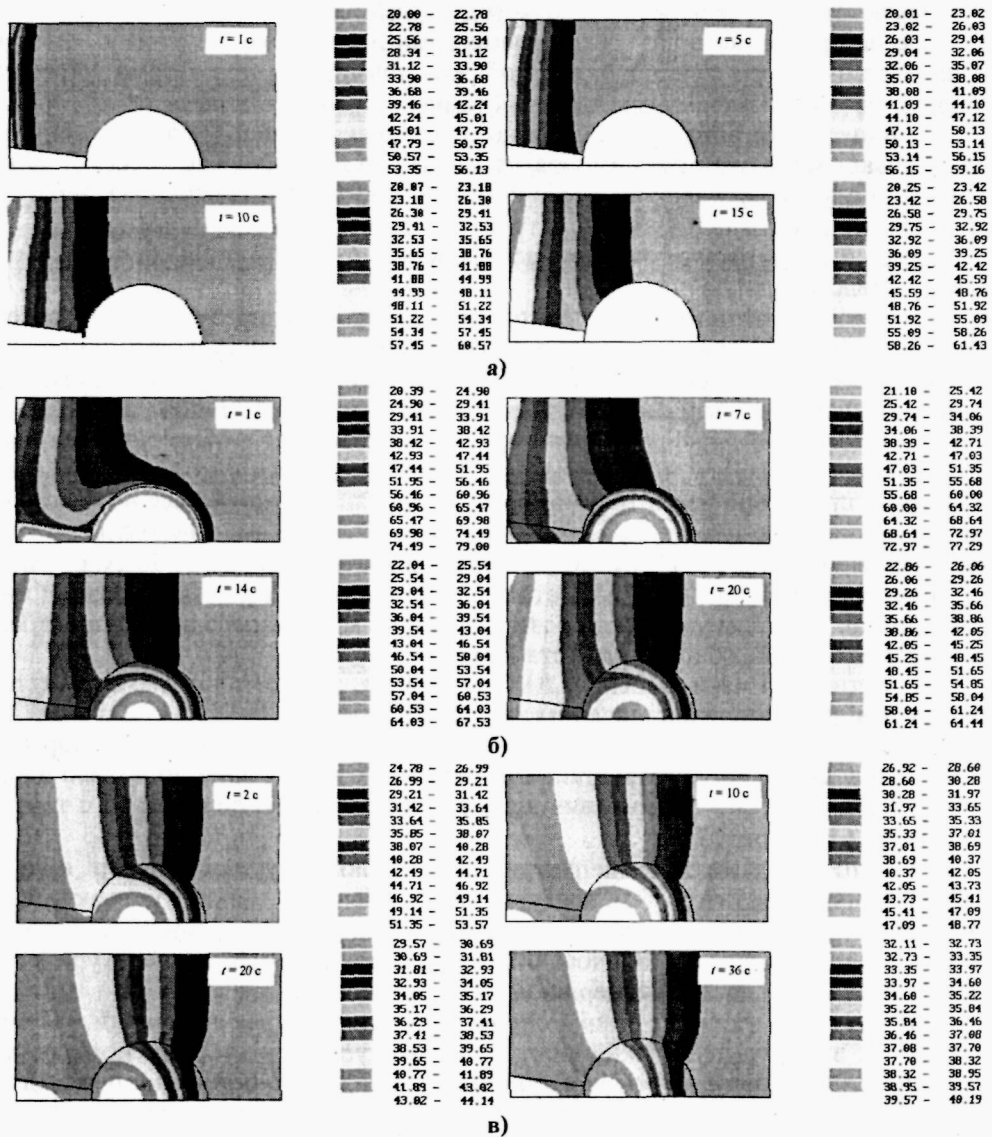


Рис. 3. Характер зміни поля температури (°C) у прес-формі для інжекційного лиття суцільної кулі: а) – етап 2, б) – етап 3, в) – етап 4

Течія термопластичної маси у прес-формі. Течію термопластичної маси в прес-формі описували згідно реологічної моделі нелінійної в'язкої рідини з урахуванням залежності зсувної в'язкості від концентрації порошку і швидкості зсувної деформації [3]. Визначальні рівняння в цьому випадку включають:

- рівняння квазістатичної течії $\sigma_{ij,j} = 0$;
- реологічні рівняння $\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + 2\eta e_{ij}$;
- умову нестисливості $e_{ij}\delta_{ij} = 0$,

де σ_{ij} – компоненти тензора напружень; $p = 1/3\sigma_{ij}\delta_{ij}$ – тиск; δ_{ij} – символ Кронекера; η – коефіцієнт зсувної в'язкості термопластичної маси; e_{ij} – компоненти тензора швидкості деформації.

Залежність коефіцієнту зсувної в'язкості термопластичної маси від інтенсивності швидкості зсувних деформацій γ та об'ємної концентрації порошку керамічного матеріалу c має вигляд [3]:

$$\eta = \sigma_0 \sqrt{1+n^2} / \sqrt{\gamma^2 + n^2\gamma_0^2}, \quad \sigma_0 = \sigma_p c, \quad \gamma_0 = \sigma_0 / \eta_0, \quad n = n_0 \sqrt{1-c^2} \text{ л/с},$$

де σ_0 , γ_0 , n , n_0 – допоміжні константи та параметри апроксимації; σ_p – границя плинності на зсув сипучої маси; η_0 – ефективний коефіцієнт зсувної в'язкості термопластичної маси.

Під час заповнення прес-форми термопластичною масою важливу роль відіграють наступні фактори: розташування інжекційного отвору; геометрія виробу; тип матеріалу термопластичної маси; технологічні параметри процесу. Шляхом варіювання вказаних факторів можна регулювати процес заповнення прес-форми і якість готового виробу. Одним з основних технологічних параметрів інжекційного лиття є швидкість подачі термопластичної маси до порожнини прес-форми, яку задавали постійною з метою порівняльного аналізу результатів. Ефективну в'язкість термопластичної маси вибирали, виходячи з об'ємної концентрації керамічного порошку, що дорівнювала 54 % [4].

Розглянемо результати комп'ютерного моделювання процесу заповнення порожнини прес-форми при формуванні різних керамічних виробів з матеріалу на основі AlN.

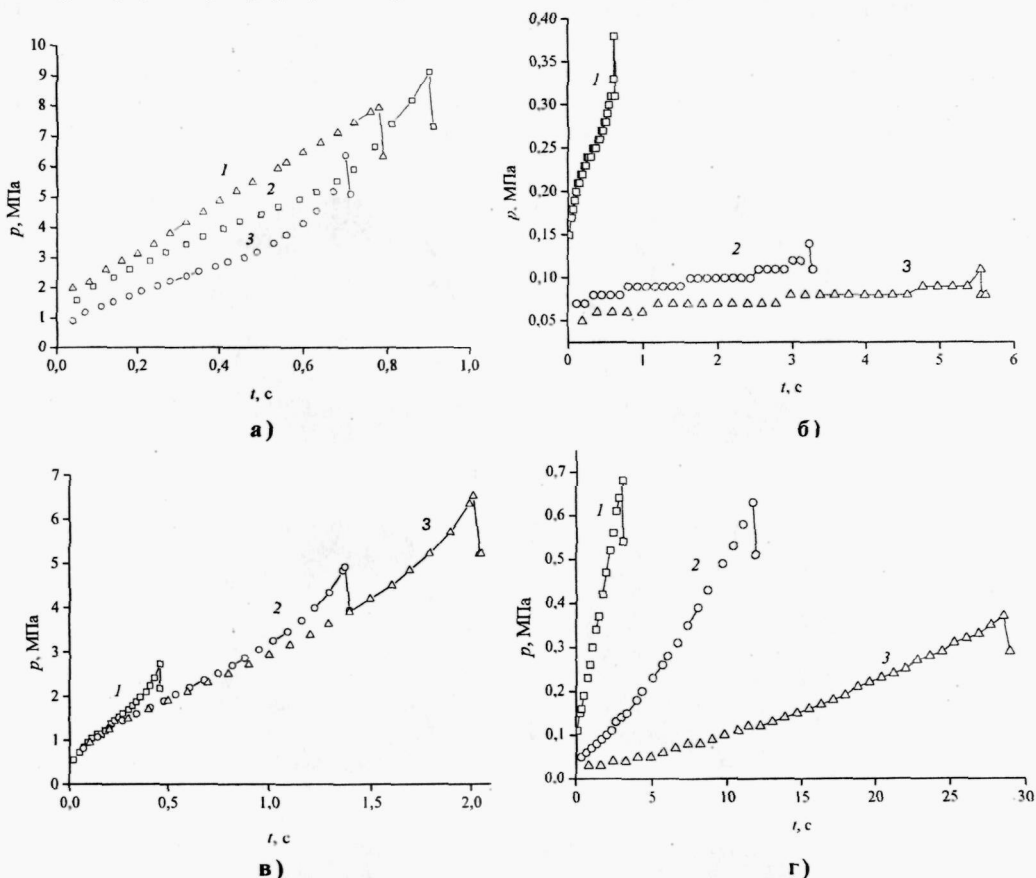


Рис. 4. Зміна тиску біля інжекційного отвору в процесі лиття виробу по формі: а – сопла з інжекційними отворами, що розміщені з його вузького кінця (1), широкого кінця (2), обох кінців (3); б – кулі з осьовим циліндричним отвором діаметра 22 (1), 38 (2) і 46 мм (3); в – кільця діаметра 55 (1), 110 (2) і 150 мм (3); г – суцільної кулі діаметра 22 (1), 38 (2) і 46 мм (3)

Сопло. Розрахунки проводили для трьох випадків розташування інжекційного отвору: з широкого кінця сопла, з вузького кінця, з обох кінців одночасно. При заповненні прес-форми утворюються лінії спаю та повітряні пустоти, які є небажаними, тим більше, якщо вони розташовані в місцях концентрації напружень. Отримано, що рівномірне заповнення порожнини прес-форми термопластичною масою та формування ліній спаю мінімальної довжини, мають місце лише у випадку розташування інжекційного отвору з вузького кінця сопла. На рис. 4 а представлено зміну тиску біля інжекційного отвору в процесі заповнення прес-форми у випадку його різного мі-

сперозташування. Видно, що тиск за часом інжектування збільшується монотонно. Слід також зауважити на різке зростання тиску наприкінці процесу у випадку розташування інжекційного отвору з обох боків, що є ознакою можливої втрати стійкості течії.

Куля з осьовим циліндричним отвором та кільце. При заповненні прес-форми з одного інжекційного отвору, місцезнаходження якого було посередині внутрішньої поверхні порожнини прес-форми або в її верхній частині, тиск розподіляється досить рівномірно. Його максимум локалізується в області інжекційного отвору. Картина розподілу часу заповнення має зворотній характер. Мінімальна довжина ліній спаю та мінімальна кількість повітряних пустот фіксується при заповненні прес-форми з використанням одного інжекційного отвору. Зміна тиску біля інжекційного отвору в процесі лиття виробів різного діаметра представлена на рис. 4 б, в. Як видно, спостерігається монотонне збільшення тиску в часі інжектування, а також зменшення баричного максимуму зі збільшенням розмірів виробів, що формуються.

Суцільна куля. Комп'ютерне моделювання проводили для випадку заповнення порожнини прес-форми з одного інжекційного отвору. Видно, що тиск та час заповнення розподіляються достатньо рівномірно (рис. 5). У нижній частині порожнини тиск дорівнює нулю. Лінії спаю відсутні, але утворюється повітряна пустота у нижній частині кулі навпроти місця інжектування.

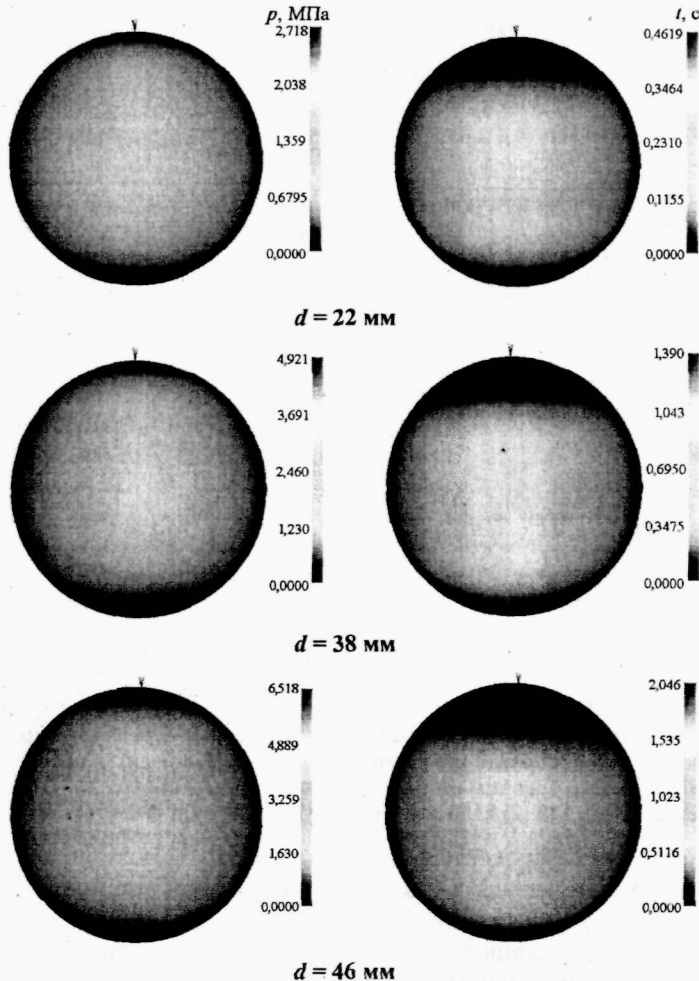


Рис. 5. Розподіл тиску p у порожнині прес-форми в момент її повного заповнення термопластичною масою та часу заповнення t у процесі інжекційного лиття виробу у формі суцільної кулі різного діаметра d

Графіки зміни тиску під інжекційним отвором у процесі лиття кулі різного діаметра представлені на рис. 4 г.

На рис. 6 представлені залежності часу заповнення прес-форм від діаметру виробів, які є важливим показником формування, оскільки вони дозволяють оптимізувати тривалість процесу інжектування, підвищувати строк експлуатації інжекційних сопел і продуктивність установки в цілому.

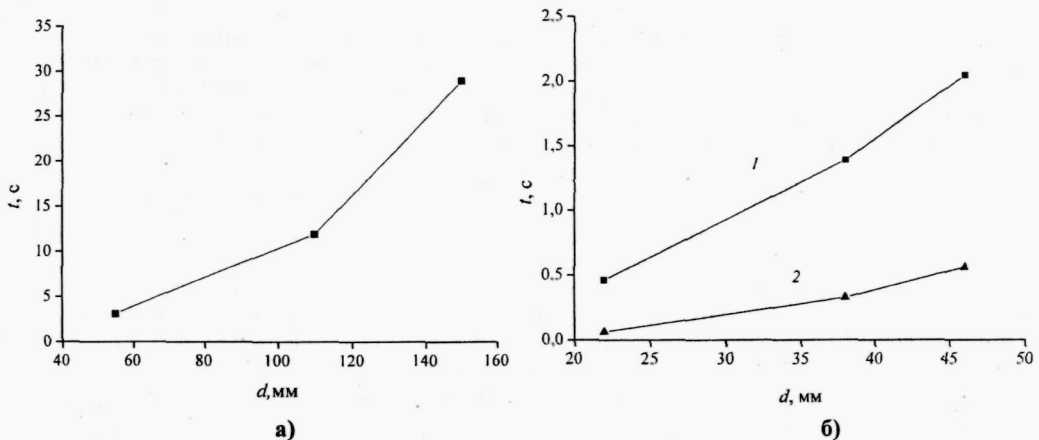


Рис. 6. Залежності часу заповнення прес-форми від діаметра виробу у формі: а – суцільної кулі (1) та кулі з осьовим циліндричним отвором (2); б – кільця

Таким чином, проведено комп'ютерне моделювання процесу інжекційного лиття термопластичної маси до прес-форми для отримання оптимальних значень технологічних параметрів формування залежно від форми, типорозміру керамічного виробу, місцерозташування інжекційного отвору. Отримано розподіл тиску в процесі інжектування, встановлено кореляційні залежності часу заповнення від розмірних характеристик виробу, що формується та оптимальне місцерозташування інжекційного отвору, при якому спостерігається мінімальна довжина ліній спаю у керамічному виробі в кінці процесу.

Бібліографічні посилання

1. Лещук А.А. Компьютерное моделирование процессов теплопереноса при инъекционном формовании изделий сложных форм / А.А. Лещук, Т.А. Цысарь, В.В. Ивженко // Сверхтв. материалы. – 2009. – № 2. – С. 34–43.
2. Новиков Н.В. Экспериментальные исследования и моделирование инъекционного литья изделий сложных форм из технической керамики / Н.В. Новиков, В.В. Ивженко, А.А. Лещук и др. // Сверхтв. материалы. – 2004. – № 5. – С. 3–19.
3. Фролова О.Г. Дослідження течії шлікеру при комп'ютерному моделюванні технології інжекційного формування / О.Г. Фролова, Л.Н. Ткаченко, А.Л. Максименко, М.Б. Штерн // Математические модели и вычислительный эксперимент в материаловедении: Тр. ИПМ. – 2007. – Вып. 9. – С. 31–34.
4. Фролова О.Г. Моделювання заповнення шлікером ємностей складної форми / О.Г. Фролова, Л.Н. Ткаченко, О.О. Лещук та ін. // Математические модели и вычислительный эксперимент в материаловедении: Тр. ИПМ. – 2008. – Вып. 10. – С. 65–71.
5. Bilovol V.V. Mould filling simulations during powder injection moulding: Ph. D. Thesis. – Delft: Delft Univ. Technol., 2003. – 136 p.
6. German R.M. Powder injection molding. – Princeton: Metal Powd. Industr. Fed., 1990. – 521 p.

Надійшла до редколегії 22.03.11

УДК 539.3

Н. И. Ободан

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ПРОГНОЗА ОСТАТОЧНОЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ДЕФОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Рассматривается возможность формализации модели прогноза остаточной несущей способности как дискретной модели. Модель описывается с помощью информационных технологий на базе решения обратной задачи деформирования трехмерного тела, сформулированной как вариационная. В качестве дискретных моделей рассматриваются нейросетевая модель и продукционная модель нечеткого вывода. Показано что предлагаемые модели алгоритмизуемы и позволяют использовать их в автоматизированных системах прогноза остаточной работоспособности конструкций.

Ключевые слова: остаточная работоспособность, нейронные сети, нечеткий вывод .

Розглядається можливість формалізації моделі прогнозу залишкової несучої здатності як дискретної моделі. Модель описується за допомогою інформаційних технологій з застосуванням розв'язку оберненої задачі деформування тривимірної тіла, що формулюється як варіаційна. Як дискретні моделі пропонуються нейронна мережа та модель нечіткого висновку. Доведено що запропоновані моделі алгоритмізуємі та дозволяють використовувати їх в автоматизованих системах прогнозу залишкової працездатності конструкцій.

Ключові слова: залишкова працездатність, нейронні мережі, нечіткий висновок .

The possibility of formalization of forecast of bearing capacity a discrete models is being considered. The model is described with utilization of information technologies, and on the basis of resolution of inverse problem of deformation of 3-dimensional solid body, formulated as variational. Newral network and productional fuzzy models are used as discrete models. It is shown that models discussed can be algorithmized and allow for their usage in automated expert systems for forecasting residual bearing capacity of structures.

Key words: forecast of bearing capacity, newral network, fuzzy models.

Введение. Современные информационные технологии [1] позволяют в автоматизированном режиме оценивать реальную несущую способность деформированных систем. Такой подход позволяет повышать сроки эксплуатации механических систем, повышать уровень их безопасности.

В рамках указанного подхода существует возможность не только решать задачу в каждом конкретном случае, но и анализировать систему в целом и устанавливать, какие решения принимались раньше в подобных случаях. Эти решения непосредственно используются или адаптируются к ситуации, которая изменилась. Такой подход к решению проблемы оценки работоспособности дает возможность вывода, основанного на прецедентах.

При решении указанной задачи прогнозирования возникают трудности в определении характера отклонения параметров системы от номинальных, поскольку они могут не проявлять себя до возникновения определенных условий. При этом одинаковые дефекты могут проявлять себя по-разному, а разные – давать одинаковые признаки.

Кроме того, начальное состояние неповрежденной механической системы всегда является ее индивидуальной характеристикой. Поэтому для успешного прогноза необходимо учитывать максимальных набор возможных состояний, возникающих в результате появления нештатных ситуаций.

Математическая модель.

Такая модель прогноза включает:

- 1) модель реконструкции указанных выше свойств по результатам наблюдений;
- 2) механизм вывода об остаточной работоспособности системы.

Для реализации первого этапа прогноза используются континуальные модели, описывающие деформирование рассматриваемых систем в сочетании с идентификационными алгоритмами восстановления параметров и неизвестных функций, входящих в описание модели. Выполнение второго этапа обеспечивается наличием дискретной составляющей, представляющей собой набор правил принятия решения об остаточной работоспособности на основе информации, полученной на первом этапе.

Дискретная составляющая может быть реализована в виде решающих деревьев, нейронных сетей, нечеткого вывода.

Процесс определения реальной несущей способности может быть организован в виде последовательности этапов:

1. Установление существования нестандартной ситуации путем сопоставления данных, полученных в результате измерений, и соответствующих номинальных значений функций, которые характеризуют напряженно-деформированное состояние (НДС).

2. Локализация области, в которой наблюдается проблемная ситуация, путем описания границ областей системы, в которых отклонения реальных параметров от расчетных превышает допустимые.

3. Формирование гипотез относительно возможных отклонений во внешних или внутренних свойствах системы на основе информации о поведении системы (выделение НДС, которые наиболее существенно отклоняются от номинальных параметров, и соответствующих отклонений из числа внешних воздействий, геометрических и физических свойств).

4. Исследование на моделях деформирования, установленных путем решения задачи идентификации, и соответствующих различным отклонениям в свойствах системы.

5. Выделение основной гипотезы о характере отклонений в свойствах системы путем введения специальной метрики и оценки в ней расстояний между возможными состояниями.

6. Установление типа исчерпания несущей способности по характеру НДС в идентифицированных системах.

7. Формирование ряда проблем работоспособности, соответствующих гипотезе о характере отклонений в НДС, например:

- а) устойчивость (при определяемом уровне сжимающих напряжений и области их существования);
- б) разрушение (при определенных дефектах или уровнях напряжений);
- в) достижение максимально возможных деформаций и перемещений и т.д.

Метод решения.

В качестве континуальной составляющей (базы моделей и процедур) используется модель деформирования трехмерного тела, сформулированная с помощью метода конечных элементов.

$$K(H)U = R(H) \quad (1)$$

где K – глобальная матрица жесткости, $U = \{U_k^i\}$, $k = \overline{1, K}$, $i = \overline{1, 3}$ – вектор узловых перемещений, R – вектор получаемый при проектировании внешней нагрузки на функции формы; $H = \{H_1, H_2, \dots, H_i, \dots\}$, $H_i = \{H_k^i\}$ – вектор, полученный с помощью дискретизации МКЭ неизвестных функций, описывающих реальную модель системы (неизвестные нагрузки – H_1 , параметры дефектов – H_2 , геометрии – H_3 , неизвестные механические свойства H_4 и т.д.)

Для определения компонентов H_i векторов H используется метод обратных задач [2].

$$H_i = \arg \min_{H_i} \rho \{ \sigma(H_i), \sigma^* \}, H_i \in \bar{H}, \sigma \in \bar{H} \quad (2)$$

где $\rho \{ \sigma(H_i), \sigma^* \} = \sum_{ij} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*)^2 d\Omega$, $i, j = \overline{1,3}$, \bar{H} – область возможных значений компонентов векторов, \bar{U} – область возможных деформированных состояний, ε_{ij} , ε_{ij}^* – деформации в точках поверхности тела, вычисленные и измеренные соответственно, Ω – область, занятая оболочкой $\{ \Omega : X = \{ X_1, X_2, X_3 \} \}$ $a_1 \leq X_1 \leq a_2$, $b_1 \leq X_2 \leq b_2$, $c_1 \leq X_3 \leq c_2$.

Так как процесс деформирования наблюдаем в фиксированных точках поверхности $X_p, p = \overline{1, P}$ то функционал $\rho(\sigma(H), \sigma^*)$ приобретает вид

$$\rho(\sigma(H), \sigma^*) = (\varepsilon - \varepsilon^*)^T (\varepsilon - \varepsilon^*)$$

где $\varepsilon = \{ \varepsilon^P \}$, $\varepsilon^P = \{ \varepsilon_{ij}^P \}$, $i = \overline{1,2,3}$, $p = \overline{1, P}$

Дискретная составляющая системы состоит из базы правил двух типов:

1) Правила, в результате действия которых не изменяется состояние модели объекта, т.е. остается наблюдаемым, эти правила сопровождают континуальную модель объекта, для которой сохраняется тип определяемой функции H_i .

2) Правила, в результате действия которых оценивается прогноз поведения системы при различных неизвестных факторах, или прекращается наблюдение.

Введем следующие обозначения:

$\pi_i, i = \overline{1, J}$ – признаки, в качестве которых выступают значения параметров состояния деформированной системы, определяемые в процессе наблюдения,

$\bar{\pi}$ – область определения признаков $\pi_i, i = \overline{1, J}$.

$\tilde{\pi}$ – все признаки, определенные в фиксированный момент времени.

S_i – деформированное состояние реальной системы.

\bar{S} – все свойства системы, определяющие ее реальные состояния.

PP – прогноз поведения деформированной системы.

V – совокупность выводов.

PB – алгоритм прямого вывода, отражающий связь свойств системы с прогнозом остаточной работоспособности.

Алгоритм построения модели прогноза в каждый фиксированный момент времени:

1. Инициализация результатов наблюдений

$$\pi : \text{for } \forall CEX \pi_i \in \bar{\pi} \text{ do if } P(\pi_i) = t \text{ then } \pi_i := \pi \cup \pi_i$$

где P – предикат, отражающий наличие или отсутствие данного признака

$$\forall \pi_i P(\pi_i) = f \vee t.$$

2. Определение возможных реальных деформированных состояний S_i (на основе последовательных решений обратных задач [2]).

$$S_i : \text{for } \forall S_i \in \bar{S} \text{ do if } P(S_i, \bar{S}) = t \text{ then } \bar{S}_i = \bar{S} \cup S_i$$

3. Для каждого S_i из \bar{S} на основании прямого вывода и системы правил определяем прогноз PP , который объединяется с выводами B .

$$B : \text{for } \forall S_i \in \bar{S} \text{ do begin } \{PP\} = PB(S_i) \quad B = B \cup PP$$

4. Для каждого прогноза PP из числа B на основании заданных условий U либо подтверждаем, либо отвергаем PP .

$$\text{for } \forall PP \in B \text{ do if } Y(PP) = f \text{ then } B = B / PP$$

5. Вывод о реальной несущей способности.

В качестве описаний, характеризующих реальное состояние S_i , выступают полученные на основе решений обратных задач (1), (2) деформированные состояния, описываемые вектором перемещений $U(H_i)$.

Дискретная составляющая системы прогноза может быть реализована в виде нейронной сети (НС). Тогда входами НС являются параметры, описывающие состояние системы, а выходом заключение об остаточной работоспособности. При этом состояние системы описывается вектором значений H_i и вектором ε , характеризующим НДС, описывающим значение деформаций в областях, где локализовано изменение свойств системы. Тогда нейросетевое преобразование имеет вид [3]:

$$O = \{O_i\}$$

$$O_i = F \left(\sum_{j=1}^{j^*} \alpha_j f \left(\sum_{n=1}^{n^*} \beta_{jn} E_n + \beta_{j0} \right) + \alpha_0 \right), \quad i = \overline{1, J}$$

где O_i – компонента вектора значений, соответствующих возможным прогнозам; $\Theta = \{\alpha_j, \beta_{jn}\}$ – вектор значений весовых коэффициентов; F, f – активационные функции; $E_n, n = \overline{1, Q}$ – компонента вектора состояния.

$$E = \{E_n\} = \{H_i, \varepsilon\}^T, \quad H_i = \{H_k^i\}, \quad \varepsilon = \{\varepsilon_l\}, \quad \varepsilon_l = \{\varepsilon_{ij}^l\};$$

Для определения весовых коэффициентов используется обучающая выборка, состоящая из множества сочетаний возможных свойств и выводов

$$Z^N = \{E(t), O(t), t = 1, N\}$$

где t – номер примера, соответствующего определенному сочетанию E и O .

Обучение представляет собой отображение множества данных, полученных от эксперта [3] на множество параметров нейросетевой модели $Z^N \rightarrow \Theta$ с целью получения оптимального прогноза с точки зрения выполнения критерия.

$$\Theta = \arg \min_{\Theta} \sum_{t=1}^N (O^*(t) - O(t/O))^2$$

Здесь $O(t)$ – прогноз, получаемый с помощью нейросети, O^* – известный тип потери несущей способности.

Нейросетевая модель прогноза может быть использована в том случае, когда процедура идентификации может считаться достоверной, в противном случае более адекватным является процедура нечеткого вывода [4], когда предполагается, что каждому или группе параметров из E, O соответствует уровень их достоверности $\mu = [0,1]$. При этом предпосылки вывода и вывод связаны правилами типа *ЕСЛИ \tilde{E} то \tilde{O}* , где \tilde{E} – частичный набор признаков из числа E_n , $n=1, Q$, \tilde{O} – частный вывод (выводы).

Например:

ЕСЛИ МАХ УРОВЕНЬ СЖИМАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ РАВЕН $< \sigma_{кр}$ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ $\max \frac{W}{W_{пред}} \geq 0,9$ и ... ТО ИСЧЕРПАНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ (ИНС) ПО ПРЕДЕЛЬНЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМ.

Для использования экспертно-лингвистических высказываний указанного типа, применяется аппарат теории нечетких множеств. При этом, лингвистические оценки типа «ИНС ПО ДЕФОРМАЦИЯМ», «ИНС ПО МАКСИМАЛЬНЫМ НАПРЯЖЕНИЯМ», «ИНС С РАЗРУШЕНИЕМ», а так же параметры состояния формализуются с помощью функции принадлежности

$$\mu(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-b}{c}\right)^2}, \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

где b, c – параметры, определяемые с помощью известных экспериментальных результатов, x – формализуемое свойство. При использовании модели нечеткого вывода вся информация, получаемая от экспертов [3], формулируется в виде базы правил.

Вывод \bar{O} , как результат процедуры нечеткого вывода, формируется по правилу [4]

$$\bar{O} = \frac{\sum \bar{O}_i \mu_i(O)}{\sum \mu_i(O)}$$

\bar{O} – формализованный на шкале $[0,1]$ вывод

$\mu_i = \min_{C_1} \{\mu_{E_1}, \mu_{E_2}, \dots\}$ – если вывод O_i содержится только в одном C_1 -м правиле

$\mu_i = \max_{C_1, C_2, \dots, C_p} \{\min \{\mu_{E_1}, \mu_{E_2}, \dots\}\}$ – если вывод O_i содержится в C_1, C_2, \dots, C_p -х правилах.

Выводы. Предлагаемый подход позволяет объединить существующие методы решения обратных задач механики деформируемого тела и процесс принятия решения об остаточной работоспособности на основании мнения экспертов [3] и накопленных экспериментальных данных. Такой подход является алгоритмичным, для частных моделей он реализован в НИЛ надежности и живучести конструкции ДНУ.

Библиографические ссылки

1. Алпатов А. П. Информационные технологии в образовании и здравоохранении / А. П. Алпатов, Ю. А. Прокопчук, О. В. Юденко, С. В. Хорошилов. – Днепропетровск, 2008. – 288 с.

2. Ободан Н. И. Идентификация обратных задач деформирования тонкостенных оболочек методом декомпозиции / Н. И. Ободан, Н. А. Гук // Математичні методи і фізико-математичні поля. – 2010. – Т.53, № 3. – С. 105–116
3. Гудрамович В.С. Несущая способность и долговечность элементов конструкций / В.С. Гудрамович, Е.С. Переверзев. – К.: Наукова думка, 1981. – 284 с.
4. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления / под ред. Н. Д. Егупова. – М., 2002. – 743 с.

Надійшла до редколегії 04.04.11

УДК 539.3

В. В. Панасюк, Я. Л. Іваницький, С. Т. Штаюра

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України

ВИЗНАЧЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТРИЩИНІЙКОСТІ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

Запропоновано методику визначення величини деформаційної тріщиностійкості пружно-пластичного матеріалу на основі обробки спекл-зображень деформованої ділянки матеріалу в околі вершини тріщини та тензометричних вимірювань за одно- та двовісного розтягу пластини з центральною тріщиною. Установлено, що на деякій відстані від вершини тріщини величина деформації залежить від бази вимірювання, а за межами цієї ділянки деформації для всіх баз вимірювання однакові. На основі розв'язку пружно-пластичної задачі для розтягнутої пластини з тріщиною про її гранично-рівноважний стан у рамках δ_c -моделі встановлено формулу для визначення усередненої характеристики деформаційної тріщиностійкості матеріалу ($\bar{\delta}_c$) та довжини пластичної зони (Δl_p). Оцінено вплив двовісного навантаження на зміну цих характеристик.

Ключові слова: розкриття вершини тріщини, деформації в зоні передруйнування, довжина пластичної зони, цифрова кореляція спекл-зображень (ЦКСЗ), одно- та двовісне навантаження.

Предложена методика определения величины деформационной трещиностойкости упруго-пластического материала на основании обработки спекл-изображений деформированного участка материала в окрестности вершины трещины и тензометрических измерений при одно- и двусном растяжении пластины с центральной трещиной. Сделан вывод, что на некотором расстоянии от вершины трещины величина деформаций зависит от базы измерения, а за пределами этого участка деформации – для всех баз измерения одинаковы. На основании решения упруго-пластической задачи для растяжения пластины с трещиной о предельно-равновесном состоянии в рамках δ_c -модели получена формула для определения усредненной характеристики деформационной трещиностойкости материала ($\bar{\delta}_c$) и длины пластической зоны (Δl_p). Сделана оценка влияния двусной нагрузки на изменение этих характеристик.

Ключевые слова: раскрытие вершины трещины, деформации в зоне предразрушения, длина пластической зоны, цифровая корреляция спекл-изображений (ЦКСИ), одно- и двусная нагрузка.

The method for evaluation of the deformation crack growth resistance of elasto-plastic material, based on processing of speckl images of the deformed region of material at the crack tip and also on tensometric measuring of a plate with a central crack under uni- and biaxial tension is proposed. It is established that at some distance from the crack tip the value of deformation depends on the measuring base, and outside this region the deformations for all measuring bases are similar. Based on the solution of elasto-plastic problem for a cracked pate under tension on the limiting-equilibrium state of the plate within the δ_c -model, the formula for evaluation of the averaged characteristic of crack growth resistance of the material ($\bar{\delta}_c$) and the plastic zone length (Δl_p) is established. The influence of biaxial loading on the change of these characteristics is evaluated.

Key words: Crack tip opening displacement, deformations in the process zone, plastic zone length, digital speckl-images correlation (DSIC), uni- and biaxial tension.

Вступ. Визначення деформаційних характеристик тріщиностійкості пружно-пластичних матеріалів, тобто деформаційних характеристик зони передруйнування матеріалу біля вершини гострого концентратора-тріщини, здійснюють на основі δ_c -моделі [10; 2]. У цій моделі зону передруйнування розглядають як додатковий (модельний) розріз-тріщину, протилежні сторони якої взаємодіють (притягаються напруженнями σ_0), а критичне розкриття модельної тріщини біля вершини вихідної тріщини ($2l_0$), тобто тріщиностійкість матеріалу, дорівнює δ_c (рис. 1). Пряме вимірювання величини δ_c здійснюють за допомогою тензодавачів на лінії вершини вихідної тріщини [11] або певній віддалі від неї [7]. Таке експериментальне вимірювання δ_c наштотується на певні труднощі, зокрема величина δ_c залежить від бази вимірювання. Величину деформаційної характеристики тріщиностійкості матеріалу визначають також на основі критерію граничної рівноваги деформівного пружно-пластичного тіла з тріщиною $\delta_c = \delta_p$ (рис. 1 а) коли навантаження $p = p_c$, де p_c – зусилля, за якого стартує тріщина довжини $2l_0$ під час розтягування зразка.

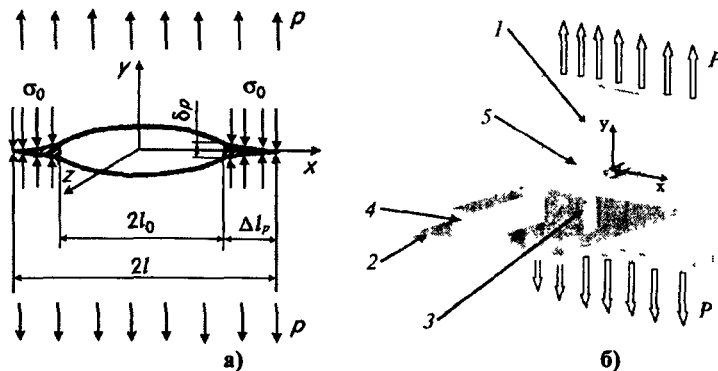


Рис. 1. Схема δ_c -моделі (а) та реєстрації спекл-зображень біля вершини тріщини (б): 1 – зразок; 2 – платформа; 3 – джерело світла; 4 – відеокамера; 5 – зона спостереження

Напруження σ_0 в δ_c -моделі характеризують напруження зчеплення у зоні передруйнування (в зоні Δl_p на рис. 1) і дорівнюють границі течіння матеріалу σ_{02} для ідеально пружно-пластичних матеріалів. У [6] для матеріалів, що зміцнюються у процесі деформування напруження σ_0 визначають за співвідношенням $\sigma_0 = (\sigma_{02} + \sigma_B)/2$, де σ_B – границя міцності матеріалу.

Установлення величини δ_c вимірюванням переміщення за допомогою тензодавачів за відомими [2] методиками не є ефективним оскільки таке вимірювання залежить від бази вимірювання тензодавачів, як показано у статті [9].

У роботі наведено новий метод вимірювання переміщень точок деформівної поверхні у зоні передруйнування і на цій основі визначення величини δ_c , а також довжини зони передруйнування Δl_p (рис. 1а) використовуючи кореляційну обробку електронних спекл-зображень ділянки матеріалу в околі вершини тріщини.

Методика досліджень. Досліджували пластинчаті тонколистові зразки товщиною t [2] з робочою ділянкою 120×120 мм з центральною щілиною довжиною $2l_1$, шириною 2 мм і радіусом заокруглення вершини $\rho < 0.15$ мм із сталей 08кп ($t = 1$ мм), 09Г2С ($t = 1,5$ мм), 65Г ($t = 2$ мм), дюралі Д16Т ($t = 1$ мм) (табл. 1, табл. 2) за силовою схемою одновісного розтягу [3]. Утомні тріщини довжиною $2l_0$ в зразках створювали на універсальній гідравлічній машині за асиметричного циклічного навантаження з асиметрією $R=0.3$ і частотою $f=12$ Гц з дотриманням методичних рекомендацій [2]. Розрахункова схема розтягу пластини зусиллям p і тріщиною $2l_0$ та зоною передруйнування Δl_p показана на рис. 1а, де δ_p і Δl_p – біжучі значення па-

раметрів при навантаженні $p < p_*$ (p_* – величина руйнуючого навантаження). Розтягування зразків здійснювали на гідравлічній машині EUS-40. З одного боку зразка на лінії вершини тріщини за допомогою тензодавача з гострими кінцями, закріпленими на поверхні зразка, вимірювали переміщення берегів тріщини між двома фіксованими точками (база вимірювання – 1.5 мм) за методикою [2]. З протилежного боку в околі цієї ж вершини методом цифрової кореляції спекл-зображень (ЦКСЗ) [8; 4; 12] визначали переміщення деформованої ділянки розміром 3x4 мм.

Таблиця 1
Механічні властивості досліджуваних матеріалів*

Матеріал	$\sigma_{0.2}$, МПа	σ_B , МПа	σ_{β} , МПа	δ_{10} , %	ψ , %
08кп	340	400	760	38	65
09Г2С	290	350	710	21	70
65Г	600	700	1550	12	30
Д16АТ	260	350	440	5	10

* δ_{10} – відносне видовження, ψ – відносне зрушення, σ – істинні напруження розриву.

Таблиця 2
Хімічний склад досліджуваних матеріалів

Матеріал	Вміст елементів, %						
	C	Si	Mn	Cu	Mg	S	Al
08кп	0.05-0.11	≤0.03	0.25-0.50	–	–	0.04	–
09Г2С	≤0.12	0.5–0.8	1.3–1.7	–	–	0.04	0.04
65Г	0.62–0.70	0.17–0.37	0.9–1.2	–	–	0.04	0.04
Д16АТ	–	0.5	0.3–0.9	3.8–4.9	1.2–1.8	–	91–94

Давач вимірювання величини навантаження закріплений між захоплювачем зразка і установки. Сигнали від давачів переміщення і зусилля реєстрували через аналогово-цифровий перетворювач (АЦП) на персональному комп'ютері (ПК) у вигляді діаграми $p - \nu_0$ (зусилля розтягу–переміщення гострих кінців давача). На зворотньому боці зразка для реєстрації поля пружно-пластичних переміщень деформованої поверхні в околі вершини тріщини закріплювали платформу з приладами для реалізації методу ЦКСЗ (рис. 1 б). Таким чином, щоб вісь камери для фотографування була перпендикулярною до лінії поширення тріщини. Використовували CCD камеру (VQ-29B) з фоточутливою матрицею 1/3" (640x480 pixels) та мікрооб'єктивом F3,7 мм з роздільною здатністю 300 лін/мм. Деформовану ділянку освітлювали фотодіодом.

Для реєстрації переміщень деформованого матеріалу в зоні передруйнування до зразка 1 на платформі 2 встановлювали джерело світла 3 та камеру 4 з об'єктивом для спостереження ділянки 5 розміром 3x4 мм. Зразок з утомною тріщиною розтягували зростаючим зусиллям p до досягнення ним критичної величини і фотографували відеокамерою цю ділянку під час збільшення навантаження (через кожні 200 кг), реєструючи її спекл-зображення. При цьому записували діаграму навантаження $p - \nu_0$ розкриття берегів (ν_0) біля вершини тріщини.

Спекл-зображення характеризує інтенсивність світла відбитого від поверхні зразка або поле переміщень ділянки деформованого зразка. Розбивши спекл-зображення на квадратні елементи, за методикою [9; 11] обчислювали функції взаємної кореляції пар відповідних фрагментів (0–200 кГ; 200–400 кГ і т. д.). Положення максимуму кореляційної функції відносно центра фрагмента визначає відносне зміщення пар фрагментів під навантаженням. Кожну пару спекл-зображень поверхні обробляли за спеціальною програмою [9].

Різницю максимумів кореляційних піків між двома зафіксованими сусідніми зображеннями використовували для побудови полів переміщень, розрахунку деформацій поверхні зразка біля вершини тріщини та визначення розкриття берегів вершини тріщини.

Здійснивши аналіз і обробку спекл-зображень для зони передруйнування, установлювали розподіл деформацій біля вершини тріщини. Ці результати наведені на рис. 2 у випадку гранично-рівноважного стану матеріалу зони передруйнування. Крім цього, на рис. 2 наведено також дані (символи ●) вимірювання деформацій на цих же зразках матеріалу тензометричними засобами на базі 1,5 мм для цього ж стану.

Аналіз експериментальних результатів і усереднена величина характеристики деформаційної тріщиностійкості ($\bar{\delta}_c$). За полем пружно-пластичних переміщень в околі вершини тріщини на різних базах вимірювання встановлювали розподіл деформацій у напрямку осі OY . Величину деформації в напрямку осі OY у довільній точці $\varepsilon_y = \varepsilon$, визначали, як відношення приросту переміщень вздовж цієї осі до бази вимірювання Δb_i , за діючого зусилля p ($\varepsilon_i = \Delta b_i / b_i$). Розподіл деформацій для випадку гранично-рівноважного стану у зразку із сталі 08 кп з центральною тріщиною за силовою схемою одновісного розтягу показано на рис. 2. Аналогічний розподіл деформацій отримували за двовісного розтягу при різному співвідношенні прикладених зусиль χ ($\chi = q/p$; q – напруження розтягу паралельно площині тріщини, p – напруження розтягу, перпендикулярно до площини тріщини). Результати таких вимірювань наведено на рис. 3 для $\chi=0.4$.

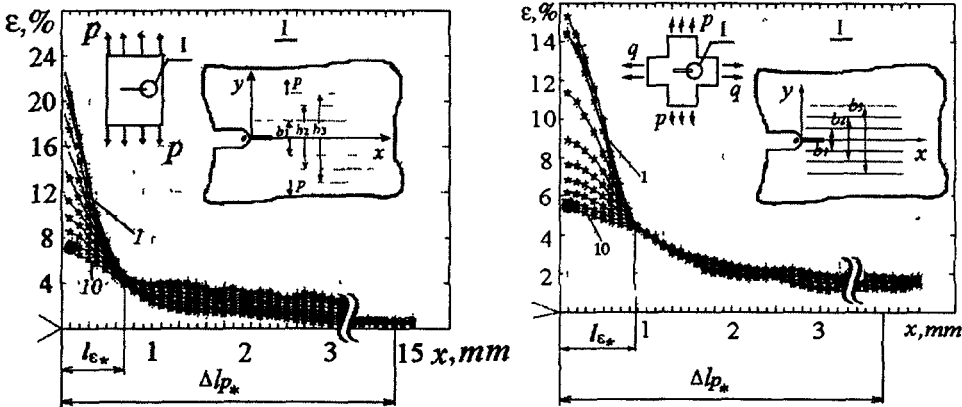


Рис. 2. Розподіл деформацій у зоні передруйнування у сталі 08 кп за гранично рівноважного стану, встановлених методом ЦКСЗ (бази вимірювання від $b_1 = 0,2$ мм (1) до $b_n = 2,0$ мм (10) з кроком 0,2 мм); ●–деформації одержані за вимірами тензодавача на базі 1,5 мм на лінії вершини тріщини за одновісного розтягування

Рис. 3. Розподіл деформацій у зоні передруйнування у сталі 08кп за гранично рівноважного стану, встановлених методом ЦКСЗ (бази вимірювання від $b_1 = 0,2$ мм (1) до $b_n = 2,0$ мм (10) з кроком 0,2 мм); ●–деформації одержані за вимірами тензодавача на базі 1,5 мм на лінії вершини тріщини за двовісного розтягування ($\chi = 0.4$)

Аналізуючи експериментальні результати на рис. 2 і 3, можна зробити такі висновки:

1. На графіках зміни деформацій у зоні передруйнування (Δl_p , рис. 1а) для двох видів навантаження існує деяка відстань l_{ε} (рис. 2, 3) від вершини тріщини (область неоднорідних пластичних деформацій), поза якою деформації для всіх баз вимірювання вздовж осі OX відрізняються незначно, тобто в межах точності експерименту.

2. Експериментальні результати показують, що визначення характеристики δ_c нашттовується на певні методологічні труднощі, а саме: величина δ_c залежить від бази вимірювання деформацій у зоні передруйнування.

3. Експериментальні дані показують, що незалежно від бази (b_i) вимірювання деформацій у зоні передруйнування, довжина зони Δl_p вздовж осі OX є сталою для даного матеріалу, коли $p = p_c$.

Співставлення деяких експериментальних і теоретичних результатів. Для пластини з центральною тріщиною на основі розв'язку пружно-пластичної задачі про її гранично-рівноважний стан у рамках δ_c -моделі [10] встановлено таку залежність між довжиною пластичної зони Δl_p і величиною навантаження p :

$$\Delta l_p = l_0 \left[\sec\left(\frac{\pi p}{2\sigma_0}\right) - 1 \right]. \quad (1)$$

Тут l_0 – початкова півдовжина тріщини, σ_0 – напруження зчеплення в зоні передруйнування.

Випробовували зразки із матеріалів, вказаних у табл. 1. При цьому довжину пластичної зони Δl_p перед тріщиною вздовж осі OX підраховували за формулою (1), а також визначали експериментально методом ЦКСЗ.

При розрахунках за напруження зчеплення σ_0 приймали усереднене значення між напруженнями течіння σ_{ys} й істинними напруженнями розриву σ_r ($\sigma_0 = (\sigma_{02} + \sigma_r)/2$), а за відомими методиками загальну деформацію ϵ розраховують як суму пружної ϵ_e і пластичної ϵ_p складових, тобто $\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p$. Для більшості матеріалів при визначенні максимальної величини ϵ_e приймають, що $\epsilon_e \approx 0,05\%$ [1]. Під час навантаження пластини матеріал у зоні передруйнування деформований за границю течіння (σ_{02}). Лінія, що обмежує ділянку матеріалу біля вершини тріщини, де пластична деформація становить $\epsilon_p = 0,2\%$, відповідає границі пластичної зони. У такому випадку за довжину пластичної зони під час навантаження приймаємо величину відрізка від вершини тріщини вздовж осі OX до точки, де загальна деформація $\epsilon = 0,25\%$.

Для апробації формули (1) реалізовано експериментальні дослідження та визначено довжину пластичної зони за одновісного розтягу пластини з центральною тріщиною для сплаву Д16АТ, а також сталей 08кп, 65Г, 09Г2С.

Результати цих досліджень наведено на рис. 4, які добре узгоджуються з даними, що випливають із залежності (1), що дає підставу вважати величину Δl_p характеристикою властивостей даного матеріалу, яка не залежить від бази вимірювання величини переміщень. У цей же час критичне розкриття між берегами тріщини (δ_c) залежить від бази його вимірювання, як при вимірюванні тензOMETРИЧНИМ ДАВАЧЕМ ТАК І МЕТОДОМ ЦКСЗ. Зауважимо також, що на величину δ_c може впливати також і характер формування вихідної тріщини $2l_0$ під час підготовки зразків для досліджень. Тому на практиці доцільно визначати δ_c як усереднену деформаційну характеристику тріщиностійкості конструкційного матеріалу $\bar{\delta}_c$ через величину Δl_p . Для обчислення цієї характеристики згідно з δ_c -моделлю [10] маємо формулу

$$\bar{\delta}_c \approx \frac{8l_0\sigma_0}{\pi E} \ln\left(\cos\frac{\pi p}{2\sigma_0}\right), \quad (2)$$

Для автомодельної тріщини формули (1) і (2) можна спростити, врахувавши, що $p < \sigma_0$, $\cos\frac{\pi p}{2\sigma_0} < 1$. У такому разі, розписавши функції за формулами (1), (2) у вигляді розкладів по малим параметрам і залишивши тільки перші доданки, одержимо наступну формулу для обчислення усередненої величини деформаційної тріщиностійкості матеріалу $\bar{\delta}_c$.

$$\bar{\delta}_c = (8\sigma_0\Delta l_p)/(\pi E), \quad (3)$$

де E – модуль Юнга матеріалу.

Користуючись формулою (3) обчислили значення характеристики $\bar{\delta}_c$ для сталей 08кп, 65Г, 09Г2С та сплаву Д16АТ, які відповідно наведені в таблиці 3.

Аналіз отриманих результатів показує, що експериментально визначені величини δ_c і обчисленні значення $\tilde{\delta}_c$ за формулою (3) задовільно корелюють між собою.

Таблиця 3

Розкриття тріщини за одновісного розтягування пластини з центральною тріщиною

	$2l_0$, мм	P_* , МПа	Δl_{ps} , мм	$\tilde{\delta}_c$, мм	δ_c , мм тензометричне вимірювання
				$\sigma_0 = (\sigma_{0.2} + \sigma_i)/2$	
08кп	25	250	30	0.196	0.250
09Г2С	25	236	20	0.121	0.140
65Г	25	258	4,5	0.058	0.080
Д16АТ	51	140	12	0.177	0.130
	25	210	12,6	0.181	0.122
	29	180	10,6	0.152	0.108

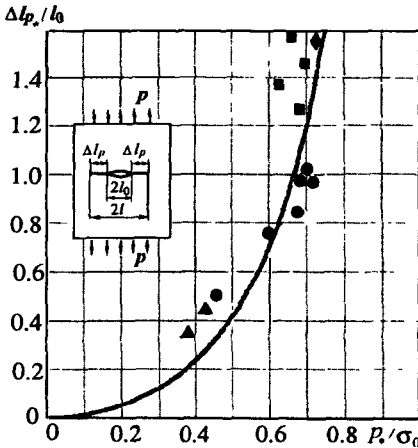


Рис. 4. Залежність довжини пластичної зони при статичному руйнуванні для матеріалів: сплав Д16АТ – •; сталь 08кп – ■; сталь 65Г – ▲; сталь 09Г2С – ◆; — за формулою (1); точки – експеримент ($\sigma_0 = (\sigma_{ps} + \sigma_i)/2$)

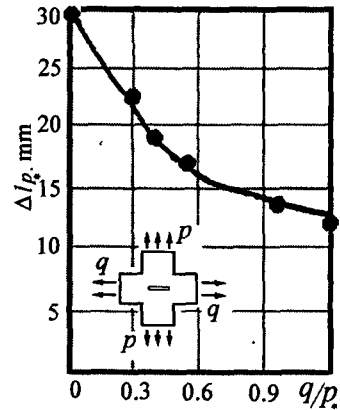


Рис. 5. Вплив жорсткості двовісного навантаження на довжину пластичної зони на продовженні тріщини

Вплив двовісності навантажень на величину деформаційної тріщиностійкості. З метою встановлення впливу двовісності зовнішнього навантаження, тобто коли пластину розтягували у двох взаємно-перпендикулярних напрямках напруженнями p і q , на величину $\tilde{\delta}_c$, проведено спеціальні експерименти за схемою, що показана на рис. 5. Зразки із сталі 08кп товщиною $t=1,0$ мм із розміром робочої частини 120×120 мм розтягували на машині EUS-40 (з відповідним пристроєм для реалізації двовісного навантаження) з доведенням навантаження p до величини руйнуючого навантаження ($p = p_*$). При цьому вимірювали також величину Δl_{ps} в залежності від співвідношення q/p . Результати експериментальних вимірювань наведені на рис. 5. Як видно із експериментальної залежності величина Δl_{ps} за наявності напружень q зменшується. Цю залежність можна описати функцією $\Delta l_{ps}(p, q)$

$$\Delta l_{ps}(p, q) = a_1 + a_2 q/p + a_3 (q/p)^2, \tag{4}$$

де $a_1 = 29.41$ мм; $a_2 = -30.07$ мм; $a_3 = 12.88$ мм – коефіцієнти апроксимації визначені на основі експериментальних даних (рис. 5).

У випадку двовісного навантаження для визначення критичного розкриття берегів тріщини $\tilde{\delta}_c(p, q)$ можна використати формулу (3) і залежність (4).

У таблиці 4 наведено параметри деформаційної тріщиностійкості для сталі 08кп, які визначені за силовою схемою двовісного розтягу хрестоподібного зразка з центральною тріщиною. Результати прямого вимірювання переміщення за методом ЦКСЗ показують, що із збільшенням співвідношення прикладених зусиль ($\chi = p/q$) від 0 до 1.2 величина пластичної зони Δl_p на продовженні тріщини зменшується у 2.5 рази (рис. 5), а значення $\bar{\delta}_c(p, q)$ добре корелюють із прямим вимірюванням величини δ_c методом ЦКСЗ.

Таблиця 4

Вплив співвідношення прикладених зусиль на характеристики деформаційної тріщиностійкості сталі 08кп

q/p	δ_c , мм	Δl_p , мм	$\bar{\delta}_c^p$, мм
0	0.250	29	0.249
0.3	0.243	23	0.242
0.4	0.224	19	0.224
0.5	0.219	17	0.218
0.95	0.212	13	0.211
1.2	0.181	12	0.180

Висновки. Розроблено методику вимірювання деформацій у зоні передруйнування, використовуючи кореляційну обробку електронних спекл-зображень ділянок матеріалу в околі вершини тріщини у пружно-пластичному матеріалі. Запропоновано метод визначення усередненого значення ($\bar{\delta}_c$) деформаційної тріщиностійкості матеріалів.

Бібліографічні посилання

- ГОСТ 1497-84. Металлы. Методы испытаний на растяжение. – М., 1985. – 65 с.
- ГОСТ 25.506-85. Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний металлов. Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при статическом нагружении. – М., 1985. – 62 с.
- Іваницький Я.Л. Визначення характеристик тріщиностійкості матеріалів під двовісним навантаженням / Я.Л. Іваницький, С.Т. Штаюра, Р.Б. Костів, Ю.В. Мольков, І.А. Вергун // *Машинознавство*. – 2004. №7. – С.31-34.
- Муравський Л. І. Оцінка поперечних зсувів поверхні матеріалу методами спекл-кореляції / Л. І. Муравський, О. П. Максименко, О. М. Сахарук // *Відбір і обробка інформації*. – 2003. – Вип. 18. – С 95-99.
- Панасюк В. В. Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов / В. В. Панасюк, А. Е. Андрейкив, С. Е. Ковчик. – К., 1977. – 277с.
- Панасюк В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов / В. В. Панасюк. – К., 1991. – 416 с.
- BSI-DD19: Methods for Crack Opening Displacement (COD) Testing. British Standard Institution, 1978. – 64 p.
- Digital speckle-displacement measurement using a complex spectrum method / D. J. Chen, F. P. Chiang, Y. S. Tan, and H. S. Don // *Appl. Opt.* – 1993. – 32 (11). – P. 1839-1849.
- Panasjuk V. V., Ivanyts'kyi Ya. L. and Maksymenko O. P. Analysis of the Elastoplastic Deformation of the Material in the Process Zone. // *Materials Science. Volume 40, Number 5 / September*. – 2004. – P. 648-655.
- Panasjuk V.V. Strength and Fracture of Solids with Cracks. National Academy of Sciences of Ukraine, Karpenko Physico-mechanical Institute. – Lviv. 2002. – 468 p.
- The effect of geometry on the interpretation of COD test data / I. Ingham, G. R. Egan, D. E. Elliott, and T. C. Harisson // *Practical Application of Fracture Mechanics to Pressure Vessel Technology*, 1971. – 200 p.
- Vijaya Kumar B. V. K. and Haseebrook L. Performance measures for correlation filters // *Appl. Opt.* – 1990. – 29, № 20. – P. 2997-3006.

УДК 539.3

Я. М. Пастернак¹, Г. Т. Сулим²

¹Луцький національний технічний університет,

²Львівський національний університет імені Івана Франка

МОДЕЛІ ТОНКИХ НЕОДНОРІДНОСТЕЙ З УРАХУВАННЯМ МОЖЛИВОСТІ ЇХНЬОГО НЕІДЕАЛЬНОГО КОНТАКТУ З СЕРЕДОВИЩЕМ

Подано загальну методику дослідження на основі методу граничних елементів відшарованих включень у двовимірних задачах теорії пружності та електропружності. Застосований матричний підхід дав можливість уніфікувати розроблені раніше підходи, врахувати прикладене на межі поділу матеріалів додаткове зовнішнє навантаження, а також розширити клас досліджуваних задач, розглядаючи накладки як окремий вид включень із одним повністю відшарованим краєм.

Ключові слова: тонке включення, інтегральні рівняння, електропружність, неідеальний контакт.

Разработана общая методика исследования на основе метода граничных элементов отслоенных включений в двумерных задачах теории упругости и электроупругости. Исползованный матричный подход позволил унифицировать разработанные раньше подходы, учесть приложенную на границе раздела материалов дополнительную внешнюю нагрузку, а также расширить класс исследуемых задач, рассматривая накладку как отдельный вид включений с одним полностью отслоенным краем.

Ключевые слова: тонкое включение, интегральное уравнение, электроупругость, неидеальный контакт.

This study develops the unified approach for the analysis of thin debonded inclusions in 2D problems of elasticity and electro-elasticity using the boundary element method. The used matrix approach allows to unify previously developed techniques, take into account the additional external load applied at the inclusion-solid interface, and also to extend the class of the problems considering overlay as the inclusion fully debonded from the medium at one of its faces.

Key words: thin inclusion, integral equation, electro-elasticity, imperfect contact.

Вступ. Тонкі неоднорідності будови матеріалу є надзвичайно поширеними не тільки як технологічні чи експлуатаційні дефекти (тріщини, заповнені стороннім матеріалом порожнини тощо), але й часто зумисне впроваджуються для створення нових чи покращення існуючих функціональних можливостей матеріалу (зміцнювальні волокна, платівки, підсилення та ін.). Нещодавно також запропоновано [17; 18] використовувати композити на основі п'єзоелектричних матриць із п'єзоволокнами, що дають можливість проектувати пристрої з великою кількістю додаткових корисних функцій, зокрема, моніторингу внутрішнього стану, перетворення енергії, керування вібраціями, формування вихорів на поверхні об'єктів для керування підйнятною силою, демпфування тощо [18].

Недосконалість чи порушення технології виробництва або умов експлуатації зумовлює те, що впроваджені в матеріал тонкі елементи можуть перебувати в умовах неідеального механічного контакту (бути цілковито чи частково відшарованими), що, у свою чергу, веде до передчасного зношування (або навіть руйнування) виготовлених з їхнім використанням відповідальних елементів конструкцій. З іншого боку, завдяки тертю на поверхнях неідеального контакту виділяється тепло, а відтак і розсіюється механічна енергія: відповідні композити можуть виявитися хорошими демпферами та поглиначами звукових і механічних коливань. Тобто, не завжди доцільно прагнути досягнення ідеального контакту і найкраще, якщо технологічний процес може забезпечити бажану міру його якості. Тому дослідження умов можливої контактної взаємодії, а також побудова відповідних моделей тонких неоднорідностей є важливою та на часі.

Огляд основних робіт стосовно моделей теплового і механічного контакту тіл здійснено у [9]. Дослідження тонких елементів структури матеріалу за їхнього ідеального контакту із середовищем подані в роботах, що розглядають, зокрема, тонкі підсилювальні накладки [1], зміцнювальні волокна композитних матеріалів [14; 24], тонкі платівкові армувальні елементи [15; 16], методи розрахунку паль у ґрунті [20] та пружних кріплень консольних балок, анкерних кріплень [23], підходи щодо зміцнення стінок підземних споруд і копалень, підсилення тонкими елементами розвантажувальних отворів конструкцій [13] тощо. Значно вужче висвітлені питання неідеальної взаємодії тонких включень із твердим середовищем. В основному досліджувалися тільки тонкі абсолютно жорсткі включення однічно відшаровані вздовж усієї довжини повністю чи за гладкого контакту з оточуючим матеріалом [1; 4; 10], а також з урахуванням тертя [5; 10]. Розгляду пружних включень стосуються лише поодинокі роботи, наприклад, тонке однічно повністю відшароване гнучке включення розглядається в [19]. Розгляд пружних електропровідних включень у п'єзоелектричних матеріалах започатковано в [12]. У [21] вперше поставлено та розв'язано двовимірну задачу електропружності для п'єзоелектричного матеріалу, що містить тонке включення з довільними електромеханічними властивостями. Умови неідеального електромеханічного контакту тонких включень у п'єзоматеріалах досі не розглядалися.

У зв'язку з цим видається доцільною побудова узагальнених моделей контактної взаємодії тонкого пружного чи електропружного включення з оточуючим середовищем, зокрема, на основі моделей включень із ідеальним контактом. Тим більше, що завдяки принципу спряження континуумів різної вимірності [11], в математичному плані випадки антиплоскої деформації [2], плоскої задачі теорії пружності ізотропного [7] та анізотропного тіл та двовимірної задачі електропружності [21] є досить близькими. Зокрема, рівняння моделі включення [7] за його ідеального контакту використані у [22] для побудови моделей повністю відшарованого пружного включення та накладки. У [8] ці результати поширено також на випадок гладкого контакту та контакту з тертям, але лише для ізотропного включення.

У даній роботі, виходячи із принципу спряження континуумів різної вимірності та математичних моделей ідеального пружного та електропружного контакту тонких неоднорідностей будуються узагальнені залежності контактної взаємодії, що враховують повне чи часткове відшарування включення, додаткові залежності між компонентами вектора напружень (зокрема, тертя) та прикладене в місці розшарування зовнішнє навантаження.

Означення термінів електромеханічної контактної взаємодії діелектричних тіл. Під час дослідження умов контакту тіл користуватимемося розширеними векторами поверхневих переміщень і електричного потенціалу $u = \tilde{u}$ та напружень і поверхневої густини заряду $t = \tilde{t}$ [21]. Відповідно до [4; 5; 10] уведемо такі означення:

- ідеальним електромеханічним контактом тіл 1 та 2 у певній точці називатимемо випадок, коли $u^{(1)} = u^{(2)}$, $t^{(1)} = -t^{(2)}$ у цій точці;
- відшаруванням називатимемо довільне взаємне зміщення точок двох тіл, які перед тим були в ідеальному контакті; воно може відбуватися внаслідок: 1) взаємного проковзування поверхонь контакту (неповне, дотичне відшарування); 2) взаємного розходження точок уздовж нормалі до контактної поверхні (нормальний відрив, нормальне відшарування); 3) поєднання дотичного відшарування з нормальним відривом (повне відшарування);
- відсутність дотику тіл у точці (відрив чи повне відшарування включення у точці) характеризується додатним значенням різниці нормальних переміщень тіл у точці: $(u^{(2)} - u^{(1)}) \cdot n^{(1)} > 0$, тобто вважається, що відповідні поверхні тіл не заходять одна поза другу;

- нормальні напруження $t_n = t \cdot n^{(1)}$ на цих поверхнях можуть дорівнювати нулю або бути певним чином пов'язаними між собою (смуга пластичності, певні лінійні чи нелінійні в'язі, міжмолекулярна взаємодія тощо);
- частковим контактом (контактом з проковзуванням) тіл 1 та 2 у точці називатимемо випадок, коли нормальні $u_n = u \cdot n^{(1)}$, $t_n = t \cdot n^{(1)}$ та електричні u_4 , t_4 (електричний потенціал та поверхневий заряд) компоненти векторів u та t пов'язані залежностями $u_n^{(1)} = u_n^{(2)}$, $u_4^{(1)} = u_4^{(2)}$, $t_n^{(1)} = -t_n^{(2)}$, $t_4^{(1)} = -t_4^{(2)}$; між компонентами вектора t можуть існувати обумовлені специфікою фізичної взаємодії поверхонь додаткові зв'язки, зокрема:
 - гладким контактом тіл називатимемо частковий контакт, за якого дотичні напруження t_{τ_1} , t_{τ_2} є нульовими; тут τ_1 , τ_2 – взаємно ортогональні вектори дотичних до поверхні тіла;
 - негладким контактом (контактом з тертям) тіл називатимемо частковий контакт, за якого дотичні напруження t_{τ_1} , t_{τ_2} є ненульовими і пов'язані з іншими компонентами векторів t і u , зокрема, за законом сухого тертя Кулона.

Пластичне проковзування вздовж певної поверхні, смуга пластичності теж є проявами неідеального контакту з проковзуванням.

Формулювання задачі. Розглянемо циліндричне тіло, що містить тонке стрічкове чужорідне включення. Нехай фізико-механічні поля, що діють у тілі та включенні не залежать від часу та не змінюються уздовж прямих, паралельних до твірної тіла. Це дає можливість звести задачу до розгляду стаціонарних фізико-механічних полів тіла і включення в деякій площині, перпендикулярній до твірної тіла (плоска і антиплоска задачі теорії пружності, а також двовимірна задача електропружності).

Виходячи з принципу спряження континуумів різної вимірності [11] (рис. 1) створюється лінійчата модель тонкої неоднорідності. При цьому остання вилучається із розгляду як геометричний об'єкт, а контактні напруження, поверхневі заряди, переміщення та електричний потенціал переносяться на його серединну поверхню Γ_c (відповідно на береги Γ_c^+ та Γ_c^- , рис. 1). У такий спосіб задача зводиться до визначення напруженого стану тіла із лінією стрибків фізико-механічних полів.

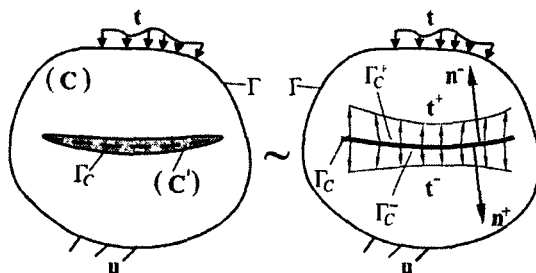


Рис. 1. Схеми задачі та способу моделювання тонкого включення за принципом спряження

У [2; 7; 21] антиплоска, плоска та двовимірна електропружна задачі для тіла із тонким включенням зведені до систем гіперсингулярних інтегральних рівнянь, що мають такий загальний вигляд:

- коли точка колокації y лежить на гладкій поверхні Γ тіла

$$\frac{1}{2} u(y) = L^u(y, u, t, \Delta u, \Sigma t); \quad (1)$$

- коли точка колокації y лежить на гладкій серединній поверхні Γ_c неоднорідності

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Sigma u(y) &= L^*(y, u, t, \Delta u, \Sigma t), & \frac{1}{2}\Sigma u'(y) &= F''(y, \Delta u', -\Sigma t'), \\ \frac{1}{2}\Delta t(y) &= L'(y, u, t, \Delta u, \Sigma t), & \frac{1}{2}\Delta t'(y) &= -F'(y, \Delta u', -\Sigma t'). \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $\Sigma(\bullet) = (\bullet)^+ + (\bullet)^-$, $\Delta(\bullet) = (\bullet)^+ - (\bullet)^-$; $\Gamma \equiv \partial S$ – межа двовимірної області S ; $t^\pm = \sigma^\pm \cdot n^\pm$; n^\pm – вектори нормалей до поверхонь Γ_c^\pm ; σ – тензор напружень (і електричних зміщень); u – вектор переміщень (і електричного потенціалу); знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь Γ_c^+ та Γ_c^- , утворених математичним розрізом Γ_c ; L'' , L' , F'' , F' – відомі лінійні інтегральні оператори. Прямим верхнім індексом «i» позначено величини, що стосуються включення.

За умов $\Sigma u' = \Sigma u$, $\Delta u' = \Delta u$, $\Sigma t' = -\Sigma t$, $\Delta t' = -\Delta t$ ідеального контакту неоднорідності з тілом рівняння (1), (2) мають єдиний розв'язок у разі заданих внутрішніх зусиль та формулюванні відповідних крайових умов щодо компонент векторів переміщень та напружень на межі тіла. Тобто, в цьому випадку поставлена задача зводиться до знаходження із системи інтегральних рівнянь (1), (2) невідомих стрибків переміщень (і електричного потенціалу) Δu та напружень (і електричного зміщення) $\Delta \sigma \cdot n^+ = \Sigma t$ на берегах математичного розрізу Γ_c та не заданих попередньо крайовими умовами складових векторів u чи t на межі Γ тіла.

У разі неідеального контакту тонкого включення, задачу зручно звести до визначення тих же крайових функцій. Для цього необхідно побудувати зв'язки крайових функцій включення та обраних функцій стрибка на поверхні Γ_c середовища.

Узагальнення умов контакту для переміщень. Спрямуємо вісь Ox_1 локальної системи координат $Ox_1x_2x_3$ уздовж нормалі $n(y) \sim n^+(y)$ до поверхні Γ_c^+ у точці колокації y . Вектори у глобальній системі координат пов'язані з відповідними в локальній співвідношеннями $u = \Omega \cdot u^g$, $u^g = \Omega^{-1} \cdot u$, де верхній індекс «g» позначає вектор у глобальній системі координат; Ω – матриця повертання, що повністю означена через компоненти вектора n .

Припустимо, що тонке включення відшароване на ділянках $\gamma^- \subset \Gamma_c^-$ та $\gamma^+ \subset \Gamma_c^+$ ($\gamma^- \cap \gamma^+ = 0$). Для кожної точки колокації $y \in \gamma^\pm$ введемо до розгляду діагональну матрицю $Q(y)$, елементи якої дорівнюють одиниці, якщо контакт уздовж відповідної координати є ідеальним, і нулю в іншому разі. Тоді можна записати такі тотожності:

$$\Sigma u = Q \cdot \Sigma u' + (I - Q) \cdot \Sigma u, \quad \Delta u = Q \cdot \Delta u' + (I - Q) \cdot \Delta u, \quad (3)$$

де I – одинична матриця.

Вважатимемо, що при відшаруванні включення у точці $y \in \gamma^-$, протилежний його берег знаходиться в ідеальному контакті з середовищем, і навпаки. Тобто, для відшарування у точці $y \in \gamma^+$ переміщення протилежного берега $y' \in \gamma^+$ включення і середовища однакові

$$u^\mp(y') = u'^\mp = \frac{1}{2}(\Sigma u' \mp \Delta u'). \quad (4)$$

Із використанням основного припущення про те, що товщина включення значно менша за його характерний розмір (наприклад, довжину серединної лінії) можна на-

ближено вважати, що переміщення включення в його поперечному перерізі $u \in \gamma^\pm$ мало різняться, тобто у цьому разі залежності (4) набудуть простішого вигляду

$$u^\mp = u'^\mp \approx \frac{1}{2}(u'^+ + u'^-) = \frac{1}{2}\Sigma u'. \quad (5)$$

З урахуванням (5) першу формулу в (3) для $u \in \Gamma_c^-$ можна записати у вигляді

$$\Sigma u = Q \cdot \Sigma u' + (I - Q) \cdot \left(\frac{1}{2}\Sigma u' + \frac{1}{2}\Sigma u - \frac{1}{2}\Delta u \right), \quad (6)$$

а для $u \in \Gamma_c^+$:

$$\Sigma u = Q \cdot \Sigma u' + (I - Q) \cdot \left(\frac{1}{2}\Sigma u' + \frac{1}{2}\Sigma u + \frac{1}{2}\Delta u \right). \quad (7)$$

Розв'язуючи рівняння (6) та (7) відносно Σu , отримаємо

$$\Sigma u = \Sigma u' \pm R \cdot \Delta u, \quad (8)$$

де $R = (I + Q)^{-1} \cdot (I - Q)$. У формулі (8) верхній знак береться для $u \in \gamma^+$, а нижній – для $u \in \gamma^-$.

Так само, використовуючи другу із формул (3), отримаємо для $u \in \gamma^\pm$:

$$\Delta u' = (I - R^2) \cdot \Delta u. \quad (9)$$

Узагальнення умов контакту для вектора напружень. Запишемо тотожності типу (3) для вектора контактних напружень

$$\Delta t = -Q \cdot \Delta t' + (I - Q) \cdot \Delta t. \quad (10)$$

Знак « \rightarrow » перед першим доданком у (10) зумовлений тим, що зовнішня нормаль до поверхні включення спрямована у протилежний бік до напрямку зовнішньої нормалі тіла, тобто $n' = -n$.

Вважатимемо, що в області неідеального контакту між компонентами вектора напружень існують додаткові залежності (внаслідок тертя, пластичного деформування тощо), які можна задати співвідношенням

$$t = -t' = P \cdot t + (I - Q) \cdot t_0 = -P \cdot t' + (I - Q) \cdot t_0. \quad (11)$$

Тут P – матриця додаткових залежностей із нульовими елементами на діагоналі; t_0 – вектор прикладеного в місці проковзування самоврівноваженого додаткового зовнішнього навантаження, що діє з однаковою інтенсивністю і на включення, і на середовище. Зазначимо, що за виконання умов (11), тобто у разі неідеального контакту з додатковим самоврівноваженим навантаженням тіла та включення, для контактних напружень справджуються ті ж рівності, що й за ідеального контакту:

$$\Sigma t' = -\Sigma t, \quad \Delta t' = -\Delta t. \quad (12)$$

Припустимо, що тонке включення відшароване на ділянках $\gamma^- \subset \Gamma_c^-$. Тоді для точки колокації $u \in \gamma^-$ відповідно до (10) та (12) матимемо

$$\Delta t = -Q \cdot \Delta t' + (I - Q) \cdot (\Sigma t + \Sigma t' - \Delta t') = -Q \cdot \Delta t' + (I - Q) \cdot (\Sigma t + 2t'). \quad (13)$$

Відповідно до (11) за часткового відшарування на $\gamma^- \subset \Gamma_c^-$ вектор напружень $t^- = P \cdot t'^- - (I - Q) \cdot t_0$, тому із (13) отримаємо

$$\begin{aligned} \Delta t &= -Q \cdot \Delta t' + (I - Q) \cdot (\Sigma t + 2t'^-) = \\ &= -Q \cdot \Delta t' + (I - Q) \cdot (\Sigma t + P \cdot (\Sigma t' - \Delta t') - 2(I - Q) \cdot t_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Повторно використовуючи рівності (12), з урахуванням означення матриці Q рівняння (14) можна перетворити до вигляду

$$\Delta t = -(I - Q) \cdot (P - I) \cdot \Sigma t - (Q + (I - Q) \cdot P) \cdot \Delta t' - 2(I - Q) \cdot t_0. \quad (15)$$

Так само при частковому відшаруванні тонкого включення на ділянках $\gamma^+ \subset \Gamma_c^+$ для точок колокації $y \in \gamma^+$ на основі (10) та (12) матимемо

$$\Delta t = -Q \cdot \Delta t' - (I - Q) \cdot (\Sigma t + \Sigma t' + \Delta t') = -Q \cdot \Delta t' + (I - Q) \cdot (-\Sigma t + 2t'^+). \quad (16)$$

Використовуючи рівності (11) та (12), вираз (16) можна перетворити до вигляду

$$\Delta t = (I - Q) \cdot (P - I) \Sigma t - (Q + (I - Q) \cdot P) \cdot \Delta t' + 2(I - Q) \cdot t_0. \quad (17)$$

Об'єднуючи (15) та (17) отримаємо

$$\Delta t = \pm (I - Q) \cdot (P - I) \cdot \Sigma t - (Q + (I - Q) \cdot P) \Delta t' \pm 2(I - Q) \cdot t_0, \quad (18)$$

де використовується те ж правило знаків, що і в формулі (8).

Граничні випадки універсальних умов контакту

Ідеальний механічний контакт як граничний випадок неідеального. У цьому випадку $Q = I$, $P = 0$ і співвідношення (8), (9), (12) та (18) набудуть вигляду

$$\Sigma u' = \Sigma u, \quad \Delta u' = \Delta u, \quad \Sigma t' = -\Sigma t, \quad \Delta t' = -\Delta t.$$

Включення, цілковито відшароване (відірване) на окремих ділянках та накладка. У випадку відриву включення (цілковитого відшарування) на ділянках γ^\pm матриці Q та P є нульовими. Тому, на підставі виразів (8) та (18) отримаємо для $y \in \gamma^\pm$

$$\Sigma u(y) = \Sigma u'(y) \pm \Delta u(y), \quad \Delta t(y) = \mp \Sigma t(y) \pm 2t_0(y). \quad (19)$$

Рівності (19) аналогічні до відповідних співвідношень, отриманих у [8; 22], проте враховують ще й прикладене зовнішнє навантаження $t_0(y)$.

У випадку тонкої пружної накладки перший із виразів (19) треба застосовувати з урахуванням умови $u^- = 0$. Тоді матимемо

$$u = u^+ = \frac{1}{2} \Sigma u'.$$

Навантаження, прикладене до накладки можна врахувати, вважаючи що

$$t = -\Sigma t' + t_0.$$

Гладкий контакт тонкого включення. У випадку гладкого контакту на ділянках γ^\pm у плоскій задачі теорії пружності матриця P є нульовою, а матриця Q

має єдину ненульову компоненту $Q_{11} = 1$. З урахуванням використаних у формулі (8) позначень для точок $y \in \gamma^{\pm}$ отримаємо

$$\Sigma u(y) = \Sigma u'(y) \pm R \cdot \Delta u(y), \quad \Delta t(y) = \mp R \cdot \Sigma t(y) - Q \cdot \Delta t'(y) \pm 2R \cdot t_0(y), \quad (20)$$

де вираз для матриці R спрощується: $R = I - Q$. Для ізотропного гладко відшарованого включення вираз (20) відповідає формулам, запропонованим в [8], які, однак, не враховують анізотропії включення, тому в цьому випадку слід використовувати загальніші співвідношення (9) та (20).

Негладкий контакт тонкого включення. Так само, вважаючи, що $P_{11} = P_{22} = P_{21} = 0$, $P_{12} = sf$, де f – коефіцієнт тертя ковзання, а $s = \pm 1$ – множник, що задає напрям сили тертя, із (18) отримаємо рівняння для часткового контакту з урахуванням сухого тертя за законом Кулона. У випадку узагальненої плоскої деформації чи сумісного розгляду плоскої та антиплоскої задач теорії пружності ненульові компоненти матриць Q та P для часткового контакту з тертям матимуть вигляд

$$Q_{11} = 1, \quad P_{21} = p_x f, \quad P_{31} = p_z f,$$

де p_x, p_z – напрямні косинуси вектора сили тертя в локальній системі координат.

Ітераційні процедури визначення умов контакту. Вважатимемо, що характер, розташування та довжина зони можливого відшарування тонкого включення є відомими (заданими). Однак при цьому можуть залишатися невідомими конкретні умови контактної взаємодії між включенням та тілом у кожній точці цієї зони, залежно від наявних сил адгезії між різними матеріалами, їхньої інтенсивності, міри можливої анізотропії та багатьох інших чинників. Проте можна сформулювати деякі загальні твердження. Включення обов'язково буде прилягати до тіла, якщо нормальна компонента вектора контактних напружень тіла $t_n < 0$ (при дотику нормальні напруження тіла, внаслідок стиску, вважаються від'ємними), і перебуватиме або в ідеальному, або у частковому контакті за умов проковзування (гладкого, з тертям чи іншого). У разі $t_n \geq 0$ можна зреалізувати ідеальний чи, залежно від типу в'язей між матеріалами, одну із форм неідеального контакту: включення може або лише проковзувати, або бути також відірваними (повністю відшарованим) на окремих ділянках (при цьому на ділянках відриву поверхні включення та середовища не можуть перекриватися, тобто $\Delta u_n \geq 0$). Врахування тертя також пов'язане з порушенням лінійності задачі, оскільки закон Кулона задає лише граничне значення сили тертя. Тому для з'ясування умов контакту використовуватимемо наступні ітераційні процедури.

Дуже мале (практично відсутнє) тертя між поверхнями тонкого включення та оточуючого середовища. У цьому випадку включення може або перебувати в умовах гладкого контакту, якщо $t_n^{\pm}(y) < 0$ ($y \in \gamma_c^{\pm}$), або вважатися повністю відшарованим. Для визначення того, які саме з умов контакту виконуються, необхідно здійснити наступні кроки. По-перше, розв'язується задача для включення за моделями гладкого контакту, заданого на усіх ділянках можливого відшарування γ_c^{\pm} . По-друге, для заданої множини точок колокації y_k перевіряється виконання умови дотику тіл $t_n^{\pm}(y_k) < 0$. Якщо вона не виконується, то у відповідних точках модель включення змінюється на модель повного відшарування. Задача знову розв'язується, а другий крок повторюється доти, доки не задовольнятимуться умови дотику та умови відсутності перекривання включення і тіла $\Delta u_n(y_k) \geq 0$.

Врахування тертя між включенням та середовищем. За аналогією із [3] у цьому випадку необхідно здійснити наступні кроки. На першому етапі розв'язування

контактної задачі вважається, що умови ідеального контакту задовольняються на всій ділянці можливого відшарування γ_c^\pm . Після розв'язування такої задачі, за отриманими значеннями нормальної t_n^\pm та дотичної t_t^\pm компонент вектора напружень у множині точок колокації $y_k \in \gamma_c^\pm$ перевіряється умова $|t_t(y_k)| \leq -f t_n(y_k)$ (вважається, що тіла контактують, тобто $t_n < 0$). Якщо ця умова виконується, то в заданих точках дійсно задовольняються умови ідеального контакту. Якщо ж умова не виконується, то у відповідних точках вважається, що $|t_t| = -f t_n$. Знак дотичних напружень у випадку контакту з тертям вибирається таким же, яким він є для ідеального контакту. Далі задача знову розв'язується, а перевірки умов виконуються доти, доки вони не будуть задовольнятися.

Поєднуючи ці дві ітераційні процедури досить просто перейти до алгоритму, що дає можливість розв'язувати задачі, в яких буде враховуватися відставання включення, а на ділянках контакту – його тертя із оточуючим середовищем. У числовій реалізації всіх цих ітераційних підходів необхідно враховувати похибки розрахунків та машинних обчислень, а також задавати певні обмеження на кількість ітерацій. Ці ж ітераційні процедури можна також використовувати за незначних модифікацій у разі формулювання інших умов неідеального контакту.

Числовий аналіз задач

Плоска задача теорії пружності ізотропного тіла. Розглянемо плоску деформацію безмежного пружного середовища з тонким пружним включенням із іншого матеріалу. Товщина включення $2h$ дорівнює $0,1$ його довжини $2a$. Відносна жорсткість включення $k = E'/E'' = 10^2$, коефіцієнти Пуассона включення та середовища однакові і рівні $0,3$. Тут вжито позначення E' – модуль пружності матеріалу включення, E'' – відповідний для матеріалу середовища. Включення на одному березі (Γ_c^+) ідеально контактує із тілом, а на іншому (Γ_c^-) перебуває або в умовах ідеального механічного контакту, або є гладко відшарованим, або ж є під впливом сил тертя ковзання (коефіцієнт тертя ковзання f дорівнює $0,7$). На безмежності тіло навантажене зусиллями $\sigma_x = p$, $\sigma_y = -p$ ($p > 0$). Схему задачі зображено на врізці до рис. 2. Значення дотичних контактних напружень t_x^\pm (в обраній системі координат Oxy , рис. 2) у тілі на поверхнях Γ_c^+ та Γ_c^- для випадків ідеального (крива 1), гладкого (крива 2) та контакту з тертям (крива 3) для значень $|x/a| \leq 0,9(8)$ подано на графіках рис. 2. Штрихові криві позначають стрибок дотичних переміщень на включенні та відношення дотичних до нормальних напружень на відшарованому з тертям березі (при цьому слід використовувати позначені штрихами осі ординат). У моделі використано 30 квадратичних розривних граничних елементів. При дослідженні негладкого відшарування включення сітку згущено до 50 елементів. При збільшенні кількості елементів з 30 до 50 значення контактних напружень у точці $x = 0,5a$ змінювалися менше як на $0,4\%$.

Із рис. 2 видно, що відшарування тонкого включення на Γ_c^- значно збільшує значення зсувних контактних напружень біля торців включення на невідшарованій ділянці Γ_c^+ . Причому, чим менший коефіцієнт тертя ковзання, тим вони більші і досягають граничного значення, коли коефіцієнт тертя f дорівнює нулю (гладкий контакт, крива 2). За умови контакту з тертям на Γ_c^- включення проковзує біля своїх кінців, причому величина проковзування з наближенням до вістря включення стрімко прямує до нуля. Виявилось також, що у цій зоні стрімкого зменшення проковзування не можуть виникнути нормальні напруження стиску, внаслідок чого оточуючий матеріал на-

магається відійти від поверхні включення і таким чином, якщо сили адгезії є слабкими, до проковзування додається і нормальний відрив ($t_y^- = 0$). Саме цей випадок відображений на рис. 2. На ділянці, яку можна наближено окреслити відрізком $(-0,36a; 0,36a)$, ідеальний контакт включення з оточуючим матеріалом не порушувався.

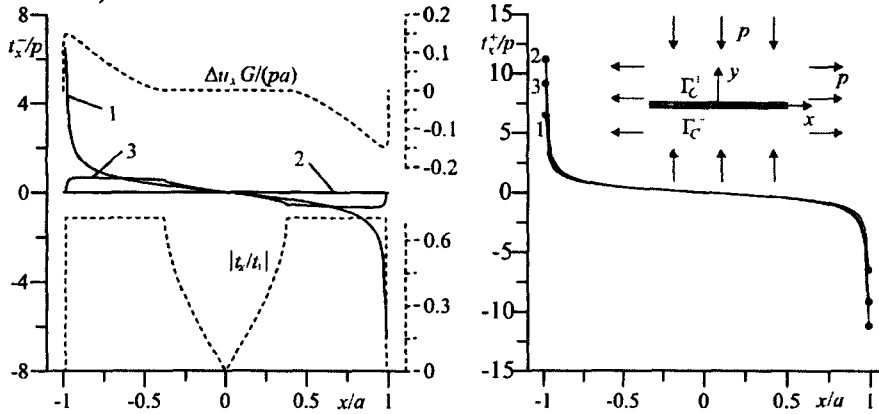


Рис. 2. Дотичні контактні напруження за різних умов контакту тонкого включення

Обчислені значення зусиль тертя разом зі значеннями переміщень межі тіла та включення можуть бути використані при дослідженні розсіювання енергії за циклічних навантажень композиту з відшарованим включенням.

Електропружна задача. Розглянемо електропружне тіло, виготовлене з кераміки PZT-4 гексагонального класу симетрії 6mm, вісь симетрії якої спрямована вздовж осі Ox_2 . Модулі пружності (в ГПа) дорівнюють [6]: $C_{11} = 139$; $C_{12} = 74,3$; $C_{13} = 77,8$; $C_{22} = 115$; $C_{44} = 25,6$; $C_{33} = 0,5(C_{11} - C_{13})$; $C_{66} = C_{44}$; $C_{33} = C_{11}$. П'єзоелектричні коефіцієнти (Кл/м²): $e_{21} = -5,2$; $e_{22} = 15,1$; $e_{16} = 12,7$; $e_{23} = e_{21}$; $e_{34} = e_{16}$. Діелектричні сталі (нФ/м): $\kappa_{11} = 6,461$; $\kappa_{22} = 5,620$.

Вважатимемо, що п'єзоелектричне тіло безмежне і містить жорстке включення завдовжки $2a$ і завтовшки $2h$ ($h = 0,01a$), розташоване вздовж осі Ox_1 (рис. 3). Нехай включення повністю відшароване на нижньому березі на ділянці $(-b, b)$, де $b < a$. Нормовані узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень та електричних зміщень (КІНЕЗ) [21] $K_{12}^* = K_{12}/\sigma\sqrt{\pi a}$, $K_{22}^* = K_{22}/\sigma\sqrt{\pi a}$, $K_{42}^* = K_{42}/D^*\sqrt{\pi a}$ для правого невідшарованого торця включення за всебічного розтягу середовища на безмежності зображено на рис. 3. Суцільні криві відповідають металевому включенню, а штрихові – включенню-діелектрику, що не поляризується (діелектрична проникність близька до відповідної для вакууму). Величина D^* є номінальним електричним зміщенням (в Кл/м²), модуль якого дорівнює модулю навантаження σ (в ГПа). У моделі використано 40 розривних граничних елементів. При обчисленні узагальнених КІНЕЗ застосовано такі їхні зв'язки із крайовими функціями [21]:

$$K_{12} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} S_{j_2} \Sigma t_j, \quad K_{22} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} S_{j_1} \Sigma t_j, \quad K_{42} = -\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi s}{2}} \Sigma t_4,$$

де S_{ij} – компоненти тензора Barnett – Lothe; s – відстань від точки на Γ_c до вершини включення. У [21] також подано асимптотичний розподіл напружень та електричних зміщень в околі вершини тонкого включення, що означений узагальненими КІНЕЗ.

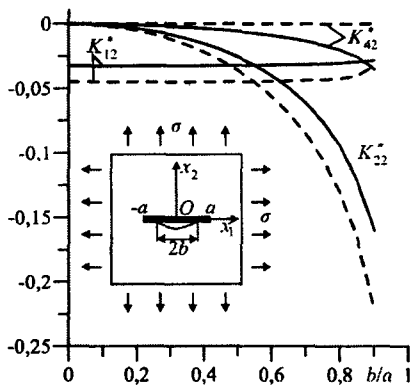


Рис. 3. Нормовані узагальнені КІНЕЗ жорсткого повністю відшарованого на окремі ділянки включення

У випадку невідшарованого включення ($b/a = 0$) відхилення обчислених числово узагальнених КІНЕЗ від аналітичного розв'язку [21] не перевищує 0,04 %, що засвідчує високу точність використаного числового підходу та методу обчислення узагальнених КІНЕЗ. За повного відшарування, заданого співвідношеннями (19), вважається, що просвіт заповнюється електронепроникним середовищем (умовно таким можна вважати середовище із малою у порівнянні з матеріалом тіла діелектричною проникністю). Тому для металевого включення зміна КІНЕЗ K_{22} зі збільшенням зони відшарування менша, ніж відповідна для включення-діелектрика. Домінуючий для невідшарованого включення КІНЕЗ K_{12} лише незначно зменшується зі збільшенням довжини b просвіту, проте вже при $b/a > 0,6$ має менші значення, ніж КІНЕЗ K_{22} . Відповідно до означення [11; 21] $K_{22} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(r, \theta)|_{\theta=0} - K_{21}$ (у даному прикладі $K_{21} = 0$), тобто відшарування породжує значну концентрацію зсувних напружень поблизу вершини включення. Вплив відшарування на КІНЕЗ K_{42} є незначним.

Висновки. Сформульована методологія узагальнення побудованих раніше рівнянь для аналізу плоскої та антиплоскої задач теорії пружності й електропружності тіл із тонкими включеннями на випадок, коли контакт на межі поділу матеріалів може бути неідеальним. Виходячи з моделі тонкого включення за ідеального механічного контакту із середовищем побудовано узагальнені моделі повністю та частково відшарованого на окремих ділянках включення. Розглянуто гладкий контакт, контакт із тертям та випадок відсутності контактної взаємодії з утворенням вільної або навантаженої зовнішніми зусиллями поверхні. Запропоновано ітераційні підходи визначення ділянок гладкого контакту чи повного відшарування, ідеального контакту чи контакту з тертям. Числовий аналіз засвідчив коректність та ефективність використання запропонованих моделей тонких включень із неідеальним контактом при розв'язуванні конкретних задач.

Бібліографічні посилання

1. Александров В.М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В.М. Александров, Б.И. Сметанин, Б.В. Соболев. – М., 1993. – 224 с.
2. Васильев К.В. Поздовжній зсув безмежного тіла з тонким дволанковим пружним включенням / К.В. Васильев, Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим // Вісн. Дон. нац. ун-ту. Сер. А. Природн. наук. – 2010. – № 2. – С. 55–63.
3. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н. и др.; отв. ред. Рвачев В.Л.; АН УССР. Ин-т проблем машиностроения. – К., 1989. – 232 с.

4. **Ильина И.И.** Задача о тонком жестком межфазном включении, отслоившемся вдоль одной стороны от среды / И.И. Ильина, В.В. Сильвестров // Мех. твердого тела. – 2005. – № 3. – С. 153–166.
5. **Ильина И.И.** Частично отслоившееся тонкое жесткое включение между разными упругими материалами при наличии трения в зоне контакта / И.И. Ильина, В.В. Сильвестров // Вестник СамГУ. Естественная серия. – 2007. – № 4 (54). – С. 124–139.
6. **Партон В.З.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М., 1988. – 472 с.
7. **Пастернак Я.М.** Дуальный метод граничных элементов для задач теории тонких включений / Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53. – № 2. – С. 46–57.
8. **Пастернак Я.М.** Модели тонкого включения в условиях его идеального и неидеального контактного взаимодействия с окружающим материалом / Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим, Л.Г. Пискозуб // Труды VI Междунар. симп. по трибофатике МСТФ 2010 В 2 ч. Ч. 2. – Минск, 2010. – С. 399–404.
9. **Пискозуб Й.З.** Умови контактної взаємодії тіл (огляд) / Й.З. Пискозуб, Г.Т. Сулим // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47. – № 3. – С. 111–125.
10. **Попов Г.Я.** Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г.Я. Попов. – М., 1982. – 344 с.
11. **Сулим Г.Т.** Основы математической теории термоупругой равновесии деформированных твердых тел с тонкими включениями / Г.Т. Сулим. – Львів, 2007. – 716 с..
12. **Сулим Г.Т.** Антиплоская задача для тонкого упругого включения в п'езоелектричному просторі / Г.Т. Сулим, Р.В. Рабош // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2008. – 69. – С. 189–202.
13. **Сяський А.О.** Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці / А.О. Сяський, Ю.В. Батишкіна // Вісник ТДТУ. – Т. 9, № 2. – 2004. – С. 5–12.
14. **Aliabadi M.H.** Fracture mechanics analysis of cracking in plain and reinforced concrete using the boundary element method / M.H. Aliabadi, A.L. Saleh // Eng. Fract. Mech. – 2002. – 69. – P. 267–280.
15. **Leite L.G.S.** Boundary element formulation for 2D solids with stiff and soft thin inclusions / L.G.S. Leite, W.S. Venturini // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2005. – 29. – P. 257–267.
16. **Leite L.G.S.** Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method / L.G.S. Leite, H.B. Coda, W.S. Venturini // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2003. – 27. – P. 193–201.
17. **Lin Y.** A double inclusion model for multiphase piezoelectric composites / Y. Lin, H.A. Sodaño // Smart Materials and Structures. – 2010. – 19, №. 3.
18. **Lin Y.** Fabrication and electromechanical characterization of a piezoelectric structural fiber for multifunctional composites / Y. Lin, H.A. Sodaño // Advanced Functional Materials. – 2009. – 19. – P. 592–598.
19. **Moraru G.** Concentration of stresses near a debonded flexible inclusion in plane elasticity / G. Moraru // Rev. Roum. Sci. Techn. – Méc. Appl. – 53, №. 2. – P. 175–182, Bucarest, 2008.
20. **Padron L.A.** BEM–FEM coupling model for the dynamic analysis of piles and pile groups / L.A. Padron, J.J. Aznarez, O. Maeso // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2007. – 31. – P. 473–484.
21. **Pasternak Ia.** Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities / Ia. Pasternak // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2011. – 35. – №. 4. – P. 678–690.
22. **Pasternak Ia.** The unified approach for the analysis of elastic equilibrium of solids containing thin internal and surface heterogeneities // Ia. Pasternak, H. Sulym // Zeszyty naukowe Politechniki Rzeszowskiej. Mechanika. – 2010. – 81. – № 277. – P. 51–60.
23. **Riederer K.** Simulation of linear inclusions with the BEM / K. Riederer, C. Duenser, G. Beer // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2009. – 33. – P. 959–965.
24. **Saleh A.L.** Crack growth analysis in reinforced concrete using BEM / A.L. Saleh, M.H. Aliabadi // J. Eng. Mech. – 1998. – 124. – №. 9. – P.949–958.

Надійшла до редакції 25.03.11

УДК 539.3

В. С. Попович, Г. Ю. Гарматій

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ЗА ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО НАГРІВАННЯ

На прикладі вільного від зовнішніх навантажень півпростору, який шляхом конвективного теплообміну через обмежуючу поверхню нагрівається середовищем лінійно-змінної з часом температури, ілюструється методика аналітичного визначення термопружного стану елементів конструкцій за високотемпературного нагрівання.

Ключові слова: конвективний теплообмін, термопружний стан, високотемпературного нагрівання.

На примере свободного от внешних нагружений полупространства, которое путем конвективного теплообмена через ограничивающую поверхность нагревается средой линейно-переменной во времени температурой, иллюстрируется методика аналитического определения термоупругого состояния элементов конструкций при высокотемпературном нагреве.

Ключевые слова: конвективный теплообмен, термоупругое состояние, высокотемпературный нагрев.

On the example of free of external loadings half-space which by a convective heat exchange through a limiting surface heated an environment by a linear-variable in time temperature, the methods of analytical determination of the thermoelasticity state of elements of constructions is illustrated at the high temperature heating.

Keywords: convective heat exchange, thermoelasticity state, high temperature heating.

Багато елементів конструкцій працюють в умовах високотемпературного нагрівання середовищами змінної з часом температури. Вирішення проблем їх міцності та довговічності пов'язано з адекватним визначенням їх напружено-деформованого стану. При цьому, очевидно, слід виходити із моделі термочутливого тіла (теплові і механічні характеристики залежать від температури), що приводить до необхідності будувати розв'язки нелінійних задач термопружності, що переважно здійснюється числовими методами. Тут, на прикладі вільного від зовнішніх навантажень півпростору $z \geq 0$ з рівномірним розподілом температури t_p , який шляхом конвективного теплообміну через обмежуючу поверхню $z = 0$ нагрівається середовищем лінійно-змінної з часом температури $t_c(\tau) = t_n + b\tau$, ілюструється методика побудови аналітичного розв'язку таких задач.

Температурне поле півпростору визначаємо з нелінійної нестационарної крайової задачі

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) = c_v(t) \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (1)$$

$$\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=0} - \alpha \left[t \Big|_{z=0} - (t_n + b\tau) \right] = 0, \quad (2)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} t < \infty, \quad t \Big|_{\tau=0} = t_p, \quad (3)$$

де $\lambda_t(t)$, $c_v(t)$ – коефіцієнт теплопровідності та об'ємна теплоємність – функції температури t ; α – коефіцієнт теплообміну через поверхню $z = 0$.

Розв'язок задачі (1) – (3) побудуємо, використавши метод лінеаризації [5] та інтегральне перетворення Лапласа за часовою координатою.

Увівши безрозмірну температуру $T = \frac{t}{t_0} \left(T_p = \frac{t_p}{t_0} \right)$, де t_0 – вибрана нами відлікова температура, подамо теплофізичні характеристики $\lambda_t(t)$ і $c_v(t)$ у вигляді

$$\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T), \quad (4)$$

де величини χ_0 мають відповідні розмірності (опорні значення), а величини $\chi^*(T)$ – безрозмірні функції. Перейдемо в задачі (1) – (3) до безрозмірних величин:

$Fo = \frac{a_0 \tau}{l_0^2}$ – безрозмірний час Фур'є ($a_0 = \frac{\lambda_{t0}}{c_{v0}}$ – опорний коефіцієнт теплопровідності, l_0 – вибраний нами характерний розмір); $\zeta = \frac{z}{l_0}$; $Bi = \frac{\alpha l_0}{\lambda_{t0}}$,

$Pd = \frac{bl_0^2}{a_0 t_0}$ – критерії Біо і Предводителева відповідно; $T_n = \frac{t_n}{t_0}$. Тоді задача (1) – (3) набуде вигляду

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) = c_v^*(T) \frac{\partial T}{\partial Fo}, \quad (5)$$

$$\lambda_t^*(T) \frac{\partial T}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} - Bi \left[T \Big|_{\zeta=0} - (T_n + PdFo) \right] = 0, \quad (6)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} T < \infty, \quad T \Big|_{Fo=0} = T_p. \quad (7)$$

Застосуємо до задачі (5) – (7) перетворення Кірхгофа

$$\theta = \int_{T_p}^T \lambda_t^*(\xi) d\xi. \quad (8)$$

У результаті отримаємо крайову задачу на змінну Кірхгофа $\theta(\zeta, Fo)$,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{a^*(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial Fo}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} - Bi \left[T(\theta) \Big|_{\zeta=0} - (T_n + PdFo) \right] = 0, \quad (10)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \theta < \infty, \quad \theta \Big|_{Fo=0} = 0. \quad (11)$$

Введення змінної Кірхгофа дозволило частково лінеаризувати задачу (5) – (7). Як зауважено в [2], у більшості випадків зміна коефіцієнта теплопровід-

ності $a(t) = \frac{\lambda_t(t)}{c_v(t)}$ зі зміною температури є значно менш важливою ніж аналогічна зміна коефіцієнта теплопровідності, через що з достатнім наближенням його можна вважати сталим. Скориставшись результатами [6], в нелінійній умові (10) зробимо заміну $T(\theta)|_{\zeta=0} = (1 + \mu)\theta|_{\zeta=0} + T_p$, де μ – поки що, невідома величина. Таким чином, отримуємо лінійну крайову задачу

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial \theta}{\partial Fo}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} - Bi^* \left[\theta|_{\zeta=0} - (T_n^* + Pd^* Fo) \right] = 0, \tag{13}$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \theta < \infty, \quad \theta|_{Fo=0} = 0, \tag{14}$$

де $Bi^* = (1 + \mu)Bi$, $T_n^* = \frac{T_n - T_p}{1 + \mu}$, $Pd^* = \frac{Pd}{1 + \mu}$.

Застосуємо до задачі (12) – (14) перетворення Лапласа за змінною Fo . У результаті цього отримаємо

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}}{d\zeta^2} = s\tilde{\theta}, \tag{15}$$

$$\frac{d\tilde{\theta}}{d\zeta} \Big|_{\zeta=0} - Bi^* \left[\tilde{\theta}|_{\zeta=0} - \left(\frac{T_n^*}{s} + \frac{Pd^*}{s^2} \right) \right] = 0, \tag{16}$$

$$\tilde{\theta}|_{\zeta \rightarrow \infty} < \infty, \tag{17}$$

де $\tilde{\theta} = \int_0^\infty \theta e^{-sFo} dFo$, s – параметр перетворення Лапласа.

Розв’язок рівняння (15) має вигляд

$$\tilde{\theta} = Ae^{\sqrt{s}\zeta} + Be^{-\sqrt{s}\zeta}. \tag{18}$$

З його обмеженості (умова (17)) випливає, що $A = 0$. З умови (16) знаходимо значення сталої $B = \frac{Bi^* (sT_n^* + Pd^*)}{s^2 (Bi^* + \sqrt{s})}$. Таким чином, зображення Лапласа $\tilde{\theta}$ має

вигляд

$$\tilde{\theta} = \frac{Bi^* [s(T_n - T_p) + Pd]}{s^2 (Bi^* + \sqrt{s})} e^{-\sqrt{s}\zeta}, \tag{19}$$

а його оригінал

$$\theta = \frac{Bi \left[(T_n - T_p) Bi^{*2} + Pd \right]}{Bi^{*3}} \left[-e^{Bi^*(\zeta + Bi^* Fo)} \operatorname{erfc} \left(Bi^* \sqrt{Fo} + \frac{\zeta}{2\sqrt{Fo}} \right) \right] + \frac{Pd Bi}{Bi^*} \left[\left(Fo + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{Bi^*} \right) \zeta \right) \operatorname{erfc} \frac{\zeta}{2\sqrt{Fo}} - \left(\zeta + \frac{2}{Bi^{*2}} \sqrt{\frac{Fo}{\pi}} \right) e^{-\frac{\zeta^2}{4Fo}} \right]. \quad (20)$$

При знаходженні оригіналу θ використано табличні дані [1]; властивість перетворення Лапласа, що інтегрування оригінала функції відповідає діленню зображення на величину s [3]. При відповідному інтегруванні частинами, значення окремих інтегралів взято з [7].

Знаючи змінну Кірхгофа θ та температурну залежність коефіцієнта теплопровідності $\lambda_i^*(T)$, розподіл температурного поля в півпросторі знаходимо з (8).

Якщо ця залежність лінійна $\lambda_i^*(T) = 1 + k(T - T_p)$, то температура

$$T = \frac{\sqrt{1 + 2k\theta} - 1}{k} + T_p. \quad (21)$$

У вираз (21) входить невідомий параметр μ , який у кожний момент часу визначаємо з рівняння

$$\theta|_{\zeta=0} = -\frac{2\mu}{k(1 + \mu)^2}. \quad (22)$$

Рівняння (22) отримали, задовольняючи нелінійну граничну умову (10), враховуючи при цьому, що $T(\theta)|_{\zeta=0} = (1 + \mu)\theta|_{\zeta=0} + T_p$. Значення температури T_n в аналогічному нетермочутливому півпросторі отримуємо, поклавши в (20) $\mu = 0$ та спрямувавши в (21) коефіцієнт k до нуля

$$T_n = \theta|_{\mu=0} + T_p. \quad (23)$$

Оскільки півпростір вільний від зовнішніх навантажень, а розподіл температури залежить лише від нормальної до обмежуючої поверхні координати ζ , то в ньому буде наявний осесиметричний напружено-деформований стан. При цьому відмінною від нуля буде лише компонента переміщення w у напрямі координати ζ . Подамо модуль зсуву $G(t)$, коефіцієнт лінійного теплового розширення $\alpha_i(t)$ та коефіцієнт Пуассона $\nu(t)$ у вигляді (4). Відмінні від нуля безрозмірні компоненти тензора напружень

$\{\sigma_\rho, \sigma_\varphi, \sigma_\zeta\} = \frac{\{\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}\}}{2G_0\alpha_i t_0}$ у цьому випадку обчислюємо за формулами [5]

$$\sigma_\rho = \sigma_\varphi = G^*(T) \left(\frac{\nu(T)}{1 - 2\nu(T)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \right), \quad (24)$$

$$\sigma_\zeta = G^*(T) \left(\frac{1 - \nu(T)}{1 - 2\nu(T)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T) \right), \quad (25)$$

$$\text{де } \bar{w} = w/(l_0 \alpha_{t_0} t_0), \quad \bar{\Phi}(T) = \frac{2(1+\nu(T))}{1-2\nu(T)} \int_{T_p}^T \alpha_t^*(T') dT'.$$

Рівняння рівноваги в даному випадку набувають вигляду $\sigma_\rho - \sigma_\varphi = 0$, $\frac{d\sigma_\zeta}{d\zeta} = 0$. З останнього рівняння знаходимо, що $\sigma_\zeta = c$, де c – стала інтегрування. Для вільного від навантажень півпростору $\sigma_\zeta|_{\zeta=0} = 0$, звідки випливає, що $c = 0$, а отже $\sigma_\zeta = 0$. Тоді з виразу (25) отримуємо, що

$$\frac{1-\nu(T)}{1-2\nu(T)} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \bar{\Phi}(T), \quad (26)$$

а отже,

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \zeta} = \frac{1+\nu(T)}{1-\nu(T)} \int_{T_p}^T \alpha_t^*(T') dT'. \quad (27)$$

Після підстановки (27) в (24) отримаємо формулу для обчислення безрозмірних компонент тензора напружень σ_ρ , σ_φ у вигляді

$$\sigma_\rho = \sigma_\varphi = -G^*(T) \frac{1+\nu(T)}{1-\nu(T)} \int_{T_p}^T \alpha_t^*(T') dT'. \quad (28)$$

Якщо механічні характеристики півпростору не залежать від температури (сталі) і дорівнюють їх опорним значенням, то

$$\sigma_\rho = \sigma_\varphi = -\frac{1+\nu_0}{1-\nu_0} (T - T_p). \quad (29)$$

Якщо механічні характеристики сталі і дорівнюють, наприклад, середнім їх значенням у заданому діапазоні температури

$$\chi_c = \frac{1}{T_{max} - T_p} \int_{T_p}^{T_{max}} \chi(T) dT, \quad (30)$$

то

$$\sigma_\rho = \sigma_\varphi = -K_{Gc} K_{\alpha c} \frac{1+\nu_c}{1-\nu_c} (T - T_p), \quad (31)$$

де $K_{Gc} = G_c/G_0$, $K_{\alpha c} = \alpha_{tc}/\alpha_{t_0}$.

Числові дослідження. На основі отриманих розв'язків досліджено температурне поле і напружений стан розглянутого термочутливого півпростору, через поверхню $z = 0$ якого відбувається конвективний теплообмін з середовищем, що її омиває, а його температура змінюється зі сталою швидкістю b : $t_c(\tau) = t_n + b\tau$. Початкова температура середовища дорівнює початковій температурі півпростору

$t_n = t_p = 373 \text{ K}$. За матеріал взято сталь У12 [4], теплофізичні і механічні характеристики якої мають вигляд:

$$\lambda_y(t) = 54,85 - 0,026t \text{ [Вт/м·К];} \quad (32)$$

$$\alpha(t) = (3,67 + 0,025t - 1 \cdot 10^{-5}t^2)10^{-6} \text{ [1/К];} \quad (33)$$

$$G(t) = (0,952 - 0,7 \cdot 10^{-3}t + 1 \cdot 10^{-6}t^2 - 7 \cdot 10^{-3}t^3)10^2 \text{ [ГПа];} \quad (34)$$

$$\nu(t) = 0,3415 - 0,2 \cdot 10^{-3}t + 2 \cdot 10^{-7}t^2. \quad (35)$$

Отримано розподіл температурного поля для різних значень критерію Предводітелева Pd (характеризує швидкість зростання температури середовища) вздовж координати ζ для вибраного безрозмірного часу Fo та на поверхні півпростору $\zeta = 0$ в залежності від безрозмірного часу Fo в термочутливому і нетермочутливому півпросторах. Обчислено компоненти тензора напружень $\sigma_\rho = \sigma_\varphi$ на поверхні півпростору в залежності від часу Fo та при $Fo=2$ вздовж координати ζ . Розглянуто випадки одночасної залежності від температури коефіцієнта лінійного теплового розширення $\alpha(t)$, модуля зсуву $G(t)$, коефіцієнта Пуассона $\nu(t)$ та нехтування температурною залежністю кожної з цих характеристик. У заданому діапазоні температур максимальна зміна значень коефіцієнта теплопровідності становить 42 %, $\alpha(t)$ – 54 %, $G(t)$ – 25 %, коефіцієнта Пуассона $\nu(t)$ – 8 %.

Отримані результати числових досліджень подано у вигляді графіків на рис. 1–5, де суцільні лінії відповідають розподілам температури і напружень за залежних від температури характеристик, а з маркерами і штрихові – за нехтування залежностей від температури окремих характеристик і всіх одночасно.

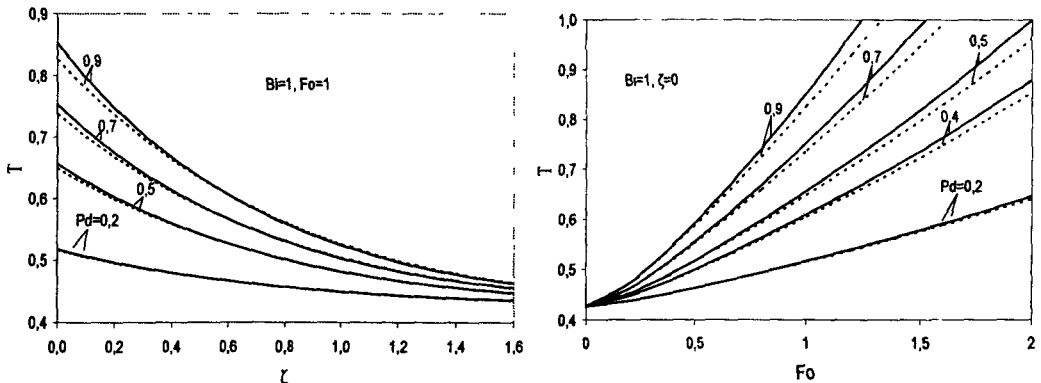


Рис. 1. Графіки розподілу температури залежно від безрозмірної координати ζ при $Bi=1, Fo=1$ для різних значень критерію Предводітелева

Рис. 2. Зміна температури з часом на поверхні півпростору $\zeta = 0$ при $Bi=1$ та різних значеннях Pd

На рис. 1 – 2 зображено розподіл температурного поля в термочутливому півпросторі (температурна залежність коефіцієнта теплопровідності має вигляд (32)) та аналогічному нетермочутливому півпросторі з коефіцієнтом теплопровідності рівним його значенню при початковій температурі. Вплив температурної залежності коефіцієнта теплопровідності на розподіл температурного поля збільшується з ростом часу і швидкістю нагрівання. Наприклад, максимальна розбіжність між значеннями температури в термочутливому і нетермочутливому півпросторах при $Pd=0,9, Bi=1, \zeta = 0, Fo=1,2$ становить 6 %.

На рис. 3 – 4 показано розподіл напружень $\sigma_\rho = \sigma_\varphi$ вздовж координати ζ для $Bi=1; Pd=0,4; Fo=2$, а на рис. 5 – на поверхні півпростору в залежності від безрозмірного часу Fo . Крива 1 на рис. 3 – 5 відповідає розподілу напружень $\sigma_\rho = \sigma_\varphi$, обчисленим за температурних залежностей характеристик (32) – (35). Крива 2 описує розподіл цих напружень за сталих характеристик матеріалу $\alpha_t(t), G(t), \nu(t)$, взятих при початковій температурі; крива 3 (рис. 4, 5) – за сталих середніх значень згідно (30) з діапазону температур 373-873К; крива 4 (рис. 4, 5) – за сталих значень, взятих при максимальній температурі 873К.

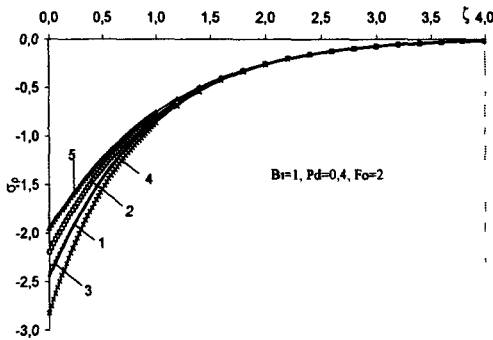


Рис. 3. Розподіл напружень $\sigma_\rho = \sigma_\varphi$

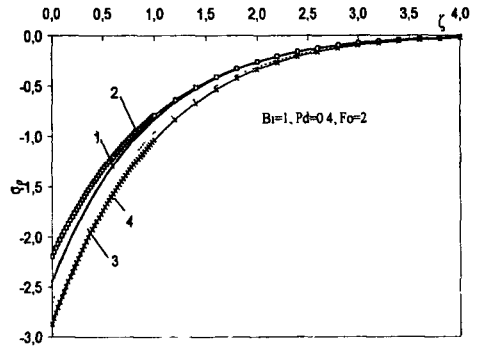


Рис. 4. Розподіл напружень $\sigma_\rho = \sigma_\varphi$

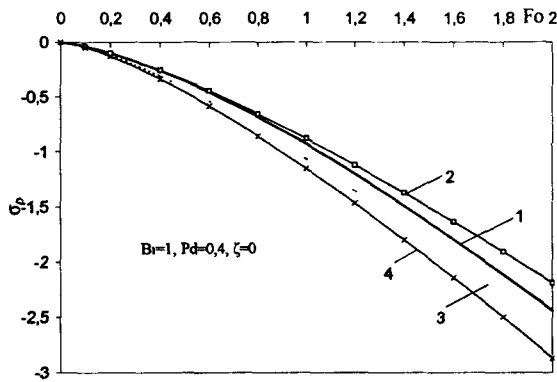


Рис. 5. Розподіл напружень на поверхні півпростору в залежності від безрозмірного часу Fo

Криві 3 – 5 рис. 3 отримано за нехтування температурною залежністю окремих механічних характеристик матеріалу: $\nu(t)$ (крива 3), $G(t)$ (крива 4), $\alpha_t(t)$ (крива 5). При цьому значення цих характеристик взято за початкової температури. Розбіжність між значеннями напружень в термочутливому півпросторі і за сталих окремих характеристик матеріалу, зокрема, при нехтуванні температурною залежністю коефіцієнта Пуассона становить всього 3 %, при нехтуванні температурною залежністю модуля зсуву – 13 %, а коефіцієнта лінійного теплового розширення – 25 %.

При числовому аналізі отриманих результатів встановлено, що максимальна розбіжність між значеннями напружень у термочутливому півпросторі і за сталих характеристик становить 11 % у випадку, коли $\alpha_t(t), G(t), \nu(t)$ взято за початкової температури, 17 % – за середніх значень згідно (30) і 24 % – за максимальної температури з вибраного діапазону температур.

Результати проведених досліджень показують, що при визначенні напружено-деформованого стану термочувливих тіл на основі спрощених (через нехтування

температурною залежністю окремої характеристики матеріалу) математичних моделей можна отримати розподіли компонент напружено-деформованого стану, які істотніше відрізняються від таких розподілів у термочутливому тілі ніж розподіли, отримані за нехтування температурною залежністю всіх характеристик одночасно.

Бібліографічні посилання

1. **Абрамовиц М.** Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М., 1979. – 832 с.
2. **Карслоу Г.** Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. - М., 1964. -488 с.
3. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности / А. В. Лыков. - М., 1967.- 599 с.
4. **Марочник сталей и сплавов /** Под ред. В.Г. Сорокина. – М., 1989. – 640 с.
5. **Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл /** Під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. – Т.3: Термопружність термочутливих тіл / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. – Львів, 2009. – 412 с.
6. **Попович В.С.** О решении задач теплопроводности термочувствительных тел, нагреваемых путем конвективного теплообмена / В.С. Попович // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1988. – Вып. 28, – С. 83–86.
7. **Прудников А.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Марычев. – М., 1983. – 752 с.

Надійшла до редколегії 21.03.11

УДК 620.172.251.1

В. А. Стрижало, Л. С. Новогрудский
Институт проблем прочности им Г.С.Писаренко НАН Украины

ОСОБЕННОСТИ РАЗВИТИЯ РАЗРУШЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ТЕМПЕРАТУРЕ 4,2 К

Розглянуто особливості розвитку руйнування конструкційних металевих матеріалів при температурі 4,2 К і дії імпульсів електричного струму. Обґрунтовано необхідність обліку переривчастої течії й впливу імпульсів електричного струму на процес формування пластичної зони у вершині тріщини при визначенні характеристик тріщиностійкості.

Ключові слова: руйнування, конструкційні матеріали, імпульс електричного струму, тріщиностійкість, пластична зона.

Рассмотрены особенности развития разрушения конструкционных металлических материалов при температуре 4,2 К и действии импульсов электрического тока. Обоснована необходимость учета прерывистого течения и влияния импульсов электрического тока на процесс формирования пластической зоны в вершине трещины при определении характеристик трещиностойкости.

Ключевые слова: разрушение, конструкционные материалы, импульс электрического тока, трещиностойкость, пластическая зона.

The singularity of structural metallic materials under temperature 4,2 K and electricity impulses action is considered. The necessity of discontinuous flow registration on forming process of plastic zone in characteristics is justified.

Key words: fracture structural materials, impulse of electricity, fracture toughness, plastic zone.

Главной проблемой при обеспечении необходимой конструкционной прочности изделий, работающих при пониженных и криогенных температурах, является предотвращение их хрупкого разрушения, которое, как правило, носит катастрофический ха-

ракти. В общем случае повышение прочности металлов при охлаждении за счет низкотемпературного упрочнения может быть нейтрализовано их охрупчиванием, вызывающим существенное снижение разрушающих номинальных напряжений. Поэтому при выборе материалов для изготовления несущих элементов машин и сооружений, эксплуатирующихся в низкотемпературной области, необходимо обязательно учитывать степень их охрупчивания при переходе в область рабочих температур.

Степень охрупчивания металлов и сплавов можно оценивать по характеристикам пластичности, ударной вязкости либо трещиностойкости, таким как критический коэффициент интенсивности напряжений или критическое значение J -интеграла [1].

Как правило, конструкционные металлы, используемые в области криогенных температур, не имеют порога хладноломкости в этой области и сохраняют высокое сопротивление хрупкому разрушению вплоть до температур, близких к абсолютному нулю (к таковым материалам относятся материалы с ГЦК-решеткой – алюминий, медные сплавы, никель, стали с высоким содержанием Ni и Cr , а также титановые α -сплавы с ГПУ-решеткой).

Методы определения характеристик трещиностойкости материалов всесторонне разработаны и стандартизированы [2 – 4]. Однако применительно к определению их значений при температурах, меньших 20 К, встречаются методические трудности.

Известно, что в условиях глубокого охлаждения характер деформирования конструкционных сталей и сплавов изменяется по сравнению с комнатными и пониженными температурами, что проявляется в нестабильности пластического течения и выражается в виде скачкообразной деформации (прерывистой текучести), регистрируемой графически при помощи пилообразных диаграмм растяжения, рис. 1,а.

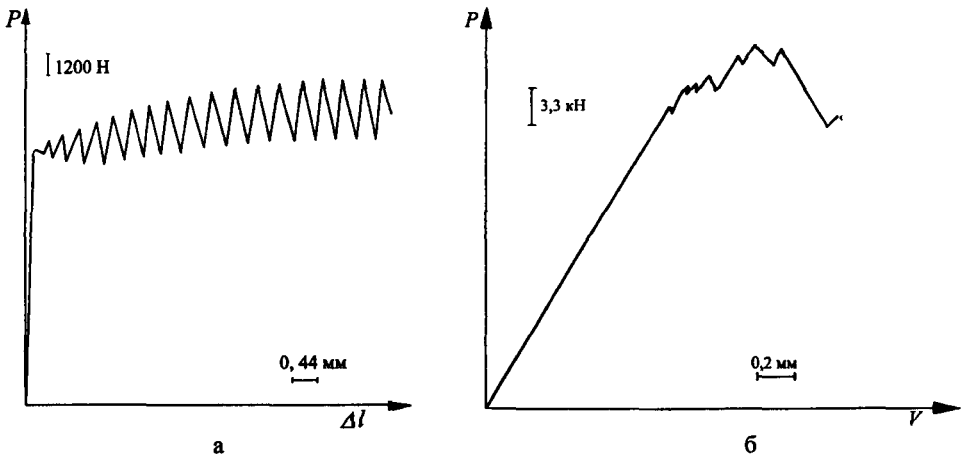


Рис. 1. Диаграммы деформирования гладких (а) и разрушения компактных (б) образцов стали 03Х20Н16АГ6 при температуре 4,2 К

При этом накопление пластической деформации происходит немонотонно, носит скачкообразный характер и на диаграммах растяжения проявляется в виде резких спадов нагрузки, и, соответственно, появлением локальных максимумов.

При определении характеристик трещиностойкости материалов в соответствии с нормативными документами [4] для диаграмм типа II, рис. 1,б, характеризующихся наличием локального максимума левее пятипроцентной секущей, предусматривается расчетную нагрузку P_Q принимать равной нагрузке локального максимума P_D .

Экспериментальные результаты показывают, что для металлов и сплавов, деформирующихся скачкообразно при криогенных температурах, возникает неоп-

ределенность в нахождении нагрузки $P_Q = P_D$. В этом случае для таких материалов локальные максимумы, регистрируемые слева от пятипроцентной секущей на диаграммах нагрузка – смещение ($P-V$), могут свидетельствовать не о страгивании трещины, а о скачкообразном течении материала в процессе формирования пластической зоны в вершине трещины, предшествующей ее страгиванию.

Специальным исследованием поверхностей разрушения компактных образцов стали 03X20H16AG6 установлено, рис. 2, что страгивание трещины, рис. 2 в, имеет место после локального максимума, совпадающего с точкой пересечения 5% секущей с диаграммой разрушения (точка D , рис. 2 а), либо непосредственно после нее. Прирост трещины при скачках, предшествующих точке D (D_1, D_2 – см. рис. 2 а) – отсутствует – рис. 2 б.

Очевидно, что наличие левее пятипроцентной секущей ряда локальных максимумов на диаграмме $P-V$ при испытаниях компактных образцов из стали 03X20H16AG6 является следствием формирования пластической зоны, которое в условиях температуры 4,2 К происходит скачкообразно и предшествует страгиванию трещины.

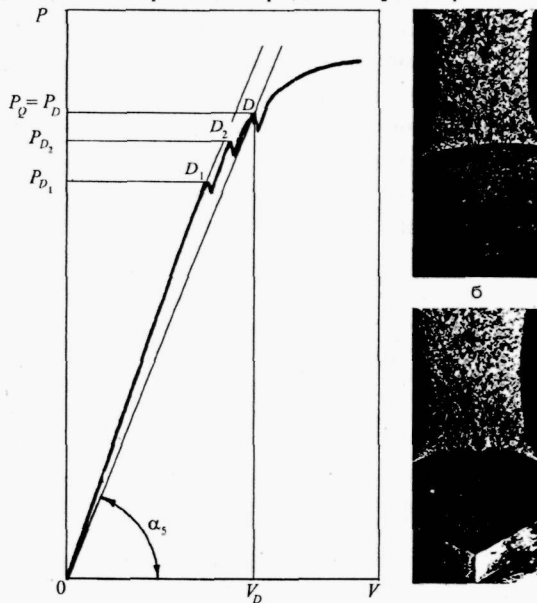


Рис. 2. Развитие разрушения стали 03X20H16AG6 при $T=4,2$ К:
 а – диаграмма нагрузка – смещение;
 б – поверхность излома образца после нагружения до уровня P_{D_2} ;
 в – поверхность излома образца после нагружения до уровня $P_D = P_Q$

Подтверждение такому развитию пластической деформации при формировании пластической зоны можно получить, сравнивая напряжения начала пластического течения на гладких образцах из стали 03X20H16AG6, с номинальными напряжениями в ослабленном сечении σ_0 при нагрузке, соответствующей первому локальному максимуму P_{D_1}

$$\sigma_0 = \frac{P_{D_1}}{(b-l)t} \left[1 + \frac{3(b+l)}{b-l} \right], \quad (1)$$

где t – толщина образца, $b=2t$ – расстояние от точки приложения нагрузки до края образца; l – расстояние от точки приложения нагрузки до вершины трещины.

Для гладких образцов из стали 03X20H16AG6 напряжение начала скачкообразного течения при температуре 4,2 К совпадает с пределом текучести и составляет 1440 МПа. Вычисленная по формуле (1) величина номинальных напряжений в ослабленном сечении лежит в интервале 1400-1470 МПа (для серии образцов из этой стали), соответственно в некоторой зоне вблизи вершины трещины оно не только достигает напряжения начала скачкообразного течения, но и превышает его.

Исследование начальной стадии разрушения сталей методом стереофрактографического анализа, рассмотренным в [5], также подтвердило отмеченные выше особенности соответствия локальных максимумов на диаграммах раскрытия трещины пластическому течению материала, а не страгиванию трещины [6].

Две партии образцов из стали 07X13H4AG20 с предварительно инициированной усталостной трещиной нагружали в среде жидкого гелия. Одну часть нагружали до появления первого, четко выраженного на диаграмме $P-V$ локального максимума, затем разгружали. Вторую часть образцов нагружали до появления двух локальных максимумов.

Съемку стереопар производили с половинок разрушенного образца с помощью сканирующего микроскопа «Стереоскан» при угле конвергенции $\theta = 5^\circ$ и увеличении $M = 400$. Стереопары обрабатывали на стереокомпараторе «Стекометр».

Разность высот между двумя точками объекта в предположении ортогонального проектирования определяли по формуле

$$\Delta h = \frac{\Delta P}{2M \sin \theta}, \quad (2)$$

где ΔP – разность продольных параллаксов (разность расстояний между изображениями двух точек объекта на двух снимках стереопары).

Вследствие существенной неравномерности по фронту трещины высоты зоны вытягивания ее величину получали усреднением результатов измерений не менее четырех профилей изломов для каждого образца.

Анализ показывает, что наличие даже двух максимумов на диаграмме нагрузка-смещение не свидетельствует о продвижении трещины в образцах из стали 07X13H4AG20, так как высота зоны вытягивания в этом случае составляет $5 \cdot 10^{-3}$ мм, при которой продвижение трещины на фрактограммах изломов не наблюдается. После первого локального максимума высота рельефа вообще не отличается от таковой для усталостной трещины.

Таким образом, исследование микрорельефа образцов из стали 07X13H4AG20 подтверждает, что формирование зоны пластической деформации в вершине трещины при температуре 4,2 К происходит по механизму прерывистой текучести.

Весьма существенное влияние на формирование пластической зоны в вершине трещины при критических температурах могут оказать импульсы электрического тока (ИЭТ), действие которых имеет место в конструктивных узлах высокоэнергетических устройств со сверхпроводящими элементами. С целью выяснения степени такого влияния через образцы стали 03X20H16AG6 при постоянных номинальных напряжениях, равных $\sigma_{0,2}$ и $1,25 \sigma_{0,2}$, пропускали ИЭТ сериями по 5 импульсов на каждой ступени таким образом, чтобы вектор плотности тока был направлен под углом 45° к плоскости распространения трещины. Амплитуда тока составляла 2,5 кА при длительности 10^{-2} с. При прохождении серии ИЭТ на диаграмме $P-V$ наблюдали горизонтальные ступени. В этом случае уже первому локальному максимуму, имевшему место после действия ИЭТ, соответствовало страгивание трещины. Радиус пластической зоны в вершине трещины, вычисленный для

плоского напруженого и плоского деформированного состояния в момент страгивания трещины при действии ИЭТ, составлял 2,18...2,33 мм и 0,75...0,78 мм, соответственно, что совпадало со значениями радиуса, рассчитанного для локального максимума, определяющего первый скачок трещины без воздействия ИЭТ. Следует отметить, что значение радиуса пластической зоны для первого максимума при испытаниях стали без воздействия ИЭТ было равно 1,05...1,15 мм – для плоского напруженого состояния и 0,35...0,38 – для плоского деформированного.

Воздействие ИЭТ оказывает существенное влияние на процесс формирования начальной стадии разрушения. Так, у стали 07X13N4AG20 для нагрузки, соответствующей нагрузке первого локального максимума, высота зоны вытягивания при действии ИЭТ составила $8 \cdot 10^{-3}$ мм (в исходном состоянии высота зоны рельефа вообще не отличалась от таковой для усталостной трещины), а для нагрузки, соответствующей нагрузке второго максимума, – $2,2 \cdot 10^{-2}$ мм (в исходном состоянии – $5 \cdot 10^{-3}$ мм), т. е. наблюдается более чем четырехкратное ее увеличение. Необходимо также отметить, что у стали 07X13N4AG20 при действии ИЭТ локальные максимумы на диаграмме $P-V$ отсутствуют, что может указывать на изменение механизма формирования пластической зоны в вершине трещины при таком воздействии.

Таким образом, рассмотренные результаты показывают, что формирование зоны пластической деформации в вершине трещины для ряда конструкционных сплавов при температуре 4,2 К может происходить немонотонно - скачками. На диаграмме нагрузка-смещение это проявляется в виде ряда локальных максимумов. В этом случае при определении характеристик трещиностойкости в качестве расчетного значения P_Q необходимо выбирать нагрузку локального максимума, совпадающего с точкой пересечения 5%-ной секущей с диаграммой $P-V$ либо наблюдаемого непосредственно после этой точки; неучет эффекта прерывистой текучести может привести к существенной ошибке.

Библиографические ссылки

1. Писаренко Г.С. Влияние глубокого охлаждения на особенности деформирования конструкционных сплавов и выбор допускаемых напряжений / Г. С. Писаренко, В. А. Стрижало // Прочность материалов и конструкций при низких температурах. – К., 1990. – С. 3–9.
2. ASTM E 399-72. Standard Test Method of Test for plane-strain fracture toughness of metallic materials. Approved March 29 1973.
3. ASTM E 1820–01. Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness. Approved June 2001.
4. ГОСТ 25.506–85. Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний металлов. Определение характеристик трещиностойкости (вязкости разрушения) при статическом нагружении. Введ. 01.01.86.
5. Красовский А.Я. Исследование трещиностойкости корпусных сталей при статическом и динамическом нагружении с учетом эффекта масштаба испытываемых образцов / А. Я. Красовский, Ю. А. Кашталян, В. Н. Красико. – К., 1982. – 64 с. – (Препр./ АН УССР. Ин-т пробл. прочности).
6. Стрижало В.А. Особенности распространения трещин в конструкционных сплавах при температурах до 4,2 К / В. А. Стрижало, О. Я. Значковский, Л. С. Новогрудский // Пробл. прочности. – 1997. – № 6. – С. 36–40.

Надійшла до редколегії 27.04.11

УДК 539.3

Г. Т. Сулим¹, М. М. Кундрат²

¹Львівський національний університет ім. Івана Франка,

²Національний університет водного господарства та природокористування

ЛОКАЛІЗОВАНІ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ В ТІЛІ З ЛІНІЙНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА УМОВ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

За умов плоскої задачі термопружності досліджується гранична рівновага та локальне руйнування в тілі з жорстким лінійним нагрітим включенням за умови ідеального теплового контакту та дії розтягувального навантаження. Уздовж межі включення від його торців до центральної частини розвиваються локалізовані зони передруйнування. Досліджується вплив навантаження на розвиток зон передруйнування, розподіл контактних напружень. Аналітичний розв'язок задачі отримано з використанням комплексних потенціалів шляхом зведення до задачі спряження.

Ключові слова: включення, зона передруйнування, контактні напруження, термопружність, зсувна міцність.

В условиях плоской задачи термоупругости исследуется предельное равновесие и локализованное разрушение в теле с жестким линейным нагретым включением при условии идеального теплового контакта и действия растягивающей нагрузки. Вдоль границы включения от его торцов к центральной части развиваются локализованные зоны предразрушения. Исследуется влияние нагрузки на развитие зон предразрушения, распределение контактных напряжений. Аналитическое решение задачи получено с использованием комплексных потенциалов путем сведения к задаче сопряжения.

Ключевые слова: включение, зона предразрушения, контактные напряжения, термоупругость, сдвиговая прочность.

Limiting equilibrium and localized fracture of the body with a rigid linear inclusion of a heated condition of ideal thermal contact in the plane problem of thermoelasticity are study. Localized zones of prefracture (weaken contact) are developed along the plate-inclusion boundary from its ends to central part. Influence of load on development of prefracture zones, sharing contact stresses in composition are research. Analytical decision of the problem by means of complex potentials is received.

Key words: inclusion, prefracture zone, contact stresses, thermoelasticity, shear strength.

Ще до втрати утримувальної здатності конструкційних матеріалів із високомодульними включеннями в них інтенсивно розвиваються процеси локального руйнування: відшарування включень, порушення адгезійних зв'язків, розпушення матеріалу, нелінійне та пластичне деформування матриці чи контактної прошарку між компонентами. Тому для розуміння кінетики руйнування таких матеріалів необхідний детальний аналіз полів напружень та деформацій біля концентраторів з додатковим урахуванням нелінійності перебігу процесу деформування чи розшарування. Локальні зони передруйнування можуть мати різноманітні форми й отримання точних розв'язків відповідних задач для різних випадків навантаження, геометрії тіла чи включення пов'язане зі значними математичними труднощами. Один з ефективних підходів до розв'язання проблеми полягає в моделюванні їх тонкими прошарками матеріалу, в яких напруження досягають зсувної межі міцності чи при пластичному деформуванні зсувного порогу текучості і якщо сили взаємодії між берегами розрізу відомі, задача приводиться до деякої змішаної задачі теорії пружності.

Огляд досліджень. Теорія контактних взаємодій різного типу систем досліджувалася широким колом праць. Вагомий внесок до розвитку цієї тематики зробила дніпропетровська школа механіків, яскравим представником якої є Вадим Сергійович Гудрамович (див., напр., [9 – 12; 23]). Основні напрями його наукових розробок охоплюють широке коло проблем у галузі нелінійної механіки та механіки деформівного твердого тіла і пов'язані з дослідженням та моделюванням процесів і критичних станів нелінійних систем нерегулярної структури, зумовленої втраченою стійкістю, наявністю пошкоджень, недосконалостей форми та конструктивною

неоднорідністю. У цих дослідженнях закладено нові підходи до моделювання складних процесів та явищ, які відбуваються у фронтальних зонах області контакту матеріалів і концентраторів напружень, подано основні методи розрахунку оболонково-стрижневих конструкцій, зокрема, ракетно-космічної техніки за умов локальних навантажень та контактних взаємодій. Досліджено дію локальних навантажень на ребра жорсткості (шпангоути, стрингери), що підкріплюють оболонки, контактні взаємодії оболонкових конструкцій з різноманітними опорами-ложементами, проаналізовано вплив локальних недосконалостей форми на деформування, стійкість та утримувальну здатність конструкцій, оцінено вплив пластичних деформацій матеріалу, отримано та узагальнено численні основоположні результати відповідних експериментальних досліджень.

У цій праці поглиблюємо тісно пов'язані із згаданими вище працями В. Гудрамовича дослідження [22; 37] про розвиток локалізованих зон передруйнування в околах вершин тонкого включення за температурного і силового навантажень. Розв'язок плоскої задачі теорії пружності для тіла з жорстким еліптичним ядром подано у праці М. Мухелішвілі [24], і з нього граничним переходом можна отримати результати також для лінійного (пластинчатого) включення. Поля напружень і переміщень біля вершин включень та їх асимптотичні подання досліджувалися в широкому колі праць, найбільш повно їх огляд подано в монографії Г. Сулима [27]. Зародження тріщин в околах вершин включень проходить у зоні гранично високих для матеріалу напружень, тому безпосередньо руйнуванню передують області матеріалу з нелінійними властивостями, в яких відбувається розшарування матеріалу, утворення тріщин «срібла» (полімери), пластичне течіння (метали). Точна межа локалізованої пластичної зони за умов антиплоскої деформації біля жорсткого «тунельного» включення в ізотропному тілі для ідеально пружнопластичної матриці має вигляд [7] циліндричної кругової області радіуса $r_{pl} = 0,5(k_3/\tau_T)^2$, зміщеної на r_{pl} від вершини до середини включення, де τ_T – межа текучості при зсуві. Зауважимо, що аналогічна зона для тріщини розміщена попереду неї на відстані r_{pl} [31; 32]. Виявилось [6], що ефективний розв'язок пружнопластичної задачі антиплоскої деформації тіла з включенням можна отримати за допущення, що пластичні зони поширюються починаючи від точок максимальної концентрації напружень (кінців включення) у вигляді тонких прошарків, що прилягають до включення. Для такої задачі з'ясовано [6] довжину пластичних прошарків, величину розривів переміщень у них, а також виявлено, що на відміну від тріщини, пластичні прошарки не можуть розвиватися на продовженні включення. При допущенні локалізації пластичних деформацій отримано розв'язки задач для включень у формах ромбічної та правильної n -кутної призми [15; 16], включення у півпросторі [17], системи двох паралельних включень [28].

Для плоскої задачі виявлено [4, 8], що область пластичності в околі вершини включення зміщена до його середини на $1,3d$, $d = (\pi K_1/\sqrt{2}\tau_T)$. Отриманий результат якісно узгоджується з експериментальними даними руйнування композитів [13; 33; 36]. У матеріалі з пластичною матрицею дотичні напруження на поверхні розділу збільшуються до значень, при яких у матриці чи на поверхні розділу виникає пластична деформація. Це значення залишається сталим на деякій ділянці, поки волокну не буде передана більша частина навантаження [33]. Пластичне течіння починається біля кутових точок на торцях включення і поширюється за шириною та довжиною поверхні розділу волокно-матриця [13]. Останнє знижує концентрацію напружень і збільшує ділянку передачі навантаження на волокно. Однак, якщо на поверхні розділу має місце крихке з'єднання, що руйнується при малих деформаціях, то обумовлені пластичним течінням великі деформації не бажані [13].

Задачі про початковий розвиток смуг ковзання в околі вершин гострокінцевого включення (чи в частковому випадку біля тріщини) розв'язані у [2; 20]. Отримано оцінку розвитку локалізованих пластичних деформацій для ідеально пружно-пластичного тіла, що задовольняє умові Треска-Сен-Венана. При цьому в напрямі розвитку смуг найбільша розбіжність між максимальними дотичними напруженнями τ_{max} і відповідними дотичними напруженнями σ_{θ} не перевищує 3 %. Розміри смуг вздовж контактної межі матриця-включення досліджено в [20; 19] за тих же умов, їх довжина за умовою максимальних дотичних напружень τ_{max} та за використаною умовою $\sigma_{\theta} = \tau_{\theta}^*$ збігаються. Аналіз напружень у кутовій точці включення з пластичною зоною, що моделюється лінією ковзання, виконано в [14].

Аналітичний розв'язок задачі уже без обмежень на довжину зони передруйнування отримано в [35; 3]. Але постановка задачі не дала можливості отримати обмежені напруження, залишалася логарифмічна особливість в околі вершини включення, що ускладнювало інтерпретацію отриманих даних як розв'язок моделі пружнопластичної задачі. У [18; 22; 37] сформульовано нову модель постановку, математична модель деформування тіла з включенням передбачає двофазну зону передруйнування, яка складається з спричиненого високою концентрацією пружних напружень ділянки розпушення та області пластичного зсуву чи адгезії. Це дало змогу отримати вищий рівень фізичної адекватності моделі та уникнути внаслідок цього сингулярності напружень в околах вершин включення, отримавши природним чином в усіх точках композиції механічно коректні обмежені напруження. Розрахункова модель описується крім пружних сталей ще трьома характеристиками: зсувною міцністю (порогом текучості) τ_{θ}^* , граничним значенням зсувів δ_{2c} та міцністю включення на розрив P_{θ} . Вивчено [21; 29] розвиток локалізованих у тонких областях зон передруйнування в тілі з тонкими пружними включеннями. У цій праці розвиваємо дослідження про розвиток зон передруйнування біля включення за умов термопружної задачі.

Математична модель задачі. За умов плоскої задачі термопружності розглядаємо однорідне ізотропне тіло, що містить нагріте до температури T жорстке лінійне включення завдовжки $2a$. Тепловий контакт між включенням та матрицею ідеальний. Осі декартової системи координат xOy збігаються з осями геометричної симетрії композиції (рис. 1). Міцність матеріалу межі матриця-включення вважаємо не меншою від міцності матриці. На площину діють рівномірно розподілені на нескінченності сталі напруження

$$\sigma_{xx}^{\infty} = q. \tag{1}$$

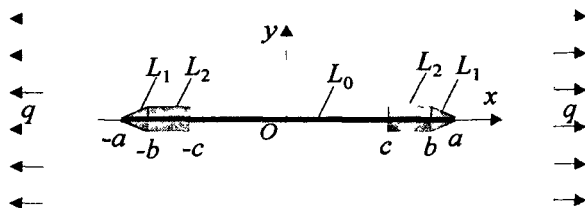


Рис. 1. Схема задачі

Околі вершин включення є місцями найінтенсивнішого локального деформування. Аналіз напруженого стану такої композиції за пружним розв'язком [1, 27] свідчить, що максимальні дотичні напруження τ_{max} мають місце в околах кінців включення вздовж його межі з пластиною. Вважаємо, що саме тут і зароджуються

зони передруйнування, просуваючись від кожного краю до центральної частини уздовж межі пластина-включення, і складаються з двох ділянок [22; 37]: малих областей розпушення $x \in L_1 = (-a, -b) \cup (b, a)$ та ділянок пластичного деформування $x \in L_2 = (-b, -c) \cup (c, b)$.

При цьому виконуються такі крайові умови: на ділянках розпушення (ослабленого, неідеального контакту) дотичні напруження лінійно зростають від нуля до свого граничного значення τ_i^*

$$\sigma_{xy}^+(x) = -\sigma_{xy}^-(x) = \tau_i^* \frac{a-x}{a-b}, \quad x \in L_1, \quad (2)$$

а на ділянках пластичного деформування вони стали

$$\sigma_{xy}^+(x) = -\sigma_{xy}^-(x) = \tau_i^* \text{sign}(x), \quad x \in L_2. \quad (3)$$

Умови (2), (3) означають неперервність нормального взаємозв'язку на L_1, L_2 при допустимості відносного поперечного зсуву берегів зони. На ділянці $x \in L_0 = (-c, c)$ включення ідеально зв'язане з матрицею і тому переміщення там дорівнюють

$$u(x) = (T - T_0) \alpha_p x, \quad x \in L_0, \quad (4)$$

де α_p – коефіцієнт лінійного видовження матеріалу включення, T_0 – температура консолідації композиції.

Симетрія задачі породжує такі крайові умови на осі Ox ($y = 0$):

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^+(x) &= \sigma_{yy}^-(x), \quad \sigma_{xy}^+(x) = -\sigma_{xy}^-(x), \\ (\partial u(x)/\partial x)^+ &= (\partial u(x)/\partial x)^-. \end{aligned} \quad (5)$$

Величину τ_i^* можна трактувати по різному: як теоретичну зсувну міцність межі поділу, тобто сили притягання двох атомних площин контактної межі пластина-включення, або як технічну зсувну міцність межі поділу з урахуванням її структурних недосконалостей, чи за пластичного деформування – як зсувний поріг пластичності; $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ – компоненти тензора напружень; u, v – компоненти вектора переміщень відповідно уздовж декартових координат Ox та Oy ; знаки «+» та «-» відповідають граничним значенням на дійсній осі відповідно з верхньої ($y > 0$) та нижньої ($y < 0$) півплощин; $\text{sign}(x) = \{1 \text{ для } x > 0; -1 \text{ для } x < 0; 0 \text{ для } x = 0\}$.

Таке подання дає можливість привести розв'язання поставленої фактично нелінійної задачі до задачі лінійної термопружності. Значення параметра c знаходимо з додаткових фізичних умов, а b задаємо – його доцільно пов'язати з розмірами структурних елементів (зерен) матеріалу адгезійного прошарку, що виражає інтегральний вплив неоднорідності структури на напружено-деформований стан. Запровадження в такий спосіб зон передруйнування дає можливість уникнути особливостей напружень в околах кінців включення та отримати обмежені напруження в усіх точках композиції, які дають механічно коректну картину деформування.

Як виявилось з розв'язку задачі, околиці вершин включення є місцями найбільш інтенсивного локального деформування. При досягненні в них максимальними переміщеннями $u(a)$ певної межі δ_{2c} настає можливість розшарування композиції, тобто втрати зв'язку між включенням та матрицею. Таке розшарування визначаємо як процес розриву ослаблених перед тим зв'язків. Умовою цього розриву,

аналогічно відомій [25] δ_c -моделі, приймається рівність $u(a) = \delta_{2c}$. З іншого боку, дотичні напруження уздовж поверхні зчеплення матриці з включенням спричиняють у поперечному перерізі останнього появу осьового зусилля, яке за перевищення граници міцності включення може його розірвати.

Таким чином, розрахункова модель локальної міцності тіла з лінійним включенням описується крім термопружних сталих закону Гука ще трьома характеристиками: адгезійною зсувною міцністю контактної межі матриця-включення – τ_c^* , граничним значенням переміщень δ_{2c} та міцністю включення на розрив P_{ur} . І за фіксованої довжини включення або розривається, або відшаровується від матриці залежно від того, яка із критеріальних умов ($u(a) = \delta_{2c}$ чи $P_{max} = P_{ur}$) досягається раніше. Найменше значення навантаження, при досягненні якого реалізується хоча б одна зі згаданих умов, називаємо граничним навантаженням.

Побудова розв'язку. Для розв'язування задачі використовуємо відомі [24; 26] подання для напружень і деформацій:

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4Re\Phi(z), \tag{6}$$

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)};$$

$$2G(u' + iv') = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) + \beta_0\Psi_0(z) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \tag{7}$$

де $\beta_0 = 4G\alpha_0$, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ для плоского напруженого стану; $\beta_0 = 4G(1 + \nu)\alpha_0$, $\kappa = 3 - 4\nu$ в умовах плоскої деформації; α_0 , G , ν – температурний коефіцієнт лінійного розширення, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалу матриці.

Врахування умов (5), (1) у виразах (6), (7) породжує зв'язок між комплексними потенціалами та навантаженням

$$+\Omega(z) = A_1 - \kappa\Phi(z), \quad \Phi(z) = \bar{\Phi}(z), \quad A_1 = q(\kappa - 1)/4. \tag{8}$$

Невідома функція $\Psi_0(z)$ визначається співвідношенням [26] $\Psi_0(z) = 0,5T$. Функцію напружень $\Phi(z)$ знайдемо після підстановки формул (6), (7) до крайових умов (2) – (4), що породжує задачу спряження [24] з кусково-неперервними коефіцієнтами для функції $\Phi(z)$

$$\Phi^+(x) - g_0(x)\Phi^-(x) = f_0(x), \tag{9}$$

де

$$g_0(x) = \begin{cases} -1 & (x \in L_0) \\ +1 & (x \in L_1 + L_2) \end{cases}, \quad f_0(x) = \begin{cases} f_{10} & (x \in L_0) \\ f_{11}(x) & (x \in L_1) \\ f_{12}(x) & (x \in L_2) \end{cases}, \quad f_{12}(x) = -\frac{2i\tau_c^*}{\kappa+1} \text{sign}(x),$$

$$f_{10} = \frac{A_1 + 2G\alpha_p(T - T_0) - 0,5\beta_0T}{\kappa}, \quad f_{11}(x) = -\frac{2i\tau_c^*}{\kappa+1} \left(1 - \frac{|x| - b}{a - b} \right) \text{sign}(x).$$

Частковий розв'язок $X(z)$ відповідної однорідної задачі для (9), що прямує на нескінченності до нуля, вибираємо у вигляді $X(z) = 1/\sqrt{z^2 - c^2}$. Після інтегрування і нескладних але громіздких перетворень знаходимо комплексний потенціал задачі

$$\Phi(z) = \frac{f_{10}}{2} + \frac{B_1 z}{\sqrt{z^2 - c^2}} + \frac{\tau_i^*}{\pi(\kappa + 1)} f_{13}(z, a, b, c), \quad (10)$$

де

$$B_1 = \frac{A_2}{2\kappa} - \frac{2\tau_i^*}{\pi(\kappa + 1)} f_{14}(a, b, c), \quad A_2 = q \frac{\kappa + 1}{4} - 2G\alpha_p (T - T_0) + 0,5\beta_0 T,$$

$$f_{13}(z, a, b, c) = \frac{1}{a - b} \left[b\Gamma_1(z, b, c) - a\Gamma_1(z, a, c) + z(\Gamma_2(z, b, c) - \Gamma_2(z, a, c)) \right],$$

$$f_{14}(a, b, c) = \frac{1}{a - b} \left[b \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - c^2}}{c} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{c} + \sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2} \right],$$

$$\Gamma_1(z, \omega, c) = \ln \frac{\zeta^-(z, \omega)}{\zeta^+(z, \omega)}, \quad \zeta^\pm(z) = \omega \sqrt{z^2 - \omega^2} \pm z \sqrt{\omega^2 - c^2},$$

$$\Gamma_2(z, \omega, c) = \ln \frac{\xi^-(z, \omega)}{\xi^+(z, \omega)}, \quad \xi^\pm(z) = \sqrt{\omega^2 - c^2} \pm \sqrt{z^2 - c^2}.$$

Під виразом $\sqrt{z^2 - c^2}$ розуміємо вітку, для якої виконується умова $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}} = 1$, а поведження функцій $\Gamma_1(z, \omega, c)$, $\Gamma_2(z, \omega, c)$ на нескінченності визначається асимптотиками

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma_1(z, \omega, c) = -2 \ln \frac{\omega + \sqrt{\omega^2 - c^2}}{c} + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma_2(z, \omega, c) = -2\sqrt{\omega^2 - c^2} \cdot \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Формули (6) – (8) та (10) описують поля напружень і деформацій у тілі з включенням, даючи можливість дослідити умови граничної рівноваги композиції.

Довжина зон передруйнування та переміщення в них. Залежно від потреб і сфери використання результатів (6) – (10) розв'язку задачі, напруження біля вершин ($x = \pm c$) смуг передруйнування можна прийняти як обмеженими, так і необмеженими, тобто такими, що допускають прийняту в механіці руйнування сингулярність. Розглянемо перший випадок, тобто коли напруження в усіх точках композиції обмежені. Задовольнивши у розв'язку умову неперервності напружень в околах вершин смуг $\sigma_{xy}(x, 0) \rightarrow \tau_i^*$ ($x \rightarrow c - 0$), отримуємо рівняння для обчислення їх загальної довжини

$$q(\kappa + 1) - 4G\alpha_p (T - T_0) + \beta_0 T - \frac{8\kappa\tau_i^*}{\pi(\kappa + 1)} f_{14}(a, b, c) = 0 \quad (11)$$

через характеристики композиції та навантаження.

У смугах розпушення та пластичного деформування ($c \leq x \leq a$) відбувається зміщення точок матеріалу матриці стосовно включення, яке знаходимо інтегруванням за формулами (7), (10). За умови обмеженості напружень у вершинах смуг пластичного деформування

$$G \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_p G (T - T_0) + \frac{\kappa\tau_i^*}{\pi(\kappa + 1)} f_{13}(x, a, b, c).$$

Інтегруючи останній вираз, отримуємо зміщення (проковзування) точок матеріалу пластини

$$u(x) = u'(x) + u^c(x), \quad u'(x) = \alpha_p (T - T_0) x, \quad u^c(x) = \frac{\kappa \tau_s^*}{2\pi G(\kappa + 1)} f_{15}(x, a, b, c), \quad (12)$$

де

$$f_{15}(x, a, b, c) = \frac{1}{a-b} \left[(a^2 + x^2) \Gamma_2(x, a, c) + 2x(b\Gamma_1(x, b, c) - a\Gamma_1(x, a, c)) - (b^2 + x^2) \Gamma_2(x, b, c) - 2\sqrt{x^2 - c^2} (\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{b^2 - c^2}) \right].$$

Звідси випливає, що найбільші переміщення точок матеріалу матриці досягаються біля вершин включення (в точках $x = \pm a$) і їхня величина

$$u(a) = -u(-a) = u'(a) + u^c(a), \quad u'(a) = \alpha_p (T - T_0) a, \quad u^c(a) = \frac{\kappa \tau_s^*}{\pi G(\kappa + 1)} f_{16}(a, b, c), \quad (13)$$

де

$$f_{16}(a, b, c) \equiv f_{15}(a, a, b, c) = \frac{1}{a-b} \left[2a^2 \ln \frac{a}{c} + ab\Gamma_1(a, b, c) - 0,5(a^2 + b^2) \Gamma_2(a, b, c) + c^2 - a^2 + \sqrt{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right].$$

На рис. 2 подано отримані за відсутності нагріву включення графічні залежності між знерозміреним навантаженням $\tilde{q} \equiv q / (2\tau_s^*)$ та параметрами ділянки розпушення $\alpha = b/a$ і пластичного деформування $\beta = c/b$ ($\kappa = 2,2$). Номери біля ліній відповідають таким значенням параметра β : 1 – $\beta = 1$; 2 – $\beta = 0,95$; 3 – $\beta = 0,90$; 4 – $\beta = 0,85$; 5 – $\beta = 0,80$; 6 – $\beta = 0,7$; 7 – $\beta = 0,6$; 8 – $\beta = 0,5$; 9 – $\beta = 0,4$. Збільшення ділянки розпушення за фіксованого рівня навантаження видовжує зону передруйнування, хоча сама ділянка пластичного деформування при цьому зменшується. З розвитком зон передруйнування абсолютна різниця між їх довжинами для різних зон розпушення зменшується, що пояснюється зростанням впливу ділянки пластичного деформування.

На рис. 3 подано графічні залежності безрозмірного переміщення $\tilde{u}(a) \equiv Gu(a) / (a\tau_s^*)$ у вершині включення за тих же значень параметрів α і β , що й на рис. 2. За сталих навантаження та механічних характеристиках зі збільшенням ділянки розпушення зміщення точок матеріалу пластини стосовно включення зростає.

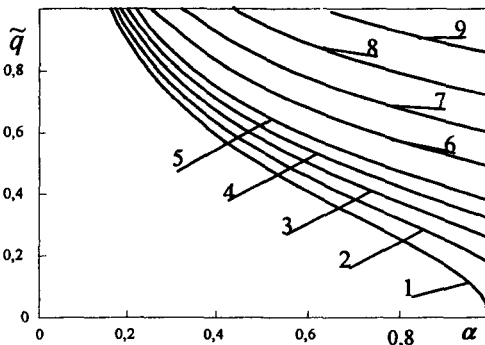


Рис. 2. Взаємозв'язок між ділянкою розпушення та навантаженням

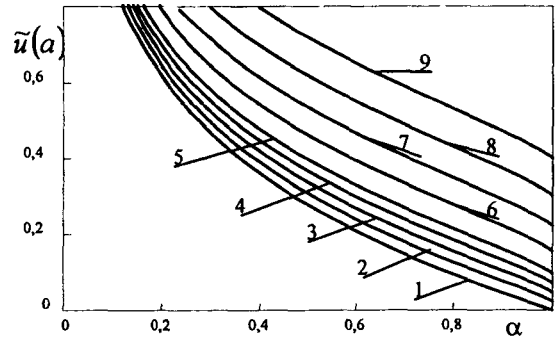


Рис. 3. Переміщення біля вершини включення

Околиці вершин включення є місцями найбільш інтенсивного локального деформування. При досягненні в них переміщеннями $u(a)$ певної межі δ_{2c} настає можливість розшарування композиції, тобто втрати зв'язку між включенням та матрицею. Розшарування композиції визначаємо як процес переходу точок області ослаблених зв'язків у стан розірваних зв'язків, умовою здійснення якого приймається рівність

$$u(a) = \delta_{2c}. \quad (14)$$

Навантаження $q = q^*$ та температуру $T = T^*$, при досягненні яких реалізується умова (14), а значить настає можливість розшарування, називаємо граничними. Для його обчислення одержуємо систему двох нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} \pi(\kappa + 1)G(\delta_{2c} - \alpha_p(T^* - T_0)a) - \kappa\tau_s^* f_{16}(a, b, c) &= 0, \\ (\kappa + 1)q^* + (\beta_0 - 4G\alpha_p)T^* + 4G\alpha_p T_0 - \frac{16\kappa\tau_s^*}{\pi(\kappa + 1)} f_{14}(a, b, c) &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

яка дає можливість обчислити граничне навантаження, що відповідає втраті зв'язку між включенням та матрицею через параметр δ_{2c} та температурні й фізико-механічні характеристики.

Контактні напруження. Значення компонент тензора напружень за лінією розділу матриця-включення обчислюються згідно формул (6), (10):

$$\sigma_{yy}^+ - i\sigma_{xy}^+ = \Phi^+(x) - \kappa\Phi^-(x) + A_1.$$

Якщо $x \in L_0$, то $\sigma_{yy}^+ - i\sigma_{xy}^+ = (\kappa + 1)\Phi^+(x)$ і звідси

$$\sigma_{yy}^+ = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \left[0,25(\kappa - 1)q + (2G\alpha_p - 0,5\beta_0)T - 2G\alpha_p T_0 \right], \quad \sigma_{xy}^+ = \frac{2\tau_s^*}{\pi} f_{17}(x, a, b, c), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \text{де } f_{17}(x, a, b, c) = \frac{1}{a - b} \left[a \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{a^2 - c^2}}{a\sqrt{c^2 - x^2}} - b \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{b^2 - c^2}}{b\sqrt{c^2 - x^2}} + \right. \\ \left. + x \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\sqrt{b^2 - c^2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

На ділянках L_1, L_2 : $\sigma_{yy}^+ - i\sigma_{xy}^+ = (1 - \kappa)\Phi^+(x) + A_1 - 2i\sigma_{xy}^*/(\kappa + 1)$. Звідси

$$x \in L_2: \quad \sigma_{yy}^+ = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \left[0,25(\kappa - 1)q + (2G\alpha_p - 0,5\beta_0)T - 2G\alpha_p T_0 \right] -$$

$$\frac{2(\kappa - 1)\tau_s^*}{\pi(\kappa + 1)(a - b)} \left[b \ln \frac{x\sqrt{b^2 - c^2} - b\sqrt{x^2 - c^2}}{c\sqrt{b^2 - x^2}} - a \ln \frac{x\sqrt{a^2 - c^2} - a\sqrt{x^2 - c^2}}{c\sqrt{a^2 - x^2}} + \right. \\ \left. + x \left(\ln \frac{\sqrt{a^2 - c^2} - \sqrt{x^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \ln \frac{\sqrt{b^2 - c^2} - \sqrt{x^2 - c^2}}{\sqrt{b^2 - x^2}} \right) \right],$$

$$\sigma_{xy}^+ = \tau_s^* \operatorname{sign}(x);$$

$$x \in L_1: \quad \sigma_{yy}^+ = \frac{\kappa + 1}{2\kappa} \left[0,25(\kappa - 1)q + (2G\alpha_p - 0,5\beta_0)T - 2G\alpha_p T_0 \right] -$$

$$\frac{(\kappa-1)\tau_s^*}{\pi(\kappa+1)(a-b)} \left[b \ln \frac{b\sqrt{x^2-c^2}-x\sqrt{b^2-c^2}}{c\sqrt{x^2-b^2}} - a \ln \frac{x\sqrt{a^2-c^2}-a\sqrt{x^2-c^2}}{c\sqrt{a^2-x^2}} + \right. \\ \left. + x \left(\ln \frac{\sqrt{a^2-c^2}-\sqrt{x^2-c^2}}{\sqrt{a^2-x^2}} - \ln \frac{\sqrt{x^2-c^2}-\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{x^2-b^2}} \right) \right], \quad (17)$$

$$\sigma_{xy}^* = \tau_s^* (a-|x|)/(a-b) \operatorname{sign}(x).$$

Формули (16), (17) отримані з урахуванням обмеженості напружень в усіх точках композиції.

На рис. 4 зображено отриманий за відсутності нагріву розподіл контактних дотичних напружень уздовж правої половини включення (на лівій – картина симетрична) за фіксованого рівня навантаження $\frac{q}{2\tau_s^*} = 0,2$: для лінії 1 $-\gamma = \frac{a-b}{a} = 10^{-6}$ (при цьому згідно рівняння (11) довжина зони переддруйнування $\varepsilon = 0,0633$); для 2 $-\gamma = 0,05$ ($\varepsilon = 0,08754$); для 3 $-\gamma = 0,1$ ($\varepsilon = 0,11372$).

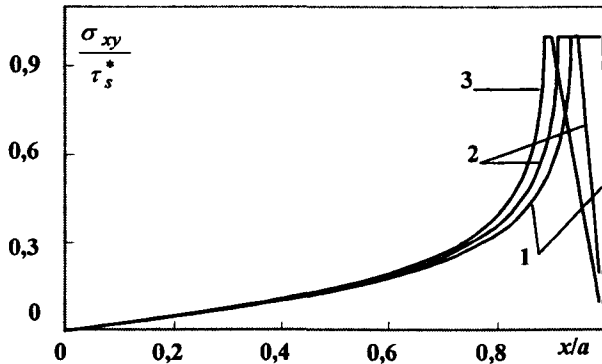


Рис. 4. Контактні дотичні напруження

Основна частина дотичних зусиль передається включенню в околах його кінців і з наближенням до центральної частини включення напруження швидко зменшуються. Зміна довжини ділянки розпушення впливає на розподіл контактних напружень біля кінців включення, не змінюючи картини розподілу в середній частині. Поза околom точки $x = c$ (ближче до центру) дотичні напруження швидко зменшуються, що пояснює відомі експериментальні дані [5; 13; 30; 33; 34]: у композиціях із пластичною матрицею дотичні напруження на лінії поділу в околах кінців включення збільшуються до значень, при яких у матриці чи на поверхні поділу виникають пластичні деформації. Після того, як на деякій ділянці в околах кінців включення сприйме більшу частину навантаження, вони інтенсивно зникають.

Рис. 5 - 7 відображають розраховані за умов фіксованого розтягу пластини $q/(2\tau_s^*) = 0,25$ знерозмірені значення контактних дотичних $\bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy}/\tau_s^*$ та нормальних $\bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy}/\tau_s^*$ напружень уздовж правої половини включення (для лівої відповідно антисиметрично і симетрично) за трьох різних модельних схем: а) за суто пружним розв'язком, б) із зонами переддруйнування за моделями Т. Brussat, R. Westmann [35], Л. Бережницький, М. Кундрат [2; 20] та в) використаною у постановці задачі (М. Кундрат, Г. Сулим [22; 37]) двофазною зоною переддруйнування.

За першою схемою (рис. 5) дотичні напруження на включенні та нормальні на його продовженні містять в околах вершин кореневі сингулярності; за другою

(рис. 6) – дотичні напруження в околі вершини включення мають розрив першого роду, а нормальні – логарифмічну сингулярність; у третій (рис. 7) – напруження обмежені як на включенні, так і у всіх точках композиції.

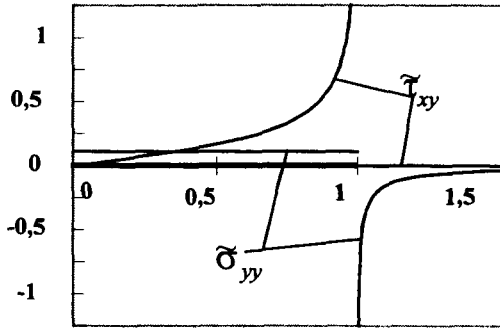


Рис. 5. Контактні напруження за пружним розв'язком

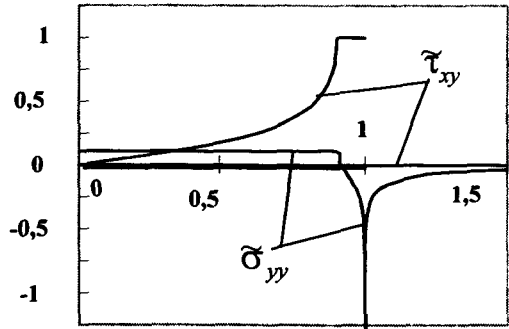


Рис. 6. Контактні напруження за результатами [35; 2]

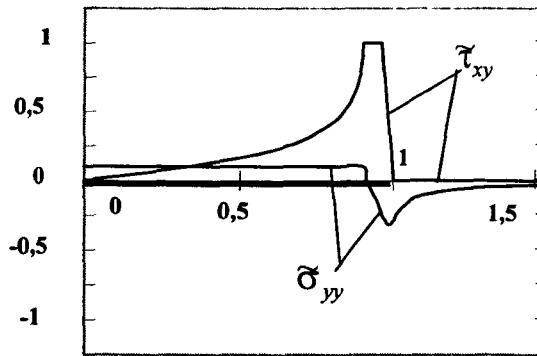


Рис. 7. Контактні напруження при двофазній зоні передруйнування

Бібліографічні посилання

1. Бережницький Л.Т. К оценке предельного состояния матрицы в окрестности остроугольного жесткого включения / Л.Т. Бережницький, Р.С. Громяк // Физико-химическая механика материалов. – 1977. – Т. 13, № 2. – С. 39–47.
2. Бережницький Л.Т. О пластических полосах у вершины линейного жесткого включения / Л.Т. Бережницький, Н.М. Кундрат // Проблемы прочности. – 1982. – № 11. – С. 66–69.
3. Бережницький Л.Т. Локальное упругопластическое разрушение одного класса композитов / Л.Т. Бережницький, Н.М. Кундрат // Физико-химическая механика материалов. – 1984. – Т. 19, № 5. – С. 57–64.
4. Бережницький Л.Т. Применение метода локальных вариаций для определения зон пластичности возле дефектов / Л.Т. Бережницький, М.Н. Синюк // Тез. докл. 3 Респ. конф. «Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе». – К., 1982. – С. 113–114.
5. Вильчек М.И. Некоторые результаты экспериментального изучения распределения напряжения у конца моноволокна / М.И. Вильчек // Механика полимеров. – 1972. – № 2. – С. 262–266.
6. Витвицкий П.М. Антиплоская упруго-пластическая деформация тела с тонким жестким включением / П.М. Витвицкий, В.А. Кривень // ДАН УССР. Сер. А. – 1979. – № 2. – С. 104–107.
7. Громяк Р.С. О зоне пластичности в окрестности вершины жесткого включения при антиплоской деформации / Р.С. Громяк // Физико-химическая механика материалов. –

1979. – Т. 15, № 4. – С. 124–126.
8. Громяк Р.С. Определение границы пластической зоны в окрестности жесткого включения при растяжении тонкой несжимаемой пластины / Р.С. Громяк, М.Н. Сенюк – Материалы 9-й Конф. молод. ученых Физ.-мех. ин-та АН УССР. Секц. физ.-хим. механики материалов. – Львов, 1979. – С. 33–35.
 9. Гудрамович В.С. Теория ползучести и ее приложения к расчету элементов тонкостенных конструкций / В.С. Гудрамович. – К., 2005. – 223 с.
 10. Гудрамович В.С. Механика контактных взаимодействий оболочечных систем при локальном нагружении / В.С. Гудрамович / Прикл. механика. – 2009. – Т. 45, № 7. – С. 24–51.
 11. Гудрамович В.С. Контактные задачи теории оболочечно-стержневых систем в механике конструкций ракетно-космической техники / В.С. Гудрамович // Техн. механика. – 2008. – № 2. – С. 70–84.
 12. Гудрамович В.С. Методы расчета прочности оболочечных конструкций ракетно-космической техники при локальных нагрузках и контактных взаимодействиях / В.С. Гудрамович / Косм. наука і технологія. – 2002. – 8, № 4. – С. 11–24.
 13. Эберт Л.Дж. Механические поверхности раздела / Л.Дж. Эберт, П.К. Райт // Композиционные материалы. Т.1. Поверхности раздела в металлических композитах. – М., 1978. – С. 42–76.
 14. Каминский А.А. Об анализе напряжений в угловой точке жесткого включения при наличии пластической зоны, моделируемой линиями скольжения / А.А. Каминский, Л.А. Кипнис, Г.А. Хазин // Теор. и прикл. механика. – 2001. – № 32. – С. 93–102.
 15. Кривень В.А. Антиплоска пружно-пластична задача для тіла з жорстким призматичним включенням правильної форми / В.А. Кривень // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2000. – Т. 36, № 1. – С. 23–26.
 16. Кривень В.А. Антиплоска деформація ідеально пружно-пластичного тіла з жорстким прямокутним включенням / В.А. Кривень, О.Б. Гнатюк, Р.С. Громяк // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2000. – Т. 36, № 6. – С. 19–23.
 17. Кривень В.А. Початкова стадія пластичного відшарування тонкого жорсткого включення у півпросторі за зсуву / В.А. Кривень, С.В. Пастернак // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2001. – Т. 37, № 1. – С. 17–21.
 18. Кундрат М.М. Гранична рівновага композиції з жорсткими лінійними включеннями / М.М Кундрат // Шоста Всеукраїнська наукова конф. «Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання у наукових дослідженнях». – Львів, 1999. – С. 61–62.
 19. Кундрат Н.М. О полосах скольжения вдоль границы матрица-включение // М.М Кундрат // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1983. – Т. 19, № 1. – С. 102–105.
 20. Кундрат Н.М. Полосы скольжения в окрестности жестких волокон, включений и трещин: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 – Львов, 1984. – 18 с.
 21. Кундрат М.М. Зони передруйнування в композиції з пружним високomodульним стрічковим включенням за симетричного та антисиметричного навантажень / М.М Кундрат, Г.Т. Сулим // Машинознавство. – 2003. – № 11. – С. 3–8.
 22. Кундрат М.М. Композиція з включенням за розтягу зосередженими силами / М.М Кундрат, Г.Т. Сулим // Математичні методи і фізико-механічні поля. – 2005. – Т. 48 – № 1. – С. 88–97.
 23. Моссаковский В.И. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций / В.И. Моссаковский, В.С. Гудрамович, Е.М. Макеев – К., 1988. – 288 с.
 24. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М., 1966. – 707 с.
 25. Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В.В. Панасюк – К.: Наук. думка, 1968. – 248 с.
 26. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости / И.А. Прусов. – Минск, 1972. – 200 с.
 27. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим. – Львів, 2007. – 716 с.
 28. Сулим Г.Т. Зсув пружно-пластичного простору з двома тонкими паралельними включеннями / Г.Т. Сулим, М.В. Кривень // Тези доп. Всеукраїнської наук. конф. «Сучасні проблеми механіки» – Львів, 2004. – С. 64–65.
 29. Сулим Г.Т. Композиция с упругим ленточным включением и зонами предразрушения у его вершин / Г.Т. Сулим, Н.М. Кундрат // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т. 10, № 2. – С. 224–230.

30. Сулим Г.Т. Метод конечных элементов в задаче о тонкостенном включении / Г.Т. Сулим, И.В. Рокач // Материалы 10 Конф. Мол. ученых Физ.-мех. Ин-та АН УССР. Деп. В ВИНТИ 12 апр. 1983 г. № 1948-83 Деп. – Львов, 1983. 3 с.
31. Хальт Я. Упруго-пластическое распределение напряжений и деформаций вокруг острой выточки при повторном сдвиге / Я. Хальт, Ф. Мак-Клинтон // Сб. переводов: Механика. – 1959. – № 6. – С. 111–117.
32. Черепанов Г.П. Упруго-пластическая задача в условиях антиплоской деформации / Г.П. Черепанов // Прикладная математика и механика. – 1962. – Т. 26, № 4. – С. 697–708.
33. Шами К. Механизм передачи нагрузки через поверхность раздела / К. Шами // Композиционные материалы. Т.6. Поверхности раздела в полимерных композитах. – М., 1978. – С. 42–87.
34. Allison I.M., Hollaway L.C. Stresses in fibre reinforced materials // Brit. J. Appl. Phys. – 1967. – V. 18, No. 7. – P. 979–989.
35. Brussat T.R., Westmann R.A. Interfacial slip around rigid fiber inclusions // J. Comp. Mater. – 1974. – V. 8, № 4. – P. 364–377.
36. Fukuda Hiroshi, Chou Tsu-Wei. Stiffness and strength of short fibre composites as affected by crack and plasticity // Fibre Sci. and Technol. – 1981. – V. 15, № 4. – P. 243–256.
37. Sulym H. T., Kundrat M. M. Limiting Equilibrium and Fracture in an Orthotropic Body Containing a Thin Rigid Inclusion // Materials Science. – 2006. – V. 42, № 2. – P. 220–232.

Надійшла до редколегії 11.04.11

УДК 539.3

А. О. Сяський, В. В. Кот, К. П. Музичук
Рівненський державний гуманітарний університет

ПРО ПЕРЕДАЧУ МОМЕНТНОГО НАВАНТАЖЕННЯ ДО ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ ПРУЖНИМ РЕБРОМ

Побудовано математичну модель задачі про передачу зосередженого моментного навантаження від розімкненого пружного ребра до контуру криволінійного отвору нескінченної ізотропної пластинки. Наближений розв'язок системи сингулярних інтегродиференціальних рівнянь задачі здійснено методом механічних квадратур і колокації. Розглянуто числовий приклад.

Ключові слова: пружне ребро, нескінченна пластинка, моментне навантаження, напружено-деформований стан.

Построено математическую модель задачи о передаче сосредоточенной моментной нагрузки от разомкнутого упругого ребра к контуру криволинейного отверстия бесконечной изотропной пластинки. Приближенное решение системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений задачи осуществлено методом механических квадратур и коллокации. Рассмотрен числовой пример.

Ключевые слова: упругое ребро, бесконечная пластинка, моментная нагрузка, напружено-деформированное состояние.

The mathematical model of the problem of concentrated moment loading transfer from disconnected elastic rib to the contour of curvilinear hole of endless isotropic plate was built. The approximate solution of the system of singular integro-differential equations of the problem was realized by the method of mechanical quadrature and collocation. The numerical example was considered.

Key words: elastic rib, endless plate, moment loading, stress-and-strained state.

Вступ. Пластинки, послаблені отворами, знаходять широке застосування в машинобудуванні, судно-авіабудуванні та інших галузях інженерної техніки. Для зменшення концентрації напружень контури отворів підсилюють тонкими пруж-

ними ребрами сталої чи змінної жорсткості [1]. Часткове підсилення контурів отворів ребрами змінної жорсткості [2; 3] дозволяє знайти розв'язок двох суперечливих проблем сучасного машинобудування і будівництва – підвищення надійності та зниження металомісткості машин і споруд.

Підсилювальні ребра, будучи розсіювачами концентрацій напружень на контурі отвору, дозволяють передавати до пластинки зосереджене силове й моментне навантаження. Такі задачі для розімкнених пружних ребер, позбавлених жорсткості на кручення, досліджені в [4; 5].

Пропонується розв'язок задачі про передачу зосередженого моментного навантаження через розімкнене пружне ребро змінної жорсткості на згин і кручення до контуру криволінійного отвору нескінченної ізотропної пластинки.

Постановка задачі. Визначимо напружено-деформований стан на контурі Γ криволінійного отвору нескінченної ізотропної пластинки товщиною $2h$, який на ділянці $\Gamma_1 \equiv [\alpha_0^*; \beta_0^*]$ підсилено тонким пружним ребром змінної жорсткості на згин $g_1(s)$ і кручення $g_2(s)$ (s – дуга на Γ_1). Ребро вважається одновимірним і неперервно сполученим з пластинкою симетрично відносно її середньої площини. Вважається, що до кінця ребра, який визначається полярним кутом α_0^* , прикладена зосереджена пара сил з компонентами $(L_\rho^0; L_\lambda^0)$. Система прямокутних координат у середній площині пластинки вибрана так, як показано на рис. 1.

Якщо контур отвору має форму правильного N -кутника із закругленими кутами, то функція, що реалізує конформне відображення зовнішності одиничного кола у площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає середня площина пластинки, має вигляд [1]

$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \varepsilon / \xi^{N-1} \right). \quad (1)$$

Тут R_0 – характерний розмір отвору; ε – параметр, який визначає відхилення контуру Γ від кола.

Розв'язок задачі передбачає визначення компонентів тензора напружень на контурі Γ пластинки і у підсилювальному ребрі.

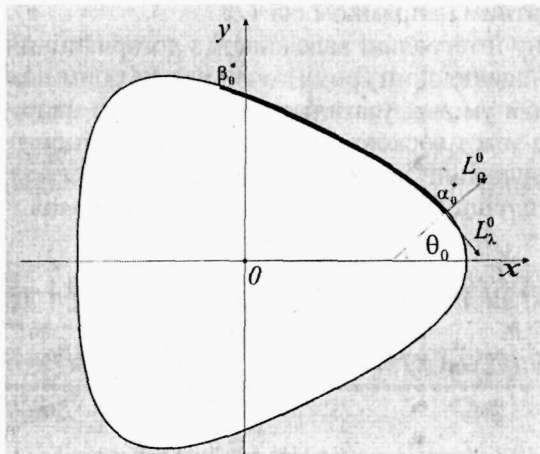


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Основні рівняння задачі. Граничні умови даної задачі, які зв'язують компоненти тензора напружень і тензора деформацій контурних точок пластинки сформульовані в [2]. Використовуючи співвідношення [1]

$$d\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right) = (X - iY)\omega'(\sigma)d\sigma \quad (2)$$

ці умови можна перетворити до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) \left[R_2^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_1^2(t) \right] + f_1(t) R_1(t) R_2(t) \left(1 - \frac{g_1}{g_2} \right) \right\} dt + \\ &+ \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ M_y^* \left[R_2^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_1^2(t) \right] + M_x^* R_1(t) R_2(t) \left(1 - \frac{g_1}{g_2} \right) \right\} dt + c_1; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) R_1(t) R_2(t) \left(\frac{g_1}{g_2} - 1 \right) - f_1(t) \left[R_1^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_2^2(t) \right] \right\} dt + \\ &+ \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ M_y^* R_1(t) R_2(t) \left(\frac{g_1}{g_2} - 1 \right) - M_x^* \left[R_1^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_2^2(t) \right] \right\} dt + c_2, \quad (3) \end{aligned}$$

де $f_1 + if_2 = i \int_{\alpha_0}^{\lambda} \{M_{\rho}^* + iP^*\} e^{i\theta} dt$; $M_{\rho}^* + iP^* = (M_{\rho} + iP)\omega'(\sigma)$; $\omega'(\sigma) = \alpha + i\beta$;

$R_1(\lambda) + iR_2(\lambda) = e^{i\theta} = \frac{\omega'(\sigma)\sigma}{|\omega'(\sigma)|}$; $\sigma = e^{i\lambda}$; $M_x^* + iM_y^* = (L_{\rho}^0 + iL_{\lambda}^0)e^{i\theta}$ – головний

момент зовнішнього навантаження на пластинку; X, Y – компоненти тензора деформації контуру Γ ; M_{ρ}, P – контактні моменти в зоні підсилення; θ – кут між нормаллю до Γ і додатним напрямком осі Ox .

В [6] побудовано інтегральні залежності з логарифмічними ядрами між компонентами вектора зміщення контурних точок і контурним навантаженням для пластинки, яка перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану. Використовуючи аналогію між плоскою задачею теорії пружності і технічною теорією згину пластин [7], аналогічні залежності побудовано для кутів повороту вектора нормалі до середньої площини пластинки в контурних точках

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{k}{3+\nu} \left\{ (1+\nu) \int_{\beta_0}^{\lambda} f_1'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f_2'(t) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt + \frac{1+\nu}{2\pi} M_x^* \lambda + \right. \\ &+ \frac{(1-\nu)\varepsilon(N-2) \cos(N-2)\lambda}{2\pi} M_y^* + \frac{(1-\nu)\varepsilon(N-2) \sin(N-2)\lambda}{2\pi} M_x^* - \\ &\left. - (1-\nu)\varepsilon \tilde{C}_1 \sin(N-1)\lambda - (3+\nu)\tilde{C}_1 \sin \lambda \right\} + C_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} = & \frac{k}{3+\nu} \left\{ (1+\nu) \int_{\beta_0}^{\lambda} f'_2(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f'_1(t) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt + \frac{1+\nu}{2\pi} M_y^* \lambda + \right. \\ & + \frac{(1-\nu)\varepsilon(N-2) \cos(N-2)\lambda}{2\pi} M_x^* - \frac{(1-\nu)\varepsilon(N-2) \sin(N-2)\lambda}{2\pi} M_y^* - \\ & \left. - (1-\nu)\varepsilon \tilde{C}_1 \cos(N-1)\lambda + (3+\nu)\tilde{C}_1 \cos \lambda \right\} + C_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут

$$k = \frac{1}{D(1-\nu)}; \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)};$$

$[\alpha_0, \beta_0]$ – образ ділянки $[\alpha_0^*, \beta_0^*]$ при відображенні (1); \tilde{C}_1, C_1, C_2 – дійсні сталі; E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки.

Підстановка (4) у граничні умови (3) приводить до системи двох сингулярних інтегродиференціальних рівнянь з логарифмічними ядрами для знаходження функцій f_1, f_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} = & \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) \left[R_2^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_1^2(t) \right] + f_1(t) R_1(t) R_2(t) \left(1 - \frac{g_1}{g_2} \right) \right\} dt + \\ & + \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ M_y^* \left[R_2^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_1^2(t) \right] + M_x^* R_1(t) R_2(t) \left(1 - \frac{g_1}{g_2} \right) \right\} dt + \hat{C}_1 = \\ = & \frac{k}{3+\nu} \left\{ (1+\nu) \int_{\beta_0}^{\lambda} f'_1(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f'_2(t) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt + \frac{1+\nu}{2\pi} M_x^* \lambda + \right. \\ & + \frac{(1-\nu)\varepsilon(N-2) \cos(N-2)\lambda}{2\pi} M_y^* + \frac{(1-\nu)\varepsilon(N-2) \sin(N-2)\lambda}{2\pi} M_x^* - \\ & \left. - (1-\nu)\varepsilon \tilde{C}_1 \sin(N-1)\lambda - (3+\nu)\tilde{C}_1 \sin \lambda \right\}; \\ & \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ f_2(t) R_1(t) R_2(t) \left(\frac{g_1}{g_2} - 1 \right) - f_1(t) \left[R_1^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_2^2(t) \right] \right\} dt + \\ & + \int_{\beta_0}^{\lambda} \frac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1} \left\{ M_y^* R_1(t) R_2(t) \left(\frac{g_1}{g_2} - 1 \right) - M_x^* \left[R_1^2(t) + \frac{g_1}{g_2} R_2^2(t) \right] \right\} dt + \hat{C}_2 = \\ = & \frac{k}{3+\nu} \left\{ (1+\nu) \int_{\beta_0}^{\lambda} f'_2(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f'_1(t) \ln \sin \frac{\lambda-t}{2} dt + \frac{1+\nu}{2\pi} M_y^* \lambda + \right. \\ & + \frac{(1-\nu)\varepsilon(N-2) \cos(N-2)\lambda}{2\pi} M_x^* - \frac{(1-\nu)\varepsilon(N-2) \sin(N-2)\lambda}{2\pi} M_y^* - \\ & \left. - (1-\nu)\varepsilon \tilde{C}_1 \cos(N-1)\lambda + (3+\nu)\tilde{C}_1 \cos \lambda \right\}, \quad \lambda \in [\alpha_0; \beta_0]. \end{aligned} \quad (5)$$

Дана система доповнюється умовами рівноваги підсилення [2]

$$f_1(\beta_0) = -M_x^*; \quad f_2(\beta_0) = -M_y^* \quad (6)$$

та умовою однозначності прогину пластинки [7]

$$\frac{\varepsilon(1+\chi)}{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} [f_1'(t) \cos((N-1)t) - f_2'(t) \sin((N-1)t)] dt + (\varepsilon^2(N-1) + \chi) \tilde{C}_1 = 0, \quad (7)$$

де $\chi = -(3+\nu)/(1-\nu)$.

Якщо функції $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ стануть відомі, то контактні моменти на ділянці підсилення визначаються залежностями

$$M_\rho = \frac{(f_2'(\lambda) \cos \lambda - f_1'(\lambda) \sin \lambda) \alpha(\lambda) - (f_2'(\lambda) \sin \lambda + f_1'(\lambda) \cos \lambda) \beta(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)},$$

$$P = - \frac{(f_2'(\lambda) \sin \lambda + f_1'(\lambda) \cos \lambda) \alpha(\lambda) + (f_2'(\lambda) \cos \lambda - f_1'(\lambda) \sin \lambda) \beta(\lambda)}{\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)}. \quad (8)$$

Кільцеві M_λ і крутильні $H_{\rho\lambda}$ моменти на контурі Γ знаходимо за формулами [4]

$$M_\lambda = \nu M_\rho - (1+\nu)/k X; \quad H_{\rho\lambda} = -Y/k. \quad (9)$$

Внутрішні згинальні L_ρ і крутильні L_λ моменти в ребрі визначаємо із співвідношень [1]

$$L_\rho = \frac{g_1}{D(1-\nu^2)} (M_\lambda - \nu M_\rho); \quad L_\lambda = \frac{g_2}{D(1-\nu)} H_{\rho\lambda}. \quad (10)$$

Наближений розв'язок задачі. Точний розв'язок задачі (5) – (7) знайти не вдається. Для її наближеного розв'язання необхідно встановити структуру функцій $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $f_1'(\lambda)$, $f_2'(\lambda)$ на кінцях зони підсилення. Оскільки $f_1(\alpha_0) = f_2(\alpha_0) = 0$, а на підставі (6) $f_1(\beta_0) = -M_x^*$, $f_2(\beta_0) = -M_y^*$, тому функції $f_1'(\lambda)$, $f_2'(\lambda)$ на кінцях зони підсилення мають кореневу особливість. З огляду на це наближений розв'язок системи (5) – (7) може бути знайдений методом механічних квадратур і колокації [4 – 6].

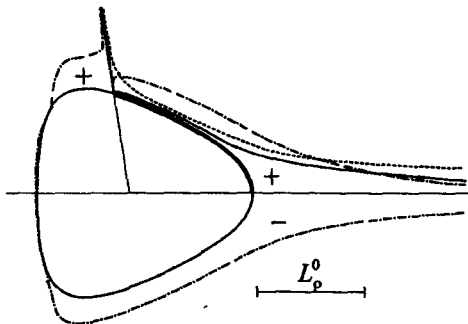


Рис. 2. Розподіл контактних і кільцевих моментів на контурі трикутного отвору ($\varepsilon = 0.15$)

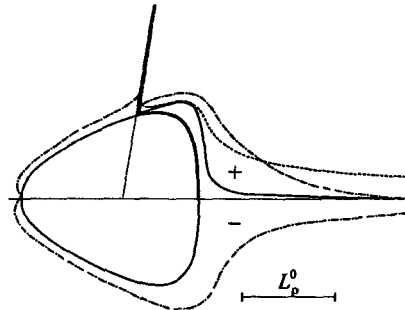


Рис. 3. Розподіл контактних і кільцевих моментів на контурі трикутного отвору ($\varepsilon = -0.15$)

Для ребра з параметрами $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = \pi/2$, $E_0/E = 10$, $h_0/h = 1$, $b_0/R_0 = 1/20$, $b_0/h_0 = 1/3$ проведено розрахунки компонентів напруженого стану на контурі трикутного ($N = 3$, $\varepsilon = \pm 0.15$) отвору пластинки. Результати розрахунку при $L_\rho^0 = 1$, $L_\lambda^0 = 0$, $R_0 = 1$ ілюструються на рис. 2, 3 (E_0 – модуль Юнга матеріалу підсилення). Суцільні лінії відповідають M_ρ , пунктирні – P , штрихпунктирні – M_λ .

Висновки. На підставі одержаних результатів впливає наступне:

- на ділянці підсилення величини M_p та P набувають максимального значення в точці прикладання зовнішнього навантаження. При віддаленні від цієї точки їх значення зменшується;
- на торцях підсилення контактні моменти набувають необмежених значень.

Запропонований метод може бути використаний при розв'язуванні аналогічної задачі для ортотропної пластинки з еліптичним отвором.

Бібліографічні посилання

1. Савин Г. Н. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости / Г. Н. Савин, Н. П. Флейшман. – К., 1964. – 384 с.
2. Сяський А. А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием / А. А. Сяський // Прикл. математика и механика. – 1986. – Т. 50, №2. – С. 247–254.
3. Сяський А. А. Изгиб анизотропных пластин с криволинейными ребрами жесткости / А. А. Сяський – Ровно, 1988. – 14с. – Деп. в УкрНИИНТИ 19.01.1989, №352–Ук 89.
4. Сяський А. О. Передача сил до масивних циліндричних тіл через несиметричні розі-мкнені ребра змінної жорсткості / А. О. Сяський, Н. В. Шевцова // Міжвуз. збірник за напрямком «Інженерна механіка». – Луцьк, 2008. – Вип. 23. – С. 345–351.
5. Шевцова Н. Передача сил і пар сил до циліндричних тіл через систему несиметричних тонкостінних елементів змінної жорсткості / Н. Шевцова, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2008. – Т. 13, №3. – С. 15–20.
6. Трохимчук О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на частково підсилений контур криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці / О. Трохимчук, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету – Тернопіль, 2009. – Т. 14, №2. – С. 30–36.
7. Бережницький Л. Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л. Т. Бережницький, М. В. Делявский, В. В. Панасюк. – К., 1979. – 400с.

Надійшла до редколегії 12.05.11

УДК 539.3

Ю.А. Черняков, В.П. Шнейдер

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ТЕОРИЯ МИКРОДЕФОРМАЦИИ ДЛЯ ДВУХФАЗНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Формулюються визначальні співвідношення теорії мікродеформації для двофазних матеріалів. Наведено порівняння теоретичних результатів з відомими експериментальними даними, які отримані при одноосовому и багатоосовому циклічному деформуванні. Показано, що теорія дає можливість описувати циклічно нестабільну поведінку двофазних матеріалів.

Ключові слова: двофазна сталь, циклічне деформування, теорія мікродеформації.

Формулируются определяющие соотношения теории микродеформации для двухфазных материалов. Дается сравнение теоретических результатов с известными экспериментальными данными, полученными при одноосном и многоосном циклическом деформировании. Показано, что теория позволяет описывать циклически нестабильное поведение двухфазных материалов.

Ключевые слова: двухфазная сталь, циклическое деформирование, теория микродеформации.

Constitutive relationships of the theory of microstrain for two-phase materials are formulated. In the paper the comparison of theoretical results with experimental data on uniaxial and multiaxial cyclic deformation is carried on. It is shown that the theory can describe the behavior of a cyclically unstable two-phase materials.

Key words: dual phase steels, cyclic deformation, the theory of microstrain.

Введение. Двухфазная сталь (ДС) находит широкое применение в энергетической, химической, нефтяной, автомобильной и других отраслях промышленности, в которых необходимы материалы с высокой прочностью и коррозионной стойкостью. Такое поведение ДС обычно достигается за счет объединения твердой фазы мартенсита с высокой прочностью и мягкой фазы феррита с хорошей податливостью.

Экспериментальному изучению механизмов циклического упругопластического деформирования ДС посвящены [1 – 5]. В них, в частности, установлено, что механическое поведение ДС существенно зависит от амплитуды деформации. Наряду с экспериментальными исследованиями известен ряд работ посвященных моделированию механического поведения ДС. Они, как правило, основаны на модели зернистой структуры, осреднение в которой осуществляется численно с помощью метода конечных элементов [6 – 8]. Анализ теоретических результатов показывает, что такой подход не позволяет с достаточной степенью точности описывать пластическое деформирование ДС особенно при неодносном циклическом нагружении.

В настоящей работе для описания механического поведения ДС применяется теория микродеформации [9 – 11], которая является развитием теории пластичности, учитывающей микронапряжения [12]. Теория получила развитие в ряде работ, в которых продемонстрирована ее эффективность в описании пластической деформации при сложном нагружении поликристаллических материалов. В частности, предложен вариант теории, позволяющий индивидуализировать все зерна, т. е. фактически учесть многофазность материала [13].

Определяющие соотношения теории микродеформации для двухфазных материалов. Разрешающие уравнения теории микродеформации, в которой возможна полная индивидуализация свойств зерен, составляющих представительный макрообъем, в случае малой деформации имеют вид

$$\dot{\epsilon}_n = \dot{\epsilon}_{en} + \dot{\epsilon}_{pn} \quad (n = 1 \div N), \quad (1)$$

где ϵ_n , ϵ_{en} , ϵ_{pn} – тензоры скоростей полной, упругой и пластической деформации зерен, соответственно, N – общее количество зерен;

$$\dot{\sigma}_n = G : (\dot{\epsilon}_n - \dot{\epsilon}_{pn}), \quad \langle \dot{\sigma}_n \rangle = G : (\langle \dot{\epsilon}_n \rangle - \langle \dot{\epsilon}_{pn} \rangle), \quad (2)$$

где $\langle \dot{\sigma}_n \rangle, \langle \dot{\epsilon}_n \rangle, \langle \dot{\epsilon}_{pn} \rangle$ – скорости изменения макронапряжений, полных и пластических макродеформаций (здесь и в дальнейшем треугольные скобки обозначают суммирование по представительному макрообъему);

$$\langle \mathbf{a}_n \rangle = \sum_{n=1}^N \mathbf{a}_n \Delta v_n \quad \left(\sum_{n=1}^N \Delta v_n = 1 \right), \quad (3)$$

где Δv_n – относительный объем зерна. Тензор четвертого ранга (матрица упругой жесткости) G имеет вид

$$G = 2G \left[\frac{1}{2} \mathbf{I} + \frac{\nu}{1-2\nu} \mathbf{ii} \right]$$

где G и ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона, соответственно, \mathbf{I}, \mathbf{i} – единичные тензоры четвертого и второго порядка, соответственно;

$$\dot{s}_n = \dot{\tau}_n + \dot{\rho}_n, \quad (4)$$

где $\dot{\tau}_n$ и $\dot{\rho}_n$ – скорости изменения диссипативной и «упругой» составляющих сопротивления пластическому деформированию;

$$\tau_n = \tau_n \mu_n, \quad \dot{\epsilon}_{pn} = \dot{\lambda}_n \mu_n, \quad (5)$$

где μ_n – направляющий девиатор ($\mu_n : \mu_n = 1$), $\dot{\lambda}_n$ ($\dot{\lambda}_n = \sqrt{\dot{\epsilon}_{pn} : \dot{\epsilon}_{pn}}$) – интенсивность скорости микропластической деформации;

$$\dot{\rho}_n = R_n \dot{\epsilon}_{pn} + R_{2n} \langle \dot{\epsilon}_{pn} \rangle : \mu_n \mu_n + R_{3n} \langle \dot{\lambda}_n \rangle \mu_n \quad (6)$$

где

$$R_n = \begin{cases} R_{1n} & \mu_n = \mu_{n'} \text{ и } \tau_n = \tau_{n'}, \\ 0 & \mu_n \neq \mu_{n'} \text{ или } \tau_n \neq \tau_{n'}, \\ -R_{4n} & \mu_n = -\mu_{n'} \text{ и } \tau_n = \tau_{n'}. \end{cases} \quad (7)$$

и $\mu_{n'}^{(\alpha)}$ и $\tau_{n'}^{(\alpha)}$ – соответственно направление пластического деформирования и предел текучести зерна; α – фазы с номером n' , R_{1n}, R_{2n}, R_{3n} и R_{4n} – константы материала;

$$\langle \dot{s}_n \rangle - \dot{s}_n = A_n (\dot{\epsilon}_{pn} - \langle \dot{\epsilon}_{pn} \rangle), \quad (8)$$

где A_n – константы материала. Отметим, что при $A_n = 0$, получаем $s_n = \langle s \rangle$, что соответствует известному способу осреднения по Рейссу, а при $A_n = 2G$, приходим к условию $\varepsilon_n = \langle \varepsilon \rangle$, которое соответствует правилу осреднения по Фойгту.

Умножая правую и левую часть (8) на μ_n и учитывая уравнения (5), (6), для частиц, которые деформируются пластически, получаем

$$\dot{\lambda}_n = \frac{1}{D_{1n}} [\langle \dot{s}_n \rangle - D_{2n} \langle \dot{\epsilon}_{pn} \rangle] : \mu_n - \frac{R_{3n}}{D_{1n}} \langle \dot{\lambda}_n \rangle, \quad (9)$$

где обозначено $D_{1n} = R_{1n} + A_n$, $D_{2n} = R_{2n} - A_n$. Для частиц, находящихся в состоянии разгрузки $\dot{\lambda}_n = 0$.

После осреднения, из (9) (осреднение здесь и далее ведется только по активным частицам) находим

$$\langle \dot{\lambda}_n \rangle = D [\langle \dot{s}_n \rangle : \mathbf{F}_1 - \langle \dot{\epsilon}_{pn} \rangle : \mathbf{F}_2], \quad (10)$$

где $\mathbf{F}_1 = \left\langle \frac{1}{D_{1n}} \mu_n \right\rangle$, $\mathbf{F}_2 = \left\langle \frac{D_{2n}}{D_{1n}} : \mu_n \right\rangle$, $D = \left(1 + \left\langle \frac{D_{3n}}{D_{1n}} \right\rangle \right)^{-1}$.

Подставляя выражение (9) в формулу (8), получаем

$$\langle \dot{\epsilon}_{pn} \rangle \equiv \langle \dot{\lambda}_n \mu_n \rangle = \langle \dot{s}_n \rangle : (\mathbf{G}_1 - D\mathbf{F}_3\mathbf{F}_1) + \langle \dot{\epsilon}_{pn} \rangle : (\mathbf{G}_2 + D\mathbf{F}_3\mathbf{F}_2), \quad (11)$$

где $\mathbf{G}_1 = \left\langle \frac{1}{D_{1n}} \mu_n \mu_n \right\rangle$, $\mathbf{G}_2 = \left\langle \frac{D_{2n}}{D_{1n}} : \mu_n \mu_n \right\rangle$, $\mathbf{F}_3 = \left\langle \frac{D_{3n}}{D_{1n}} \mu_n \right\rangle$.

Формулу (11) удобно использовать, когда задана траектория деформирования. Её целесообразно преобразовать к виду

$$\langle \dot{\epsilon}_{pn} \rangle = 2G(I - \mathbf{G}_2 + 2G\mathbf{G}_1 - D\mathbf{F}_3\mathbf{F}_2 + 2G\mathbf{F}_3\mathbf{F}_1)^{-1} : \langle \dot{\epsilon}_n \rangle : (\mathbf{G}_1 - D\mathbf{F}_3\mathbf{F}_1). \quad (12)$$

Соотношения (12) позволяют в общем случае описывать пластическую деформацию многофазных материалов, поскольку в общем случае характеристики всех зерен могут быть различными.

При рассмотрении ДС формулы (12) существенно упрощаются, в этом случае элементарный представительный объем состоит из зерен только двух фаз ($N = N_1 + N_2$), где N_1, N_2 – количество зерен каждой фазы и из (3) следует

$$\langle \mathbf{a}_n \rangle = \theta_1 \sum_{n=1}^{N_1} \mathbf{a}_n \Delta v_n^{(1)} + \theta_2 \sum_{n=N_1+1}^N \mathbf{a}_n \Delta v_n^{(2)} = \theta_1 \langle \mathbf{a}_n \rangle_1 + \theta_2 \langle \mathbf{a}_n \rangle_2, \quad \theta_2 = 1 - \theta_1. \quad (13)$$

Используя такое представление, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \sum_{\alpha=1}^2 \theta_{\alpha} \left\langle \frac{1}{D_1^{(\alpha)}} \boldsymbol{\mu}_n \boldsymbol{\mu}_n \right\rangle_{\alpha}, \quad \mathbf{G}_2 = \sum_{\alpha=1}^2 \theta_{\alpha} \left\langle \frac{D_{2n}^{(\alpha)}}{D_1^{(\alpha)}} : \boldsymbol{\mu}_n \boldsymbol{\mu}_n \right\rangle_{\alpha}, \quad \mathbf{F}_1 = \sum_{\alpha=1}^2 \theta_{\alpha} \left\langle \frac{1}{D_1^{(\alpha)}} \boldsymbol{\mu}_n \right\rangle_{\alpha}, \\ \mathbf{F}_2 &= \sum_{\alpha=1}^2 \theta_{\alpha} \left\langle \frac{D_{2n}^{(\alpha)}}{D_1^{(\alpha)}} : \boldsymbol{\mu}_n \right\rangle_{\alpha}, \quad \mathbf{F}_3 = \sum_{\alpha=1}^2 \theta_{\alpha} \left\langle \frac{D_3^{(\alpha)}}{D_1^{(\alpha)}} : \boldsymbol{\mu}_n \right\rangle_{\alpha}, \quad D^{(\alpha)} = \left(1 + \left\langle \frac{D_3^{(\alpha)}}{D_1^{(\alpha)}} \right\rangle \right)^{-1}, \quad (14) \\ D_1^{(\alpha)} &= R_1^{(\alpha)} + A^{(\alpha)}, \quad D_2^{(\alpha)} = R_2^{(\alpha)} + R_2^{(\alpha)} \rho_n^{(\alpha)} - A^{(\alpha)}, \quad D_3^{(\alpha)} = R_3^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Здесь индекс α указывает на принадлежность к одной из фаз $\alpha = 1, 2$ и θ_{α} – объемная доля α -фазы.

Записанные соотношения теории микродеформации для двухфазного материала (2) и (12), с учетом (14), позволяют с помощью численного интегрирования по методу Эйлера строить траекторию напряжений по заданной произвольной траектории деформации. Важно отметить, что наряду с макронапряжениями по формулам (2), (3) и (9) определяются микродеформации и микронапряжения в зернах каждой фазы, что может быть существенным для решения технических проблем возникающих при использовании ДС.

Определение констант материала. Как следует из приведенных формул, для конкретизации теории, в общем случае, необходимо задать 13 констант материала $G, \nu, \theta_1, R_1^{(\alpha)}, R_2^{(\alpha)}, R_3^{(\alpha)}, R_4^{(\alpha)}, R_5^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$). Однако, как отмечалось в [11], для описания механического поведения однофазных поликристаллических металлов можно использовать ряд упрощений. Например, если материал в определенном диапазоне деформации проявляет циклически стабильное поведение и соответствует идеальному принципу Мазинга, то можно положить $R_5^{(\alpha)} = 0$, $R_4^{(\alpha)} = 1$ ($\alpha = 1, 2$), что уменьшает количество констант. Для определения констант материала проще всего использовать эксперименты для однофазных поликристаллов, составляющих ДС. В этом случае необходимо в формулах (14) положить $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 0$ и построить константы для этой фазы $R_k^{(1)}$. Затем, рассматривая вариант $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 1$, подобрать $R_k^{(2)}$. Задавая объемные доли каждой фазы, можно автоматически получить соотношения для двухфазного материала.

В известных литературных источниках, как правило, отсутствуют экспериментальные данные для каждой фазы. Поэтому в практических приложениях подбор постоянных материала приходится осуществлять на основе экспериментальных данных, полученных непосредственно для конкретной двухфазной стали.

В каждом случае константы материала $R_k^{(\alpha)}$ определяются из условия наилучшего описания экспериментальных данных.

Остановимся на экспериментальных результатах, приведенных в [3]. Материал – двухфазная нержавеющая сталь AISI-329, содержащая приблизительно 62% феррита и 38% аустенита. Воспользуемся простейшим вариантом теории микродеформации, принимая $R_2^{(1)} = R_2^{(2)} = 0$, $A_{(1)} = A_{(2)} = 2G$ и $R_4^{(1)} = R_4^{(2)} = 1$. Остальные константы подбирались из экспериментов на циклическое нагружение с контролируемой амплитудой деформации. Были приняты следующие значения: $R_1^{(1)} = -95000$ МПа,

$R_1^{(2)} = -105000$ МПа, $R_3^{(1)} = -100$ МПа, $R_3^{(2)} = 3000$ МПа, $G = 60$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\tau^{(1)} = 150$ МПа, $\tau^{(2)} = 350$ МПа. На рис. 1 показаны результаты сравнения экспериментальных данных с результатами расчетов для трех значений амплитуд: $\Delta\epsilon = 2.0 \cdot 10^{-3}$, $\Delta\epsilon = 3.0 \cdot 10^{-3}$ и $\Delta\epsilon = 4.0 \cdot 10^{-3}$. Для подбора постоянных использовались данные для $\Delta\epsilon = 2.0 \cdot 10^{-3}$ и $\Delta\epsilon = 4.0 \cdot 10^{-3}$.

Рассмотрим эксперименты на циклическое нагружение с контролируемой траекторией деформирования, описанные в [5]. Материал – двухфазная нержавеющая сталь X2CrNiMoN25-07, содержащая приблизительно 60% феррита и 40% аустенита. Как и выше принималось $R_2^{(1)} = R_2^{(2)} = R_3^{(1)} = R_3^{(2)} = 0$, $A_{(1)} = A_{(2)} = 0$ и $R_4^{(1)} = R_4^{(2)} = 1$, а остальные константы подбирались из экспериментов на одноосное циклическое нагружение с контролируемой амплитудой деформации. Были получены следующие значения постоянных: $R_1^{(1)} = 200$ МПа, $R_1^{(2)} = 2000$ МПа, $G = 60$ ГПа, $\nu = 0,3$, $\tau^{(1)} = 370$ МПа, $\tau^{(2)} = 500$ МПа. Сравнение с экспериментальными данными проведено при двухосном нагружении по так называемой траектории «песочные часы», вид которой приведен на рис. 2. При этом максимальная амплитуда интенсивности деформации составила 0,5%.

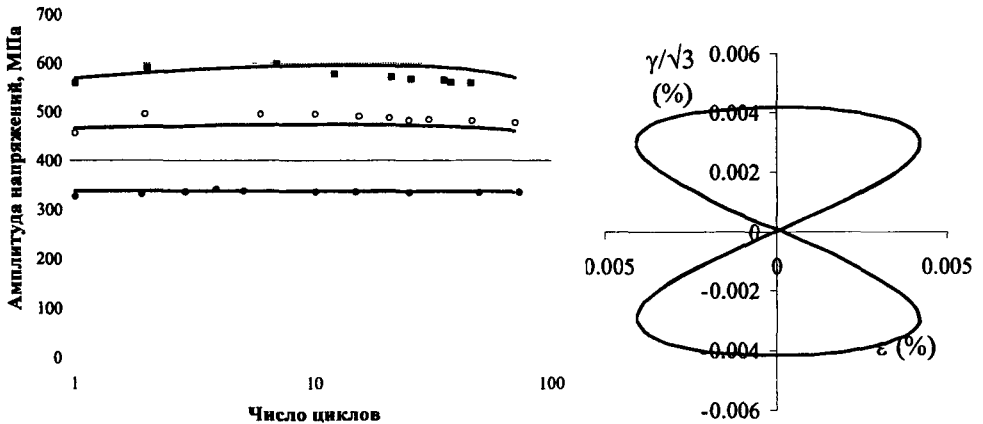


Рис. 1 Типичная диаграмма упрочнения-разупрочнения при циклическом нагружении дуплексной стали AISI-329 при заданной амплитуде деформации (сплошная линия – теоретическая кривая, ● - $\Delta\epsilon = 2.0 \cdot 10^{-3}$, ◻ - $\Delta\epsilon = 3.0 \cdot 10^{-3}$, ◼ - $\Delta\epsilon = 4.0 \cdot 10^{-3}$)

Рис. 2. Сравнение с экспериментальными данными проведено при двухосном нагружении по так называемой траектории «песочные часы»

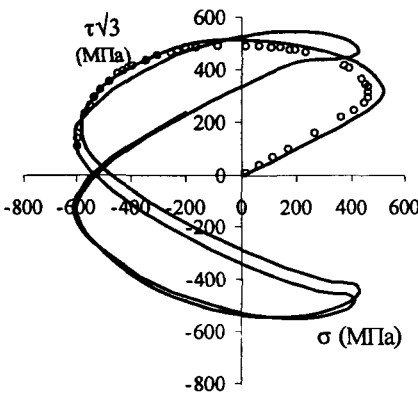


Рис. 3. Траектория напряжений

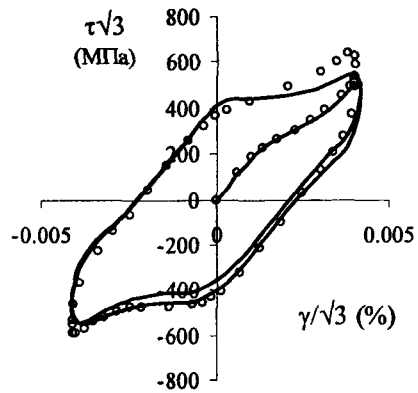


Рис. 4. Диаграмма в плоскости $\tau \sim \gamma$

На рис. 3 показана траекторія напружень, на рис. 4 – діаграма в плоскості $\tau - \gamma$. Сплошная лінія відповідає теоретическим результатам, точки – експериментальним даним.

Выводы. Из приведенных на рис. 1, 3, 4 результатов следует, что теория микродеформации даже в простейшем варианте позволяет с удовлетворительной точностью описывать пластическое деформирование двухфазных сталей при одноосном и неодносном циклическом нагружениях.

Библиографические ссылки

1. Tomita Y. Effect of morphology of second-phase Martensite on tensile properties of Fe-0.1C dual phase steels / Y. Tomita // Journ. of Material Sci., 1990. –Vol. 25. –P. 5179 – 5184.
2. Xia Y.B. Low cycle fatigue behavior of new type of stainless steel/Y.B. Xia, Z.G. Wang // Mater. Sci. Eng. A, 1992. – Vol. 151.– P. 29–35.
3. Mateo A. Cyclic stress-strain response and dislocation substructure evolution of a ferrite-austenite stainless steel/A. Mateo, L. Llanes, L. Iturgoyen, M. Anglada // Acta mater., 1996. – Vol. 44. –№ 3. – P. 1143–1153.
4. Kruml T. Dislocation structures in the bands of localised cyclic plastic strain in austenitic 316L and austenitic-ferritic duplex stainless steels / T. Kruml, J. Polak, K. Obrtlík, S. Degallaix // Acta Mater., 1997. – Vol. 45. – № 12. – P. 5145–5151.
5. Aubin V. Cyclic plasticity of a duplex stainless steel under Non-proportional loading / V. Aubin, P. Quaegebeur, S. Degallaix// Material Sci. and Engineering, 2003. –Vol. 346. –P. 208 – 215.
6. Lillbacka R. Cyclic stress-strain behavior and load sharing in duplex stainless steels: Aspects of modeling and experiments/ R. Lillbacka, G. Chai, M. Ekh, P. Liu, E. Johnson, K. Runesson //Acta Mater., 2007. – Vol. 55. – P. 5359–5368.
7. Bolmaro R.E. Finite method simulations for two-phase material plastic strains/ R.E. Bolmaro, R.V. Browning, E.M. Guerra, A.D. Rollett //Material Sci. and Engineering A., 1995. – Vol. 196. – P. 53–63
8. Al-Abbasi F.M. Micromechanical modeling of dual phase steels/ F.M. Al-Abbasi, J.A. Nemes // Intern. Journ. of Mechanical Sci. – 2003. –Vol. 45. – P. 1449–1465.
9. Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая микродеформации / В.В. Новожилов, Ю.И. Кадашевич, Ю.А. Черняков // Докл. АН СССР. – 1985. – Т.284, №.4. – С.821–823.
10. Кадашевич Ю.И. Теория пластичности и ползучести, учитывающая микродеформации / Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В., Черняков Ю.А. // ПММ. – 1986. – Т.50, №6. – С. 890–897.
11. Kadashevich Yu.I. Theory of plasticity, taking into account micro stresses/ Yu.I. Kadashevich, Yu.A. Chernyakov // Advances in Mechanics. – 1992. – Vol. 15. – № 3–4. – P. 3–39.
12. Кадашевич Ю.И. Об учете микронапряжений в теории пластичности/ Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов // Инж.ж.МТТ. – 1968. – №3. – С. 82–91.
13. Shneider V.P. The development of micro deformations theory: the account of polycrystalline material grain sizes/ V.P. Shneider, Yu.A. Chernyakov// Proceedings of third international conference «Multiscale Material Modeling». – Freiburg (Germany), 2006. – P. 530–533.

Надійшла до редколегії 17.05.11

УДК 539.3

В. І. Шваб'юк, Я. М. Пастернак, О. В. Гуда
 Луцький національний технічний університет

ЦИЛІНДРИЧНИЙ ЗГИН ТРАНСТРОПНОЇ ПЛИТИ, ПОСЛАБЛЕНОЇ ТУНЕЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ

Розглянуто циліндричний згин плити, послабленої тріщиною, що паралельна до лицевих поверхонь плити. На підставі застосування уточненої теорії згину плит, що враховує поперечне обтиснення, отримано аналітичний розв'язок поставленої задачі. Ці результати порівняно з числовим розв'язком, одержаним із використанням нового формулювання методу граничних елементів, придатного для розгляду тріщин з контактуючими берегами. Отримано хорошу узгодженість результатів обох підходів як для ізотропних, так і для анізотропних плит.

Ключові слова: тріщина, ортотропна плита, згин, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Рассмотрен цилиндрический изгиб плиты, ослабленной трещиной, которая параллельна лицевым поверхностям плиты. Используя уточненную теорию изгиба плит, которая учитывает поперечное обжатие, получено аналитическое решение поставленной задачи. Эти результаты сравниваются с численным решением, полученным с использованием новой формулировки метода граничных элементов, подходящей для рассмотрения трещин с контактирующими берегами. Получено хорошее совпадение результатов двух подходов, как для изотропных, так и для анизотропных плит.

Ключевые слова: трещина, ортотропная плита, изгиб, коэффициент интенсивности напряжений.

This paper considers cylindrical bending of the plate containing a crack parallel to plate's faces. The analytical model of the problem is obtained using the improved theory of plates bending, which considers transverse deformation of the plate. Received analytical results are compared with the numerical data of the boundary element approach, which is modified to suit the considered contact problem. The results of analytical and numerical techniques are in a good agreement both for the isotropic and anisotropic plates.

Key words: crack, orthotropic plate, bending, stress intensity factor.

Вступ. Проблема розрахунку тонких пластин, послаблених тріщинами, є особливо актуальною для випадків композитних матеріалів, що мають схильність до розшарувань у суцільному середовищі, між шарами, або в околі армувальних елементів. Хоча поширення тріщини паралельно до серединної поверхні пластини є менш небезпечним, ніж коли це поширення відбувається перпендикулярно, проблема розрахунку такого елемента залишається актуальною. Аналіз цієї проблеми наведено у монографіях М.В. Марчука та М.М. Хом'яка [2], С.В. Серенсена і Г.П. Зайцева [4], Г.П. Черепанова [5] та ін. У роботах В.Ц. Гнуні та Т.А. Єгназаряна [1] задачі стійкості та згину тонких пластин із внутрішніми тріщинами розглядаються у постанові класичної теорії згину. В даній роботі розв'язана задача циліндричного згину плити із внутрішньою тріщиною на базі рівнянь уточненої теорії згину плит середньої товщини [6], що враховують поперечний зсув та обтиснення. Досліджується вплив поперечної анізотропії та довжини тріщини на величини напружень і переміщень у плиті.

Постанова задачі. Граничні умови. Розглядається циліндричний згин плити товщиною $2h$, що шарнірно оперта на краях $x = \pm a$, а на глибині $z = h - h_0$ (у межах $-l \leq x \leq l$) вона послаблена симетричною тунельною тріщиною, що знаходиться паралельно до серединної поверхні (рис. 1а).

Плита згинається сталим розподіленням навантаженням q , що прикладене до зовнішньої поверхні $z = -h$. Для розв'язання поставленої задачі можна скористатися методикою [1], за якою плита формально розбивається на дві області із різними

жорсткостями на згин:

(а) область, де виникла тріщина, циліндричну жорсткість якої можна подати як алгебраїчну суму жорсткостей верхнього і нижнього елементів пластини :

$$D_1 = D_1^- + D_1^+ = \delta D, \quad (\delta = 1 - 3\beta + 3\beta^2, \beta = h_0/2h); \quad (1)$$

(б) область, де немає тріщини, а жорсткість така ж як у суцільної пластини: $D_2 = D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$. Тоді: $D_1^+ = \tilde{E}(2h - h_0)^3/12 = (1 - \beta)^3 D$ – жорсткість частини пластини над тріщиною, а $D_1^- = \beta^3 D$ – жорсткість частини пластини під тріщиною; $\tilde{E} = E/(1 - \nu^2)$; E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона.

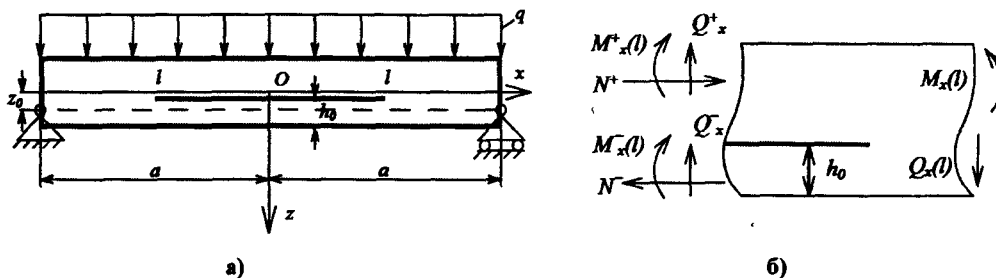


Рис. 1. Схема навантаження плити

При цьому необхідно зауважити, що застосовану методика можна використати у тих випадках, коли теорія пластин не враховує поперечного обтіснення, тобто вертикальні переміщення не залежать від поперечної координати z . За допомогою такої методики неможливо також визначити реальні нормальні напруження σ_x , котрі виникатимуть у частинах пластини над і під тріщиною. Тому, надалі (із застосуванням формул (1), (2)) буде використана модель плит середньої товщини [7], що використовує уточнені рівняння згину та формули для вертикального переміщення $W(x, z)$ і нормального напруження σ_z , яка дозволить детальніше розглядати напружено-деформований стан та задовольняти граничні умови для кожної з частин плити, що утворилися як по циліндричній поверхні пластини по лінії розділу областей, так і на лицевих поверхнях частин пластини.

Приймемо, що контактний тиск p , який виникає на берегах тріщини, є сталим (як і в контактних задачах [3]) уздовж усієї тріщини і таким, що виражається через переміщення серединної поверхні w_n нижньої частини плити під тріщиною за класичною формулою рівняння прогинів для циліндричного згину у вигляді – $p = D_1^- w_n''$. Для верхньої частини плити та всієї частини плити, пошкодженої тріщиною, ці рівняння можна записати через відповідні переміщення w_+ і w наступним чином – $q - p = D_1^+ w_+''$ та $q = (D_1^+ + D_1^-) w'' = \delta D w''$. Якщо на цьому етапі знехтувати поперечним обтісненням ($w_n = w_+ = w$), то шляхом алгебричних перетворень виписаних залежностей можна отримати наближену формулу для контактного тиску p на берегах тріщини

$$p = \frac{D_1^- q}{D_1^+ + D_1^-} = \frac{\beta^3 q}{1 - 3\beta + 3\beta^2}. \quad (2)$$

Враховавши, що напруження $\sigma_z = -p$ та виконавши підстановку $\beta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{h} \right)$ у

формулі (2), одержимо вираз для контактного напруження σ_z як функції від поперечної координати z

$$\sigma_z = \frac{q}{2} \frac{(z/h - 1)^3}{(1 + 3z^2/h^2)} \quad (3)$$

Для розрахунку напружено-деформованого стану плити використовуються рівняння уточненої моделі трансропних (трансверсально-ізотропних) плит [6], що враховують, крім деформації поперечного зсуву, ще й поперечне обтиснення:

$$\begin{aligned} D_1 w_1'''' &= q_{12} - \varepsilon_1 h^2 q_{12}'' - \varepsilon_2 h^4 q_{12}'''' , \\ K_1' w_{1x}'' &= -q_{12}, \quad E u_1'' = -v''(1 + v) q_1' , \end{aligned} \quad (4)$$

де $D_1 = D_2 = D = I\tilde{E}$; $I = 2h^3/3$; $K' = 4G'h/3$; $u_1, w_1, w_{1x}, h_1 = u, w, w_x, h$; $q_{12} = q^-$; $q_{11} = -0,5q^-$; для області $|x| > l$; $q_{12} = q_{a2} \equiv q^- - p = q(1 - \beta^3/(1 - 3\beta + 3\beta^2))$; $q_{11} = q_{a1} = -(p + q^-)/2$, $u_1, w_1, w_{1x} = u_0, w_0, w_{0x}$; $D_1 = D_1^+ = I_1^+ \tilde{E}$; $I_1^+ = 2h^3(1 - \beta)^3/3$, $h_1 = h_1^+ = h(1 - \beta)$; $\beta = h_0/2h$ або $D_1 = D_1^- = I_1^- \tilde{E}$; $I_1^- = h_0^3/12$; $K_1' = 2G'h_0/3$; $q_{11} = q_{a1} = -0,5p$; $q_{12} = q_{a2} = q\beta^3/(1 - 3\beta + 3\beta^2)$; $u_1, w_1, w_{1x}, h_1 = u_n, w_n, w_{nx}, h_0/2$ для областей $|x| \leq l$; $\varepsilon_1 = 0,4(1 - 0,75\alpha)\tilde{E}/G'$; $\varepsilon_2 = (1 - \alpha)\tilde{E}/20E'$; $\alpha = 0,5v''G'/G$; E, E', G', v'' – модулі пружності та коефіцієнт Пуассона матеріалу плити у поздовжньому та поперечному (зі штрихами) напрямках; $q^- = q$ – розподілене навантаження, прикладене до верхньої грані плити ($z = -h$); u – горизонтальне переміщення серединної поверхні плити; w, w_x – повна та зсувна складові вертикального переміщення серединної поверхні плити; римські цифри біля величин w, w_x, u та q_1, q_2 є відповідними порядками похідної за змінною x ; нижні індекси «0» і «n» біля цих величин стосуються серединних поверхонь відповідно верхньої або нижньої частин плити в області тріщини; $2h$ – висота перерізу плити; h_0 – товщина частини плити під тріщиною.

Вирази (4) для напружень σ_x, σ_z та переміщень $U(x, z), W(x, z)$ плити поза областю тріщини, відповідно до цієї моделі, мають вигляд [6]:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{2h} + \frac{M_x}{I} z + \frac{z(G/G' - v'')}{3I(1 - v)} (z^2 - 0,6h^2) \left(q_2 - 0,5q_2'' h^2 \frac{G'}{E'} \right); \quad (5)$$

$$U(x, z) = u(x) - z \left(\frac{dw}{dx} - \frac{dw_x}{dx} \left(1 - (1 - \alpha) \frac{z^2}{3h^2} \right) \right) - \frac{(1 - \alpha) dq_2}{8E'h} \frac{dz^3}{dx};$$

$$W(x, z) = w(x) + 2\alpha_0 z \cdot \frac{q_1}{E'} + A' \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{\alpha_0 \cdot q_2}{8E'h} \cdot B(z), \quad A' = \frac{v''}{(1 - v)};$$

де $B(z) = 6A_2 z^2 - A_3 \frac{z^4}{h^2}$; $\alpha_0 = 0,5 - v'A'$; $A_2 = 1 + \frac{A'E'}{2\alpha_0 G'}$; $A_3 = A_2 - \frac{v''A'E'}{4\alpha_0 G'}$; $Q_x = K' \frac{dw_x}{dx}$;

$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} - \varepsilon_0 h^2 q_2$; $N_x = 2\tilde{E}h \frac{du}{dx} + 2A'hq_1$ – згинальний момент, поздовжня та поперечна сили у плиті; u – тангенціальне переміщення серединної поверхні плити.

Розв'язки системи рівнянь (4) будемо шукати окремо для кожної з ділянок плити, задовольняючи відповідним граничним умовам, використовуючи методику

«зшивання» розв'язків для кожної з ділянок та враховуючи умову симетрії задачі. Зокрема, для області $|x| > l$ будемо мати:

$$w = C_0 + C_2 x^2 + \frac{qx^4}{24D}; \quad w_x = C_1 - \frac{qx^2}{2K'}; \quad u = \frac{v''(1+v)qx}{2E} + C_u. \quad (6)$$

Для області $|x| \leq l$, якщо це стосується нижньої частини плити під тріщиною, на лицевій поверхні якої мають діяти нормальні напруження $\sigma_x(h-h_0) = -p$, то відповідні переміщення (6) будуть мати вигляд:

$$w_n = C_{n0} + C_{n2} x^2 + \frac{q_{n2} x^4}{24D_1^+}; \quad w_{nx} = C_{n1} - \frac{q_{n2} x^2}{2K_n'}; \quad u_n = C_{1n} x. \quad (7)$$

Тут сталі $C_0, C_2, C_1, C_u, C_{n0}, C_{n2}$ знаходяться з умов на краю плити $x = a$:

$$w(a) = M_x(a) = N_x(a) = 0; \quad Q_x(a) = -qa, \quad (8)$$

та умов «зшивання» на межі області появи тріщини $x = l$ для верхньої або нижньої частин плити, які ми вже будемо розглядати окремими об'єктами, навантаженими додатковим поверхневим контактним тиском p в області тріщини. Наприклад, для нижньої частини плити:

$$\begin{aligned} w_n(l) &= W(l, h-h_0/2); & u_n(l) &= U(l, h-h_0/2); \\ \sigma_x^-(l, h_0/2) &= \sigma_x(l, h); & N_x^-(l) &= \int_{h-h_0}^h \sigma_x(l, z) dz, \end{aligned} \quad (9)$$

де $N_x^- = h_0 \bar{E} u_n' + h_0 A' q_{n1}$; $M_x^- = -D_1^- \bar{w}_n'' - 0,25 \varepsilon_1 h_0^2 q_{n2}$; $Q_x^-(l) = Q_x(l) + q_{n2} l$, $Q_x(l) = -ql$; $G^* = (G/G' - v'')/(1-v)$; $z^- = z - h + h_0/2$.

Задовольняючи граничним умовам (8), отримуємо значення коефіцієнтів C_0, C_2, C_1 , а також вирази для згинального моменту M_x та переміщень w і w_x в області плити без тріщини:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{5qa^4}{24D} + \frac{q\varepsilon_1 a^2 h^2}{2D}; & C_2 &= \frac{-qa^2(1+2\varepsilon_1 h^2/a^2)}{4D}; & C_1 &= \frac{qa^2}{2K'}; & w_x &= \frac{q(a^2-x^2)}{2K'}; \\ M_x &= \frac{q(a^2-x^2)}{2}; & Q_x(x) &= -qx; & w &= \frac{q(x^4-a^4)}{24D} + qa^2(a^2-x^2) \frac{1+2\varepsilon_1 h^2/a^2}{4D}. \end{aligned} \quad (10)$$

Із умов (6) знаходимо інші невідомі коефіцієнти:

$$C_{n0} = W(l, h(1-\beta)) - C_{n2} l^2 - \frac{pl^4}{24D_1^-}; \quad C_{n2} = -\frac{2M_x^-(l) + pl^2 + 2\varepsilon_1 \beta^2 ph^2}{4D_1^-};$$

$$C_u = \left(C_{1n} - \frac{A'q}{2\bar{E}} \right) l + \frac{3qla^2}{4\bar{E}h^2} \left(\frac{l^2}{3a^2} - 2\varepsilon_1 \frac{h^2}{a^2} - 1 \right) + \frac{ql}{4G'} f_1(\beta);$$

$$C_{1n} = N_x^- \frac{l}{\bar{E}h_0} - \frac{A'q_{n1}}{\bar{E}}; \quad C_{n1} = -\frac{2D_1^-}{K_n'} C_{n2} - \varepsilon_1 \beta^2 h^2 q; \quad (11)$$

$$N_x^-(l) = \frac{3\beta(1-\beta)M_x(l)}{h} - \frac{1}{4} G^* q h f_2(\beta); \quad G^* = \frac{G/G' - v''}{1-v};$$

$$M_x^-(l) = -\beta N_x^-(l) \frac{h}{3} + \beta^2 M_x(l) + 0,4\beta^2 h^2 (q-p) \frac{G^*}{3};$$

$$f_1(\beta) = (1-\beta) \left[3 - (1-\beta)^2 (1-\alpha) \right]; \quad f_2(\beta) = (1-2\beta)^2 (2\beta^2 - 2\beta - 0,1) + 0,1.$$

Основні співвідношення. Таким чином, виходячи із формул (9) – (11) основні зусилля та згинальний момент для частини плити під тріщиною будуть мати наступний вигляд

$$N_x^-(x) = N_x^-(l); \quad Q_x^-(x) = -px; \quad M_x^-(x) = M_x^-(l) + \frac{p}{2}(l^2 - x^2). \quad (12)$$

Враховуючи, що поздовжні сили в частинах плити (рис. 1а) над тріщиною і під тріщиною ($x \leq l$) рівні за величиною і обернені за знаком ($N_x^-(x) = -N_x^+(x)$), величина межового згинального моменту $M_x^+(l)$ для верхньої частини плити ($x \leq l$) знаходиться із граничної умови рівності нормальних напружень на зовнішній ($z = -h$) поверхні плити

$$\sigma_{xx}(l, -h(1-\beta)) = \sigma_x(l, -h). \quad (13)$$

Звідки

$$M_x^+(l) = -(1-\beta)N_x^-(l)\frac{h}{3} + (1-\beta)^2 M_x^-(l) + 0,4ph^2(1-\beta)^2 \frac{G^*}{3}. \quad (14)$$

Разом ці величини мають задовольняти рівнянню рівноваги моментів у плиті в околі тріщини (рис. 1б):

$$M_x^+(l) + M_x^-(l) + dN_x^-(l) = M_x(l). \quad (15)$$

Тут d – деяка відстань між точками прикладання поздовжніх сил; $d = h$ – за лінійного розподілу нормальних напружень σ_x .

Необхідно зауважити, що до рівняння рівноваги моментів (15) входить член, який враховує вплив поздовжніх сил, і не брався до уваги Г. П. Черепановим у його «загальній теорії розшарування у багатошарових оболонках» [5, с.267]. Це пояснювалось тим, що відстань d вважалася значно меншою від l ($l \gg d$).

Разом з тим, допущення про поздовжні сили $N_{xx}(l)$, які діють у поперечних перерізах частин плити, дозволяють з умов статичної рівноваги частини плити, «розрізаної» вздовж площини тріщини, та на її продовженні, знайти зсувне (дотичне) зусилля, що діє на продовженні тріщини

$$T(l) = \int^l \tau_{xz}^0 dx = N_{xx}(l), \quad (16)$$

де $\tau_{xz}^0 = -3\beta(1-\beta)Q_x/h$ – «фонове» напруження, що діє в горизонтальному перерізі плити без тріщини, але на її рівні. Наближене значення для коефіцієнта інтенсивності напружень K_{II} можна знайти за допомогою формули

$$K_{II} = \tau_{xz}^0(l) \sqrt{2\pi l} = -3\sqrt{2}\beta(1-\beta) \frac{Q_x(l)}{h} \sqrt{\pi l}. \quad (17)$$

Максимальні ($x = 0$) нормальні переміщення w_n (без урахування обтиснення), а також напруження σ_x , що виникають на зовнішній та внутрішній поверхнях нижньої частини плити можна записати в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
 w_* &= \frac{5qa^4}{24D} \left[\left(\theta^2 + 2,4\epsilon_1 \beta^2 \frac{h^2}{a^2} \right) \frac{\theta^2}{\delta} + 2,4\epsilon_1 (1-\theta^2) \frac{h^2}{a^2} + 1 - \theta^4 \right]; \\
 \sigma_x^- \left(\frac{0, h_0}{2} \right) &= \frac{3}{4} \frac{a^2}{h^2} \left(1 - (1 - 4\beta + 3\beta^2) \frac{\theta^2}{\delta} \right) q + \frac{1}{5} G^* q; \\
 \sigma_x^- \left(0, -\frac{h_0}{2} \right) &= \frac{3}{4} \frac{qa^2}{h^2} \left[(1 - 2\beta)(1 - \theta^2) - \frac{\beta\theta^2}{\delta} \right] - G^* q \left(\frac{1}{4\beta} f_2(\beta) + \frac{1}{5} \right).
 \end{aligned} \quad (18)$$

Розглянемо екстремальний випадок, коли тріщина розташована вздовж серединної поверхні плити ($\beta = 0,5$; $h_0 = h$), а крайові згинальні моменти $M_x^+(l)$, $M_x^-(l)$ та поздовжня сила $N_x^-(l)$, що діють на краях частин плити в області тріщини, виражаються через згинальний момент $M_x(l)$ суцільної плити наступним чином:

$$M_x^-(l) = M_x^+(l) = \frac{1}{8} M_x(l) + \frac{qh^2}{48} G^*; \quad N_x^-(l) = \frac{3}{4} \frac{M_x(l)}{h} - \frac{qh}{40} G^*. \quad (19)$$

Формули для максимальних нормальних напружень на зовнішніх та внутрішніх поверхнях частин плити, розділених тріщиною, мають вигляд:

$$\sigma_x(0, \pm h) = \pm \frac{3}{4} \frac{a^2}{h^2} (1 + \theta^2) q \pm \frac{1}{5} G^* q; \quad \sigma_x(0, \mp 0) = \mp \frac{3}{2} \frac{a^2}{h^2} \theta^2 q \mp \frac{1}{4} G^* q, \quad (20)$$

де $\theta = l/a$ – відносна довжина тріщини; верхній та нижній знаки у позначеннях \pm та \mp формулах (20) стосуються лицевих поверхонь відповідно нижньої та верхньої частин плити. Напруження $\sigma_x(0, \mp 0)$ діє на внутрішніх поверхнях частин плити, що знаходяться під (знак $-$) та над (знак $+$) тріщиною.

Максимальне переміщення серединної поверхні нижньої частини плити w_* ($\beta = 0,5$), із урахуванням поперечного обтиснення, можна записати в наступному вигляді

$$w_* = \frac{5qa^4}{24D} \left[1 + 3\theta^4 - 0,3A'(1 - \theta^2) \frac{h^2}{a^2} + 2,4\epsilon_1 (1 - 0,25A'h^2/a^2) \frac{h^2}{a^2} \right] - \frac{\alpha_0 qh\tilde{B}}{16E'}, \quad (21)$$

$$\text{де } \alpha_0 = 0,5 - \frac{\nu^* \nu''}{1 - \nu}, \quad \tilde{B} = 5,125 - \frac{\nu''}{16} \left(\frac{46E'}{G'} + \frac{\nu^* E'}{G} \right) (1 - \nu - 2\nu^* \nu'').$$

У формулі (21) члени з множниками h^2/a^2 та α_0 є поправками до класичної теорії тонких пластинок, що враховують деформації поперечного зсуву та обтиснення. Поклавши їх рівними нулю, одержимо найпростішу наближену формулу для визначення вертикальних переміщень тонкої пластини, що має тріщину у своїй серединній поверхні

$$w_* = \frac{5qa^4}{24D} (1 + 3\theta^4). \quad (22)$$

Якщо ж у ній поміняти циліндричну жорсткість D на величину EI , то одержимо формулу для вертикального переміщення балки сталого перерізу із тріщиною вздовж середньої лінії.

Числове моделювання задачі. Дуальний метод граничних елементів. Для підтвердження достовірності одержаних розв'язків було проведено числове моделювання розглядуваної задачі. У роботі використано дуальний метод граничних

елементів [7] плоскої задачі теорії пружності. При моделюванні тріщин за допомогою класичного формулювання методу граничних елементів (МГЕ) виникає відома проблема виродження інтегральних рівнянь для переміщень у сенсі їхньої невизначеності стосовно навантажень на берегах тріщини [7]. Тому було розвинуто дуальний метод граничних елементів [7], в якому виходячи з тотожності Сомільяни будується система $2n$ -рівнянь: n рівнянь, як і в класичному МГЕ, для переміщень, і ще n рівнянь для напружень, отриманих диференціюванням тотожності Сомільяни. Тобто, для задач теорії тріщин інтегральні рівняння дуального МГЕ мають вигляд [7]

а) для точки колокації "у", що лежить на гладкій поверхні Γ тіла –

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i(y) = & \int U_{ij}(x,y)t_j(x)d\Gamma(x) - \int T_{ij}(x,y)u_j(x)d\Gamma(x) + \\ & + \int_c^+ U_{ij}(x,y)\Sigma t_j(x)d\Gamma(x) - \int_c^+ T_{ij}(x,y)\Delta u_j(x)d\Gamma(x); \end{aligned} \quad (23)$$

б) для точки колокації "у", що лежить на гладкій поверхні Γ_c^+ тріщини:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Sigma u_i(y) = & \int U_{ij}(x,y)t_j(x)d\Gamma(x) - \int T_{ij}(x,y)u_j(x)d\Gamma(x) + \\ & + \int_c^+ U_{ij}(x,y)\Sigma t_j(x)d\Gamma(x) - \int_c^+ T_{ij}(x,y)\Delta u_j(x)d\Gamma(x); \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta t_i(y) = & \int D_{ijk}(x,y)n_j^+(y)t_k(x)d\Gamma(x) - \int S_{ijk}(x,y)n_j^+(y)u_k(x)d\Gamma(x) + \\ & + \int_c^+ D_{ijk}(x,y)n_j^+(y)\Sigma t_k(x)d\Gamma(x) - \int_c^+ S_{ijk}(x,y)n_j^+(y)\Delta u_k(x)d\Gamma(x). \end{aligned}$$

Тут x – довільна точка поверхні; U_{ij} , T_{ij} , D_{ijk} , S_{ijk} – ядра інтегральних рівнянь для плоскої задачі теорії пружності, розгорнуту форму яких можна знайти у [7]; u_i , t_i – компоненти векторів переміщень та напружень; $\Delta u_i = u_i^+ - u_i^-$, $\Delta t_i = t_i^+ - t_i^-$, $\Sigma u_i = u_i^+ + u_i^-$, $\Sigma t_i = t_i^+ + t_i^-$; n_j^+ – компоненти вектора нормалі до поверхні Γ_c^+ ; знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь Γ_c^+ та Γ_c^- , утворених розрізом Γ_c . Індекси у позначеннях відповідають проекціям векторів на осі глобальної системи координат Ox_1x_2 . У формулах прийняте правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Ядра інтегральних рівнянь для плоскої задачі теорії пружності при $x \rightarrow y$ мають такі особливості:

$$U_{ij}(x,y) \sim \ln|x-y|, \quad T_{ij}(x,y), \quad D_{ijk}(x,y) \sim 1/|x-y|, \quad S_{ijk}(x,y) \sim (1/|x-y|)^2.$$

При моделюванні закритих тріщин рівняння (23) необхідно модифікувати із використанням додаткових умов рівності нулю розривів нормальних переміщень та зсувних контактних напружень на математичному розрізі Γ_c у наступному вигляді:

$$\Delta u_n(y) = \Omega_{1j}(y)\Delta u_j(y) \equiv 0, \quad \tau = \Omega_{2j}(y)\Delta t_j(y) \equiv 0, \quad \Sigma t_i(y) \equiv 0 \quad \text{для } y = \Gamma_c. \quad (25)$$

Тут компоненти тензора повороту Ω векторів дорівнюють:

$$\Omega_{11}(y) = n_1(y), \quad \Omega_{12}(y) = n_2(y), \quad \Omega_{21}(y) = -n_2(y), \quad \Omega_{22}(y) = n_1(y). \quad (26)$$

Таким чином, рівняння (21) на математичному розрізі Γ_c потрібно розв'язувати відносно невідомих розривів $\Delta u_i = \Omega_{2j}(y)\Delta u_j(y)$ дотичних переміщень та нормальних контактних напружень – $p_n = -1/2 \Omega_{1j}(y)\Delta t_j(y)$. Виходячи з цього

сформовано таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Sigma u_i(y) &= \Omega_{2i}(y) \left[\int_{\Gamma} U_{ij} t_j d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij} u_j d\Gamma - \int_{\Gamma_c} T_{ij} \Omega_{2j} \Delta u_i d\Gamma \right], \\ p_n(y) &= -n_i^+(y) n_j^+(y) \left[\int_{\Gamma} D_{ijk} t_k d\Gamma + \int_{\Gamma} S_{ijk} u_k d\Gamma + \int_{\Gamma_c} S_{ijk} \Omega_{2j} \Delta u_i d\Gamma \right], \\ 0 &= \Omega_{2i}(y) n_j^+(y) \left[\int_{\Gamma} D_{ijk} t_k d\Gamma + \int_{\Gamma} S_{ijk} u_k d\Gamma + \int_{\Gamma_c} S_{ijk} \Omega_{2j} \Delta u_i d\Gamma \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Схема числового розв'язування інтегральних рівнянь (23), (27) за допомогою дуального МГЕ є наступною. Для обчислення криволінійних інтегралів лінії Γ , Γ_c розбиваються на частини, які апроксимують прямолінійними відрізками Γ_q (граничними елементами), а рівняння (23) – (28) записуються як суми інтегралів уздовж граничних елементів Γ_q . На кожному з відрізків Γ_q задають n вузлових точок $x^{q,p}$ ($p = \overline{1, n}$). Для розв'язування задач теорії тріщин, як правило, використовуються розривні граничні елементи [7], тобто такі, в яких жодна з вузлових точок не збігається із крайніми точками граничного елемента.

Зокрема, часто використовуються прямолінійні квадратичні граничні елементи, для яких три вузлові точки розміщуються так: одна в центрі, а дві інші на відстані $1/3$ довжини елемента по обидва боки від центральної. Це дає можливість моделювати негладкі поверхні, оскільки точка колокації ніколи не потраплятиме у кутову точку, чи у місце розгалуження розрізу Γ_c (тріщини). Крайові функції t_i , u_i , p_n , Δu_i інтерполюють на елементі Γ_q за їхніми вузловими значеннями

$$[\tilde{t}_i, \tilde{u}_i, \tilde{p}_n, \Delta \tilde{u}_i](\xi) = \sum_{p=1}^n [t_i^{q,p}, u_i^{q,p}, p_n^{q,p}, \Delta u_i^{q,p}] \phi^p(\xi); \quad \tilde{u}_i(\xi) = \sum_{p=1}^n u_i^{q,p} \phi^p(\xi),$$

де ξ – параметр розташування точки на елементі, означений на проміжку $-1 \leq \xi \leq 1$ так: $d\Gamma_q = L_q/2 d\xi = J_q d\xi$, J_q – модуль якобіана заміни змінних на елементі Γ_q . Для прямолінійного розривного квадратичного елемента $n = 3$, а вузлам $x^{q,p}$ відповідають значення параметра $\xi = \{-2/3; 0; 2/3\}$. Тому інтерполяційні поліноми $\phi^p(\xi)$ означені виразами [7].

Таким чином, система сингулярних інтегральних рівнянь зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно шуканих вузлових значень крайових функцій. Одержані розв'язки системи інтегральних рівнянь використані для підрахунку напружень σ_x/q та переміщень $\tilde{w} = w_x E / (2qh)$.

Числові результати. Аналіз числових результатів плоскої задачі теорії пружності та формул (18) для напружень σ_x дозволяє зробити висновок, що ріст тріщини в плиті веде до зростання напружень у частинах плити відповідно формули (20) за законом квадратної параболи, а відповідно для плоскої задачі теорії пружності за законом близьким до закону гіперболи. Тобто, у другому випадку зростання напруження σ_x по всій довжині відбувається значно повільніше, ніж за формулою (20) і різко зростає при значенні параметра θ близькому до 1. Тому, опираючись на попередні висновки плоскої задачі теорії пружності, формули (20) доцільніше модифікувати, замінивши в них параметр θ^2 на параметр θ^4 і записати у наступному вигляді:

$$\sigma_x(0, \pm h) = \pm \frac{3}{4} \frac{a^2}{h^2} (1 + \theta^4) q \pm \frac{1}{5} G^* q; \quad \sigma_x(0, \mp 0) = \mp \frac{3}{2} \frac{a^2}{h^2} \theta^4 q \mp \frac{1}{4} G^* q. \quad (28)$$

На підтвердження доцільності такої модифікації пораховано значення напружень σ_x / q на лицевій поверхні нижньої частини плити за формулами (20) та формулами (28), що виокремлені жирним шрифтом (для $\theta = 0$ і $\theta = 1$ вони співпадають) та дуального МГЕ (у дужках), наведені в табл.1

Таблиця 1

Значення напружень у транстропній плиті

$\frac{a}{h}$	σ_x / q (деревина)		
	$\theta = 0$	$\theta = 0,5$	$\theta = 1$
5	21,52 (21,23)	22,69 (22,80)	40,27 (38,72)
10	77,77 (77,79)	82,46 (84,64)	152,8 (152,3)
20	302,8 (304,3)	321,52 (331,4)	602,8 (605,9)

Величина контактної тиску на береги тріщини, що визначався за допомогою напруження σ_x , співпадала із відповідними числовими результатами плоскої задачі теорії пружності по всій довжині тріщини, за виключенням малої області контакту в околі кінців тріщини.

Графіки зміни напружень σ_x / q за поперечною координатою $z/2h$ для параметрів $\theta = 0,5$ і $\theta = 1,0$, при $a/h = 10$, за модифікованими формулами (28) – суцільні лінії та дуальним МГЕ плоскої задачі теорії пружності – штрихові лінії, наведені на рис. 2. Штрих-пунктирними лініями зображено відповідні графіки для балки без тріщини. На рис. 2 дані дуального МГЕ плоскої задачі теорії пружності наведені в дужках.

Аналіз табличних та графічних даних для напружень, наведених у табл. 1 і на рис. 2 для ізотропного матеріалу та транстропного (деревина) показує, що формули прикладної теорії плит середньої товщини є достатньо точними (похибка для максимальних напружень, у порівнянні з числовими даними плоскої задачі теорії пружності, не перевищує 2,5 %) та зручними для виконання числових підрахунків. Аналіз формул (18) – (22) показує, що зі збільшенням довжини тріщини напруження та переміщення у плиті будуть зростати до значень, які можуть виникати у двох окремих плитах, покладених одна на одну без тертя. Тоді напруження в них стануть, приблизно, удвічі, а переміщення учетверо, більшими. Поправки від урахування деформацій поперечного зсуву та обтиснення для напружень є незначними у випадку ізотропного матеріалу. Разом з тим, для транстропних матеріалів (склопластики, дерево та інш.) ці поправки вже можуть бути істотними.

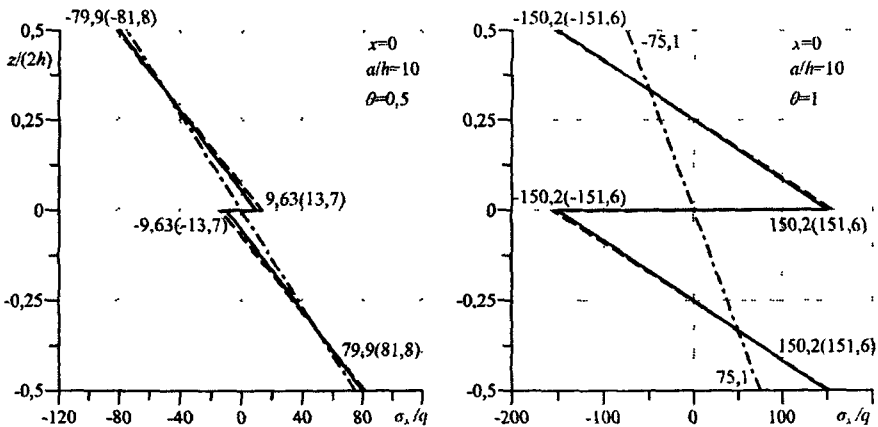


Рис. 2. Графіки зміни напружень σ_x / q за поперечною координатою $z/2h$

Наприклад, для деревини ($E/G' = E/E' = 20$; $\nu'' = \nu = 0,3$), коли $a/h = 5$; $\theta = 0,5$, похибки класичної теорії для першої та другої формул уже будуть досягати

12 % та 37 % відповідно. Набагато більшими згадані похибки будуть при визначенні максимальних вертикальних переміщень $w = w_n$. Порівняльна таблиця для переміщень $\tilde{w} = w_n E / (2qh)$ наведена нижче (табл. 2).

Дані в табл. 2, що стосуються переміщень, порахованих за спрощеною формулою (22) для товщин $a/h = 5; 10$ без урахування деформацій поперечного зсуву та обтиснення розміщені в останній колонці. Для транстропних матеріалів (деревина) результати класичної теорії залишаються такими ж, як і для ізотропних. Дані, що пораховані за допомогою дуального МГЕ, знаходяться у колонках із позначеннями (н.з.). Закономірності найбільших відхилень результатів для переміщень \tilde{w} , одержаних за допомогою прикладних теорій плит, подібні до тих, які виявлені і при визначенні напружень. Тобто, реальний характер зростання переміщень у плиті при збільшенні довжини тріщини є значно повільнішим, ніж це описується формулами прикладних теорій плит. Особливо це стосується області зміни параметра $0,5 \leq \theta \leq 0,9$.

Таблиця 2

Значення вертикальних переміщень для плити із дерева

$\frac{a}{h}$	$\tilde{w} = w_n E / (2qh)$ (деревина)						
	$\theta = 0$ (н.з.)	$\theta = 0$ (ф.-ла 21)	$\theta = 0,5$ (н.з.)	$\theta = 0,5$ (ф.-ла 21)	$\theta = 1$ (н.з.)	$\theta = 1$ (ф.-ла 21)	$\theta = 1$ (кл.)
5	194,3	184,3	202,0	200,8	464,0	451,9	355,5
10	1828	1805	1915	2072	6158	6076	5688
20	$24,31 \cdot 10^3$	$24,28 \cdot 10^3$	$25,42 \cdot 10^3$	$28,56 \cdot 10^3$	$92,68 \cdot 10^3$	$92,56 \cdot 10^3$	$91,0 \cdot 10^3$

Висновки. Отримані зручні для інженерного використання аналітичні залежності для обчислення напружень та переміщень у транверсально-ізотропних (ізотропних) пластинах, пошкоджених горизонтальною тріщиною. Ці результати дозволяють прогнозувати, із достатньою практичною точністю, міцність та жорсткість пластин за геометричними параметрами тріщини в пластині, а також різними фізичними характеристиками матеріалу, його поперечної анізотропії.

Бібліографічні посилання

1. Гнуни В. Ц. Об устойчивости пластинок, ослабленных трещиной / В. Ц. Гнуни, Т. А. Егиазарян // Оптимальное управление устойчивости и прочности механических систем. – Ереван, 2002. – С. 37–41.
2. Марчук М. В. Змішана схема методу скінченних елементів для розрахунку шаруватих композитних оболонок і пластин / М. В. Марчук, М. М. Хом'як. – Львів, 2003. – 216 с.
3. Моссаковский В. И. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций / В. И. Моссаковский, В. С. Гудрамович, Е. М. Макеев. – К., 1988. – 288 с.
4. Серенсен С.В. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами / С. В. Серенсен, Г. П. Зайцев. – К., 1982. – 296 с.
5. Черепанов Г.П. Механика разрушения композитных материалов / Г.П. Черепанов. – М., 1983. – 296 с.
6. Швабюк В.И. Об одном варианте обобщенной теории трансверсально изотропных плит / В.И. Швабюк // Прикл. механика. – 1974. – Вып. 10, № 11. – С. 8–92.
7. Portela A. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems / A. Portela, M.H. Aliabadi, D.P. Rooke // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1992. – V. 33. – P. 1269–1287.

Надійшла до редколегії 12.04.11

УДК 539.3

В. П. Шевченко, К. М. Довбня, І. В. Гур'єва
Донецький національний університет

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНИХ ОБОЛОНОК З ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ЗМІЦНЕННЯ МАТЕРІАЛУ

Наведено огляд робіт по застосуванню методу граничних інтегральних рівнянь при дослідженні оболонок з тріщинами, виготовлених з ідеально пружно-пластичного матеріалу та матеріалів зі зміцненням.

Ключові слова: оболонка довільної кривини, δ_c -модель, матеріали зі зміцненням, тріщина

Приведен обзор работ по применению метода граничных интегральных уравнений при исследовании оболочек с трещинами, изготовленных из идеально упруго-пластических материалов с упрочнением.

Ключевые слова: оболочка произвольной кривизны, δ_c -модель, материалы с упрочнением, трещина

The review of studies on the application of boundary integral equation method in the study of shells with cracks made of an perfect elastic-plastic material with hardening is given.

Key words: shell of arbitrary curvature, δ_c -model, materials with hardening, crack

Вступ. У тонких оболонках при плоскому напруженому стані пластична течія у вершині тріщини нормального відриву реалізується зоною послаблених зв'язків у вигляді тонкого шару, що поширюється за всією товщиною оболонки. Подібна конфігурація пластичних зон дозволяє використовувати одну з найбільш ефективних моделей нелінійної механіки руйнування – модель Леонова-Панасюка-Дагдейла (δ_c -модель) [1; 16].

Ця модель використовується в якості ефективної розрахункової схеми при аналізі локалізації пластичних деформацій у вершині тріщини нормального відриву, розкритті тріщини та аналізі напруженого стану в ідеально пружно-пластичному тілі в умовах плоского напруженого стану в усіх випадках, коли пластична зона являє собою вузький відрізок, що подовжує тріщину.

Відповідно до розглянутої сильно локалізованої у вершині тріщини зони текучості, аналог δ_c -моделі для оболонок ґрунтується на наступних припущеннях:

- а) напруження в зонах пластичних деформацій досягли межі текучості σ_c ;
- б) всюди окрім цих зон залежність між деформаціями та напруженнями підпорядковується закону Гука;
- в) взаємодія між поверхнями тріщини відсутня;
- г) на береги пластичної області діє напруження σ_c , що стягує береги.

Далі зона пластичних деформацій замінюється математичним розрізом, на берегах якого прикладені додаткові самозрівноважені зусилля і моменти, еквівалентні реакції матеріалу пластичної зони на пружний об'єм. А замість реальної тріщини відомої довжини вводиться нова фіктивна тріщина невідомої довжини.

Модель Леонова-Панасюка-Дагдейла, безсумнівно, стала основою більшості робіт по дослідженню пружно-пластичних оболонок з тріщинами. У роботах К. М. Довбні та О. А. Корохіної з використанням аналогу δ_c -моделі було проведено дослідження тонких пологих ізотропних оболонок довільної кривини з наскрізною або ненаскрізною тріщиною та системою з двох колінеарних наскрізних тріщин [5; 14]. Також у роботах К. М. Довбні та М. М. Гордієнко розглянуто ортотропні оболонки з тріщинами будь-якого типу та системами з двох тріщин [4; 9; 11]. Слід зазначити, що ці дослідження було проведено на основі теорії пологих оболонок

для ідеально пружно-пластичних матеріалів коли розподіл напружень по всій довжині пластичної зони є рівномірним і дорівнює межі пластичності σ_c .

У реальних матеріалах розподіл напружень біля вершини тріщини більш складний. Це може бути зумовлено особливостями геометрії тріщини, рівнем навантаження або бути наслідком деформування матеріалу за межу пластичності, що характерно для матеріалів зі зміцненням.

Зміцнення – явище підвищення межі текучості в результаті попереднього пластичного деформування. При пружно-пластичному деформуванні полікристалічних матеріалів у них відбуваються структурні перетворення. Оскільки полікристал – це система з безлічі випадково орієнтованих зерен, кожне з яких насичене різноманітними структурними дефектами, то при їх пластичному деформуванні локальні внутрішньозеренні зрушення супроводжуються виникненням пружних взаємодій у суміжних ділянках зерна, де енергетичні бар'єри ще не подолані. Ці пружні сили призводять до зростання опору пластичним зрушенням, причому після зняття з тіла навантаження вони зберігаються в зернах, врівноважуючись силами сухого тертя, оскільки самостійно вони не можуть їх подолати [12].

З позиції теорії дислокацій пружно-пластичне деформування розглядається як процес переміщення дислокацій та підвищення їх щільності. При цьому опір кристалічних матеріалів деформуванню визначається рухливістю та щільністю дислокацій.

Деякі із зазначених причин (дроблення зерен, зміна щільності і рухливості дислокацій) призводять до ізотропного зміцнення, тобто до приблизно однакового в різних напрямках підвищення опору деформуванню.

На кривій деформування (рис. 1) це явище відповідає ділянці CD , коли від точки B до точки C матеріал тече, тобто деформації швидко зростають при постійному напруженні σ_c . Після проходження точки C деформації зростають зі зростанням напружень, тобто відбувається зміцнення матеріалу. А вже при подальшому збільшенні напружень (за точку D) відбувається розрив зразка.

Задачі з більш складним розподілом напружень у пластичній зоні досліджувалися значно менше. Так, наприклад, у роботах Г. В. Галатенко [2; 3] розглянуто лінійний та нелінійний розподіл напружень в зоні передруйнування при дослідженні руйнування полімерів. У роботі А. О. Камінського [13] запропонована аналогічна модель з лінійним розподілом напружень у пластичній зоні для дослідження руйнування пружно-пластичної пластини зі зміцненням. В. А. Осадчук у [17] запропонував узагальнений аналог δ_c -моделі, де зусилля змінюються за квадратичним, моменти за кубічним, а серединна лінія – за лінійним законом (у попередніх роботах вона вважалася сталою).

Для врахування явища зміцнення матеріалу тонких пологих оболонок з тріщинами в роботах А. О. Камінського [13] та Р. М. Кушніра [15], пропонують в умовах пластичності σ_c замінити на середнє арифметичне між границею пластичності та границею міцності матеріалу σ_b . Узагальнюючи аналог моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла на клас матеріалів зі зміцненням, вимагатимемо, щоб невідомі нормальне зусилля та згинальний момент були розподілені за лінійним законом:

$$T(s) = Pb(s), \quad M(s) = Hb(s), \quad (1)$$

де P та H – невідомі сталі, які задовольняють заданій умові пластичності, s – координата, вздовж якої розташована тріщина. Розподіл $b(s)$ враховує зміну напружень з σ_b до σ_c по всій довжині пластичної зони зі зростанням реальної тріщини (рис. 2).

Тобто, при просуванні реальної тріщини l_0 , кінець її пластичної зони пересувається у нове положення, а утворення поверхонь тріщини (руйнування) можна розглядати як поступовий перехід точок пластичної зони з менш напруженого стану в

область напружень близьких до межі міцності σ_B . Коли у точці $x = l_0$ напруження досягнуть σ_B , відбудеться остаточний розрив зв'язків, тобто руйнування.

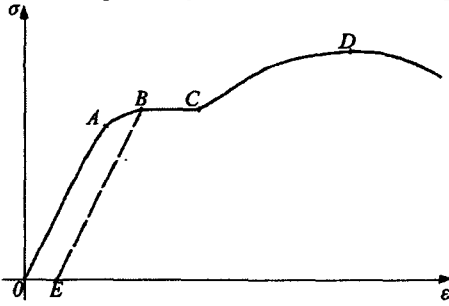


Рис. 1. Крива деформування

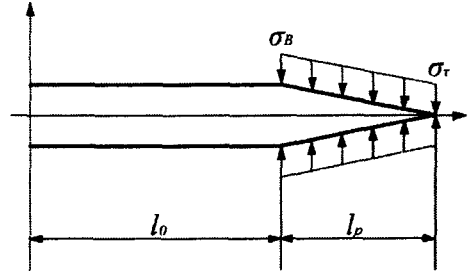


Рис. 2. Розподіл $b(s)$

Отже, у загальному випадку для пластичної зони $(s_1; s_2)$ лінійний розподіл $b(s)$ має вигляд

$$\frac{b(ls) - \sigma_B}{\sigma_T - \sigma_B} = \frac{|ls| - s_1}{s_2 - s_1},$$

або

$$b(ls) = (1 - m^*) \frac{|ls| - s_1}{s_2 - s_1} + m^*, \tag{2}$$

де $m^* = \sigma_B / \sigma_T$ – параметр, що характеризує зміцнення матеріалу.

Зазначимо, що у випадку ненаскрізної тріщини, коли на подовжені тріщини вглибину до зовнішньої та внутрішньої поверхонь оболонки діють постійні напруження $\bar{\sigma} = (\sigma_T + \sigma_B) / 2$, у формулі (2) для $b(s)$ замість σ_B треба покласти $\bar{\sigma}$.

Для оболонки довільної кривини виготовлених з матеріалу зі зміцненням у роботах К. М. Довбні, В. В. Яртемик та І. В. Гур'євої [6; 10] було розглянуто лінійний розподіл зусиль та моментів на подовжені наскрізної та поверхневої тріщини. Розглядалася задача про напружений стан пологої пружно-пластичної оболонки довільної кривини сталої товщини h виготовленої з матеріалу зі зміцненням. В оболонці міститься тріщина відриву $|s| \leq l_0$, розташована вздовж однієї з ліній головних кривин. Оболонка та береги тріщини завантажені лише симетричними відносно лінії тріщини зусиллями та моментами. Під час деформації береги тріщин між собою не контактують та її вершини знаходяться в однакових умовах. Середина поверхня оболонки віднесена до декартової системи координат.

Відстань від границі тріщини до внутрішньої та зовнішньої поверхонь оболонки складає d_1 та d_2 відповідно, отже глибина тріщини дорівнює $D = h - d_1 - d_2$ (рис. 3).

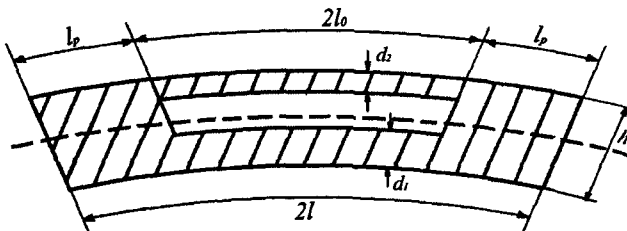


Рис. 3. Розміри тріщини

Розміри тріщини, рівень зовнішнього навантаження та властивості матеріалу вважаємо такими, що в околі тріщини вузькими смугами по всій товщині оболонки виникають пластичні деформації. На подовжені тріщини вглибину до зовнішньої та внутрішньої поверхонь оболонки, тобто в області

$$s \in (-l_0, l_0), \quad \gamma \in \left[-\frac{h}{2}; -\frac{h}{2} + d_1 \right] \cup \left[\frac{h}{2} - d_2; \frac{h}{2} \right]$$

діють постійні напруження $\tilde{\sigma}$. На подовжені тріщини по довжині, тобто у пластичних зонах $l_0 \leq |s| \leq l_0 + l_p$, діють лінійно розподілені напруження (1).

Математична модель задач для оболонок з тріщинами. Використовуємо аналог δ_c -моделі, узагальнений на матеріали зі зміцненням, який дозволить звести тривимірну задачу про тріщину заданої довжини до двовимірної задачі про наскрізну тріщину невідомої довжини, до берегів якої прикладені додаткові зусилля і момент. Отже, пластичні зони довжиною l_p замінюємо математичними розрізами серединної поверхні оболонки та замість реальної тріщини відомої довжини $2l_0$ отримуємо «фіктивну» тріщину невідомої довжини $2l = 2(l_0 + l_p)$, на берегах якої виконуються наступні граничні умови:

$$T_k(s) = \begin{cases} Pb(s) - T_k^*, & l_0 \leq |s| \leq l \\ T^i - T_k^*, & |s| \leq l_0 \end{cases}, \quad M_k(s) = \begin{cases} Hb(s) - M_k^*, & l_0 \leq |s| \leq l \\ M^i - M_k^*, & |s| \leq l_0 \end{cases} \quad (3)$$

де $T^i = \tilde{\sigma}(d_1 + d_2)$ та $M^i = \frac{\tilde{\sigma}}{2} d_1(d_1 - d_2)(d_1 + d_2 - h)$ – зусилля й момент, що діють у прошарку матеріалу над та під фронтом тріщини, T_k^* та M_k^* – характеристики зовнішнього навантаження. Якщо $k = 1$, то тріщина розташована вздовж осі y , якщо ж $k = 2$, то вздовж осі x .

У випадку коли $d_1 \neq 0$ та $d_2 \neq 0$ тріщина вважається внутрішньою, коли $d_1 = 0$ або $d_2 = 0$ – поверхневою. Якщо ж $d_1 = d_2 = 0$, то тріщина наскрізна.

Далі задача розв'язується у пружній постановці.

У роботах донецької школи механіків [7–9; 20–24] розроблено методику дослідження напружено-деформованого стану оболонок довільної гаусової кривини з концентраторами напружень. Методика базується на застосуванні двовимірною інтегрального перетворення Фур'є та його аналітичного обернення з введенням нових неklasичних спеціальних функцій

$$G_{n,v}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{v-n} K_{v+n}(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(v+k)}{(n-k)!} \left(\frac{2}{z}\right)^{2k},$$

фундаментальних рішень рівнянь статички пологих оболонок та інтегральних представлень переміщень, зусиль та моментів [18; 19; 22], отриманих В. П. Шевченко.

Подальше розв'язання задачі зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) типу Коші [24] з граничними умовами (3)

$$\sum_{j=1,3}^i \int_{-1}^1 K_{ij}(x-s) \psi_j(s) ds = -\pi \Phi_i(x), \quad i = 1, 3. \quad (4)$$

де $\Phi_1(x) = T_1(x)$, $\Phi_2(x) = c^2 R_2 M_2(x)$. У цій же роботі наведено вигляд ядер та невідомих функцій системи.

Граничні умови зумовлюють те, що праві частини системи (4) є розривними функціями. Невідомі функції дорівнюють нулю на кінцях проміжку інтегрування. Для чисельного розв'язання задачі вводимо новий вигляд невідомих функцій

$$\psi_j(s) = g_j(s) + h_j(s), \quad (5)$$

де $h_j(s)$ – розв'язок аналогічної задачі для пластини.

Після відповідних перетворень маємо нову систему СІР типу Коші з неперервними правими частинами відносно невідомих функцій $g_j(s), t, m$. До системи застосовуємо метод механічних квадратур, звідки отримуємо невироджену та сумісну систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомих функцій у вузлах інтерполяційного полінома. Для пошуку розміру пластичної зони використовуємо метод послідовних наближень, а для обчислення відносного розкриття тріщини будуємо інтерполяційний поліном з отриманих наборів значень функцій.

Було сформульовано та розв'язано задачу про напружений стан зміщеної ізотропної оболонки довільної кривини з системою двох колінеарних тріщин. Причому розглянуто два можливі випадки: коли перетинка між тріщинами знаходиться повністю у стані пластичної течії та коли між тріщинами залишається пружна ділянка.

Для двох колінеарних тріщин з пластичною перетинкою між ними лінійний закон розподілу зусиль та моментів у пластичних зонах також будується на основі формули (2). Для зовнішньої зони пластичності $s_1 = d + l_0, s_2 = l$ для внутрішньої: $s_1 = d - l_0, s_2 = 0$. Використання аналога δ_c -моделі дає можливість змоделювати дві тріщини відомої довжини як одну «фіктивну» тріщину невідомої довжини з наступними граничними умовами на берегах:

$$T_k(s) = \begin{cases} P b_{out}(s) - T_k^*, & d + l_0 \leq |s| \leq l \\ -T_k^*, & d - l_0 \leq |s| \leq d + l_0 \\ P b_{in}(s) - T_k^*, & |s| \leq d - l_0 \end{cases}, \quad M_k(s) = \begin{cases} H b_{out}(s) - M_k^*, & d + l_0 \leq |s| \leq l \\ -M_k^*, & d - l_0 \leq |s| \leq d + l_0 \\ H b_{in}(s) - M_k^*, & |s| \leq d - l_0 \end{cases}$$

де $2d$ – відстань між центрами реальних тріщин. Зазначимо, що у даному випадку розмір внутрішньої зони пластичності дорівнює половині довжини перетинки, отже $d = l_0 + l_{in}$. Для розв'язання цієї задачі використовується система СІР (4).

Коли між тріщинами залишається пружна ділянка, то у внутрішній зоні пластичності діють зусилля $T^{(2)}(s) = P_2 b_{in}(s)$ та момент $M^{(2)}(s) = H_2 b_{in}(s)$, а у зовнішній $T^{(1)}(s) = P_1 b_{out}(s)$ та $M^{(1)}(s) = H_1 b_{out}(s)$. Невідомі сталі P_k та H_k відповідають заданій умові пластичності Треска

$$\frac{P_k}{h\sigma_{\tau}} + \frac{6|H_k|}{h^2\sigma_{\tau}} = 1 \quad \text{або} \quad \left(\frac{P_k}{h\sigma_{\tau}}\right)^2 + \frac{4|H_k|}{h^2\sigma_{\tau}} = 1, \quad k = 1, 2.$$

Для зовнішньої $(-l; l_{out} - l)$ та внутрішньої $(l - l_{in}; l)$ пластичних зон маємо наступні лінійні закони розподілу напружень:

$$b_{out}(s) = (m^* - 1) \frac{|s| + l}{2l_{out}} + 1, \quad b_{in}(s) = (1 - m^*) \frac{|s| - l}{2l_{in}} + 1.$$

Отже, дві колінеарні тріщини з пластичними зонами різної довжини зводяться до двох однакових «фіктивних» тріщин невідомої довжини, на берегах кожної з яких виконуються умови:

$$T_k(s) = \begin{cases} P_1 b_{out}(s) - T_k^*, & -l < s < l - l_{out} \\ T^l - T_k^*, & -l + l_{out} < s < l - l_{in} \\ P_2 b_{in}(s) - T_k^*, & l - l_{in} < s < l \end{cases}, \quad M_k(s) = \begin{cases} H_1 b_{out}(s) - M_k^*, & -l < s < l - l_{out} \\ M^l - M_k^*, & -l + l_{out} < s < l - l_{in} \\ H_2 b_{in}(s) - M_k^*, & l - l_{in} < s < l \end{cases}.$$

Подальше розв'язання задачі зводиться до системи сингулярних інтегральних рівнянь типу Коші [9; 24]

$$\sum_{j=1,3}^i \int_{-1}^1 [K_{ij}(s-x) + K_{ij}(s+x-2\gamma_i)] \psi_j(s) ds = \pi \Phi_i(x), \quad i = 1, 3,$$

де $\gamma_i = d_i/l, d_1 = d + (l_{out} - l_{in})/2$ – відстань між центрами фіктивних тріщин.

Схема розв'язання задач про систему двох колінеарних тріщин аналогічна випадку однієї тріщини, описаному вище.

На підставі отриманих чисельних даних було досліджено вплив пружних та геометричних параметрів тріщин та оболонки на основні характеристики напруженого стану оболонки з будь-якою тріщиною. Аналіз результатів показав, що розмір пластичної зони та розкриття за фронтом тріщини в зміцнених оболонках будь-якої кривини менше, ніж в ідеально пружно-пластичних.

Розглянемо випадок однієї ненаскрізної (внутрішньої) тріщини в оболонці довільної кривини при урахуванні зміцнення матеріалу. Використання моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла дає можливість замість реальної тріщини довжини $2l_0$ розглянути «фіктивну» тріщину невідомої довжини $2l$ з граничними умовами (3), де

$$T' = \bar{\sigma}(d_1 + d_2), \quad M' = \frac{\bar{\sigma}}{2} d_1 (d_1 - d_2) (d_1 + d_2 - h),$$

$$b(s) = \frac{1 - m^* |s| - \tau^*}{2} + \frac{1 + m^*}{2} - \text{лінійний закон розподілу напружень у пластичних зонах внутрішньої тріщини; } \tau^* = l_0/l - \text{відносний розмір пластичної зони.}$$

Невідомі функції (5) поставленої задачі для ненаскрізної тріщини набудуть наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \psi_1(s) &= g_1(s) + h_1(s) = g_1(s) + ih_n(s) - t'h_s(s), \\ \psi_3(s) &= g_3(s) + h_3(s) = g_3(s) + mh_n(s) - m'h_s(s). \end{aligned}$$

Функції $h_1(s)$ та $h_3(s)$ є розв'язками аналогічної задачі про пластину, виготовлену зі зміцненого матеріалу, яка послаблена ненаскрізною тріщиною.

$$h_s(s) = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{\tau^* - s}{\tau^* + s} \cdot \frac{1 + s\tau^* + \sqrt{(1 - (\tau^*)^2)(1 - s^2)}}{1 - s\tau^* + \sqrt{(1 - (\tau^*)^2)(1 - s^2)}} \right|,$$

$$h_n(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{m^* - \tau^*}{1 - \tau^*} + 1 \right) h_s(s) + \frac{m^* - 1}{1 - \tau^*} \frac{s}{2\pi} \ln \left| \frac{1 - (s\tau^* + \sqrt{(1 - (\tau^*)^2)(1 - s^2)})^2}{(\tau^* - s)(\tau^* + s)} \right|,$$

$$t = \frac{P}{T_2^*}, \quad t' = \frac{T'}{T_2^*}, \quad m = \frac{c^2 R_2 H}{T_2^*}, \quad m' = \frac{c^2 R_2 M'}{T_2^*}.$$

Підставивши новий вигляд $\psi_1(s)$ та $\psi_3(s)$ до (4) після відповідних перетворень отримаємо систему СІР з неперервними правими частинами відносно невідомих $g_1(s), g_3(s), t$ та m :

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1,3} \int_{-1}^1 K_{1j}(x-s) g_j(s) ds + t \left[\int_{-1}^1 K_{11}'(x-s) h_n(s) ds + \pi \bar{a} \right] + m \int_{-1}^1 K_{13}(x-s) h_n(s) ds = \\ & = \pi + m' \int_{-1}^1 K_{13}(x-s) h_s(s) ds + t' \left[\int_{-1}^1 K_{11}'(x-s) h_s(s) ds - 2 \arcsin \tau^* \right] \\ & \sum_{j=1,3} \int_{-1}^1 K_{3j}(x-s) g_j(s) ds + t \int_{-1}^1 K_{31}(x-s) h_n(s) ds + m \left[\int_{-1}^1 K_{33}'(x-s) h_n(s) ds + \pi \bar{a} \right] = \\ & = t' \int_{-1}^1 K_{31}(x-s) h_s(s) ds + m' \left[\int_{-1}^1 K_{33}'(x-s) h_s(s) ds - 2 \arcsin \tau^* \right], \end{aligned} \right.$$

де $\bar{a} = (1 - m^*) \sqrt{(1 + \tau^*) / (1 - \tau^*)} + ((m^* - \tau^*) / (1 - \tau^*) + 1) \arccos \tau^*$.

Далі систему розв'язуємо методом механічних квадратур для функцій обмежених на кінцях проміжку інтегрування. Отримуємо систему $2n + 2$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно n невідомих вузлових значень функцій $g_1(y_k), g_3(y_k)$ та невідомих t, m . Розв'язавши систему методом Гауса обчислюємо відносне розкриття тріщини за формулою

$$\delta^*(x, \bar{\gamma}) = \frac{4n_0}{\tau^*} \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n \left(\varphi_1(y_k) \sqrt{1-y_k^2} + t h_n(y_k) - t' h_s(y_k) \pm \bar{\gamma} \sqrt{12(1-v^2)} \times \right. \\ \left. \times (\varphi_3(y_k) \sqrt{1-y_k^2} + m h_n(y_k) - m' h_s(y_k)) \right) \sum_{p=1}^n \sin(p \arccos y_k) \int_{-1}^x \sin(p \arccos s) ds,$$

де $\bar{\gamma}$ знаходиться у проміжку $\left[-\frac{1}{2} + \frac{d_1}{h}; \frac{1}{2} - \frac{d_2}{h} \right]$, $n_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_{\tau}}$.

Результати чисельного аналізу. Чисельні розрахунки проведемо для ненаскрізної (внутрішньої) тріщини глибини $D/h = 0,7$, тобто $d_1/h = 0,2$, $d_2/h = 0,1$, орієнтованої вздовж осі Ox . При цьому $\nu = 0,3$, $R_2/h = 50$. Криві 1–3 відповідають значенням $m^* = 1$ (ідеальний пружно-пластичний матеріал), $m^* = 1,5$ та $m^* = 2$ (зміцнений матеріал) відповідно.

На рис. 4–5 зображено залежність відносного розміру пластичної зони τ^* та розкриття тріщини $\delta^*(\tau^*, 1/2 - d_2/h)$ від відносного рівня зовнішнього навантаження n_0 для циліндричної оболонки. Довжина тріщини вважалася рівною $l_0/R_2 = 0,2$.

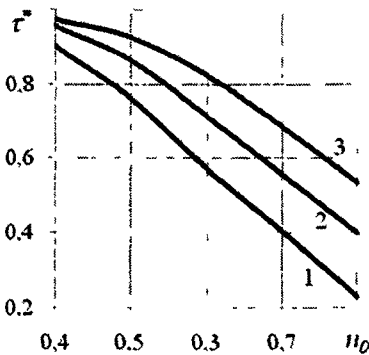


Рис. 4. Залежність відносного розміру пластичної зони τ^* від відносного рівня зовнішнього навантаження n_0 для циліндричної оболонки

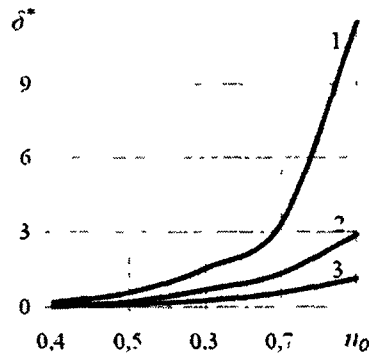


Рис. 5. Залежність розкриття тріщини $\delta^*(\tau^*, 1/2 - d_2/h)$ від відносного рівня зовнішнього навантаження n_0 для циліндричної оболонки

На рис. 6–7 приведена залежність τ^* та $\delta^*(\tau^*, 1/2 - d_2/h)$ від кривини оболонки λ . Довжина внутрішньої тріщини вважалася рівною $l_0/R_2 = 0,1$, а відносне навантаження складало $n_0 = 0,6$.

З рис. 4–7 виходить, що для внутрішньої тріщини збільшення відносного навантаження призводить до збільшення довжини пластичної зони та розкриття тріщини. У

розглянутих оболонках додатної, нульової та від'ємної кривини зі зміцненням пластична зона та розкриття тріщини менші ніж в ідеально пружно-пластичних матеріалах.

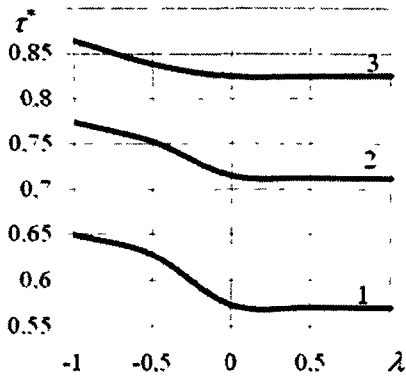


Рис. 6. Залежність відносного розміру пластичної зони τ^* від кривини оболонки λ

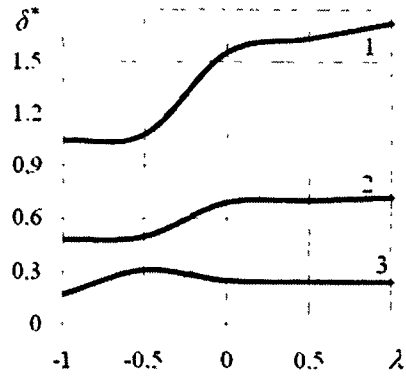


Рис. 7. Залежність розкриття тріщини δ^* ($\tau^* \cdot 1/2 - d_2/h$) від кривини оболонки λ

Бібліографічні посилання

1. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits// J. Mech. Phys. Solids. 1960. –V. 8. – №. 2. –P. 100-104.
2. Галатенко Г. В. О влиянии неравномерности распределения напряжений в немалой концевой зоне на рост трещин в вязкоупругих средах / Г. В. Галатенко // Прикладная механика. – 1983. –19, № 5.– С. 80–85.
3. Галатенко Г. В. О докритическом росте трещины в вязкоупругой среде с нелинейным распределением напряжений в концевой зоне трещины / Г. В. Галатенко, А. А. Каминский // Прикладная механика. – 1983. – 19. №12. – С. 80–86.
4. Гордієнко М. М. Напружено-деформований стан пружно-пластичної ортотропної оболонки довільної кривини з тріщинами: дис. на здоб. наук. ступ. канд. фіз.-мат. наук : 01.02.04 / Гордієнко Микола Миколайович; – Донецьк, 2009. – 149 арк.
5. Довбня Е. Н. Методика расчёта напряжённого состояния упруго-пластической оболочки произвольной кривизны в рамках δ -модели / Е. Н. Довбня, О. А. Корохина // Математическое моделирование в образовании, науке и промышленности. – Санкт-Петербург. – 2005.– С. 28–32.
6. Довбня Е. Н. Напряжённое состояние упруго-пластической изотропной оболочки с поверхностной трещиной с учетом упрочнения материала / Е. Н. Довбня, В. В. Яртемик, И. В. Гурьева // Труды ИПММ. – 2009. – Т.19. – С. 65-71
7. Довбня Е. Н. Система граничных интегральных уравнений для ортотропных оболочек положительной кривизны с разрезами и отверстиями / Е. Н. Довбня // Теоретическая и прикладная механика. – 1997. – Вып. 26. – С. 59–69
8. Довбня Е. Н. Система граничных интегральных уравнений для ортотропных оболочек нулевой и отрицательной кривизны, ослабленных разрезами и отверстиями / Е. Н. Довбня // Вісник Донецького національного університету. Сер. А.. – 1998. – Вып. 2. – С. 39–42
9. Довбня К. М. Взаємовплив двох наскрізних колінеарних тріщин в пружно-пластичній ортотропній оболонці / К. М. Довбня, М. М. Гордієнко // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2010. – Вип. 14. – С. 160-165
10. Довбня К. М. Напружений стан пружно-пластичної ізотропної оболонки з наскрізною тріщиною з урахуванням зміцнення матеріалу / К. М. Довбня, В. В. Яртемик, І. В. Гур'єва // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 4. – С. 127-131
11. Довбня К. М. Пружно-пластична ортотропна оболонка довільної кривини з двома тріщинами / К. М. Довбня, М. М. Гордієнко // Доповіді НАН України. – 2009. – №10. – С. 65–70
12. Кадашевич Ю. Л. Теория необратимого деформирования поликристаллов / Ю. Л. Кадашевич, В. В. Новожилов // Пластичность и разрушение твердых тел / под ред. Гольдштейна Р. В. – М., 1988. – С. 73–85

13. Каминский А. А. Исследование роста усталостных трещин в материалах с упрочнением / А. А. Каминский, Г. В. Галатенко // Прикладная механика. – 1984. – 20, №4. – С. 54–60.
14. Корохіна О. А. Напружено-деформований стан пружно-пластичної оболонки з тріщиною дис. на здоб. наук. ступ. канд. фіз.-мат. наук : 01.02.04 / Корохіна Ольга Андріївна; – Донецьк, 2005. – 213 арк.
15. Кушнір Р. М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р. М. Кушнір, М. М. Николишин, В. А. Осадчук. – Львів. – 2003. – С. 145–152
16. Леонов М. Я. Развитие мельчайших трещин в твердом теле / М. Я. Леонов, В. В. Панасюк // Прикладная механика. – 1959. – 5. №4. – С. 391–401.
17. Осадчук В. А. Предельное равновесие ослабленных трещинами оболочек из упрочняющегося материала / В. А. Осадчук, М. М. Николишин, А. Г. Шабо, Т. Е. Маселко // Прикладная механика. – 1991. – №2. – С. 67–72.
18. Хижняк В. К. Действие сосредоточенных сил на анизотропные оболочки / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко // Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1972. – №4. – С. 123–128.
19. Хижняк В. К. Напряженное состояние ортотропных оболочек, ослабленных трещинами / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко // Докл. 3-го нац. Конгр. «Теорет. И приложна механика» (Варна 1977). – София, 1977. – Кн. 1. – С. 604–609
20. Шевченко В. П. Дослідження похибки застосування теорії спеціальної ортотропії при розв'язанні задач для ортотропних оболонок з розрізами / В. П. Шевченко, Е. Н. Довбня // Фіз.-хім. Механіка матеріалів, 2001. – 37, №6. – С. 116–118
21. Шевченко В. П. Методи фундаментальних розв'язків у механіці тонкостінних конструкцій / В. П. Шевченко, А. С. Гольцев, К. М. Довбня // Фіз.-хім. механіка матеріалів, 2001, 37. – №3. – С. 21–28
22. Шевченко В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек / В. П. Шевченко // Механика композитов : в 12 т. – Т.7 / под ред. Гузя А. Н., Космодамианского А. С., Шевченко В. П. – К., 1998. – 387с. – С. 159–196.
23. Шевченко В. П. Ортотропная оболочка произвольной кривизны с криволинейными разрезами / В. П. Шевченко, Е. Н. Довбня // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А, 1997. – Вип. 1. – С. 89–97
24. Шевченко В. П. Ортотропные оболочки с трещинами (разрезами) / В. П. Шевченко, Е. Н. Довбня, В. А. Цванг // Механика композитов : в 12 т. – Т.7 / под ред. Гузя А. Н., Космодамианского А. С., Шевченко В. П. – К., 1998. – С. 212–249.

Надійшла до редколегії 07.06.11

УДК 539.3

А. Н. Шупиков, Н. В. Сметанкина, Е. В. Свет
Институт проблем машиностроения им А.Н. Подгорного НАН Украины

ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН НЕКАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Предлагается метод решения стационарной задачи термоупругости многослойных пластин неканонической формы в плане. Метод основан на приеме погружения сложной области в область канонической формы. Температурные воздействия получены в результате решения задачи теплопроводности. Исследованы температурные напряжения в пятислойной пластине при нагреве пленочным источником тепла.

Ключевые слова: многослойная пластина, неканоническая форма, метод погружения, термонапряженное состояние.

Пропонується метод розв'язання стаціонарної задачі термопружності багат шарових пластин неканонічної форми в плані. Метод базується на прийомі занурення складної області в область канонічної форми. Температурні впливи отримані в результаті розв'язання задачі теплопровідності. Досліджені температурні напруження у п'ятишаровій пластині при нагріванні плівковим джерелом тепла.

Ключові слова: багат шарова пластина, неканонічна форма, метод занурення, термонапружений стан.

A method of solving the stationary thermoelasticity problem for multilayer plates of non-canonical plan form is suggested. The method is based on immersion of complex area into a canonical shape area. Temperature loads are obtained as a result of solution of a heat conduction problem. Thermal stresses in a five-layer plate at heating by a film heat source are investigated.

Key words: multilayer plate, non-canonical form, immersion method, thermal stressed state.

Одной из актуальных задач в современной технике является достоверное определение температурных полей и напряжений в элементах конструкций. Обзор моделей и методов решения задач теплопроводности и термоупругости приведен в обзоре [2]. Как показывает анализ литературных источников, наиболее исследованы однородные конструкции.

Задача термоупругости в квазистатической постановке имеет большое практическое значение. Вследствие незначительности динамических эффектов при обычных нестационарных условиях теплообмена можно пренебречь связностью механической и тепловой энергии и решить задачу о температурных напряжениях в два этапа – сначала решить уравнение теплопроводности, а затем, по найденному распределению температуры, определить поле напряжений, используя уравнения термоупругости [11].

Для многослойных элементов конструкций задачи теплопроводности решаются с привлечением различного рода гипотез о распределении температуры по толщине пакета слоев. Например, в [1; 12] авторы применили гипотезу о кусочно-линейном распределении температуры по толщине многослойного пакета для исследования стационарных температурных полей в многослойных композитных оболочках и панелях прямоугольной формы в плане.

Если многослойный элемент конструкции имеет неканоническую форму в плане, для расчета в большинстве работ применяются численные методы: метод конечных разностей, методы конечных и граничных элементов [3; 6].

В то же время, применение аналитических методов связано с преодолением значительных математических трудностей при описании геометрических параметров многослойных тел неканонической конфигурации, условий сопряжения слоев с учетом внутренних источников тепла, наличием слоев с существенно различающимися свойствами. Поэтому чаще всего рассматриваются пластины и оболочки канонической формы. Так в [5; 7] исследованы напряжения в многослойных композитных прямоугольных шарнирно опертых пластинах при нагреве наружных по-

верхностей пластин. Таким образом, разработка эффективных методов, позволяющих представить решение задачи в аналитическом виде, остается актуальной задачей.

Ранее авторы [9] разработали метод решения задачи нестационарной теплопроводности многослойных пластин неканонической формы в плане при нагревании межслойными пленочными источниками тепла. Метод основан на методе погружения пластины неканонической формы в область простой формы, которая позволяет представить решение задачи в аналитическом виде. В настоящей статье на основе метода погружения разработан метод решения задачи термоупругости многослойных пластин неканонической формы при воздействии температурных полей, полученных в результате решения задачи теплопроводности.

Рассмотрим многослойную пластину, собранную из I слоев постоянной толщины h_i ($i = \overline{1, I}$) (рис. 1). Обозначим верхнюю и нижнюю поверхности пластины, межслойные поверхности и боковые поверхности слоев как $\Omega_t, \Omega_b, \Omega_i$ ($i = \overline{1, I-1}$) и Ω'_i ($i = \overline{1, I}$). Пластина отнесена к декартовой системе координат, которая связана с наружной поверхностью первого слоя и занимает на координатной плоскости область Ω^* , ограниченную контуром L ,

$$x_L = x(s), \quad y_L = y(s), \tag{1}$$

где s – текущая длина дуги. На верхней, нижней и боковых поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен. Пластина находится под действием межслойных источников тепла, которые занимают область Ω'_i ($i = \overline{1, I}$). На рис. 1 область, занимаемая i -м источником тепла, обозначена штриховой линией.

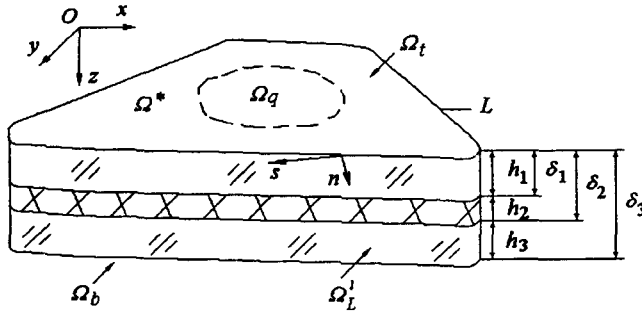


Рис. 1. Многослойная пластина

Уравнение нестационарной теплопроводности и граничные условия для многослойной пластины получаются из вариационного уравнения теплового баланса:

– уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \nu_i \Delta T^i + \frac{q^i}{c_i \rho_i}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad i = \overline{1, I}, \tag{2}$$

– граничные условия на внешних поверхностях

$$-k_1 \frac{\partial T^1}{\partial z} + H_1 (T^1 - T_a) = 0, (x, y, z) \in \Omega_t, \quad k_I \frac{\partial T^I}{\partial z} + H_I (T^I - T_b) = 0, (x, y, z) \in \Omega_b, \tag{3}$$

– границе контакта слоев

$$k_i \frac{\partial T^i}{\partial z} - k_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} + q^i_\Omega = 0, \quad T^i = T^{i+1}, \quad z = \delta_i, \quad \delta_i = \sum_{j=1}^i h_j, \quad i = \overline{1, I-1}, \tag{4}$$

– на боковой поверхности пластины

$$k_i \frac{\partial T^i}{\partial n} + H_L^i (T^i - T_L^i) = 0, (x, y, z) \in \Omega_L^i, i = \overline{1, I}. \quad (5)$$

В уравнениях (2) – (5) $T^i = T^i(x, y, z, \tau)$ – температура; k_i – коэффициент теплопроводности материала i -го слоя; ρ_i – плотность материала слоя; c_i – теплоемкость i -го слоя; $\nu_i = k_i / (\rho_i c_i)$ – коэффициент температуропроводности i -го слоя; H_L^i, H_i и H_b – коэффициенты конвективного теплообмена на боковой, верхней и нижней поверхностях пластины; T_L^i, T_i и T_b – температура среды на границе с боковой, верхней и нижней поверхностями; $q^i(x, y, z, \tau)$ – интенсивность i -го внутреннего источника тепла; $q_\Omega^i(x, y, \tau)$ – интенсивность i -го пленочного источника тепла, расположенного на границе контакта соседних слоев; Ω_q^i – область, занимаемая i -м пленочным источником тепла; δ_{ii} – символ Кронекера, τ – время; $n = n(x, y)$ – внешняя нормаль к боковой поверхности.

Распределение температуры в слоях и на боковой поверхности, а также плотность внутренних тепловых источников представляется в виде разложений по системе ортонормированных полиномов Лежандра [4].

Система уравнений (1) – (5) решается методом погружения [9, 10], который позволяет представить решение задачи в аналитическом виде. Полученные при решении задачи теплопроводности температурные поля используются при решении задачи термоупругости.

Рассмотрим многослойную пластину под действием силовых $P = \{p_j(x, y)\}$, $j = \overline{1, 2I+3}$, $(x, y) \in \Omega_p$, и тепловых нагрузок $Q_i = \{q_{Tj}(x, y)\}$, $j = \overline{1, 2I+3}$, $(x, y) \in \Omega_q$. Поведение пластины описывается в рамках уточненной теории первого порядка, учитывающей деформации поперечного сдвига в каждом слое пластины. Предполагается, что контакт между слоями исключает их расслаивание и взаимное проскальзывание. При этом перемещения точки i -го слоя определяются выражениями

$$u^i = u + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi'_x + (z - \delta_{i-1}) \psi'_x, \quad v^i = v + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi'_y + (z - \delta_{i-1}) \psi'_y, \quad w^i = w, \quad (6)$$

где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$ – перемещения точки координатной плоскости в направлении координатных осей; $\psi'_x = \psi'_x(x, y)$, $\psi'_y = \psi'_y(x, y)$ – углы поворота нормального элемента в i -м слое вокруг координатных осей.

Деформации слоев определяются согласно формулам Коши, а напряжения и деформации в i -м слое связаны законом Гука

$$\sigma'_x = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} (\epsilon'_x + \nu_i \epsilon'_y) - \frac{E_i}{1 - \nu_i} \alpha'_T T_i, \quad \sigma'_y = \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} (\epsilon'_y + \nu_i \epsilon'_x) - \frac{E_i}{1 - \nu_i} \alpha'_T T_i, \\ \tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)} \gamma'_{xy}, \quad \tau'_{xz} = \tau'_{zx} = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)} \gamma'_{xz}, \quad \tau'_{yz} = \tau'_{zy} = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)} \gamma'_{yz}, \quad i = \overline{1, I}, \quad (7)$$

где E_i – модуль Юнга материала i -го слоя; ν_i – коэффициент Пуассона; α'_i – коэффициент линейного температурного расширения материала i -го слоя; $T_i = T_i(x, y, z)$ – распределение температуры, полученное из решения задачи теплопроводности.

Принимая во внимание (7) и соотношения для усилий и моментов [8], запишем

$$\begin{aligned} \hat{N}'_x &= N'_x - N'_T, \quad \hat{N}'_y = N'_y - N'_T, \quad \hat{M}'_x = M'_x - M'_T, \quad \hat{M}'_y = M'_y - M'_T, \\ N'_x &= \alpha'_1 \left(u_x + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi'_{x,x} \right) + \frac{\beta'_1}{2} \psi'_{x,x} + \alpha'_2 \left(v_y + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi'_{y,y} \right) + \frac{\beta'_2}{2} \psi'_{y,y}, \\ N'_y &= \alpha'_1 \left(v_y + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi'_{y,y} \right) + \frac{\beta'_1}{2} \psi'_{y,y} + \alpha'_2 \left(u_x + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi'_{x,x} \right) + \frac{\beta'_2}{2} \psi'_{x,x}, \\ N'_{xy} &= N'_{yx} = \alpha'_3 \left[u_y + v_x + \sum_{j=1}^{i-1} h_j (\psi'_{x,y} + \psi'_{y,x}) \right] + \frac{\beta'_3}{2} (\psi'_{x,y} + \psi'_{y,x}), \\ M'_x &= \frac{\beta'_1}{2} \left(u_x + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi'_{x,x} \right) + \frac{\gamma'_1}{3} \psi'_{x,x} + \frac{\beta'_2}{2} \left(v_y + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi'_{y,y} \right) + \frac{\gamma'_2}{3} \psi'_{y,y}, \\ M'_y &= \frac{\beta'_1}{2} \left(v_y + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi'_{y,y} \right) + \frac{\gamma'_1}{3} \psi'_{y,y} + \frac{\beta'_2}{2} \left(u_x + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi'_{x,x} \right) + \frac{\gamma'_2}{3} \psi'_{x,x}, \\ M'_{xy} &= M'_{yx} = \frac{\beta'_3}{2} \left[u_y + v_x + \sum_{j=1}^{i-1} h_j (\psi'_{x,y} + \psi'_{y,x}) \right] + \frac{\gamma'_3}{2} (\psi'_{x,y} + \psi'_{y,x}), \\ Q'_x &= \alpha'_3 (w_x + \psi'_x), \quad Q'_y = \alpha'_3 (w_y + \psi'_y). \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\alpha'_1 = \frac{E_i h_i}{1 - \nu_i}$, $\alpha'_2 = \alpha'_1 \nu_i$, $\alpha'_3 = \alpha'_1 \frac{1 - \nu_i}{2}$, $\beta'_k = \alpha'_k h_i$, $\gamma'_k = \beta'_k h_i$, $k = 1, 2, 3$; N'_T

и M'_T – интегральные характеристики температурного поля,

$$N'_T = \frac{E_i \alpha'_i}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i dz, \quad M'_T = \frac{E_i \alpha'_i}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i (z - \delta_{i-1}) dz.$$

На основе вариационного принципа Лагранжа формируются уравнения равновесия многослойной пластины

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l (N'_{x,x} + N'_{y,y} - N'_{T,x}) + p_1 &= 0, \quad \sum_{i=1}^l (N'_{xy,x} + N'_{y,y} - N'_{T,y}) + p_2 = 0, \\ \sum_{i=1}^l (Q'_{x,x} + Q'_{y,y}) + p_3 &= 0, \\ h_i \sum_{j=i}^{l-1} (N'^{j+1}_{x,x} + N'^{j+1}_{y,y} - N'^{j+1}_{T,x}) + M'_{x,x} + M'_{y,y} - Q'_x - M'_{T,x} + p_{3+i} &= 0, \\ h_i \sum_{j=i}^{l-1} (N'^{j+1}_{xy,x} + N'^{j+1}_{y,y} - N'^{j+1}_{T,y}) + M'_{xy,x} + M'_{y,y} - Q'_y - M'_{T,y} + p_{3+i+1} &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

а также соответствующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \zeta_{11} N_n + \zeta_{12} u_n &= 0, \quad \zeta_{21} N_s + \zeta_{22} u_s = 0, \quad \zeta_{31} Q_n + \zeta_{32} w = 0, \\ \zeta_{3+i+1} M'_{nl} + \zeta_{3+i+2} \psi'_n &= 0, \quad \zeta_{3+i+1} M'_{sl} + \zeta_{3+i+2} \psi'_s = 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad x, y \in L, \end{aligned} \tag{10}$$

где u_n и u_s – перемещения точек контура координатной плоскости в направлении нормали и касательной к границе L , соответственно; ψ'_n и ψ'_s – углы поворота нормального элемента в i -м слое относительно касательной и нормали к границе L ;

$$u_n = un_x + vn_y, \quad u_s = -un_y + vn_x,$$

$$\psi'_n = \psi'_{x'}n_x + \psi'_{y'}n_y, \quad \psi'_s = -\psi'_{x'}n_y + \psi'_{y'}n_x, \quad i = \overline{1, I};$$

N_n – нормальное растягивающее усилие, N_s – касательное усилие, Q_n – поперечное усилие;

$$N_n = \sum_{i=1}^I (N'_n - N'_s) = 0, \quad N_s = \sum_{i=1}^I N'_s = 0, \quad Q_n = \sum_{i=1}^I Q'_n = 0,$$

$$M'_{nL} = M'_n - \left(h_i \sum_{j=1}^{i-1} N'^{j+1}_T + M'_T \right), \quad M'_{sT} = M'_s, \quad N_n = \sum_{i=1}^I N'_n, \quad N_s = \sum_{i=1}^I N'_s, \quad Q_n = \sum_{i=1}^I Q'_n,$$

$$N'_n = N'_x n_x^2 + N'_y n_y^2 + 2N'_{xy} n_x n_y, \quad N'_s = (N'_y - N'_x) n_x n_y + N'_{xy} (n_x^2 - n_y^2),$$

$$Q'_n = Q'_x n_x + Q'_y n_y, \quad i = \overline{1, I};$$

M'_n – нормальный изгибающий момент, M'_s – крутящий момент в i -м слое;

$$M'_n = M'_x n_x^2 + M'_y n_y^2 + 2M'_{xy} n_x n_y + h_i \sum_{j=1}^{i-1} (N'^{j+1}_x n_x^2 + N'^{j+1}_y n_y^2 + 2N'^{j+1}_{xy} n_x n_y),$$

$$M'_s = (M'_y - M'_x) n_x n_y + M'_{xy} (n_x^2 - n_y^2) + h_i \sum_{j=1}^{i-1} [(N'^{j+1}_y - N'^{j+1}_x) n_x n_y + N'^{j+1}_{xy} (n_x^2 - n_y^2)], \quad i = \overline{1, I}$$

$n_x = \cos(x, n)$, $n_y = \cos(y, n)$ – направляющие косинусы нормали n к границе L .

Коэффициенты ζ_{kl} ($k = \overline{1, 2I+3}, l = \overline{1, 2}$) позволяют моделировать конкретные граничные условия на границе L . Например, в случае шарнирного опирания

$$\zeta_{11} = \zeta_{22} = \zeta_{32} = \zeta_{3+l} = \zeta_{3+l+2} = 1, \quad \zeta_{12} = \zeta_{21} = \zeta_{31} = \zeta_{3+l} = \zeta_{3+l+1} = 0, \quad i = \overline{1, I}. \quad (11)$$

Соотношения (6) – (18) дают возможность записать систему уравнений (9) и граничные условия (11) через функции перемещений.

В соответствии с методом погружения исходная пластина погружается во вспомогательную охватывающую пластину с такой же композицией слоев. Охватывающая пластина в пределах области Ω^* нагружена так же, как и заданная пластина. Форма контура охватывающей пластины и граничные условия выбираются так, чтобы возможно было получить простое аналитическое решение. В настоящей работе эту роль выполняет прямоугольная шарнирно опертая пластина (рис. 2). В этом случае решение задачи может быть получено в виде тригонометрических рядов.

Чтобы обеспечить выполнение реальных граничных условий к вспомогательной пластине по следу границы L прилагаются дополнительные компенсирующие усилия и моменты $P^{comp} = \{p_j^{comp}(x, y)\}$, $j = \overline{1, 2I+3}$, $x, y \in L$.

Следовательно, исходная задача (9) – (10) о термоупругом деформировании вспомогательной пластины под действием силовых $P = \{p_j(x, y)\}$ и температурных $Q^T = \{q^T_j(x, y)\}$ нагрузок сводится к задаче о деформировании прямоугольной пла-

стины под действием этих известных нагрузок и компенсирующих нагрузок P^{comp} , заданных в виде криволинейных распределений $Q^{comp} = \{q_j^{comp}(x, y)\}$, $j = \overline{1, 2I+3}$:

$$Q^{comp}(x, y) = \oint_L [\Delta] P^{comp}(x_L, y_L) \delta(x - x_L, y - y_L) ds, \quad (12)$$

где $\delta(x - x_L, y - y_L)$ – двумерная δ -функция Дирака, s^* – длина контура L исходной пластины.

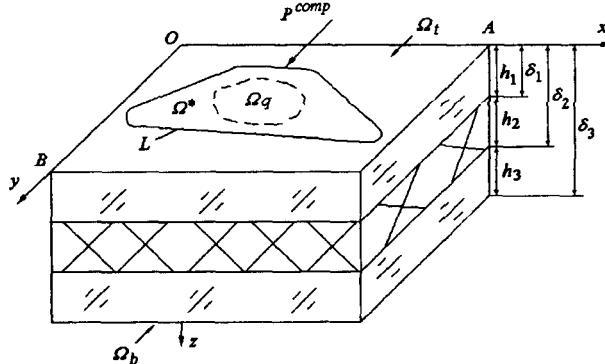


Рис. 2. Прямоугольная вспомогательная пластина

Элементы матрицы $[\Delta]$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta_{11} = \Delta_{22} = \Delta_{3+3+i} = \Delta_{3+i+3+i+i} = n_x, \quad \Delta_{33} = 1, \\ \Delta_{12} = \Delta_{3+i+3+i+i} = -n_y, \quad \Delta_{21} = \Delta_{3+i+3+i} = n_y, \quad i = \overline{1, I}. \end{aligned}$$

Остальные элементы матрицы $[\Delta]$ равны нулю.

Неизвестные значения компенсирующих нагрузок P^{comp} определяются путем удовлетворения граничным условиям заданной пластины на следе контура L .

Краевая задача о деформировании вспомогательной пластины под действием нагрузок P и Q^T и компенсирующих нагрузок (12), представленная в перемещениях, описывается системой уравнений

$$[\Lambda] U = Q^T - P - Q^{comp}, \quad (13)$$

граничными условиями на контуре вспомогательной охватывающей пластины

$$[B^E] U = Q^E, \quad x=0, A, \quad y=0, B \quad (14)$$

и условиями на следе контура L пластины Ω^*

$$[B^L] U = Q^L, \quad x, y \in L. \quad (15)$$

Здесь A и B длины сторон прямоугольной вспомогательной охватывающей пластины в направлении координатных осей (рис. 2); U и Q^T – векторы, компоненты которых выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 = u, \quad u_2 = v, \quad u_3 = w, \quad u_{3+i} = \psi'_x, \quad u_{3+i+i} = \psi'_y, \quad i = \overline{1, I}; \\ q_1^T = \sum_{i=1}^I N_{T,x}^i, \quad q_2^T = \sum_{i=1}^I N_{T,y}^i, \quad q_3^T = 0, \\ q_{3+i}^T = h_i \sum_{j=i}^{I-1} N_{T,x}^{j+1} + M'_{T,x}, \quad q_{3+i+i}^T = h_i \sum_{j=i}^{I-1} N_{T,y}^{j+1} + M'_{T,y}, \quad i = \overline{1, I}. \end{aligned}$$

Елементи матриці $[\Lambda]$ отримані з системи рівнянь (9) з урахуванням (8), елементи матриці $[B^L]$ і вектора Q^L отримані з граничних умов (10) з урахуванням співвідношень (8), а елементи матриці $[B^E]$ і вектора Q^E отримані з граничних умов (10) з урахуванням співвідношень (11).

Умови (15) з урахуванням рівнянь (13) і граничних умов (14) дозволяють сформувати систему з $2I + 3$ рівнянь для визначення невідомих компенсуючих зусиль і моментів

$$[B^L] U [P^{comp}(x, y)] = Q^L, \quad x, y \in L. \quad (16)$$

Компенсуючі зусилля і моменти входять в цю систему в вигляді інтегральних співвідношень (12).

Далі переміщення U , задані навантаження P і Q^T і компенсуючі зусилля Q^{comp} , що входять в систему (13) – (15), розкладаються в тригонометричні ряди за функціями, що задовольняють умовам шарнирного опирання на краях прямокутної пластини

$$u_i(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \Phi_{imn} B_{imn}(x, y), \quad p_i = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N p_{imn} B_{imn}(x, y),$$

$$q_i^T = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{imn}^T B_{imn}(x, y), \quad q_i^{comp} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N q_{imn}^{comp} B_{imn}(x, y), \quad i = \overline{1, 2I + 3}, \quad (17)$$

де

$$B_{1mn} = \cos \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B}, \quad B_{2mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \cos \frac{n\pi y}{B},$$

$$B_{3mn} = \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B}, \quad B_{3+i, mn} = B_{1mn}, \quad B_{3+i+1, mn} = B_{2mn}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Коефіцієнти розкладання навантажень мають вигляд

$$p_{imn} = \frac{4}{AB} \int_0^A \int_0^B p_i(x, y) B_{imn}(x, y) dx dy, \quad q_{imn}^T = \frac{4}{AB} \int_0^A \int_0^B q_i^T(x, y) B_{imn}(x, y) dx dy,$$

$$q_{imn}^{comp} = \frac{4}{AB} \sum_{j=1}^{2I+3} \oint_L \Delta_j p_j^{comp}(x_L, y_L) B_{imn}(x_L, y_L) ds, \quad i = \overline{1, 2I + 3}.$$

В результаті для кожної пари значень m і n система (13) перетворюється наступним чином

$$[\Lambda_{mn}] \Phi_{mn} = P_{mn} - Q_{mn}^T + Q_{mn}^{comp}, \quad (18)$$

де $[\Lambda^{mn}]$ – квадратна матриця, отримана з урахуванням розкладень (17),

$$P_{mn} = \{p_{imn}\}, \quad Q_{mn}^T = \{q_{imn}^T\}, \quad Q_{mn}^{comp} = \{q_{imn}^{comp}\}.$$

Решаючи систему (25), знаходимо

$$\Phi_{jmn} = \sum_{k=1}^{2I+3} \tilde{\Lambda}_{jk}^{mn} (p_{jmn} - q_{jmn}^T + q_{jmn}^{comp}), \quad j = \overline{1, 2I + 3}, \quad (19)$$

де

$$[\tilde{\Lambda}^{mn}] = [\Lambda^{mn}]^{-1}.$$

Далее компенсирующие усилия и моменты P^{comp} , входящие в выражение (12) представляются в виде разложений вдоль следа контура L

$$P_i^{comp}(s) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} f_{i\alpha\mu} d_{\alpha\mu}(s), \quad i = \overline{1, 2I+3}, \quad (20)$$

где

$$d_{1\mu} = \sin[\mu\gamma(s)], \quad d_{2\mu} = \cos[\mu\gamma(s)], \quad \mu = \overline{0, \mu^*}, \quad \gamma(s) = 2\pi \int_0^s d\bar{s} / \int_0^s d\bar{s}, \quad 0 \leq \gamma(s) \leq 2\pi.$$

Функции, входящие в исходные граничные условия на контуре L и образующие систему (16), также разлагаются в ряд вдоль следа контура

$$\sum_{\alpha=1,2} \sum_{\nu=0}^{\nu^*} \xi_{\beta\nu} d_{\beta\nu}(s) = 0, \quad (21)$$

где

$$\xi_{\beta\nu} = \frac{1}{\lambda_\nu} \sum_{j=1}^{2I+3} \oint_L [B_{ij}^L u_j(x_L, y_L) - q_i^L] d_{\beta\nu} ds, \quad j = \overline{1, 2I+3}, \quad \beta = 1, 2, \quad \nu = \overline{0, \nu^*},$$

$$\lambda_0 = 2\pi, \quad \lambda_\nu = \pi, \quad \nu = \overline{1, \nu^*}.$$

Условия (21) выполняются при

$$\xi_{\beta\nu} = 0, \quad i = \overline{1, 2I+3}, \quad \beta = 1, 2, \quad \nu = \overline{0, \nu^*},$$

что позволяет привести систему уравнений (16) относительно интегральных соотношений, содержащих компенсирующие усилия и моменты, к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложений в ряды этих нагрузок (20)

$$\sum_{j=1}^{2I+3} \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} T_{j\alpha\mu\beta\nu} f_{j\alpha\mu} = R_{\beta\nu}, \quad i = \overline{1, 2I+3}, \quad \beta = 1, 2, \quad \nu = \overline{0, \nu^*}. \quad (22)$$

Порядок полученной системы (22) зависит от числа слоев в пластине и количества членов ряда, удерживаемых в разложении (27), и равен $(2I+3) \times (2\mu^* + 1)$.

После определения компенсирующих нагрузок путем суммирования ряда (20) вычисляются перемещения (6) и напряжения (7) в слоях исходной пластины.

Работоспособность и эффективность разработанного метода проиллюстрирована на примере решения задачи термоупругости пятислойной пластины с межслойным пленочным источником тепла. Контур пластины составлен из отрезков прямых и сопряженных с ними дуг окружностей. На рис. 3 приведена расчетная схема пластины с такими параметрами: $s_1 = 0,74$ м, $s_2 = 0,16$ м, $s_3 = 0,75$ м, $s_4 = 0,26$ м, $r_i = 0,03$ м, $i = \overline{1, 4}$. Пленочный источник тепла с удельной мощностью обогрева $q = 6000$ Вт/м² находится между первым и вторым слоями. На рис. 3 расположение источника обозначено штриховой линией.

Слой пластины выполнены из материалов со следующими характеристиками: $E_i = 6,8 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_i = 0,22$, $\alpha'_T = 9 \cdot 10^{-6}$ °C⁻¹, $i = 1, 3, 5$; $E_i = 2,2 \cdot 10^2$ МПа, $\nu_i = 0,38$, $\alpha'_T = 8,3 \cdot 10^{-5}$ °C⁻¹, $i = 2, 4$; $h_1 = 5$ мм, $h_2 = 3$ мм, $h_3 = 1,2$ мм, $h_4 = 2$ мм, $h_5 = 8$ мм.

Предполагается, что силовые нагрузки отсутствуют. Температурное поле получено при решении задачи теплопроводности многослойной пластины с учетом воздействия пленочного источника тепла. Боковая поверхность пластины считается идеально теплоизолированной. На наружных поверхностях пластины происходит конвективный

теплообмен. Задача теплопроводности решена с такими исходными данными: $k_1 = 1,08 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$, $i = 1,3,5$; $k_2 = 0,22 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot^\circ\text{C})$, $i = 2,4$; $H_1 = 433 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C})$, $H_2 = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot^\circ\text{C})$; $T_1 = -30^\circ\text{C}$, $T_2 = 20^\circ\text{C}$. В результате для разных моментов времени получены распределения температуры по толщине пластины в точке C , которые представлены на рис. 4. Начальному распределению температуры в пластине соответствует линия 1. Также показана композиция слоев.

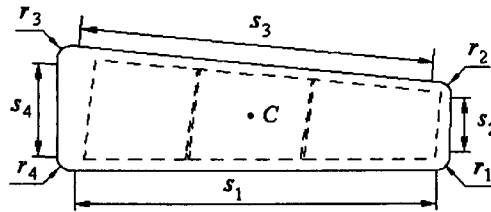


Рис. 3. Расчетная схема пластины

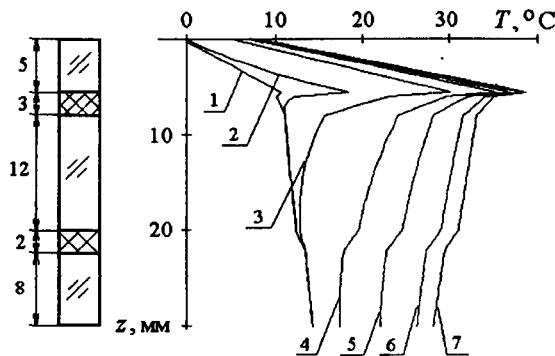


Рис. 4. Распределение температуры по толщине пластины в разные моменты времени: 1 – 0 с, 2 – 10 с, 3 – 100 с, 4 – 500 с, 5 – 1000 с, 6 – 2000 с, 7 – 5000 с

На рис. 5 и 6 приведено поле температуры на поверхностях пластины в момент времени $t = 5000 \text{ с}$.

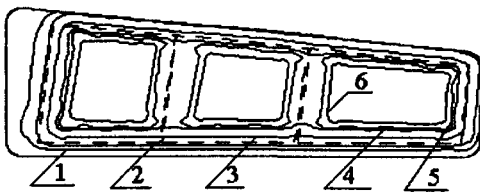


Рис. 5. Распределение температуры на наружной поверхности, $z = \delta_0$:

1 – -5°C , 2 – -4°C , 3 – 0°C , 4 – 4°C , 5 – 5°C , 6 – 8°C

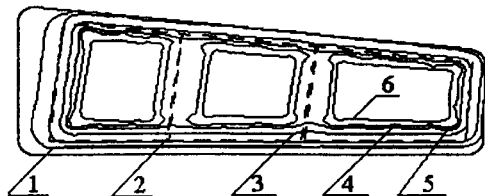


Рис. 6. Распределение температуры на поверхности с источником тепла, $z = \delta_1$:

1 – -4°C , 2 – 0°C , 3 – 15°C , 4 – 25°C , 5 – 30°C , 6 – 38°C

На рис. 7 представлено распределение главного напряжения σ'_i ($i = \overline{1, I}$) по толщине пластины в точке C . Напряжения в слоях получены для температурного распределения в момент времени, когда температура на поверхности с источником достигает наибольшего значения.

Видно, что на поверхности раздела первого и второго слоев пластины наблюдается резкое изменение температуры (рис. 4) и напряжения (рис. 7), вызванное наличием источника тепла.

Таким образом, разработан метод решения задач несвязанной термоупругости многослойных пластин неканонической формы в плане при воздействии внут-

рених межслойных пленочных источников тепла, который позволяет представить решение задачи в виде разложений в тригонометрические ряды.

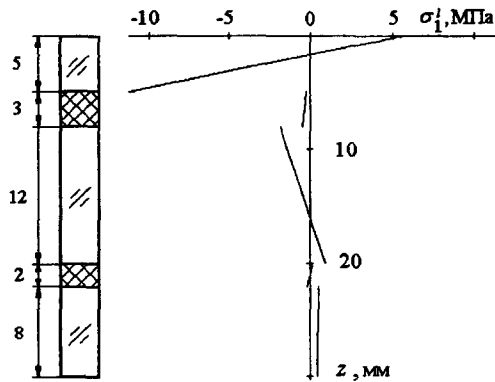


Рис. 7. Распределение главных максимальных напряжений σ_1^{\max} по толщине пластины

Предложенный метод может быть применен при проектировании систем обогрева и определении температурных напряжений многослойного остекления различных транспортных средств.

Бібліографічні посилання

1. Barut A. Non-linear analysis of composite panels under non-uniform temperature distribution / A. Barut, E. Madenci, A. Tessler // *Int. J. Solids Structures*.—2000.— Vol. 37, № 27.— P. 3681 – 3713.
2. Bielski W.R. Controllability and stabilization in elasticity, heat conduction and thermoelasticity: review of recent developments / W.R. Bielski // *J. of Global Optimization*.—2000.— Vol. 17, № 4.— P. 353 – 386.
3. Jane K.C. A generalized thermoelasticity problem of multilayered conical shells / K.C. Jane, Y.H. Wu // *Int. J. Solids and Structures*.—2004.— Vol. 41, № 9 – 10.— P. 2205 – 2233.
4. Kantor B.Ya. Analysis of non-stationary temperature fields in laminated strips and plates / B.Ya. Kantor, N.V. Smetankina, A. N. Shupikov // *Int. J. Solids Structures*.—2001.— Vol. 38, № 48/49.— P. 8673 – 8684.
5. Khdeir A.A. On the thermal response of antisymmetric angle-ply laminated plates // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*—1997.— Vol. 64, № 1.— P.229 – 233.
6. Oguamanam D.C.D. Nonlinear transient response of thermally loaded laminated panels / D.C.D. Oguamanam, J.S. Hansen, G.R. Heppler // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 2004.— Vol. 71, № 1.— P. 49 – 56.
7. Savoia M. Three-dimensional thermal analysis of laminated composite plate / M. Savoia, J.N. Reddy // *Int. J. Solids and Structures*.—1995.— Vol. 32, № 5.— P. 539 – 608.
8. Shupikov A.N. Non-stationary vibration of multilayer plates of an uncanonical form. The elastic immersion method / A.N. Shupikov, N.V. Smetankina // *Int. J. Solids Structures*.—2001.— Vol. 38, № 14.— P. 2271 – 2290.
9. Shupikov A.N. Nonstationary heat conduction in complex-shape laminated plates / A.N. Shupikov, N.V. Smetankina, Ye.V. Svet // *Trans. ASME. J. Heat Transfer*.—2007.— Vol. 129, № 3.— P. 335 – 341.
10. Smetankina N.V. A noncanonically-shape laminated plate subjected to impact loading. Theory and experiment / N.V. Smetankina, A.N. Shupikov, S.Yu. Sotrikhin, V.G. Yareschenko // *Trans. ASME. J. Appl. Mechanics*. – 2008.— Vol. 75, № 5.— P. 051004-1 – 051004-9.
11. Tauchert T.R. A review: quasistatical thermal stress in anisotropic elastic bodies with applications to composite materials / T.R. Tauchert // *Acta Mechanica*.—1975.— Vol. 23, № 1 – 2.— P. 113 – 135.
12. Verijenko V.E. Refined theory of laminated anisotropic shells for the solution of thermal stress problems / V.E. Verijenko, T.R. Tauchert, C. Shaikh, P.Y. Tabakov // *J. Thermal Stresses*. – 1999.— Vol. 22, № 1.— P. 75 – 100.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ*

Басс Валентин Петрович – Лауреат Держ. премії України, докт. техн. наук, професор, зав. відділу.

Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України.

Бобильов Олександр Олександрович – канд. фіз.-мат. наук, доцент.
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара.

Божидарник Віктор Володимирович – Засл. працівник освіти України, докт. техн. наук, професор, ректор.

Максимович Володимир Миколайович – докт. фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедри.
Луцький національний технічний університет.

Гарт Етері Лаврентіївна – канд. фіз.-мат. наук, доцент.
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара.

Григоренко Олександр Ярославович – докт. фіз.-мат. наук, професор, зав. відділу.
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка, НАН України (м. Київ).

Лоза Ігор Андрійович – канд. фіз.-мат. наук, доцент.
Національний транспортний університет (м. Київ).

Грінченко Віктор Тимофійович – акад. НАН України, Засл. діяч науки і техніки,
Лауреат Держ. премії України, доктор фіз.-мат. наук, професор, директор.
Інститут гідромеханіки НАН України (м. Київ).

Грищак Віктор Захарович – докт. техн. наук, професор, проректор.
Запорізький національний університет.

Пожуєв Володимир Іванович – докт. фіз.-мат. наук, професор, ректор.

Грищак Дмитро Вікторович – науковий співробітник.
Запорізька інженерна академія.

Гуляєв Валерій Іванович – Лауреат Держ. премії України, Засл. діяч науки і техніки,
докт. техн. наук, професор, зав. кафедри.

Бориц Олена Іванівна – викладач.
Національний транспортний університет (м. Київ).

Дзюба Анатолій Петрович – докт. техн. наук, професор, зав. кафедри.

Василенко Олена Григорівна – науковий співробітник.
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара.

Калосров Стефан Олексійович – Лауреат Держ. премії України, докт. фіз.-мат. наук, професор.

Сенченко Юрій Сергійович – канд. фіз.-мат. наук, доцент.
Донецький національний університет.

Кантор Борис Якович – Лауреат Держ. премії України, Засл. діяч науки і техніки,
докт. техн. наук, професор, головний науковий співробітник.

Місюра Сергій Юрійович – аспірант.
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України (м. Харків).

Карнаухов Василь Гаврилович – Лауреат Держ. премії України, докт. фіз.-мат. наук,
професор, зав. відділу.

Козлов Володимир Ілліч – доктор фіз.-мат. наук, провідн. науковий співробітник.
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (м. Київ).

* Приведені у порядку слідування статей у збірнику

Карнаухова Тетяна Василівна – канд. фіз.-мат. наук, доцент.
Національний технічний університет України «КПІ».

Клименко Дмитро Васильович – нач. відділу.
Тонконоженко Анатолій Мстиславович – Лауреат Держ. премії України, член-кор.
Міжн. акад. астронавтики, нач. сектору.

ДКБ «Південне» ім. М. К. Янгеля.
Рябоконт Сергій Андрійович – науковий співробітник.
Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України.

Колодяжний Анатолій Павлович – канд. техн. наук, доцент.
Прокопало Євген Федорович – канд. техн. наук, доцент.
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара.

Краснопольська Тетяна Сигизмундівна – докт. фіз.-мат. наук, провідний науковий
співробітник.

Спектор В'ячеслав Михайлович – науковий співробітник.
Інститут гідромеханіки НАН України (м. Київ).

Кузьменко Василь Іванович – докт. фіз.-мат. наук, професор.
Хитрова Тетяна Василівна – викладач.
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара.

Кушнір Роман Михайлович – член-кор. НАН України, Лауреат Держ. премії
України, докт. фіз.-мат. наук, професор, директор.

Ясінський Анатолій Васильович – докт. фіз.-мат. наук, провідний науковий
співробітник.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН
України (м. Львів).

Левін Віктор Матвійович – докт. техн. наук, професор, зав. кафедри.
Мітраков Володимир Олексійович – канд. фіз.-мат. наук, доцент.
Донбаська національна академія будівництва і архітектури (м. Макіївка).

Мелешко В'ячеслав Володимирович – доктор фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедри.
Київський національний університет ім. Т. Шевченка.

Папков Станіслав Олегович – канд. фіз.-мат. наук, доцент.
Севастопольський національний технічний університет.

Науменко Надія Юхимівна – канд. техн. наук, зав. відділу.
Хижя Інна Юріївна – канд. техн. наук, старш. науковий співробітник.
Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України.

Новиков Микола Вікторович – акад. НАН України, Лауреат Держ. премій СРСР і
України, Засл. діяч науки і техніки, докт. техн. наук, професор, директор.

Лецук Олександр Олександрович – докт. техн. наук, професор, зав. відділу.

Цисар Тетяна Олександрівна – науковий співробітник.
Інститут надтвердих матеріалів НАН України ім. В.М. Бакуля (м. Київ).

Ободан Наталія Іллівна – докт. техн. наук, професор.
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара.

Панасюк Володимир Васильович – акад. НАН України, Лауреат Держ. премій СРСР
і України, Засл. діяч науки і техніки, докт. техн. наук, професор, директор.

Іваницький Ярослав Лаврентійович – докт. техн. наук, зав. відділу.

Штаюра Степан Теодорович – канд. техн. наук, старш. науковий співробітник.
Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України (м. Львів).

Пастернак Ярослав Михайлович – канд. фіз.-мат. наук, доцент.
Луцький національний технічний університет.

Сулим Георгій Теодорович – Лауреат Держ. премії України, Засл. працівник освіти
України, докт. фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедри.
Львівський національний університет ім. І. Франка.

Попович Василь Степанович – докт. техн. наук, заст. директора.
Гарматій Галина Юрївна – канд. фіз.-мат. наук, старш. науковий співробітник.
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН
України (м. Львів).

Стрижало Володимир Олександрович – член.-кор. НАН України, Лауреат Держ.
премії України, докт. техн. наук, професор, зав. відділу.

Новогрудський Леонід Самуїлович – докт. техн. наук, провідн. науковий
співробітник.
Інститут проблем міцності ім. Г. С. Писаренка НАН України (м. Київ).

Сулим Георгій Теодорович – Лауреат Держ. премії України, Засл. працівник освіти
України, докт. фіз.-мат. наук, професор, зав. кафедри.

Львівський національний університет ім. І. Франка.
Кундрат Микола Михайлович – докт. техн. наук, професор.
Рівенський інститут водопостачання.

Сяський Андрій Олександрович – докт. техн. наук, професор, зав. кафедри.

Кот Василь Васильович – викладач.
Музичук Катерина Петрівна – викладач.
Рівненський державний гуманітарний університет.

Черняков Юрій Абрамович – докт. фіз.-мат. наук, професор.

Шнейдер Володимир Петрович – канд. фіз.-мат. наук, доцент.
Дніпропетровський національний університет ім. Олесь Гончара.

Шваб'юк Василь Іванович – докт. техн. наук, професор, проректор.

Пастернак Ярослав Михайлович – канд. фіз.-мат. наук, доцент.
Гуда Оксана Вікторівна – викладач.
Луцький національний технічний університет.

Шевченко Володимир Павлович – акад. НАН України, Герой України, Лауреат
Держ. премії України, Засл. діяч науки і техніки, докт. фіз.-мат. наук,
професор, зав. кафедри.

Довбня Катерина Миколаївна – докт. фіз.-мат. наук, професор.

Гур'єва Ірина Василівна – аспірант.
Донецький національний університет.

Шупіков Олександр Миколайович – докт. техн. наук, професор, зав. відділу.

Сметанкіна Наталія Володимирівна – канд. техн. наук, старш. науковий
співробітник.

Свет Євген Вадимович – канд. техн. наук, науковий співробітник.

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України (м. Харків).

Зміст

Член-кореспондент НАН України Вадим Сергійович Гудрамович (до 75-річчя з дня народження)	3
<i>Басс В. П.</i> Современные подходы к решению уравнения Больцмана в кинетической теории газов	13
<i>Бобылёв А. А.</i> Вариационная формулировка и численный алгоритм решения задачи о вдавливании в упругое тело жесткого штампа с заданным усилием	21
<i>Божидарнік В. В., Максимович О. В.</i> Розрахунок напруженого стану анізотропних пластинок із крайовими тріщинами за врахування контакту їх берегів	29
<i>Гарт Э. Л.</i> Конечноэлементный анализ плоскодеформируемых сред с включениями	39
<i>Григоренко А. Я., Лоза И. А.</i> Неосесимметричные колебания полых цилиндров из функционально градиентных материалов, поляризованных в осевом направлении	48
<i>Гринченко В.Т.</i> Особенности волновых полей в неоднородных упругих структурах	55
<i>Грищак В. З., Пожувев В. И., Грищак Д. В.</i> Гибридные асимптотические подходы к решению актуальных задач механики конструкций с переменными параметрами на базе современной компьютерной алгебры	61
<i>Гуляев В.И., Борщ О.И.</i> Автоколивання кружляння бурильних колон	72
<i>Дзюба А.П., Василенко О.Г.</i> Алгоритм оптимального проектування за кінцевим рівнем корозійного ураження конструкцій	78
<i>Калоеров С.А., Сенченко Ю.С.</i> Задачи вязкоупругости для многосвязных плит	91
<i>Кантор Б.Я., Мисюра С.Ю.</i> Оптимизация плоских линий, определяющих форму элементов конструкций	103
<i>Карнаухов В. Г., Козлов В. И., Карнаухова Т. В.</i> Тепловое разрушение неупругой шарнирно опертой прямоугольной пластины с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при вынужденных резонансных изгибных колебаниях	110
<i>Клименко Д. В., Тонконоженко А. М., Рябоконт С. А.</i> Взаимовлияние отверстий прямоугольной и круговой формы в пластинчато-оболочечных элементах конструкций при упругопластическом деформировании	117
<i>Колодяжный А. П., Прокопало Е. Ф.</i> Устойчивость цилиндрических оболочек с системой отверстий при осевом сжатии	124
<i>Краснопольська Т. С., Спектор В. М.</i> Поверхневі хвилі у прямокутному басейні з хвилепродуктором	132
<i>Кузьменко В. И., Хитрова Т.В.</i> Про обернені задачі механіки деформівного тіла	140
<i>Кушнір Р. М., Ясінський А. В.</i> Оптимізація температурних режимів термочутливих пружнопластичних тіл	146

<i>Левин В. М., Митраков В. А.</i> Особенности аппроксимации перемещений в модели Канторовича – Власова – Милейковского	154
<i>Мелешко В. В. Папков С. О.</i> Закон асимптотических выражений Бубнова-Кояловича	164
<i>Науменко Н. Е., Хижга И. Ю.</i> Применение метода конечных элементов к исследованию динамики старта ракет-носителей с жидкостными ракетными двигателями	173
<i>Новиков М.В., Леуцук О.О., Цисар Т. О.</i> Комп'ютерне моделювання технології інжекційного формування виробів з функціональної кераміки	179
<i>Ободан Н. И.</i> Дискретные модели прогноза остаточной несущей способности деформированных систем	188
<i>Панасюк В. В., Іваницький Я. Л., Штаюра С. Т.м</i> Визначення деформаційних характеристик тріщиностійкості пружно-пластичних матеріалів	193
<i>Пастернак Я. М., Сулим Г. Т.</i> Моделі тонких неоднорідностей з урахуванням можливості їхнього неідеального контакту з середовищем	200
<i>Попович В. С., Гарматій Г. Ю.</i> Визначення термопружного стану елементів конструкцій за високотемпературного нагрівання	211
<i>Стрижало В. А., Новогрудский Л. С.</i> Особенности развития разрушения металлических материалов при температуре 4,2 К	218
<i>Сулим Г.Т., Кундрат М.М.</i> Локалізовані зони передруйнування в тілі з лінійним включенням за умов плоскої задачі термопружності	223
<i>Сяський А. О., Кот В. В., Музичук К. П.</i> Про передачу моментного навантаження до пластинки з криволінійним отвором пружним ребром	234
<i>Черняков Ю.А., Шнейдер В.П.</i> Теория микродеформации для двухфазных материалов	239
<i>Шваб'юк В. І., Пастернак Я. М., Гуда О. В.</i> Циліндричний згин трансропної плити, послабленої тунельною тріщиною	245
<i>Шевченко В. П., Довбня К. М., Гур'єва І. В.</i> Застосування методу граничних інтегральних рівнянь для дослідження пружно-пластичних оболонок з тріщиною з урахуванням зміцнення матеріалу	255
<i>Шутиков А. Н., Сметанкина Н. В., Свет Е. В.</i> Термонапряженное состояние многослойных пластин неканонической формы	264
Відомості про авторів	274

Наукове видання

ВІСНИК ДНІПРОПЕТРОВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

МЕХАНІКА

Заснований у 1993 р.

Том 2, випуск 15

Українською, російською та англійською мовами

**Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації.
Серія КВ № 7898 від 17.09.2003 р.**

Редактор В. П. Пименов
Технічний редактор В. А. Усенко
Коректори В. П. Пименов, І. А. Сафронова