

531/534  
1054



ISSN 9125 0912

# ВІСНИК

**Дніпропетровського  
університету**

№ 5

Т. 19

2011

**Серія: МЕХАНІКА**

*Випуск 15, том 1*

# ВІСНИК



## Дніпропетровського університету

Науковий журнал

**№ 5**

**Том 19**

**2011**

РЕДАКЦІЙНА РАДА:

акад. Академії наук ВО України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Поляков** (*голова редакційної ради*); акад. Академії наук ВО України, д-р техн. наук, проф. **М. М. Дронь** (*заст. голови*); д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. О. Кочубей**; д-р хім. наук, проф. **В. Ф. Варгальок**; чл.-кор. АПН України, д-р філос. наук, проф. **П. І. Гнатенко**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Г. Гоман**; д-р філол. наук, проф. **В. Д. Демченко**; д-р техн. наук, проф. **А. П. Дзюба**; д-р пед. наук, проф. **Л. І. Зеленська**; чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. П. Моторний**; чл.-кор. АПН України, д-р психол. наук, проф. **Е. Л. Носенко**; д-р філос. наук, проф. **В. О. Панфілов**; д-р біол. наук, проф. **О. Є. Пахомов**; д-р іст. наук, проф. **С. І. Світленко**; акад. Академії наук ВО України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Скалозуб**; д-р філол. наук, проф. **Т. С. Пристайко**; чл.-кор. НАН України, д-р біол. наук, проф. **А. П. Травлєєв**; д-р техн. наук, проф. **Ю. Д. Шептун**.

**Серія: МЕХАНІКА**

**Випуск 15, том 1**

Дніпропетровськ  
Видавництво  
Дніпропетровського  
національного університету

Наведені результати досліджень у галузі гідромеханіки ідеальної та в'язкої рідини, тепломасопереносу з фазовими перетвореннями, експериментальних досліджень, застосування чисельних методів для розв'язку задач механіки рідини та газу, математичного моделювання течій рідини, газу та переносу забруднень у навколишньому середовищі, механіки деформівного твердого тіла.

Приведены результаты исследований в области гидромеханики идеальной и вязкой жидкости, тепломассопереноса с фазовыми переходами, экспериментальных исследований, применения численных методов для решения задач механики жидкости и газа, математического моделирования течений жидкости, газа и переноса загрязнений в окружающей среде, механики деформированного твердого тела.

*Друкується за рішенням вченої ради Дніпропетровського національного університету ім. Олеся Гончара згідно з затвердженим планом видань на 2011 р.*

#### Редакційна колегія:

д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Г. Гоман** (відп. редактор); д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Лобода** (заст. відп. редактора); д-р техн. наук, проф. **М. М. Дронь**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. О. Кочубей**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. І. Кузьменко**; д-р техн. наук **А. С. Макарова**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Поляков**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. А. Приходько**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **С. О. Смірнов**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю. А. Черняков**; к-т фіз.-мат. наук **В. П. Шнейдер** (відп. секретар)

<http://visnyk.dsu.dp.ua>

© Дніпропетровський національний університет, 2011

© Видавництво ДНУ, оформлення, 2011

**ВЯЧЕСЛАВ МИХАЙЛОВИЧ КОВТУНЕНКО –  
ВЫДАЮЩИЙСЯ УЧЕНЫЙ И КОНСТРУКТОР  
РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ**  
(к 90-летию со дня рождения)



В этом году исполнилось бы 90 лет со дня рождения выдающегося ученого – аэрогидромеханика и конструктора ракетно-космической техники Вячеслава Михайловича Ковтуненко.

Вячеслав Михайлович родился 31 августа 1921 г. в г. Энгельсе на Волге. Начал учиться в Ленинградском государственном университете ещё перед Великой отечественной войной, но был призван на фронт. Тяжело ранен. Университет закончил в 1946 г., и направлен на работу в КБ С.П. Королёва. Здесь без отрыва от производства закончил аспирантуру и в 1952 г. защитил в ЦНИИМаш кандидатскую диссертацию по аэродинамике крыльев конечного размаха в сверхзвуковом потоке под руководством известного аэродинамика И.А. Паничкина.

С момента образования ОКБ-586 в Днепропетровске во главе с Главным Конструктором М.К. Янгелем (1953 г.) В.М. Ковтуненко переезжает в наш город.

С 1954 г. Вячеслав Михайлович возглавляет проектный отдел, а с 1962 года – проектный комплекс ОКБ-586. В 1961-м Вячеслав Михайлович становится заместителем Главного Конструктора ОКБ-586. В 1960 г. за большой вклад в создание баллистических ракет дальнего действия и ракеты-носителя для вывода спутников на орбиту В.М. Ковтуненко присуждается Ленинская премия. В том же году он становится доктором технических наук, а в 1961 г. получает звание Героя Социалистического Труда.

Начиная с 1962 г. основная деятельность В.М. Ковтуненко сосредотачивается на разработке космической техники. Сначала он возглавляет специальное подразделение по космической технике в составе ОКБ – комплекс №8. Уже в марте 1962 г. состоялся первый запуск днепропетровского спутника. В 1965 г. Вячеслав Михайлович назначен Главным Конструктором вновь образованного космического КБ-3 в составе ОКБ. На этой должности Вячеслав Михайлович проработал до 1977 года, вплоть до перехода на работу Главного Конструктора НПО им. Лавочкина (г. Москва).

Период деятельности В.М. Ковтуненко на посту Главного Конструктора КБ-3 ознаменовался выдающимися успехами в создании ракетно-космической техники: была разработана уникальная серия спутников «Космос», создана унифицированная платформа для космических аппаратов в целях научных исследований околоземного космического пространства, а также осуществлен ряд других замечательных оригинальных проектов в отрасли космической техники, среди которых новаторским решением особо выделяется проект «Космическая стрела». За время



руководства КБ-3 Вячеславом Михайловичем осуществлено несколько сот запусков спутников различного типа.

Вячеслав Михайлович был одним из организаторов и содиректоров международной космической организации «Интеркосмос» по исследованию Космоса в мирных целях, а также сопредседателем совместной советско-индийской космической программы, увенчавшейся созданием собственных индийских спутников. Был членом нескольких Ученых советов, Государственных экспертных комиссий и активным участником других научных организаций. Вячеслав Михайлович всегда был самым деятельным участником всех коллективов, где бы ему не приходилось работать.

В 1972 г. за выдающиеся заслуги в области разработки и создания ракетно-космической техники В. М. Ковтуненко избирают член-корреспондентом Академии наук Украинской ССР.

В 1977 г. Вячеслав Михайлович покинул Днепропетровск и возглавил Научно-производственное объединение им. Лавочкина, основным направлением деятельности которого была разработка космических аппаратов для исследования дальнего Космоса. Его деятельность на посту Главного Конструктора НПО им. Лавочкина увенчалась осуществлением нескольких успешных запусков космических аппаратов для мягкой посадки на планету Венера с получением фотопанорамы ее поверхности и дистанционного анализа ее грунта (станции «Венера-11», «Венера-12» в 1978 г. и «Венера-13», «Венера-14» в 1982 г.), реализацией уникального проекта «Вега» по комплексному исследованию кометы Галлея и планеты Венера одним и тем же аппаратом (1984 г.), запусками нескольких космических аппаратов к планете Марс и рядом других выдающихся проектов.

Педагогическую деятельность в Днепропетровском госуниверситете Вячеслав Михайлович начал с 1953 г. старшим преподавателем профилирующей кафедры №1 физико-технического факультета; в 1955 г. он получает ученое звание доцента, а в 1962 г. – звание профессора. С 1963 г. по 1969 г. Вячеслав Михайлович возглавляет кафедру прикладной газодинамики и тепломассобмена (сначала на физико-техническом, а затем – на механико-математическом факультете), а с 1969 г., с момента образования кафедры аэрогидромеханики на механико-математическом факультете – возглавляет ее. Заведующим кафедрой аэрогидромеханики Вячеслав Михайлович оставался вплоть до 1977 г.

Параллельно с работой в ОКБ и ДГУ В.М. Ковтуненко был одним из организаторов в нашем городе Днепропетровского отделения института механики АН УССР (ДОИМ) – теперь Институт технической механики НАНУ и НКАУ – и в течение многих лет был научным руководителем аэродинамического отдела ДОИМ.

Многие сотрудники ОКБ, ДГУ и ДОИМ защитили кандидатские диссертации или непосредственно под руководством Вячеслава Михайловича, или при его фактическом руководстве; достаточно вспомнить такие фамилии: Е.Р. Абрамовский, Ф.И. Аврахов, Н.Н. Лычагин, Л.Е. Пицык, А.А. Харитонов, И.С. Тонкошкур, Н.В. Поляков, В.В. Попов, М.П. Данилов, В.И. Тимошенко, Э.П. Яскевич, В.Ф. Каменко, В.Р. Журавский и др.

Среди многочисленных научных интересов Вячеслава Михайловича, как ученого и конструктора, отдельным предметом постоянного внимания была проблема уменьшения силы лобового сопротивления летательного аппарата при его движении в атмосфере. Еще во время работы в КБ С.П. Королева Вячеславу Михайловичу удалось поставить и решить впервые среди отечественных ученых задачу о форме тела минимального волнового сопротивления при сверхзвуковых ско-

ростях, и тем самым открыть новое научное направление по определению оптимальных форм тел в потоке жидкости и газа.

В.М. Ковтуненко была свойственна глубина научных знаний и широкая эрудиция, и он всегда поддерживал научный поиск во всех тех отраслях науки и техники, где только можно было приложить достижения аэрогидромеханики.

Именно Вячеслав Михайлович, как заведующий кафедрой аэрогидромеханики, несмотря на свою естественную приверженность по роду службы к проблемам ракетно-космической техники, настоял на том, чтобы образование специалистов по специальности «гидроаэродинамика» на кафедре проводилось по «широкому профилю», ориентированному на как можно более широкий спектр народно-хозяйственных отраслей, имеющих выход на аэрогидромеханику. Как раз в это время на кафедре складывается направление промышленной аэрогидромеханики, которая определила широкий круг интересов сотрудников кафедры – от аэрогидродинамических проблем металлургии (процессы дутья), аэродинамических способов производства нетканых материалов – до проблем аэроупругой неустойчивости промышленных конструкций, сооружений и мостов в ветровом потоке.

Под научной эгидой проф. В. М. Ковтуненко на кафедре аэрогидромеханики выполнено несколько десятков научно-исследовательских и экспериментальных работ, которые были внедрены как в проектных разработках КБЮ, так и в других проектных и исследовательских организациях.

Исходя из практической потребности для космической техники исследования проблем посадки спасаемых космических аппаратов на поверхность океана, В.М. Ковтуненко инициировал на кафедре научно-исследовательскую тему по гидродинамике больших скоростей, ударе тел о свободную поверхность жидкости и прониканию тел в жидкость.

Одним из дальновидных начинаний В.М. Ковтуненко стало инициирование им на кафедре тематики научных исследований в области аэромеханики ветроэнергетических аппаратов, которая на сегодняшний день занимает значительное место среди других интересов кафедры. Школа аэромеханики ветроэнергетических установок, которую в настоящее время в ДНУ возглавляет проф. Е.Р. Абрамовский, ученик Вячеслава Михайловича, достигла значительных успехов и является общепризнанной в стране.

Приход Вячеслава Михайловича на кафедру в его годы работы в ДГУ создавал у сотрудников кафедры возвышенное праздничное настроение. Обычно лекционные занятия Вячеслава Михайловича планировались на послеобеденное время, и после занятий Вячеслав Михайлович иногда мог позволить себе провести оставшееся время на кафедре, не возвращаясь к месту основной работы в КБЮ. Беседы с Вячеславом Михайловичем тогда продолжались долго, сопровождался чаепитием и касались не только текущих кафедральных вопросов и новостей в ракетно-космической технике, но и международных событий, политики, экономики и даже искусства...

Что касается самой лекторской манеры Вячеслава Михайловича как преподавателя, то следует сказать, что лекции он читал вдохновенно и красиво, на высоком научном и методическом уровне. Всегда элегантно одетый, обязательно в белой рубашке и при галстуке, с благородной сединой, он даже внешне производил впечатление классического и, в то же время, современного профессора. Особенно ему удавались лекции по теории тонкого крыла в сверхзвуковом потоке и по методу характеристик. Нет сомнения в том, что в то время В.М. Ковтуненко был самым

квалифицированным специалистом в стране по приложению метода характеристик к расчету обтекания тел сверхзвуковым потоком.

Характерным движением правой руки (последствие тяжелого ранения) Вячеслав Михайлович чертил на доске великолепные рисунки и объяснял материал, по тем временам не только сложный, но даже экзотический, убедительно и доходчиво. Рисунки, иллюстрирующие теорию обтекания крыла конечного размаха сверхзвуковым потоком, испещренные всевозможными линиями Маха и штриховкой различных областей влияния, интегральные уравнения и масса подлежащих вычислению интегралов по поверхности – все это оказывало магическое действие на студентов и вызывало у них благоговейное чувство причастности к аэрогидромеханике, как науке, которой подвластны такие невероятные глубины.

Экзамены В.М. Ковтуненко принимал строго, но благожелательно; студенты это знали и готовились основательно.

Студенты боготворили Вячеслава Михайловича, гордились им и любили, как любят умного, красивого, порядочного и доброжелательного ученого и человека.

Добавлю, что Вячеслава Михайловича отличала исключительная порядочность во взаимоотношениях с сослуживцами и подчиненными.

В заключение хочется отметить, что в 60-х годах по инициативе В.М. Ковтуненко решением Государственного комитета по оборонной технике (ГКОТ) в ДГУ была создана комплексная физико-техническая лаборатория (КФТЛ) и построен специальный корпус под эту лабораторию (корпус № 6). Созданная лаборатория оборудовалась, главным образом, различного рода аэрогазодинамическими установками. Основной, наиболее значительной, как по масштабам, так и по возможностям, установкой, которой предполагалось оснастить КФТЛ, была сверхзвуковая труба, копия трубы Т-114 ЦАГИ (Центральный аэрогидродинамический институт, г. Жуковский). Аэродинамическая труба такого типа представляет собой уникальное сооружение, требующее для своего размещения двухэтажного здания и имеющее продольный габарит до сотни метров. Для обеспечения работы такой трубы необходим исключительно мощный компрессор, нужно значительное количество емкостей для сжатого воздуха (газгольдеры), а также градирня и ещё много другого различного вспомогательного оборудования. Кроме того, для обеспечения функционирования трубы в рабочем и даже в нерабочем состоянии необходим определенный инженерный и лаборантский штат.

Согласно исходному плану создания КФТЛ намечалось, что, кроме введения в строй аэродинамической трубы Т-114, будет происходить дальнейшее расширение этой лаборатории с перспективой ее превращения в крупный аэродинамический центр, который в первую очередь обслуживал бы потребности КБЮ, но также осуществлял бы аэродинамическое обеспечение проектных работ и в других научных и производственных организациях Приднепровья и Украины в целом.

К сожалению, недалновидная политика руководства ДГУ того времени, которое не только не поддерживало проект В.М. Ковтуненко относительно КФТЛ, но и категорически из местных интересов противостояло ему, не позволила осуществиться этой новаторской идее Вячеслава Михайловича. Руководство ДГУ сделало все возможное для того, чтобы аэродинамический центр в ДГУ не состоялся. В результате того, что руководство ДГУ в конце концов заморозило работы по сборке и введению в строй трубы Т-114, стране был нанесен огромный ущерб. В жертву были принесены колоссальные материальные и финансовые ресурсы, уже вложенные к тому времени в реализацию запланированного проекта согласно ре-

шению ГКОТ: изготовление на заводе прессов и доставка в корпус № 6 огромных по размеру металлических обечаек, элементов корпуса трубы, завершённое строительство градирни, изготовление, доставка и монтаж в корпусе № 6 нескольких огромных по размеру газгольдерных емкостей, изготовление на Урале, транспортировка и установка в корпусе № 6 уникального по мощности компрессора, поставка некоторого вспомогательного оборудования и пр.

Несостоявшееся строительство трубы Т-114 в ДГУ и нереализованная попытка создания крупного аэродинамического центра в ДГУ, а вместе с тем и на Украине, – это, пожалуй, единственный авторский проект В.М. Ковтуненко, который не был претворен в жизнь. Но не по его вине.

Именно теперь, в ретроспективе, когда после обретения Украиной независимости все крупные аэродинамические центры остались в России, стало возможным оценить тот научный, технологический, экономический и даже политический ущерб, который нанесла науке Украины позиция руководства ДГУ по противодействию Вячеславу Михайловичу Ковтуненко в осуществлении его проекта по превращению ДГУ в крупный аэродинамический центр Украины.

В настоящее время здание КФТЛ – корпус №6 – пришел в полную негодность, и только уцелевшие еще неподвластные стихиям огромные газгольдерные емкости напоминают о неосуществленных великих планах настоящего ученого, умевшего смотреть далеко вперед, Вячеслава Михайловича Ковтуненко. Время вносит свои коррективы, и уже сегодняшний ректор ДГУ проф. Н.В. Поляков, сам выпускник кафедры аэрогидромеханики и аспирант В.М. Ковтуненко, вынужден подписывать приказ о ликвидации кафедры аэрогидромеханики, вернее, о ее слиянии с другой кафедрой мехмата. Кафедра аэрогидромеханики, созданная по инициативе Вячеслава Михайловича Ковтуненко в Днепропетровском университете в 1969 г., просуществовала до 2010 г. и дала путевку в жизнь многим сотням специалистов по гидроаэродинамике.

В.М. Ковтуненко был выдающимся ученым – аэрогидромехаником, талантливым конструктором ракетно-космической техники, блестящим преподавателем, умелым организатором науки и техники в государственном масштабе.

Вячеслав Михайлович преждевременно ушел из жизни 10.07.1995 г., но для тех, кто общался с этим замечательным человеком и ученым, его образ будет жить вечно.

Олег Гоман,  
ученик В.М. Ковтуненко,  
бывший заведующий  
бывшей кафедры аэрогидромеханики, созданной В.М. Ковтуненко.



## ДАВИДСОН ВЕНИАМИН ЕВГЕНЬЕВИЧ

(К 90-летию со дня рождения)



В.Е. Давидсон родился 8 апреля 1921 года в городе Улан-Уде. С 1940 по 1944 гг. служил в рядах Красной Армии, из них в 1941–1943 гг. на фронте. В 1943-м был тяжело ранен. За участие в Великой Отечественной войне он награжден орденами Отечественной войны, Красной Звезды, Богдана Хмельницкого, медалью «За боевые заслуги» и др.

В 1949 году В. Е. Давидсон закончил механико-математический факультет Московского государственного университета, а в 1952 году – аспирантуру при МГУ и защитил кандидатскую диссертацию. С 1952 г. и до 2009 г. работал в Днепропетровском университете; с 1979 г. – в должности профессора кафедры аэрогидромеханики.

С именем В. Е. Давидсона связано становление в ДГУ экспериментальных исследований в области аэрогидродинамики. В. Е. Давидсон – один из организаторов специальности «гидроаэродинамика» и основатель технологического гидроаэродинамического направления научных исследований в ДГУ. В 1969 г. по его инициативе в ДГУ была основана первая проблемная научно-исследовательская лаборатория струйных и трубных течений, которую он бессменно возглавлял как научный руководитель до 2009 г. Эта лаборатория сыграла исключительную роль в решении насущных технологических проблем в промышленности страны, особенно в Приднепровском регионе. Эта лаборатория и сейчас продолжает исследования, начатые В.Е. Давидсоном в области технологической гидрогазодинамики.

В 1965–1983 гг. В. Е. Давидсон – ответственный секретарь межвузовского сборника «Гидроаэромеханика и теория упругости». В период 1974–1985 гг. он – член секции «Массо- и теплоперенос в технологических процессах» Ученого Совета Государственного Комитета по науке и технике СССР.

В. Е. Давидсон – известный ученый в области двухфазных течений и их технологических применений, автор и руководитель многих научных исследований. Ему принадлежит свыше 100 печатных работ и 4 монографии, посвященных сверхзвуковым течениям в трубах, соплах и технологических аппаратах, пневматическому перемешиванию и пневмотранспорту. В.Е. Давидсон является пионером в постановке и решении ряда задач двухфазной гидрогазодинамики. Под его руководством защищено больше десяти кандидатских диссертаций.

Профессору В. Е. Давидсону присуще исключительное педагогическое мастерство и постоянное стремление к усовершенствованию учебного процесса. Его лекции отмечались не только высокой методической организованностью, научной строгостью и доступным преподаванием материала, а и моральной направленностью. Уроки проф. В. Е. Давидсона – это в полном понимании уроки воспитания и привлечение студентов к науке и творчеству. Он постоянно находил новые пути

работы и общения со студентами, новые средства активизации учебного процесса и контроля знаний, много внимания уделял созданию лабораторной базы и проведению лабораторных работ.

В. Е. Давидсон – автор 10 учебников и учебных пособий. В 2002 году вышли учебники В. Е. Давидсона «Вступление в гидродинамику» и «Вступление в газодинамику».

Работу В.Е. Давидсона по созданию задачника по гидрогазодинамике, которая велась практически 50 лет трудно переоценить. Выдержавший несколько изданий задачник широко используется не только в учебном процессе, но и инженерно-техническим персоналом профильных КБ. Задачник В.Е. Давидсона стал первым общепризнанным задачником в данной области. Его последнее издание под названием «Основы гидрогазодинамики в примерах и задачах» осуществлено в 2006 г. издательством ДНУ.

Свой богатый педагогический опыт В. Е. Давидсон обобщил в своих учебниках, задачниках по гидрогазодинамике, в монографии «Размышления преподавателя» (Днепропетровск, 2006), посвященной методологии и методике преподавания, в созданном видеофильме.

В 1999 г. проф. В. Е. Давидсону присвоенное почетное звание Заслуженного преподавателя ДГУ, а в 2000 г. за весомый вклад в развитие науки и техники и становление отечественной ракетно-космической отрасли присвоено почетное звание Заслуженного работника народного образования Украины.

В настоящее время, находясь на пенсии, Вениамин Евгеньевич ведет активную просветительскую работу. Его статьи в еженедельнике «2000» поражают читателей ясностью мысли, глубиной логики, знанием многих сторон жизни и, что еще более важно, гражданственностью. Его жизненная позиция всегда была активной, и такой она сохраняется и по сегодняшний день. В основе ее лежат высокие моральные принципы, большой духовный заряд, направленный на постижение законов природы и общества. Как непосредственный участник Великой Отечественной Войны, он делится с современниками воспоминаниями о тех тяжелых временах, о своих боевых товарищах, которые ценой своей жизни отстаивали право на нашу жизнь.

Коллектив кафедры аэрогидромеханики и энергомассопереноса, его ученики и все ученые-механики Днепропетровского национального университета искренне поздравляют Вениамина Евгеньевича Давидсона по случаю юбилея и желают ему крепкого здоровья.

### **Основные монографии, учебники и учебные пособия профессора В. Е. Давидсона**

1. **Давидсон В. Е.** Сборник задач по газовой динамике / В.Е. Давидсон. – К., 1959. – 192 с.
2. **Давидсон В. Е.** Основы газовой динамики в задачах / В.Е. Давидсон. – М., 1965. – 240 с.
3. **Давидсон В. Е.** Основы газовой динамики : учеб. пособие / В.Е. Давидсон, П.А. Нещерет. – Д., 1967. – 108 с.
4. **Давидсон В. Е.** Руководство к лабораторным работам по газовой динамике / В.Е. Давидсон, В.М. Жолоб, В.Р. Ковальчук. – Д., 1971 – 80 с.
5. **Давидсон В. Е.** Основы гидравлического расчета эрлифтов : учеб. пособие / В.Е. Давидсон. – Д., 1987. – 68 с.

6. Давидсон В. Е. Элементы технологической гидрогазодинамики : учеб. пособие / В.Е. Давидсон. – Д., 1987. – 84 с.
7. Давидсон В. Е. Элементы технологической гидрогазодинамики . монография / В.Е. Давидсон // Депонирована. Москва № 7762-В. – 1989. – 140 с.
8. Давидсон В. Е. Вопросы методологии и методики гидрогазодинамики : монография / В.Е. Давидсон. – Д., 1989. – 40 с.
9. Давидсон В. Е. Введение в гидрогазодинамику : учебник. Часть 1 и 2 / В.Е. Давидсон. – Д., 1995 – 481с.
10. Давидсон В. Е. Задачник по газовой динамике / В.Е. Давидсон. – Д., 1989. – 68 с
11. Давидсон В. Е. Введение в гидродинамику : учебник / В.Е. Давидсон, Н.Н. Лычагин. – Д., 2002. – 220 с.
12. Давидсон В. Е. Введение в газодинамику : учебник / В.Е. Давидсон, Н.Н. Лычагин. – Д., 2002. – 216 с.
13. Давидсон В. Є. Вступ у гідродинаміку : підручник / В.Є Давидсон, М.М. Личагін. – Д., 2002. – 214с.
14. Давидсон В. Є. Вступ у газодинаміку : підручник / В.Є. Давидсон, М.М. Личагін. – Д., 2002. – 215 с.
15. Давидсон В. Е. Размышления преподавателя / В.Е. Давидсон. – Д., 2006 – 60 с.
16. Давидсон В. Е. Основы гидрогазодинамики в примерах и задачах : монография / В.Е. Давидсон. – Д., 2006. – 377 с.
17. Давидсон В. Е. Основы гидрогазодинамики в примерах и задачах . монография / В.Е. Давидсон. – М., 2008. – 320 с.

## УДК 532.59

<sup>\*</sup> А.С. Котельникова <sup>\*</sup>, В.И. Никишов <sup>\*</sup>, В.В. Олексюк <sup>\*</sup>, С.М. Сребнюк <sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Институт гидромеханики НАН Украины

<sup>\*\*</sup>Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН С БЕРЕГОВЫМИ СКЛОНАМИ

Представлено результати експериментальних досліджень розповсюдження та взаємодії поверхневих відокремлених хвиль з вертикальною стінкою та береговими схилами, які мають різні кути нахилу до горизонту. Отримано основні характеристики хвиль, що розповсюджуються в лотку, та коефіцієнти їх відбиття від вертикальної стінки та берегових схилів.

*Ключові слова* усамітнена хвиля, накат хвилі, відкат хвилі, коефіцієнт відбиття

Представлены результаты экспериментальных исследований распространения и взаимодействия поверхностных уединенных волн с вертикальной стенкой и береговыми склонами, установленных под разными углами к горизонту. Получены основные характеристики волны, распространяющихся в лотке, и коэффициенты их отражения от вертикальной стенки и береговых склонов.

*Ключевые слова* уединенная волна, накат волны, откат волны, коэффициент отражения

The results of experimental investigation of the propagation and interaction of surface solitary waves with vertical wall and slopes are presented. Slopes of the different angles in respect to horizon have been considered. Main wave characteristics and reflection coefficients of solitary waves from vertical wall and slopes have been obtained.

*Key words* solitary wave, wave run-up, wave rundown, coefficient of reflection

**Введение.** При исследовании взаимодействия поверхностных уединенных волн с береговыми склонами основное внимание уделяется, как правило, определению высоты наката волн в зависимости от их амплитуды и угла наклона стенки. Для анализа динамических процессов, происходящих в береговой зоне, важную роль играет отражение волн от склонов и сооружений. Отражение волн от волноломов (плотин) может существенно влиять на режим течения в области перед сооружением или склоном. Вертикальные, или близкие к вертикальным, гидротехнические конструкции практически полностью отражают волны, при этом происходит значительный подъем уровня воды перед конструкцией. Уменьшение угла склона приводит к изменению подъема уровня воды и интенсивности отраженной волны. Указанные особенности взаимодействия волн со склоном оказывают соответствующее влияние на характер течения в области перед склоном, в частности и в придонной области, что может существенно влиять на процессы переноса донных наносов и деформации донной поверхности. С другой стороны, взаимодействие падающих и отраженных волн может порождать волны большей амплитуды. Для гаваней это может быть причиной возникновения трудностей при маневрировании небольших судов. Неблагоприятные эффекты волнового отражения могут приводить к аварийным ситуациям, связанных с потерями в прибрежном материале и дестабилизации береговых конструкций. Поэтому для проектирования береговых сооружений необходимо учитывать коэффициенты отражения.

Исследования, посвященные волновому отражению от береговых конструкций и склонов, довольно малочисленны. Проблема отражения уединенной волны привлекла внимание исследователей при изучении взаимодействия между уединенными волнами.

Столкновение двух одинаковых уединенных волн друг с другом является эквивалентным, при отсутствии вязкости, взаимодействию уединенной волны с вертикальной стенкой. Данному вопросу посвящены работы [1–6]. Экспериментальное исследование столкновения двух уединенных волн представлено в [1]. Показано, что максимальный подъем уровня воды при столкновении волн может превышать удвоенную амплитуду начальной волны. Также обнаружен фазовый сдвиг (замедление распространения волн в течение их столкновения), который не зависит от начальной амплитуды. Проведено сравнение с результатами теоретических зависимостей. В [2] рассматривается лобовое столкновение двух уединенных волн, которые распространяются вдоль поверхности невязкой однородной жидкости. Изучение процесса столкновения основывалось на использовании метода малых возмущений. Обнаружено, что волны, сформировавшиеся в результате столкновения, сохраняют исходные параметры (с точностью до третьего порядка разложения), однако имеет место фазовый сдвиг, кроме того, за каждой уединенной волной возникают вторичные волны. Найдено, что амплитуда волновой группы уменьшается со временем из-за дисперсии. Вычислен максимальный подъем уровня воды при столкновении волн. Численное моделирование столкновения двух уединенных волн представлено в [3]. Основное внимание направлено на изучение генерации вторичных волн. Описано формирование волнового цуга за каждой распространяющейся уединенной волной, который возникает в результате лобового столкновения уединенных волн. После столкновения уединенные волны практически восстанавливают свою первоначальную амплитуду. Результаты расчетов фазового сдвига и зависимости параметров взаимодействующих волн от времени находятся в соответствии с решением уравнения Кортевега–де Вриза. Взаимодействие поверхностных уединенных волн с вертикальной стенкой теоретически исследовано в [4].



Отмечается, что лобовое столкновение двух одинаковых уединенных волн эквивалентно, в отсутствии вязкости, отражению уединенной волны от вертикальной стенки. Установлено, что амплитуда волны после отражения уменьшается. Также показано, что затухание амплитуды, которое наблюдается в эксперименте, объясняется появлением дисперсионного «хвоста». В [5] представлены экспериментальные и теоретические результаты столкновения между распространяющимися параллельно и навстречу друг другу уединенными волнами. Получены экспериментальные данные пространственных волновых профилей для заданного момента времени, проведено сравнение с результатами, полученными на основе математических моделей. В [6] исследуется нелинейное взаимодействие уединенных волн, распространяющихся вдоль свободной поверхности. В результате – найдена зависимость, описывающая изменение амплитуд уединенных волн при их взаимодействии, и проведена оценка энергии, уносимой «остаточной» компонентой. Результаты включают экспериментальные измерения параметров взаимодействующих уединенных волн, численное моделирование процесса столкновений, оценку потерь энергии при «неупругом» взаимодействии волн.

Взаимодействие уединенной волны с вертикальной стенкой также изучалось в работах [7 – 9]. Статья [7] посвящена экспериментальному исследованию генерации, распространения, затухания и отражения уединенной волны от плоской вертикальной стенки. Авторы отметили, что отражение уединенной волны от вертикальной стенки можно рассматривать как столкновение двух подобных волн одинаковой амплитуды, распространяющихся в противоположных направлениях. При взаимодействии со стенкой наблюдалось увеличение амплитуды уединенной волны и уменьшение ее скорости. Согласно данным, амплитуда отраженной волны возле вертикальной стенки меньше, чем у падающей волны; уменьшение амплитуды не превышает 10 %. Также авторы обратили внимание на то, что на некотором расстоянии амплитуда отраженной волны равна амплитуде, которую одиночная волна имела бы, если бы не существовало бы стенки и действовало только вязкое торможение. Отражение наклонно падающей уединенной волны от вертикальной стенки изучено численно с помощью спектрального метода высокого порядка в [8], где основное внимание сконцентрировано на маховском отражении уединенных волн. Численные результаты показали, что с увеличением амплитуды волны маховского отражения не возникает. Столкновение уединенной волны, распространяющейся вдоль свободной поверхности над горизонтальным дном, с вертикальной стенкой также рассмотрено в [9]. Приведены результаты для стадии движения, когда волна находится уже непосредственно в контакте со стеной. Сделана оценка времени взаимодействия волны со стеной. Показано, что время контактирования обеспечивает определение параметров фазового сдвига, возникающего в процессе отражения волн как малой, так и большой амплитуды. Представлены также результаты, касающиеся других особенностей взаимодействия, включая максимальный накат и мгновенную силу воздействия на стену.

В данной работе приводятся результаты экспериментальных исследований распространения и взаимодействия уединенных волн с береговыми склонами, установленными под разными углами к горизонту:  $11^\circ$ ,  $17^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ .

**Экспериментальная установка.** Эксперименты проводились в волновом лотке длиной 16 м, шириной 0.3 м и высотой 0.7 м. Боковые стенки лотка были сделаны из стекла.

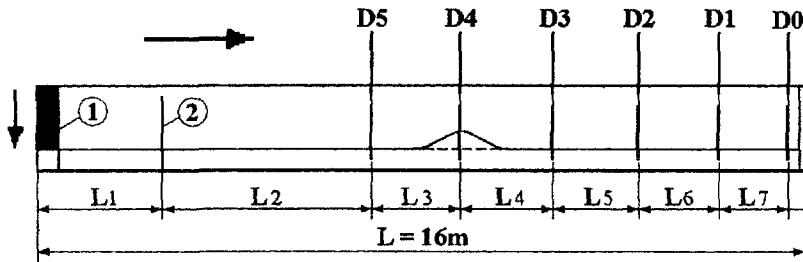


Рис. 1. Схема лабораторного канала:

- 1 – генератор волн;
- 2 – оборудование для отсекающего дисперсионного «хвоста»;
- $L_1$  – расстояние от торцевой стенки лотка до отсекающего;
- $L_2$  – расстояние от отсекающего до датчика  $D_5$ ;
- $L_3, \dots, L_7$  – расстояния между датчиками в лотке;
- $D_0, \dots, D_5$  – емкостные датчики.

Стрелка указывает направление распространения уединенной волны

Генерация уединенных волн производилась путем создания локального подъема уровня воды, который возникал при падении тяжелого тела на дно лотка. Генератор волн (1 на рис. 1) имел форму прямоугольной призмы ( $0.23 \times 0.3 \times 0.75$  м). Дальнейшая эволюция возмущения приводила к формированию одной уединенной волны. Дисперсионный «хвост», который возникал при генерации волны, отсекался с помощью специального оборудования (2 на рис. 1). Отметим, что эффективность производимого отсекающего уменьшается с увеличением глубины воды в лотке, но, тем не менее, интенсивность дисперсионного «хвоста» остается малой.

В противоположном конце лотка устанавливались модели береговых склонов с разными углами наклона к горизонту. Регистрация деформации свободной поверхности при прохождении уединенной волны производилась протяженными емкостными датчиками ( $D_0 - D_5$ ) (рис. 1). Сигнал от датчиков подавался на аналогово-цифровой преобразователь, соединенный с персональным компьютером. Величина временного интервала между регистрируемыми данными составляла 5 мсек для каждого датчика. Более подробно установка описана в [10].

Эксперименты по исследованию взаимодействия уединенной волны с вертикальной стенкой и береговыми склонами проводились для следующих глубин воды в лотке: 8 см, 11 см, 17 см, 23 см. Датчики были частично заглублены в воду. Перед пробегами осуществлялась их тарировка путем заглубления в воду на заданные глубины, в результате чего находилась регрессионная зависимость между сигналом от датчиков и величиной заглубления. В процессе проведения экспериментов датчики располагались вдоль оси лотка, что позволило определить скорость распространения волны, её амплитуду и форму профиля.

**Результаты экспериментальных исследований.** После генерации волна движется вниз по потоку, и подъем уровня свободной поверхности, вызванный распространяющейся волной, регистрируется датчиками. На рис. 2 приведена типичная форма уединенной волны, полученная в результате обработки данных экспериментов.

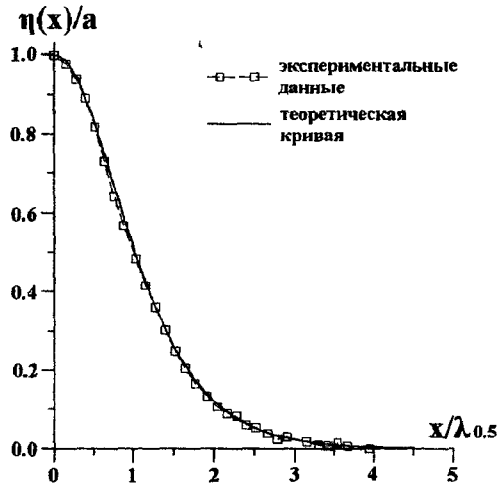


Рис. 2. Форма профиля уединенной волны  $\eta(x)/a$  по отношению к  $x/\lambda_{0.5}$ ,  $\lambda_{0.5}$  – расстояние от точки, которая отвечает гребню волны, до точки, которая отвечает половине амплитуды волны [11]

Сплошная кривая на рис. 2 соответствует теоретическому профилю уединенной волны (решение уравнения Кортевега–де Вриза) [12]

$$\eta = a \cdot \operatorname{sech}^2 \left[ \left( \frac{3a}{4H^3} \right)^{1/2} x \right],$$

где  $a$  – амплитуда уединенной волны;  $H$  – глубина воды в лотке.

Из рис. 2 видно, что волны, которые формируются в эксперименте, являются типичными нелинейными уединенными волнами.

**Взаимодействие уединенных волн с береговыми склонами.** После генерации уединенная волна с амплитудой  $a$  распространяется в волновом лотке по направлению к склону, движется вверх по склону, и в конечном итоге величина наката достигает своего максимального значения  $R$ . Результаты исследования величины наката в зависимости от параметров уединенной волны для разных глубин приведены в [10]. В данной работе основное внимание уделено процессу отражения волн.

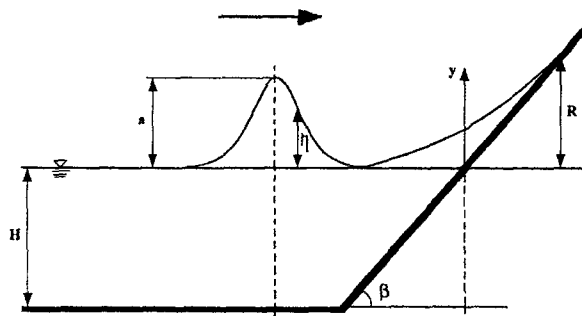


Рис. 3. Эскиз наката уединенной волны

Как известно, существует два режима взаимодействия уединенных волн с береговым склоном: без обрушения и с обрушением волны в процессе наката. Согласно [13], при накате уединенных волн на склон более чем  $10^\circ$ , волны не разрушаются. Так как эксперименты проводились с крутыми и средними склонами, уединенные волны распространяются вдоль лабораторного лотка, заполненного жидкостью постоянной глубины, и движутся вверх по склону без обрушения. На рис. 4,а и 4,б показаны профили свободной поверхности воды, полученные в результате обработки цифровых фотографий процесса наката волн на склон, когда уединенные волны с амплитудой  $a = 0.26H$  взаимодействуют с вертикальной стенкой и береговым склоном с углом  $30^\circ$ , соответственно. Глубина потока составляла 11 см. Отметим, что начало координат ( $x = 0$ ) расположено на пересечении невозмущенной поверхности воды (уреза воды) и склона.

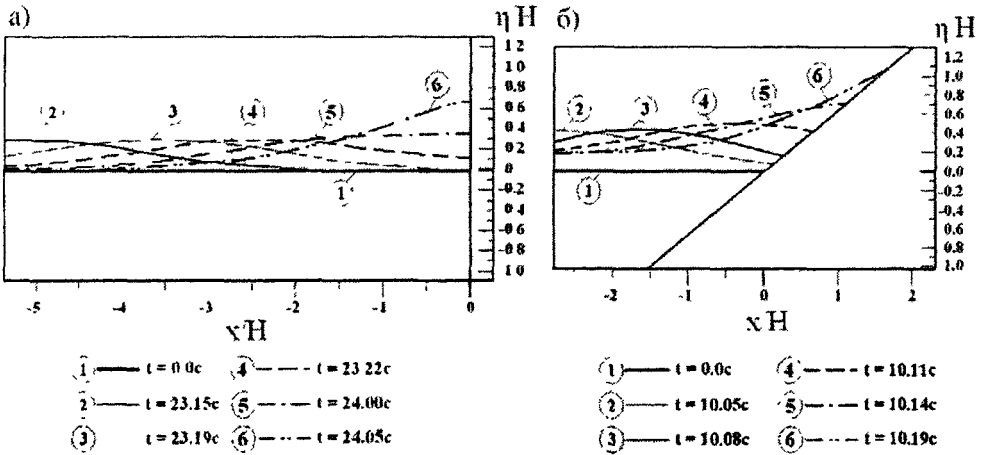


Рис. 4. Накат уединенной волны на береговой склон при  $a / H = 0.26$  :

а)  $\beta = 90^\circ$  ; б)  $\beta = 30^\circ$

Из рисунков видно, что форма свободной поверхности в различные моменты времени является плавной кривой, то есть обрушения волны не происходит. При уменьшении угла склона форма свободной поверхности укручается. Анализ результатов экспериментальных исследований [10] показал, что высота наката уединенной волны возрастает при увеличении относительной высоты волны и при уменьшении угла наклона берегового склона до определенных пределов. Аналогичная картина наблюдается и на рис. 4,а и 4,б.

При взаимодействии уединенных волн с береговыми склонами после достижения положения максимального наката начинается процесс отката (wave run-down) – язык наката отступает вниз по склону, и в этот момент начинается генерация отраженной волны, распространяющейся от берегового склона. В течение этого процесса, часть энергии отражается от склона, а часть энергии диссипирует [14]. На рис. 5,а и 5,б представлены результаты обработки цифровых фотографий процесса



отката уединенной волны при взаимодействии с вертикальной стенкой и береговым склоном с углом  $30^\circ$ , соответственно. Глубина потока была та же, что и на рис. 4.

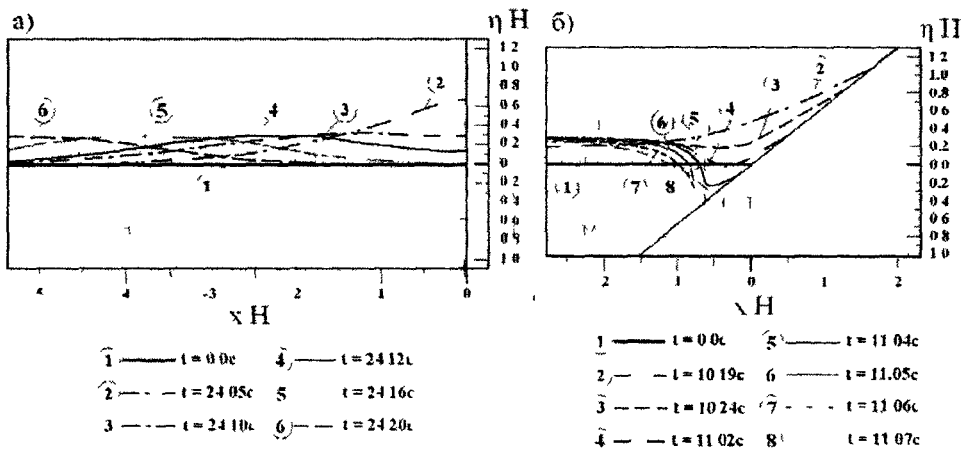


Рис. 5. Откат уединенной волны при  $a/H = 0.26$ : а)  $\beta = 90^\circ$ ; б)  $\beta = 30^\circ$

Сравнение рис. 4,а и 5,а показывает, что формы кривых свободной поверхности в процессе наката уединенной волны на вертикальную стенку мало отличаются от аналогичных форм при откате волны. Это приводит к тому, что в процессе отката профиль отраженной уединенной волны имеет форму, близкую к форме падающей волны. Разница амплитуд падающей и отраженной волн не превышает 5%.

Картина существенным образом меняется при взаимодействии уединенной волны с береговым склоном, имеющим угол  $30^\circ$  по отношению к горизонту. При откате волны возникает значительное локальное понижение свободной поверхности. В это же время происходит генерация отраженной волны, но заметно меньшей амплитуды. Локальное понижение уровня свободной поверхности, в данном случае, обуславливает генерацию волн относительно малой длины волны, которые распространяются от склона вслед за отраженной уединенной волной в виде цуга волн (дисперсионного «хвоста»).

На рис. 6 и 7 представлены записи данных, полученных одним из датчиков (D3) на протяжении одного пробега при глубине воды в лотке 11 см при взаимодействии уединенной волны с вертикальной и наклонной стенками, соответственно. Сначала датчик записывает возмущение свободной поверхности, вызванное падающей волной (1, рис. 6 и 7). Потом датчик регистрирует волну, которая отразилась от вертикальной стенки (2, рис. 6) и волну, которая отразилась от берегового склона с углом  $30^\circ$  (2, рис. 7). Затем волна движется вверх по потоку и отражается от пластины, которая отсекает дисперсионный «хвост», и распространяется вниз по потоку (3, рис. 6 и 7).

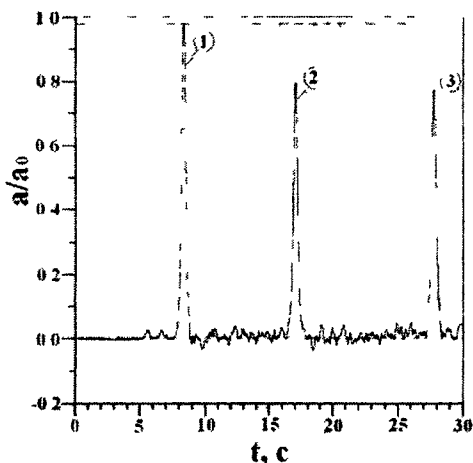


Рис. 6. Возмущение свободной поверхности при распространении уединенной волны в лотке с вертикальной стенкой при глубине воды  $H = 11$  см (датчик D3, рис.1): 1 – возмущение свободной поверхности, вызванное распространением волны; 2 – волна, отраженная от вертикальной стенки; 3 – волна, отраженная от пластины, отсекающей дисперсионный «хвост»

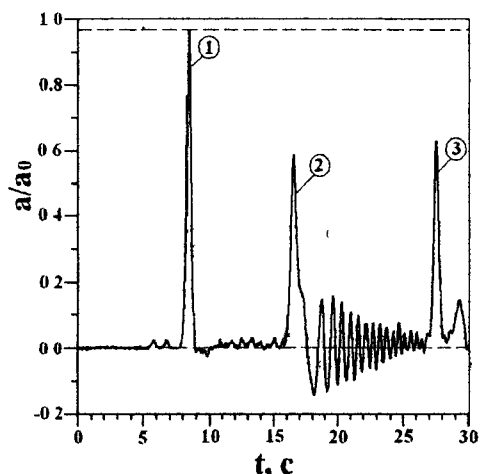


Рис. 7. Возмущение свободной поверхности при распространении уединенной волны в лотке с береговым склоном  $30^\circ$  при глубине воды  $H = 11$  см (датчик D3, рис.1): 1 – возмущение свободной поверхности, вызванное распространением волны; 2 – волна, отраженная от берегового склона с углом  $30^\circ$ ; 3 – волна, отраженная от пластины, отсекающей дисперсионный «хвост»

Из рис. 6 видно, что уединенная волна, распространяющаяся вдоль канала, отражается от вертикальной стенки без каких-либо изменений, кроме незначительного уменьшения амплитуды. При взаимодействии уединенной волны с береговым склоном, установленным под углом  $30^\circ$  (рис. 7), наблюдается заметное уменьшение амплитуды отраженной волны, искажение формы заднего фронта отраженной волны и образование дисперсионного цуга волн. Согласно [15], волна, отраженная от стенки, уже не является солитоном; на малом расстоянии от склона за гребнем следует ложбина, на большом – гребень превращается в солитон, за которым тянется осциллирующий хвост. Так как скорость уединенной волны больше скорости дис-

персионного «хвоста», при дальнішому розповсюдженні хвиля буде скидати зайву енергію і відірватися від хвостового шляху.

На рис. 8 і 9 показані спектри коливань (дисперсійного «хвоста») для глибини води в лотці 11 см.

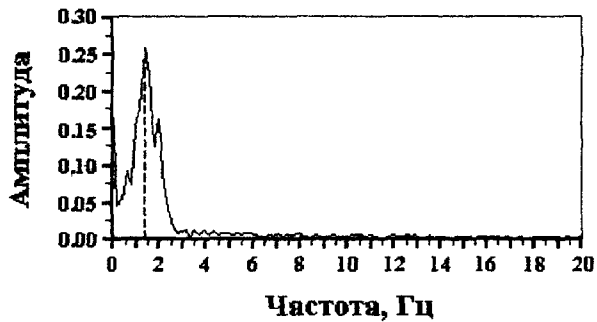


Рис. 8. Спектр амплітуд дисперсійного хвоста хвилі, утвореного при відбитті унітарної хвилі від берегового схилу  $60^\circ$

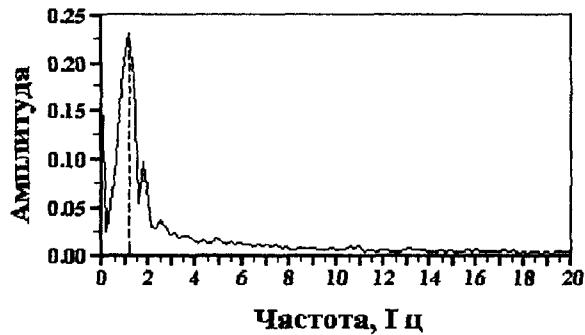


Рис. 9. Спектр амплітуд дисперсійного хвоста хвилі, утвореного при відбитті унітарної хвилі від берегового схилу  $17^\circ$

Виявлено, що спектри дисперсійного хвоста хвилі, утвореного при відбитті унітарної хвилі від схилів  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ , близькі за формою, їх максимуми спостерігаються при 1,4 – 1,5 Гц, коли глибина води в лотці дорівнює 11 см. З збільшенням глибини води основна частота хвиль падає, і, в частині, становить 1,2 – 1,3 для глибини 17 см. Відзначимо, що для берегового схилу з кутом  $17^\circ$  максимум спектра зсувається до 1,1 Гц – для 11 см, до 1,0 Гц – для 17 см. Це граничні значення кутів берегових схилів, досліджені в роботі. Даліше зменшення кута призводить до того, що при відбитті унітарна хвиля не формується, і відбиті хвилі представляють собою пакет хвиль, розповсюджуються вгору по потоку.

Аналіз результатів показує, що суттєве змінення кута схилу має невелике вплив на основну частоту хвиль в дисперсійному «хвості». Але, з іншої сторони, змінення глибини води призводить до помітного змінення основної частоти хвиль. Це свідчить про те, що основна частота хвиль в дисперсійному «хвості», по-видимому, визначається дисперсійним співвідношенням.

**Отражение уединенных волн.** Волновое движение в передней части отражающей конструкции, в основном, определяется коэффициентами отражения по амплитуде  $K_a = a_r/a_i$ , и по энергии  $K_E = E_r/E_i$ . Здесь  $a_r$  и  $a_i$  – амплитуда отраженной и падающей волны, соответственно;  $E_r$  – энергия отраженной волны,  $E_i$  – энергия падающей волны, соответственно. В свою очередь коэффициент отражения для наклонной плоскости зависит от угла наклона, шероховатости поверхности и пористости. Также волновое отражение зависит от крутизны падающей волны и ее длины.

На рис. 10 представлены значения коэффициента отражения по амплитуде, полученные при обработке данных экспериментальных исследований для глубин 11 см и 17 см, в зависимости от угла наклона берегового склона к горизонту. Отметим, что амплитуда волн составляла  $a = 0.3H$  для опытов с глубиной воды 11 см и  $a = 0.21H$  – с глубиной 17 см. Анализ результатов показал, что изменение амплитуды уединенной волны слабо влияет на величину коэффициента отражения при фиксированных значениях глубины  $H$  и угла склона.

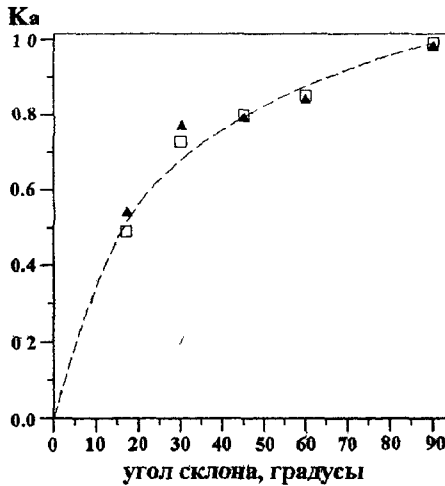


Рис. 10. Значение коэффициента отражения  $K_a$  по амплитуде уединенной волны по отношению к углу наклона берегового склона к горизонту:  
 $\blacktriangle$  – для глубины воды 11 см,  $\square$  – для глубины воды 17 см

Для определения коэффициента отражения по энергии необходимо проводить оценку энергии уединенных волн. Известно, что для уединенных волн относительно небольшой амплитуды величина кинетической энергии близка к величине потенциальной энергии и для оценки общей энергии волны можно использовать следующую зависимость [14]:

$$E = \rho \cdot g \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx ,$$

где  $\rho$  – плотность жидкости.

На рис. 11 представлены рассчитанные значения коэффициента отражения по энергии для глубин воды в лотке 11 см и 17 см при тех же параметрах волн, которые описаны выше.



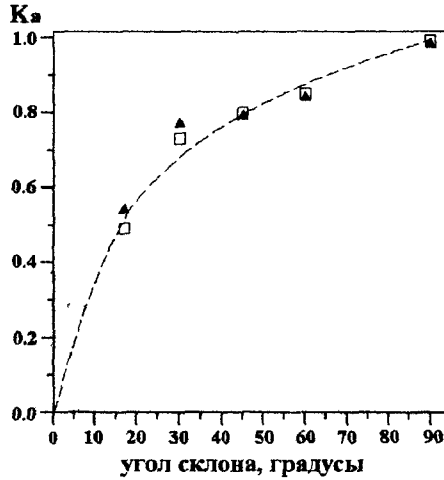


Рис. 11. Значение коэффициента отражения  $K_E$  по энергии уединенной волны по отношению к углу наклона берегового склона к горизонту:  
▲ – для глубины воды 11 см, □ – для глубины воды 17 см

На рис. 10 и 11 можно видеть быстрое возрастание коэффициента отражения с изменением угла берегового склона от  $0^\circ$  до  $30^\circ$ , затем при дальнейшем увеличении угла рост заметно замедляется (режим насыщения). При определении коэффициента отражения по энергии (рис. 11) характер поведения кривой, построенной по результатам вычисления, немного меняется. Это свидетельствует о том, что величина энергии зависит не только от амплитуды уединенной волны, но и от ее скорости и длины. Отметим также, что с уменьшением угла склона интенсивность отраженной волны падает.

**Выводы.** В работе проведено экспериментальное исследование распространения и взаимодействия поверхностной уединенной волны с вертикальной стенкой и береговыми склонами. Получены основные характеристики волн, распространяющихся в лотке. Показано, что уединенные волны описываются уравнением Кортевега–де Вриза, то есть ль волны совпадает с классическим профилем, который описывается законом « $sech^2$ ». Модифицированный метод генерации уединенных волн, используемый в исследованиях, позволяет генерировать солитоны с малой интенсивностью дисперсионного «хвоста». Использование этого метода позволило найти коэффициенты отражения уединенных волн от склонов, определение которых при наличии «хвостов» дает значительную ошибку. Обнаружено, что после отражения часть энергии уединенной волны затрачивается на формирование дисперсионного пучка и, естественно, на трение жидкости о дно. В результате – амплитуда волны падает, что приводит к уменьшению скорости распространения отраженной волны. Основная частота волн в дисперсионном «хвосте» слабо зависит от угла склона, в то же время увеличение глубины воды вызывает существенное уменьшение частоты волн. Сделан вывод о том, что частота определяется, в основном, дисперсионным соотношением. Показано, что отражение уединенной волны падает с уменьшением угла склона.

## Библиографические ссылки

1. **Maxworthy T.** Experiments on collisions between solitary waves / T. Maxworthy // *J. Fluid Mech.* – 1976. – 76. – P. 177–185.
2. **Su C. H.** On head-on collisions between two solitary waves / C.H. Su, M. Mirie Rida // *J. Fluid Mech.* – 1980. – 98, part 3. – P. 509–525.
3. **Rida M. Mirie.** Collisions between two solitary waves. Part 2. A numerical study / M. Mirie Rida, C.H. Su // *J. Fluid Mech.* – 1982. – 115. – P. 475–492.
4. **Byatt-Smith J. G. B.** The reflection of a solitary wave by a vertical wall / J. G. B. Byatt-Smith // *J. Fluid Mech.* – 1988. – 197. – P. 503–521.
5. **Hammack J.** Solitary-wave collisions / J. Hammack, P. Guyenne, D. Henderson, M. Yi // *A Symposium to honor Theodore Yao-Tsu Wu, OMAE 2004, June 21-22, 2004, Vancouver, BC Canada.* – P. 1–12.
6. **Craig W.** Solitary water wave interactions / W. Craig, P. Guyenne, J. Hammack, D. Henderson, C. Sulem // *Physics of Fluids.* – 2006. – 18, 057106. – P. 1–25.
7. **Renouard D.P.** Experimental study of the generation, damping, and reflexion of a solitary wave / D.P. Renouard, F. J. Seabra Santos, A. M. Temperville // *Dynamics of Atmospheres and Oceans.* – 1985. – 9. – P. 341–358.
8. **Tanaka Mitsuhiro.** Mach reflection of a large-amplitude solitary wave / Mitsuhiro Tanaka // *J. Fluid Mech.* – 1993. – 248. – P. 637–661.
9. **Cooker M. J.** Reflection of a high-amplitude solitary wave at a vertical wall / M. J. Cooker, P. D. Weidman and D. S. Bale // *J. Fluid Mech.* – 1997. – 342. – P. 141–158.
10. **Городецький О.В.** Генерація, розповсюдження та накат відокремлених хвиль на берегові схили / О.В. Городецький, А.С. Котельнікова, В.І. Нікішов, В.В. Олексюк та ін. // *Прикладна гідромеханіка.* – 2010. – 12 (84), N1. – С. 40–47.
11. **Koop C.G.** An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system / C.G. Koop, G. Butler // *J. Fluid Mech.* – 1981. – 112. – P. 225–251.
12. **Hammack J.L.** The Korteweg–de Vries equation and water waves. Part 2. Comparison with experiments / J.L. Hammack, H. Segur // *J. Fluid Mech.* – 1974. – 65. – P. 289–314.
13. **Street R.L.** Observations and experiments on solitary wave deformation / R.L. Street, F.E. Camfield // *Proc. 10<sup>th</sup> Conference Coastal Engineering.* – 1966. – P. 284–301.
14. **Li Ying.** Energy Balance Model for Breaking Solitary Wave Runup / Ying Li, Fredric Raichlen // *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering.* – 2003. – 47. – P. 47–59.
15. **Пелиновский Е.Н.** Гидродинамика волн цунами / Е.Н. Пелиновский // *ИПФ РАН. Нижний Новгород.* – 1996. – 276 с.

Надійшла до редколегії 11.10.10

УДК 523.2 +532.5

В.І. Перехрест

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

## ЗАКОН ПЛАНЕТНИХ ВІДСТАНЕЙ У ВИХРОВІЙ ТЕОРІЇ ПЛАНЕТАРНИХ СИСТЕМ

На основі теоретичного аналізу математичної вихрової моделі планетарних систем отримано аналітичний вираз для планетних відстаней у сформованих планетарних системах. Ці відстані є функціями координат центрів вихрових кілець первинного планетарного вихору. Порівняння теоретичних і реальних відстаней планет Сонячної системи показує їх добре узгодження.

*Ключові слова* планетарний вихор, планетні відстані, закон Тициуса-Бодє

На основі теоретичного аналізу математическої вихрової моделі планетарних систем отримано аналітичне вираження для планетних відстаней в сформованих планетарних системах. Ці відстані є функціями координат центрів вихрових кілець первинного планетарного вихря. Сравнення теоретических і реальних відстаней планет Сонячної системи дає їх хороше відповідність.

*Ключевые слова* планетарный вихрь, планетные расстояния, закон Титиуса-Бодє

Based on theoretical analysis of mathematical vortex model of planetary systems the analytical expression for planetary distances in the prevailing planetary systems was obtained. These distances are functions of the coordinates of the centers of vortical rings of primary planetary vortex. Comparison of theoretical and real distances planets of the Solar system shows their good agreement.

*Key words* planetary vortex, planetary distances, law of Tytius-Bode

**Вступ.** Відомий у космогонічних теоріях Сонячної системи закон планетних відстаней Тициуса-Бодє (1772 р.)

$$r_n = 0,4 + 0,3 \cdot 2^n \text{ а.о.} \quad (1)$$

є вдалим емпіричним наближенням реальної послідовності відстаней планет від Сонця. При цьому першій планеті – Меркурію відповідає значення  $n = -\infty$ , Венері  $n = 0$ , Землі  $n = 1$  і т. д., а умовній несформованій планеті між Марсом і Юпітером треба приписати значення  $n = 3$ . Попри чудову відповідність цього закону для середнього ряду планет, для першої та віддалених планет Нептуна й Плутона закон (1) не виконується [1].

У ХХ-му столітті були здійснені деякі спроби [2; 3] теоретично отримати закон планетних відстаней, але в основі цих теорій авторам довелося закладати нові довільні гіпотези. Так, О.Ю. Шмідт [2] вводить гіпотетичну функцію розподілу кінетичних моментів за масами первинної туманності і для найпростіших функцій отримує квадратичний закон, геометричну прогресію та ін. Г.П. Койлер [3] виводить свій закон на основі теорії припливної стійкості з використанням поняття «критичної густини Роша». Проте, отриманий ним закон на кілька порядків розбігається з реальними відстанями між планетами.

Нижче на основі математичної вихрової моделі утворення планетарних систем [5; 6] отримано аналітичний закон планетних відстаней для будь-яких планетарних систем, який дає хороше узгодження з реальними відстанями у Сонячній системі, хоча за формою відрізняється від (1). Ця модель, розвинена в [5; 6; 8], є теоретичним обґрунтуванням вихрової гіпотези Вайцзекера (1944 р.) про утворення Сонячної системи потужним просторовим вихором, у якому було стільки вихрових зон, скільки є великих планет [4]. Однак структура нашого планетарного вихору відрізняється від вихрової моделі в гіпотезі Вайцзекера.

**Теорія планетарного вихора.** Загальну картину та основні співвідношення у первинному вихровому вибухові, який створює зірки та їх планетарні системи, побудовано в [6] на основі окремого точного розв'язку гідродинамічних рівнянь Ейлера для сферичних вихрових течій [5]. Головною фізичною особливістю цієї осесиметричної просторової течії, названої планетарним вихором [6], є наявність у центрі вихрового диполя, який обтікається рухомих закрученим потоком космічного простору. Взаємодія цих рухів породжує вихорову течію планетарного вихору з квазіперіодичними хвилями збурення (рис. 1). Наведемо нижче основні формули та співвідношення цього розв'язку, які будуть необхідними для нашого дослідження.

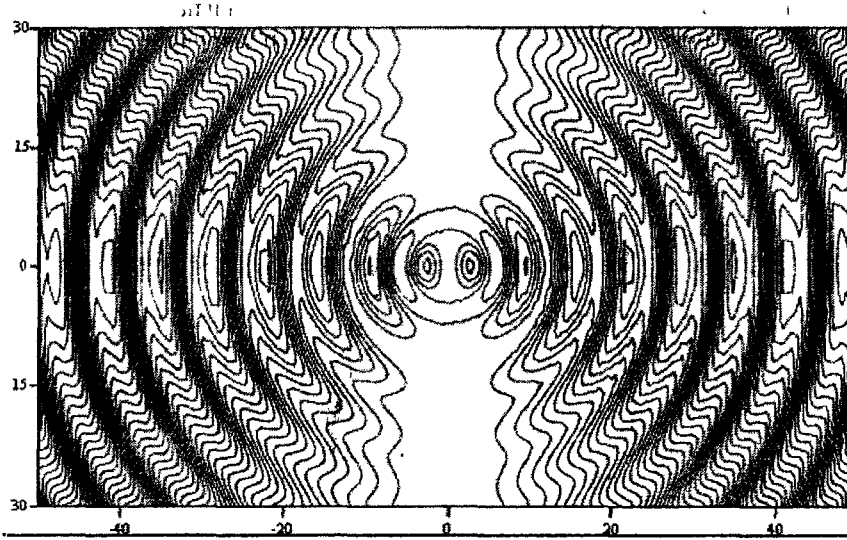


Рис. 1. Загальний вигляд планетарного вихору структури (2,11)

Методика інтегрування повної нелінійної системи гідродинамічних рівнянь Ейлера полягає у введенні, як звичайно [7], функції течії  $\Psi(y, \theta)$ , побудові спеціальних форм представлення визначальних функцій та, зрештою, відокремлення змінних. Таким чином побудована функція течії у сферичних координатах  $(r, \theta, \varphi)$  [5], неперервний варіант якої має таку форму:

$$\Psi = C_2 \Phi(y) \sin^2 \theta, \quad \Phi(y) = \left[ \alpha y^2 + \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right] \quad (2)$$

Через функцію (2) поле швидкостей визначається формулами [7]:

$$V_r = -\left( r^2 \sin \theta \right)^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = \left( r \sin \theta \right)^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad V_\varphi = \frac{C_0 \Psi}{r \sin \theta} \quad (3)$$

У розгорнутому вигляді за формулами (2), (3) маємо поле швидкостей:

$$\begin{aligned} V_r &= -2C_2 C_0^2 \left( \alpha + \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right) \cos \theta \\ V_\theta &= C_2 C_0^2 \left( 2\alpha - \frac{\sin y}{y} - \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right) \sin \theta \\ V_\varphi &= C_2 C_0^2 y \left( \alpha + \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right) \sin \theta \end{aligned} \quad (4)$$

Вище введено безрозмірну радіальну координату  $y = C_0 r$  і параметр  $\alpha$ , який зрештою визначається [8] через основні параметри течії таким чином

$$\alpha = -\frac{V_\infty}{2C_0^2 C_2}, \quad (5)$$

де  $V_\infty$  – поступальна швидкість закрученого простору,  $C_2$  – довільна стала, яка виражає момент центрального вихрового диполя;  $C_0$  – параметр закручування простору, що впливає з формули (3).

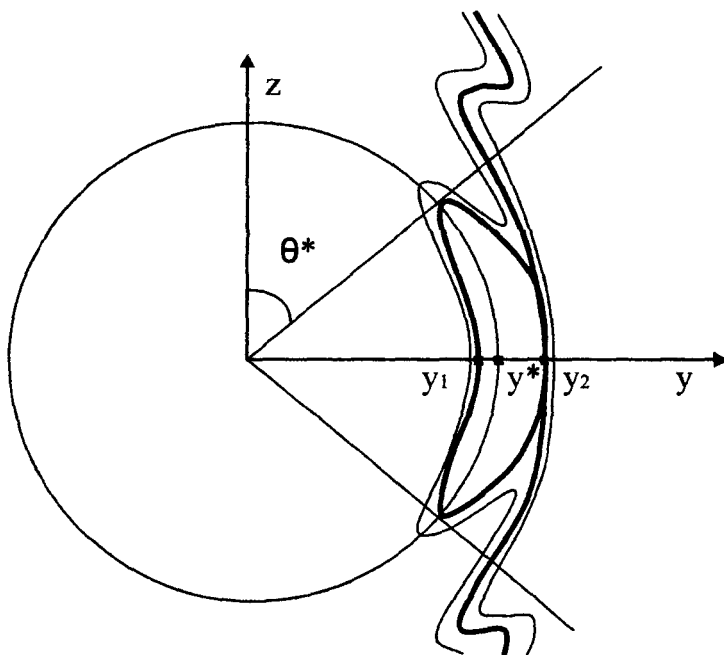


Рис. 2. Геометрія та параметри тороїдного вихрового кільця

Геометричну картину вихрової течії з полем швидкостей (4) дає поле ліній течії (рис. 1), які є меридіональними перерізами осесиметричних поверхонь течії, що є торами, утвореними обертанням зображених ліній навколо вертикальної осі  $Oz$ . Рівняння поверхонь течії породжуються умовою  $\Psi(y, \theta) = C$  або з огляду на (2)

$$\Phi(y) \sin^2 \theta = C, \quad (6)$$

де  $C$  – довільна стала. Лінії ж течії лежать на цих поверхнях і мають вигляд просторових спіралей, навитих на тороїдні поверхні течії.

Планетарний вихор, зображений на рис. 1, має два внутрішніх тороїдних вихори, що знаходяться всередині двох нерухомих і непроникних сфер та обертаються у протилежних напрямках. Крім того, в течії існує низка зовнішніх торових кілець – 11, які обертаються в один бік і обтікаються незамкнутими лініями течії. Вихрові зони цих кілець відокремлюються від основної течії петлею сепаратриси – лінії течії, яка має точку самоперетину (рис. 2).

Структури  $(n, m)$  вихора, тобто кількість внутрішніх  $(n)$  та зовнішніх  $(m)$  вихорів визначається параметром  $\alpha$  у розв'язку (2). У [8] детально проаналізовано залежність структур  $(n, m)$  планетарних вихорів від параметра  $\alpha$  та встановлено критичні значення цього параметра, при яких відбуваються біфуркації суміжних вихрових структур.

Параметри торових кілець планетарного вихору (2,11)

№ вихора (планети)	$p_1$	$y^*$	$p_2$	$\theta^*$ рад.
1(Сонце)	0	2,79026114	4,63822496	0
2(Сонце)	4,63822496	6,03419312	7,3590513	0
3(1)	7,36416294	9,44279805	12,32219138	0,05378797
4(2)	14,05479202	15,85435860	18,54971972	0,77368502
5(3)	20,65132327	22,24209605	24,76167868	1,02574913
6(4)	27,20957617	28,62398544	30,96568847	1,17671320
7(5)*	33,74923231	35,00553545	37,16351818	1,27803419
8(6)	40,28122905	41,38978337	43,35502601	1,35112878
9(7)	46,81397240	47,77942842	49,53890086	1,40681551
10(8)	53,35626851	54,17790040	55,71246457	1,45123869
11(9)	59,92070050	60,59086484	61,87049552	1,48829250
12(10)	66,53253005	67,03060790	68,00098738	1,52092619
13(11)	73,28303744	73,54281412	74,05844130	1,55296938

У подальшому розглянемо планетарний вихор структури (2, 11), який у деякому наближенні моделює Сонячну систему в фазі її зародження (рис.1). Цій структурі відповідає значення  $\alpha = \tau 0,00655$  у формулі (2). Центри скелетних кіл торових кілець  $y^*$  та точки перетину сепаратрис  $p_2$  знаходяться як особливі точки поля швидкостей (4) з умов [8]:

$$\begin{aligned} V_r(y, \theta) &= 0, \\ V_\theta(y, \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Ці два рівняння внаслідок симетрії поля (4) зводяться до одного трансцендентного рівняння

$$\frac{\sin y}{y} + \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) - 2\alpha = 0, \quad (8)$$

послідовні корені якого ( $y_k^*$ ,  $p_k$ ),  $k = 1, 2, \dots, 13$  і є центрами торових кілець  $y_k^*$  та сідловими точками сепаратрис  $p_k$ . У таблиці 1 подано значення геометричних параметрів усіх 13 торових вихорів, а в таблиці 2 ще й кутові швидкості  $\omega_k^*$  обертання їх центральних кіл.

Перші дві точки  $y_1^*$ ,  $y_2^*$  відповідають двом внутрішнім вихорам і не мають спарених з ними значень  $p_1, p_2$ , – їх роль відіграють радіуси непроникних сфер. Точки  $y_k^*$  у відповідності з [6] стають центрами скупчення мас і зародження майбутніх планет. Тому величини ( $y_k^*$ ,  $\omega_k^*$ ) є первинними параметрами геометрії й руху тороїдних вихорів, з яких після тривалої еволюції утворюється планетарна система.

**Еволюція первинного вихору до планетарної системи.** Описаний вище планетарний вихор, як складна вихрова течія, є початковим етапом утворення зіркової планетарної системи з первинної туманності, що потрапила до області вихору. Подальша тривала еволюція цього вихору до стану планетарної системи характеризується різноманітними складними фізичними процесами як-то: зіткнення, акреція, скупчення масивних тіл та їх гравітація; утворення масивної зірки та її світлова і гравітаційна дія; взаємний гравітаційний та резонансний вплив структур системи тощо [1].



Будемо вважати, що всілякі маси (гази, пари, пил, тіла), що потрапили до області вихору, зрештою сконцентруються у маси Сонця, планет та їх супутників. Тут слід відзначити, що описаний вище рух у первинному вихорі в першу чергу стосується таких складових хмари як газу, пари і дуже дрібний пил. Невеликі частки та тіла, вірогідно, лише частково будуть втягнуті в рух вихору, і на них ще буде діяти градієнтне силоне поле тиску в течії [6], а у подальшому – ще і сили гравітації Сонця і великих планет. Далі, оскільки ми не знаємо первинного розподілу густини мас в області кожного тороїдного кільця, будемо вважати у першому наближенні цей розподіл рівномірним з одиничною густиною. При такому підході кінетичний момент маси замінюється на кінетичний момент об'єму, який прийнято називати питомим кутовим моментом [1]. Стосовно розподілу кутових моментів планет Сонячної системи в [9] показано дуже добрий збіг теоретичних даних моделі планетарного вихору з реальними даними, що також є обґрунтуванням висловленої вище гіпотези.

Оскільки сили гравітації, зіткнень та інші, які діють між частинами окремого вихору, є внутрішніми, то вони не змінюють його інтегральних фізичних інваріантів, зокрема, кінетичного моменту відносно осі  $Oz$ . Інші сили, такі як градієнтна сила Архімеда, та гравітаційна сила тяжіння Сонця є вісесиметричними і також дають нульові осеві моменти. Тому до основи співвідношення між первинним {1} і кінцевим {2} станами кожного тороїдного кільця покладемо закон збереження його осевого кінетичного моменту.

Позначимо масу вихорового кільця, первинний радіус його центра та кутову швидкість відповідно через  $m$ ,  $r_1$ ,  $\omega_1$  (індекси  $k$  та \* опустимо). Кутову швидкість центра тора  $\omega_1$  виразимо з формул (4) для колової швидкості як  $\omega_1 = V_\varphi/r_1$  і подамо у вигляді

$$\omega_1 = C_0^3 C_2 \cdot \bar{\omega}_1(y), \quad \text{де} \quad \bar{\omega}_1 = \left( \alpha + \frac{1}{y_1^2} \left( \cos y_1 - \frac{\sin y_1}{y_1} \right) \right) \quad (9)$$

– безрозмірна величина, яка для великих значень  $y_1 \rightarrow +\infty$  має порядок  $O(\alpha)$ .

Таблиця 2

Теоретичні та реальні значення планетних відстаней у Сонячній системі.

№ вихора (планети)	$y^*$	$10^{-11} r_1$ теор.м	$100\omega^*$ теор.	$10^{-11} r_2$ теор м	$10^{-11} r_2$ експ м	$10^{-8} \omega_2$ теор	$10^{-8} \omega_2$ експ	$\Delta r$ %	$\Delta K$ m%
1 Сонце	2,79026	0,222254	14,2989						
2 Сонце	6,03419	0,480644	2,1188						
3(1)	9,44280	0,752152	1,7742	0,1440	0,5791	667,33	82,63	75	50
4(2)	15,85436	1,262855	1,0449	0,39703	1,0821	145,813	32,388	63	39
5(3)	22,2421	1,771660	0,84855	1,0142	1,496	35,7150	19,884	32	17
6(4)	28,62398	2,28	0,76820	2,2796	2,28	10,595	10,596	0	0
7(5)*	35,00554	2,788313	0,72754	4,5743*	4,5743	3,7286	3,7283	0	0
8(6)	41,38978	3,296840	0,70406	8,3724	7,7855	1,50576	1,680	-8	-4
9(7)	47,77943	3,805798	0,68917	14,245	14,334	0,6756	0,6756	1	0
10(8)	54,1779	4,315458	0,67900	22,861	28,725	0,3337	0,2371	20	11
11(9)	60,59087	4,826273	0,67157	34,984	44,986	0,17629	0,1208	22	12
12(10)	67,0306	5,339221	0,66565	51,480	59,064	0,0988	0,0806	13	7
13(11)	73,5428	5,857941	0,65995	73,324	72,062	0,0581	0,0699	-2	-1

Після еволюції мас вихрового тора до стану твердої планети у полі тяжіння зірки її параметри, окрім маси, набудуть нових значень  $r_2$ ,  $\omega_2$ . Закон збереження осьового моменту дає рівняння

$$m\omega_1 r_1^2 = m\omega_2 r_2^2. \quad (10)$$

Після утворення Сонця та формування твердої планети її рівноважною орбітою буде коло радіуса  $r_2$ , на якому урівноважуються сила тяжіння Сонця та відцентрова сила обертання, тобто

$$f \frac{Mm}{r_2^2} = mr_2 \omega_2^2 \quad (11)$$

де  $M$  – маса зірки,  $f = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ нм}^2/\text{кг}^2$  – універсальна гравітаційна стала.

Розв'яжемо систему рівнянь (10), (11) відносно нових параметрів  $r_2$ ,  $\omega_2$  і надамо формулам безрозмірного вигляду, скориставшись формулою (9):

$$y_2 = \frac{C_0^3 C_2^2}{fM} (\bar{\omega}_1 y_1^2)^2, \quad (12)$$

$$\omega_2 = \frac{(fM)^2}{(C_0 C_2)^3 \bar{\omega}_1^3 y_1^6}. \quad (13)$$

Формула (12) і є законом планетних відстаней, який випливає з теорії планетарного вихору. Зважаючи на те, що залежність  $\bar{\omega}_1(y_1)$  за (9) є спадною і прямує до константи  $\alpha$ , закон планетних відстаней (14) є близьким до параболи четвертого степеня. Точніше, якщо з урахуванням (9) підрахувати функцію  $\bar{\omega}_1 y_1^2$ , то формулу планетних відстаней (12) можна переписати в остаточному вигляді

$$y_2 = K_y \left( \alpha y_1^2 + \cos y_1 - \frac{\sin y_1}{y_1} \right)^2 = K_y \Phi^2(y_1), \quad (14)$$

де  $K_y = C_0^3 C_2^2 / fM$  – стала величина для даної планетарної системи, а функція  $\Phi(y_1)$  дається формулою (2). З формули (14) видно, що другий і третій доданки є обмеженими, і для великих значень  $y_1$  у формулі (14) домінує перший доданок, що і дає зростання за параболою четвертого степеня. Та при досить малих значеннях  $\alpha$ , як у нас  $\alpha = -0,00655$ , оцінка  $\alpha y_1^2 > 10$  при  $|\cos y_1| \leq 1$  виконується для  $y_1 > 39,1$ , що знаходиться в околі 6-ї планети (табл.1).

Аналогічне перетворення формули (13) для кутових швидкостей дає

$$\omega_2 = K_\omega / \Phi^3(y_1), \quad (15)$$

де  $K_\omega = (fM)^2 / (C_0 C_2)^3$  – стала, що визначається параметрами системи.

Очевидно, що остаточне співвідношення між радіусами (14) та кутовими швидкостями (15) руху планет у полі тяжіння Сонця точно відповідає 3-му закону Кеплера  $r_2^3 \omega_2^2 = fM$ .

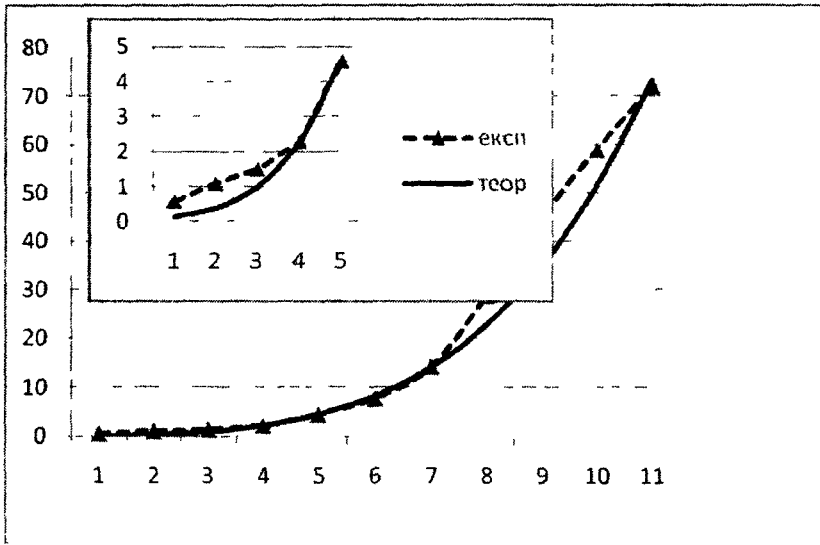


Рис. 3. Планетні відстані у Сонячній системі як функції номерів планет

За формулами (14), (15) було пораховано сучасні планетні відстані та кутові швидкості вихору структури (2, 11); відповідні значення цих величин наведено у табл. 2 та представлено на графіках (рис.3). Як бачимо, теоретична крива у всьому діапазоні відстаней є майже рівновіддаленою від кривої реального розподілу відстаней у Сонячній системі з відхиленнями в обидва боки порядку 20 %.

Для можливості порівняння довільна стала  $C_2$  вибиралася таким чином, щоб урівняти відстані та кутові швидкості 4-ї планети (Марса). Цей варіант порівняння є найкращим, бо це ж саме значення коефіцієнта відповідає порівнянню за відстанню та кутовою швидкістю також і 5-ї та 7-ї планети (Сатурна), що видно з таблиці 1. Це значить, що первинне співвідношення радіуса та кутової швидкості центра 4-го тороїда повинно відповідати їх рівноважним значенням для планети у полі тяжіння сформованого Сонця. Принаймні ясно, що така точка чи окіл рівноваги повинні існувати у первинному ряді значень  $r_1$ ,  $(0,75 \leq r_1 \leq 5,9) \cdot 10^{11}$  м або десь у проміжку між центрами.

Для обґрунтування цього положення порівнюємо закони зміни за радіусом кутової швидкості у планетарному вихорі (9) із законом кеплерового обертання

$$\omega_2 = (C_0)^{3/2} \sqrt{fM} y^{-3/2}, \quad (16)$$

обчисливши їх значення у центрах  $y = y^*$  вихорих кілець (табл. 2). Оскільки обидві функції є монотонно спадними на  $(0, \infty)$  і

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \omega_1 &= C_2 C_0^3 (\alpha - 1/3), & \lim_{y \rightarrow 0} \omega_2 &= +\infty, \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \omega_1 &= C_2 C_0^3 \alpha, & \lim_{y \rightarrow +\infty} \omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

то графіки сімейств функцій (9) і (16) при будь-якому виборі констант повинні мати одну точку перетину, яка і є вказаною вище точкою рівноваги. Це демонструє рис.4, де константи були підібрані так, щоб перетин відбувся на радіусі 4-го планетарного кільця.

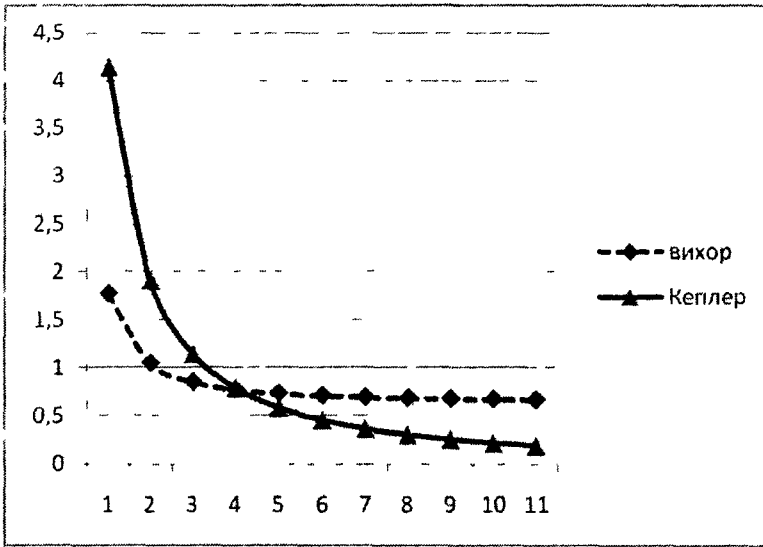


Рис. 4. Порівняння швидкостей обертання у планетарному вихорі з кеплеровим обертанням

Тоді сила тяжіння зірки притягує ближчі планети на менші відстані, а відцентрові сили зовнішніх планет з відносно більшими кутовими швидкостями віддаляють їх від первинних положень (рис. 3 і 4). Первинна система вихорів розходить на різні боки від точки рівноваги, причому зовнішні центри на досить значні відстані, – наприклад, 10-й центр з первинним радіусом  $r_{10}^{(1)} = 5,3392 \cdot 10^{11}$  м переходить на відстань Плутона у  $r_{10}^{(2)} = 59,064 \cdot 10^{11}$  м, що є в 11 разів більшою.

**Аналіз результатів та висновки.** У відсотковому відношенні відхилення  $\Delta r$  % теоретичних значень планетних відстаней від реальних у всьому діапазоні мають один порядок (табл. 1). При цьому, найкращу збіжність маємо для середніх планет, а найбільші відхилення – для перших, зокрема Меркурія. На рис. 3 у вставці зображено ці відхилення для перших 5-и планет. Значний їх рівень (40 – 70 %) можна пояснити сильним впливом Сонця, яке, по-перше, найбільше гальмувало обертання ближніх планет через припливну дію сили тяжіння, а по-друге – справляло на них найбільший світловий тиск. І перший, і другий чинники діяли в напрямку збільшення відстані планети, – насправді вона просто не наближувалась на теоретичну малу відстань з теоретичною високою швидкістю обертання (табл. 2).

Тому було порівняно теоретичні кінетичні моменти з реальними їх значеннями. Як видно з табл. 2, відхилення в кутових моментах  $\Delta K_m$  % перших планет є значно меншими, ніж відхилення окремо за радіусами та кутовими швидкостями. І все ж, перші тверді планети мають перевищення в кутових моментах до 50 % від первинного кінетичного моменту вихрового кільця зі сталою густиною в межах всього вихору. Тут ми приходимо до необхідності враховувати нерівномірний розподіл густини в зонах різних кілець, оскільки густини перших чотирьох планет Сонячної системи у 4–5 разів більші за густину зовнішніх паро-газових чи льодяних планет, а об'єми перших кілець у 1,5 – 2 рази менші за об'єми середніх кілець [9]. Величини питомих кутових моментів нівелюють цю різницю в густині [9], але вона

суттєво впливає на абсолютні значення кінетичних моментів вихрових кілець і, відповідно, планет, а через них і на їх кутові швидкості та радіуси.

Деякі відхилення радіусів далеких газо-парових планет від теоретичної кривої можна пояснити значною дисипацією енергії в торойдному струмені газопилової суміші при переважанні в ній газової складової. Взаємодія зовнішнього торойда з навколишнім простором відбувається на поверхні-сепаратрисі (рис. 2), яка межує з наскрізними потоками справа і зліва. Саме на цій поверхні й втрачається кінетичний момент торойда внаслідок тертя, нагрівання та електризації суміжних шарів граничного торойда і зовнішнього потоку. Внаслідок цих взаємодій обертання у торойді сповільнюється, а радіус, відповідно до закону збереження моменту, збільшується.

До таких же наслідків приводить і врахування впливу різних моделей акреції на обертання зародків планет [1]: майже у всіх моделях акреція сповільнює обертання.

Відповідно з численними оцінками та гіпотезами про існування 5-ї планети [1], яка або не сформувалася, або зруйнувалася, наше дослідження чітко вказує на те, що існував 5-й вихор та повинна була би утворитися 5-а планета між Марсом і Юпітером з параметрами, що наведені у табл. 1. Насправді, зараз у цьому околі існує пояс астероїдів з десятком малих планет-астероїдів, найбільшою з яких є Церера, що рухається по колу радіуса  $4,114 \cdot 10^{11}$  м (у табл. 1 теоретичний радіус 5-ї планети  $4,5743 \cdot 10^{11}$  м, а формула Тиціуса (1) дає значення  $4,1887 \cdot 10^{11}$  м). У табл. 1, 2 за реальні параметри 5-ї планети взято вказане вище теоретичне значення, яке позначено міткою \*.

Саме з цієї причини та ще з огляду на відкриття за Плутоном у поясі Койпера групи малих планет Іксіона ( $59,15 \cdot 10^{11}$  м), Куаоара ( $63 \cdot 10^{11}$  м), Варуни ( $64,5 \cdot 10^{11}$  м) та Ериди ( $101,577 \cdot 10^{11}$  м) було підібрано планетарний вихор-аналог Сонячної системи зі структурою (2; 11). У таблиці останню групу представляє її середньоарифметичний радіус  $72,062 \cdot 10^{11}$  м. Оскільки пояс Койпера має велику протяжність, то закономірно, що теоретичний радіус центра 11-го вихора дещо більший за відстань умовної планети-аналога вказаних 4-х малих планет.

Несформованість 5-ї планети можна пояснити в аспекті нашої теорії з таких міркувань. З рис. 3 та табл. 2 видно, що первинний спектр відстаней центрів вихрових кілець  $r_1$  і остаточний розподіл відстаней між планетами  $r_2$  дуже різняться між собою. Первинний розподіл є майже рівномірним з приростом між сусідніми центрами  $\Delta y^* \cong 2\pi$  у безрозмірній координаті, а у порівняльному ряді при зрівнюванні реальних відстаней за 4-ю планетою  $\Delta r_2 \cong 0,51 \cdot 10^{11}$  м. Остаточний розподіл є досить нерівномірним і підлягає закону (16) зростання відстаней  $y_2$  за параболою четвертого степеня, звідки

$$\Delta y_2 \cong 2K_y \Phi(y_1) \Phi'(y_1) \Delta y_1, \quad (18)$$

що дає зростання проміжків  $\Delta y_2$  за законом, близьким до третього степеня.

У переході вихрових кілець-планет з початкових радіусів  $y_1$  до кінцевих положення  $y_2$  суттєву роль відіграють вказана вище незгідність законів обертання (9) і (16) у планетарному вихорі з кеплеровим обертанням (рис. 4) та існування точки рівноваги, від якої вихрові кільця – зародки планет розходяться в різні боки. В околі ж рівноважного кола внутрішня частина вихрового кільця рухається до Сонця, а зовнішня – від Сонця, що протидіє утворенню з цього кільця єдиної твердої планети. На наш погляд, це і сталося з 5-м вихровим кільцем та 5-ю планетою Сонячної системи. До такого ж якісного висновку приходили Вайцзер [10] і Люст [11] на

снові гідродинамічного аналізу еволюції обертального турбулентного диска, в якому, проте, не було виділених вихрових кілець.

Але це відбувається за кілька мільярдів років. При цьому оскільки Сонце теж формувалося певний час, то точка рівноваги «плавала» в деякому діапазоні значень радіальної координати. Природно припустити, що маса Сонця на першому етапі еволюції зростала. З цього випливає, що первинна точка рівноваги мала більший радіус і рухалась ззовні до свого стабільного положення у поясі астероїдів. Можливо, це і є причиною формування планет-гігантів: коли ця точка спочатку була зовні 6-го або 7-го кільця, то маси спочатку рухались до них ззовні, а коли вона пройшла їх положення, то маси почали рухатися до них же зсередини. Найбільше це й позначилося на формуванні масивного Юпітера.

Розташування точки рівноваги в зоні астероїдного кільця побічно підтверджує і закон радіального розподілу усередненої густини космічного простору в планетарній системі Сонця [1]. Цей розподіл має глибокий провал в області головного астероїдного поясу, причому абсолютні значення густин у цьому провалі є в  $10^5$  разів меншими, ніж у зонах планет земної групи та планет-гігантів. Альфвен пов'язує цю особливість з первинним розподілом густин у протопланетарній туманності, яка ніби складалася з двох хмар, розділених майже пустим простором [1]. Це можливо, але наше теоретичне пояснення є більш природним і обґрунтованим: сила тяжіння Сонця за досить тривалий час розтягла обертальні маси 5-го кільця у протилежні сторони від точки рівноваги.

Введемо коефіцієнт розходження вихору як відношення кінцевої  $r^{(2)}$  і початкової  $r^{(1)}$  координат найдалшої планети (вихрового кільця) у системі, – для Сонячної системи будемо орієнтуватися за 10-ю планетою (Плутоном):

$$k_{10}(i) = r_{10}^{(2)} / r_{10}^{(1)}, \quad (19)$$

– очевидно, що цей коефіцієнт залежить від вибору точки рівноваги  $y_i^{(1)}$ , де  $i = 1, 2, \dots, m$  – номер рівноважного вихрового кільця.

Слідуючи логіці цих міркувань, виберемо за точку рівноваги центр 5-го вихрового кільця з безрозмірним радіусом  $y_5^{(1)} = 35,0554$ , що за реальною координатою відповідає відстані  $r_5^{(2)} = 4,5743 \cdot 10^{11}$  м (табл. 2). За такою масштабною шкалою відстаней коефіцієнт розходження складатиме вже  $k_{10}(5) = 6,743$ , що в 1,6 рази менше від отриманого вище значення  $k_{10}(4) = 11$ .

Відповідно, якщо масштабувати первинний вихор за 7-ю планетою (Сатурном), то коефіцієнт розходження буде  $k_{10}(7) = 2,9369$ , що ще у 2,3 рази менше. Очевидно, що  $k_{10}(10) = 1$ , – у цьому випадку весь планетарний вихор стиснеться до зірки, і при розташуванні планет за законом (14) перші з них наблизяться до зірки дуже близько.

Оскільки при виборі за точку рівноваги центра 4-го кільця (Марс) ми мали нульові похибки у 4-й, 5-й та 7-й планетних відстанях, то закономірно отримали, що при переході від 4-го до 5-го центра як базового остаточний розподіл планетних відстаней (табл. 2) зберігається з мізерними відхиленнями.

Але положення цієї точки суттєво впливає на багато інших параметрів системи, таких, як вже згаданий коефіцієнт розходження вихору, параметр закручування  $C_0$  простору та ін. Зокрема, параметр  $C_0$  при вказаних 3-х варіантах масштабування набуває значень:  $C_0(4) = 12,559 \cdot 10^{-11}$  1/м;  $C_0(5) = 7,65265 \cdot 10^{-11}$  1/м;  $C_0(7) = 3,3332 \cdot 10^{-11}$  1/м. Ці оцінки збігаються з оцінками [6] і мають порядок  $\sim 10^{-11}$  1/м.

Наявність внутрішнього астероїдного поясу в Сонячній системі можна було б вважати випадковістю, якби точно такий же внутрішній пояс не існував у відкритій



недавно планетарній системі зірки Епсилон Ерідана [13]. До речі, за аналогією з Юпітером у цій системі зразу ж за астероїдним поясом обертається планета-гігант з масою в 1,55 мас Юпітера.

Подібно до відхилень у відстанях більші відхилення для ближніх планет ми бачимо і у розподілі питомих кутових моментів [9]. На наш погляд, і там, і тут розбіжності викликані тим же випадковим нерівномірним розподілом густини та хімічного складу речовин, з яких утворилися ці планети, та сильним впливом Сонця. Для ближніх планет це здебільшого тверді й важкі елементи, які могли під дією градієнтних сил [6] проникнути до зони вихора ззовні з надлишковими масами і кінетичними моментами.

При формулюванні ж законів збереження та рівноваги (10), (11) для планет як матеріальних точок з сучасною масою формули зв'язку (12) – (13) між параметрами первинного стану {1} та сучасного стану {2} взагалі не залежать від маси планети. Тому дещо умовним є застосований метод підрахунку первинного кінетичного моменту розподілених по тороїду мас як моменту матеріальної точки з сучасною масою планети, що рухається вздовж центрального кола первинного тора з кутовою швидкістю обертання цього кола. Та й у такому першому наближенні дана теорія дає хороші результати. Перші напрями уточнення даної моделі й повинні стосуватися урахування нерівномірного розподілу мас і густини у первинній газо-пилівій хмарі та впливу параметрів руху пилу й твердих частинок, зтягнутих вихором ззовні [6].

Нарешті, розроблена тут методика перерахування первинних параметрів вихору ( $\omega_1, r_1$ ) у кінцеві ( $\omega_2, r_2$ ) може бути застосована в оберненому напрямі ( $\omega_2, r_2$ )  $\rightarrow$  ( $\omega_1, r_1$ ) для визначення за даними кількох відкритих планет основного параметра планетарної системи  $\alpha$  та встановлення за методикою [8] повної структури нових екзопланетарних систем: кількості вихорів-планет, їх відстаней від зірки, кутових швидкостей та ін. Це дасть астрономам-спостерігачам обґрунтовані дані для пошуку нових, ще не відкритих екзопланет у зоряних планетарних системах, в яких вже відкрито 2 – 6 планет [12;13].

### Бібліографічні посилання

1. Альфвен Х. Структура и эволюционная история Солнечной системы / Х.Альфвен, Г.Аррениус. – Киев, 1981. – 332 с.
2. Шмидт О.Ю. Происхождение Земли и планет / О.Ю. Шмидт. – М., 1962 – 132 с.
3. Kuiper G.P. On the Origion of the Solar System / G.P. Kuiper, J.F. Hynek // Astrophysics. – McGraw-Hill, New York, 1951. – 465 p.
4. Weizsäcker C.F. Über die Entstehung des Planetensystems / C.F. Weizsäcker // Z. Astrophys. – 1944, 22, – P. 319–355.
5. Перехрест В.І. Новий розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера для сферичних вихорів течій / В.І. Перехрест, Р.В. Іванов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка – 2002. – Вип. 6, т. 1. – С. 60–64.
6. Перехрест В.І. Планетарний вихор та гіпотези Лапласа і Вайцзекера / В.І. Перехрест // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка – 2009. – Вип. 13, т. 2. – С. 113–124.
7. Милл-Томпсон Л.М. Теоретическая гидродинамика / Л.М. Милл-Томпсон. – М., 1964. – 655 с.
8. Перехрест В.І. Про структури планетарних вихорів і закономірності їх обертання / В.І. Перехрест, М.М. Осипчук // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка – 2010. – Вип. 14, т. 1. – С. 110–118.

9. Перехрест В.І. Про об'єми, маси та кінетичні моменти структур планетарного вихору / В.І. Перехрест, М.М. Осипчук // Кинематика и физика небесных тел. – К., 2011. – (в друку).
10. Weizsäcker C.F. Rotation kosmischer Gasmassen / C.F. Weizsäcker // Z. Naturforsch. – 1948, 3a, 524.
11. Lust R. Die Entwicklung einer um einer Zentralkörper rotierenden Gasmasse / R. Lust // Z. Naturforsch. – 1952, 7a, 87.
12. NASA «Sun Fact Sheet»- <http://nssds.gsfc.nasa.gov/plantary> 2009.
13. <http://exoplanets.org/exotable/exotable.html>.

*Надійшла до редколегії 10 03 11*

**УДК 532.4+523.4**

В.І. Перехрест, М.М. Осипчук

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **ПРО ЗАКОН ІЗОХРОННОСТІ ОБЕРТАННЯ У ПЛАНЕТАРНИХ ВИХОРАХ І ПЛАНЕТАРНИХ СИСТЕМАХ**

На основі аналітичної теорії досліджуються параметри обертового руху тороїдних вихрових структур у планетарному вихорі, що описується окремим розв'язком рівнянь гідродинаміки. Аналіз поля завихреності підтверджує емпіричний закон ізохронності обертань у Сонячній системі; оцінено порядок збурень вихрового поля квазітвердого обертання та межі для відхилень кутових швидкостей власних обертань малих тіл і астероїдів у планетарних системах.

*Ключові слова.* планетарний вихор, вихрові кільця, обертання космічних тіл.

С помощью аналитической теории исследуются параметры вращательного движения тороидальных вихревых структур в планетарном вихре, который описывается частным решением уравнений гидродинамики. Анализ поля завихренности подтверждает эмпирический закон изохронности вращений в Солнечной системе; оценён порядок возмущений вихревого поля квазитвёрдого вращения и границы отклонений угловых скоростей собственного вращения малых тел и астероидов в планетарных системах.

*Ключевые слова:* планетарный вихрь, вихревые кольца, вращение космических тел.

With the help of the analytic theory are investigated parameters of the rotational movement of the toroidal vortical structures in a planetary vortex, which describes a particular solution of the hydrodynamics equations. Analysis of the vorticity field confirms the empirical law of isochronal rotation in the solar system; the order of the perturbation of the quasi-solid rotation vortex field and borders deviations of angular velocities of own rotations small bodies and asteroids in the planetary systems have been estimated.

*Key words:* planetary vortex, vortex rings, rotation of celestial bodies.

**Вступ.** Унаслідок аналізу численних експериментальних даних вимірювання періодів власних обертань планет, астероїдів та супутників сформульовано закон ізохронності обертань різних тіл у Сонячній системі [1]. Згідно з цим емпіричним законом періоди осьового обертання всіх, у тому числі й дуже різних за масою і розмірами космічних тіл, мають значення одного порядку і коливаються в межах від 2 год. (Ікар) до 25 год. (Марс); причому більшість періодів лежать у межах 7 – 10 год. Слушним є висновок [1], що така властивість має гетерогонічний характер,

тобто є прямим наслідком первинної завихреності в газо-пилівій туманності, з якої утворилась Сонячна система. Питання про завихреність (турбулентність) у космічному просторі взагалі та у близькій до нас області Галактики було предметом дискусій та аналізу багатьох вчених [1 – 5; 7], а 1943 р. німецький учений К. Вайцекер висунув вихрову гіпотезу утворення Сонячної системи [6], згідно якої Сонячна система створена просторовим вихором, який мав стільки вихрових зон, скільки є великих планет у системі.

Після К. Вайцекера обертально-вихрові моделі космічних систем розвивали Тер Хаар [9], Чандрасекхар [7], Дж. Койпер [8], В.С. Сафронов [2], Ф. Хойл [10] та ін. На сьогодні, погляд на усі космічні утворення як на вихрові обертальні структури є загальноприйнятим і усталеним [3; 4; 5]. На жаль, досі в астрофізиці мало застосовувалися результати, отримані у гідродинаміці вихрових течій, і ми намагаємось надолужити цю прогалину.

У попередніх роботах авторів [12; 13] на основі нового точного розв'язку гідродинамічних рівнянь [11] побудована теорія планетарного вихора, який виявився досить вдалою математичною моделлю природних планетарних систем і теоретично обґрунтовує правильність вихрової гіпотези Вайцекера, хоча планетарний вихор [12] суттєво відрізняється від вихрової моделі Вайцекера [6]. Теорія планетарного вихора знімає більшість суперечностей усіх попередніх гіпотез і теорій про утворення Сонячної системи і дає пояснення основним закономірностям будови та руху будь-яких планетарних систем, яких за останні 15 років завдяки потужним орбітальним телескопам «Хабл», «Кеплер», «Субару», «Спітцер» та ін. відкрито більше 300 [16; 17].

Нижче розглянуто й проаналізовано векторне поле завихреності у планетарному вихорі. Цей аналіз підтверджує закон ізохронності для малих тіл та встановлює границі для власних обертань частинок в області первинного вихору. Простежено також деякі тенденції еволюції обертальних мас первинної туманності до утворення астероїдів і малих планет.

**Поле завихреності у планетарному вихорі.** У [7] отримано новий окремий розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера для осесиметричних сферичних течій, який потім [7] було названо планетарним вихором. Методика інтегрування повної нелінійної системи рівнянь гідродинаміки [15] полягає у введенні функції течії  $\Psi(y, \theta)$ , побудові спеціальних форм представлення визначальних функцій та, зрештою, відокремлення змінних. Таким чином побудована функція течії у сферичних координатах  $(r, \theta, \varphi)$ , неперервний варіант якої має форму:

$$\Psi = C_2 \Phi(y) \sin^2 \theta, \quad \Phi(y) = \left[ \alpha y^2 + \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right]. \quad (1)$$

Через функцію течії (1) поле швидкостей визначається формулами [15]:

$$V_r = -\left(r^2 \sin \theta\right)^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = \left(r \sin \theta\right)^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad V_\varphi = \frac{C_0 \Psi}{r \sin \theta}. \quad (2)$$

У розгорнутому вигляді за формулами (1), (2) маємо поле швидкостей:

$$\begin{aligned}
 V_r &= -2C_2C_0^2 \left( \alpha + \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right) \cos \theta \\
 V_\theta &= C_2C_0^2 \left( 2\alpha - \frac{\sin y}{y} - \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right) \sin \theta . \\
 V_\phi &= C_2C_0^2 y \left( \alpha + \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right) \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Вище введено безрозмірний радіус  $y = C_0r$  і параметр  $\alpha$ , який зрештою визначається [12] через основні параметри течії таким чином:

$$\alpha = -\frac{V_\infty}{2C_0^2C_2},
 \tag{4}$$

де  $V_\infty$  – поступальна швидкість закрученого простору,  $C_2$  – довільна стала в розв’язку (1), що зрештою [9] визначає момент центрального вихрового диполя;  $C_0$  – параметр закручування простору, що впливає з формули (2) для  $V_\phi$ .

Як відомо [15], через функцію течії (1) описується множина поверхонь течії інтегралом  $\Psi(y, \theta) = const$  або

$$\left( \alpha y^2 + \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \sin^2 \theta = C.
 \tag{5}$$

Вигляд, геометрія та особливості сімейства (5) залежать від параметра  $\alpha$  і являють собою кілька ( $n$ ) внутрішніх торових кілець, які лежать у замкнутих непроникних сферах (рис. 1), і низки ( $m$ ) зовнішніх вихрових кілець (рис. 2), які виокремлюються петлями сепаратрис і обертаються в один бік [13] (рис. 2).

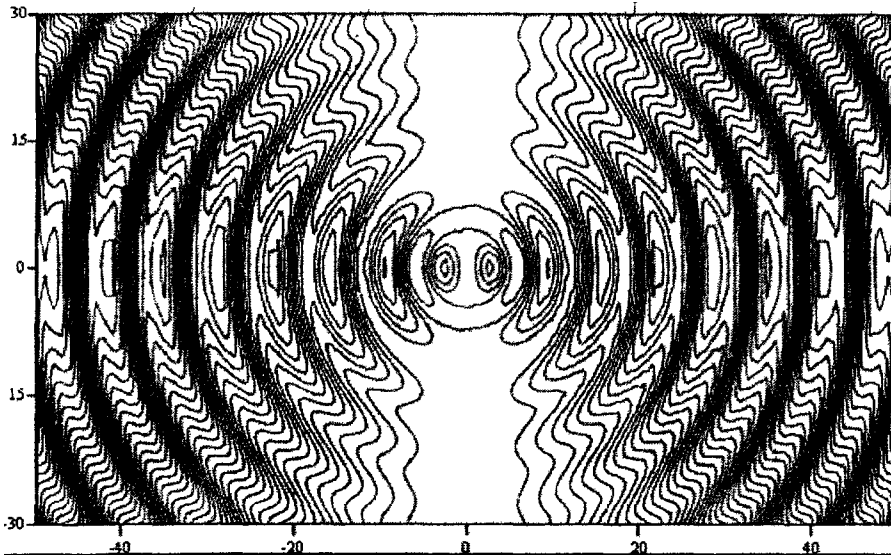


Рис. 1. Загальна картина планетарного вихору структури (2,11)

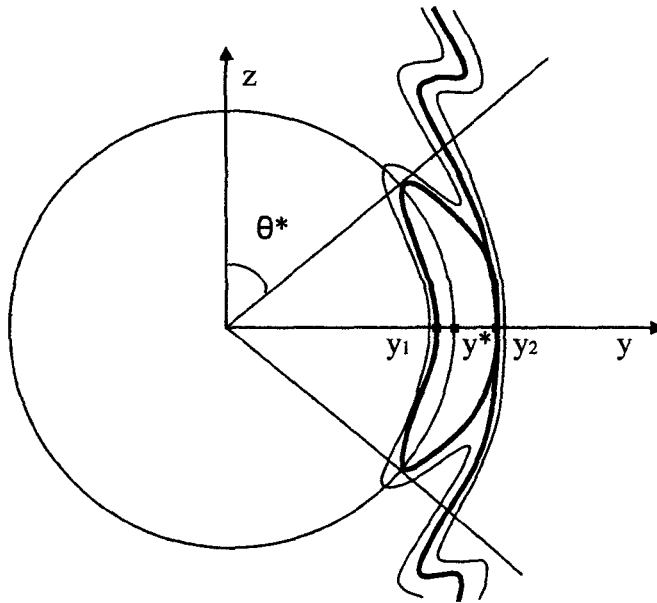


Рис. 2. Геометрія зовнішнього вихрового кільця

Вузли сепаратрис і є тими «шарикопідшипниками Вайцекера», які дають початки планетам. У нас ці точки за (5) визначають рівняння петлі сепаратриси. У [13] детально досліджено залежність структур  $(n, m)$  вихорів від параметра  $\alpha$  та закономірності їх обертання.

На рис. 1 показано один зовнішній вихор структури  $(2, 11)$ , яким, на наш погляд, доцільно моделювати нашу Сонячну систему в період її утворення і якому відповідає значення параметра  $\alpha = -0,00655$ . У табл. 1 подано геометричні характеристики всіх 13 тороїдних вихрових кілець планетарного вихору структури  $(2, 11)$ .

За полем швидкостей (3) знайдемо поле завихреності

$$\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{V}, \quad (6)$$

і у сферичних координатах диференціюванням поля (3) отримуємо

$$\begin{aligned} \Omega_r &= 2B \left( \alpha + \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right) \cos \theta, \\ \Omega_\theta &= -B \left( 2\alpha - \frac{\sin y}{y} - \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right) \sin \theta, \\ \Omega_\phi &= -\frac{B}{y} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \sin \theta, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $B = C_2 C_0^3$ . Порівняння полів (3) і (6) дає співвідношення

$$\frac{\Omega_r}{V_r} = \frac{\Omega_\theta}{V_\theta} = -C_0, \quad \text{але} \quad \frac{\Omega_\phi}{V_\phi} \neq \frac{\Omega_r}{V_r}, \quad (8)$$

з якого випливає, що дана вихрова течія є негвинтовою. Перше співвідношення у (8) виражає відомий закон Гельмгольца про збереження інтенсивності вихрових трубок. Зокрема, лінії течії поля швидкостей (3) у площині  $(r, \theta)$ , які даються інте-

гралом рівнянь руху (5), є одночасно і вихровими лініями поля (7), а осесиметричні поверхні течії – торові кільця – є вихровими трубками.

Виразимо поле ротора (7) через одну визначальну функцію

$$u(y) = \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \quad (9)$$

з властивостями  $\lim_{y \rightarrow 0} u(y) = -1/3$ ,  $\lim_{y \rightarrow \infty} u(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} yu(y) = 0$ . Тоді з (7) отримаємо

$$\begin{aligned} \Omega_r &= 2B(\alpha + u(y)) \cos \theta \\ \Omega_\theta &= -B \left( 2\alpha - \frac{\sin y}{y} - u(y) \right) \sin \theta, \\ \Omega_\phi &= -B y u(y) \sin \theta \end{aligned} \quad (10)$$

Виділимо з поля (10) сталу складову  $\Omega_\infty = 2B\alpha$  і доданки, які зникають при  $y \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \Omega_r &= \Omega_\infty \cos \theta + 2B u(y) \cos \theta \\ \Omega_\theta &= -\Omega_\infty \sin \theta + B \left( \frac{\sin y}{y} - u(y) \right) \sin \theta, \\ \Omega_\phi &= -B y u(y) \sin \theta \end{aligned} \quad (11)$$

так що  $\lim_{y \rightarrow \infty} \Omega_r = \Omega_\infty \cos \theta$ ,  $\lim_{y \rightarrow \infty} \Omega_\theta = -\Omega_\infty \sin \theta$ ;  $\lim_{y \rightarrow \infty} \Omega_\phi = 0$ .

Таблиця 1

Геометричні параметри вихрових кілець планетарного вихору (2,11)

№ вихора	$y_1$	$y^*$	$y_2$	$\theta^*$ рад.
1-Сонце	0,000000000	2,79026114	4,63822496	0
2-Сонце	4,63822496	6,03419312	7,35970513	0
3	7,36416294	9,44279805	12,32219138	0,05378797
4	14,05479202	15,85435860	18,54971972	0,77368502
5	20,65132327	22,24209605	24,76167868	1,02574913
6	27,20957617	28,62398544	30,96568847	1,17671320
7	33,74923231	35,00553545	37,16351818	1,27803419
8	40,28122905	41,38978337	43,35502601	1,35112878
9	46,81397240	47,77942842	49,53890086	1,40681551
10	53,35626851	54,17790040	55,71246457	1,45123869
11	59,92070050	60,59086484	61,87049552	1,48829250
12	66,53253005	67,03060790	68,00098738	1,52092619
13	73,28303744	73,54281412	74,05844130	1,55296938

Подамо поле (10) у проєкціях на циліндричні координати ( $z, \rho, \varphi$ ) за формулами переходу

$$\begin{aligned} \Omega_z &= \Omega_r \cos \theta - \Omega_\theta \sin \theta \\ \Omega_\rho &= \Omega_r \sin \theta + \Omega_\theta \cos \theta \\ \Omega_\phi &\equiv \Omega_\phi \end{aligned} \quad (12)$$



Остаточно маємо

$$\begin{aligned}\Omega_z &= \Omega_{z0} + \frac{B}{2} \left( u(y) - \frac{\sin y}{y} \right) + \frac{B}{2} \left( 3u(y) + \frac{\sin y}{y} \right) \cos 2\theta \\ \Omega_\rho &= \frac{B}{2} \left( 3u(y) + \frac{\sin y}{y} \right) \sin 2\theta \\ \Omega_\phi &= -B u(y) \sin \theta\end{aligned}\quad (13)$$

З формул (13) випливає, що  $\lim_{y \rightarrow \infty} \Omega_\rho = \lim_{y \rightarrow \infty} \Omega_\phi = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow \infty} \Omega_z = \Omega_\infty$ , тобто збурене вихрове

поле (12) вироджується на нескінченності у вихрове поле чистого обертання простору з кутовою швидкістю  $\omega_\infty = 0,5 \Omega_\infty$ . Але складова  $\Omega_\infty$  присутня всюди у векторному полі вектора  $\Omega$ , причому для малих та середніх радіусів вплив збурень від центрального диполя може перевищувати сталу складову  $\Omega_\infty$  у десятки разів, і лише при  $y > 100$  залишається домінуючим стале осьове обертання

$$\Omega_z \approx \Omega_\infty = -0,0131 B, \quad \omega_\infty = -0,00655 B, \quad (14)$$

як квазітверде обертання закрученого простору. При цьому для вихору структури (2,11) центр останнього кільця має безрозмірний радіус  $y_{11}^* = 73,543$ .

Оцінимо поле завихреності в деяких характерних точках чи лініях області вихору. Так, на осі центрального вихору  $\theta = 0, \pi$  з (13) отримаємо,

$$\Omega_\rho = \Omega_\phi = 0, \quad \Omega_z(0, y) = 2B(\alpha + u(y)), \quad (15)$$

звідки у центрі вихору маємо  $\Omega_{z0}(0, 0) = 2B(\alpha - 1/3)$ , що для нашого прикладу з  $\alpha = -0,00655$  дає

$$\Omega_{z0}(0, 0) = -0,67976 B, \quad \omega_{z0} = -0,33988 B, \quad (16)$$

що у 52 рази більше за  $\Omega_\infty$ . Це говорить про те, що центральний дипольний вихор дійсно є джерелом закручування всієї течії: значення (16) є найбільшою швидкістю обертання в області вихору. Отже, діапазон значень  $\omega_{z0} \div \omega_\infty$  встановлює межі для власних обертань частинок у планетарному вихорі – аналогу Сонячної системи.

Процеси подальшої еволюції мас первинного вихору могли лише зменшити цей діапазон, – для згаданих у вступі двох тіл (Ікар–Марс) відношення швидкостей обертань складає 12,5.

На першій непроникній сфері  $y = y_1$  у точках на осі  $\theta = 0, \pi$ , де виконується умова  $\alpha + u(y_1) = 0$ , з (13) маємо  $\Omega_z = \Omega_\rho = \Omega_\phi = 0$ ; те ж саме будемо мати в усіх осьових точках інших замкнутих сфер, які існують у течії.

Якщо розглядати поле вектора  $\Omega$  у горизонтальній площині  $\theta = \pi/2$ , маємо

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_z &= B \left[ 2\alpha - \left( \frac{\sin y}{y} + \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right) \right], \\ \tilde{\Omega}_\phi &= \frac{B}{y} \left( \frac{\sin y}{y} - \cos y \right), \quad \tilde{\Omega}_\rho = 0\end{aligned}\quad (17)$$

Графіки складових вектора (17) для відстаней  $y \in [8, 44]$  подано на рис. 3 пунктирними лініями. Там же суцільною лінією зображено графік модуля вектора  $|\tilde{\Omega}(y, \pi/2)| = \tilde{\Omega}$ :

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{\tilde{\Omega}_z^2 + \tilde{\Omega}_\phi^2} \quad (18)$$

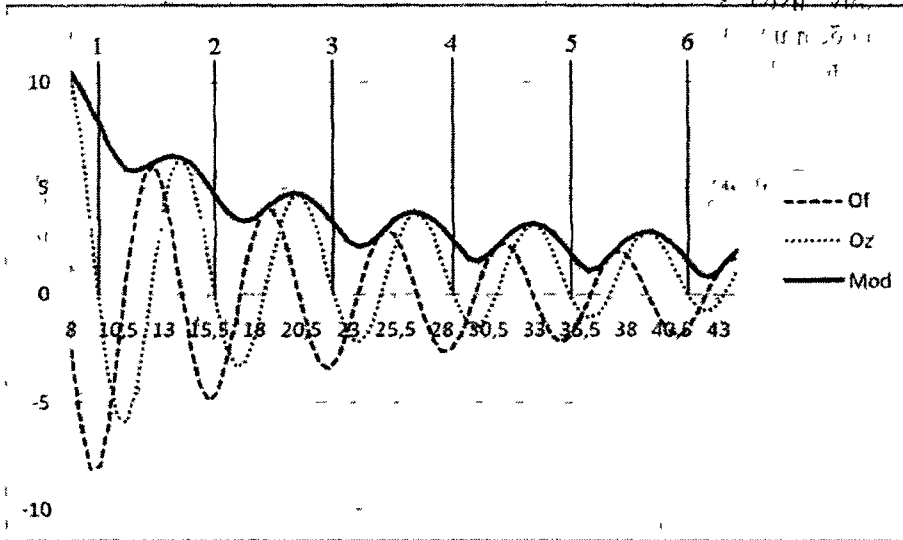


Рис. 3. Величина кутової швидкості власного обертання частинок вихорю (2,11)

З числових оцінок, наведених у табл. 2 та графіків на рис. 2 видно, що функція кутової швидкості обертань (18) є коливною спадною функцією. Середня інтенсивність обертання частинок у вихорі зменшується з відстанню і коливається для радіусів  $u \in [8, 44]$  у межах від 8,133 для до 1,645 тобто є величинами одного порядку, які все ж відрізняються у 4,5 разів, а повний розкид між найбільшою та найменшою швидкостями – 17 разів. При цьому амплітуди коливань поля завихреності мало змінюються, а тому відносні відхилення  $\Delta \%$  від їх середніх значень на одному розмаху коливань швидко збільшуються за радіусом (табл. 2). З цього випливає, що розкиди у швидкостях власного обертання далеких планет і астероїдів повинні бути більшими, ніж для ближніх і середніх.

Таблиця 2

Кутові швидкості частинок вихорю в центрах вихрових кілець

№ кільця	1	2	3	4	5	6	7
$u^*$	9,4428	15,8543	22,242	28,424	35,006	41,3898	47,779
$u_{ср}$	9,4063	15,665	22,052	28,390	34,730	41,072	47,375
$\Omega_{\phi}^*$	8,0673	4,71902	3,28623	2,4736	1,938	1,45996	1,24612
$\Omega_{ср}$	8,1328	4,9605	3,5024	2,7203	2,2203	1,8734	1,6454
$\Delta \%$	28	31	36	42	49	57	63

І справді, аналіз власних обертань 30 найбільших астероїдів головного поясу (5-е кільце) [16] дає відношення найбільшої до найменшої швидкостей обертання у 6,66 (рис. 4), тоді як розкид теоретичних значень швидкостей обертання на цьому ж проміжку складає 4,8, що досить близько. У поясі ж Койпера відношення періодів обертання двох планетоїдів Еріди (8 год.) і Варуни (152 год.) становить 19.

Очевидно, що параметри руху ближніх до Сонця 3-х планет на протязі еволюції зазнали значних впливів, бо теоретичні значення частот обертання частинок у первинному вихорі в їх зонах зростають до 10 (рис. 3), тоді як реальні швидкості власного обертання перших планет у 2–10 разів менші за швидкості обертання середніх планет (табл. 3).

Таблиця 3

Відстані та кутові швидкості планет Сонячної системи

Планета	1 Меркурій	2 Венера	3 Земля	4 Марс	5 Церера
$r \cdot 10^{-11} \text{ м}$	0,5790907	1,082089	1,495979	2,27920	4,14386
$\omega \cdot 10^5 \text{ 1/с}$	1,212034	+0,029927	7,272205	7,090031	19,21463
6 Юпітер	7 Сатурн	8 Уран	9 Нептун	10 Плутон	11 Варуна
7,785472	14,33449	28,7246	45,03444	59,06376	64,514
17,59996	16,89028	16,13555	11,18801	1,140738	1,146483

Збіг теоретичної та експериментальної закономірностей щодо зменшення обертань простежується лише для далеких планет і астероїдів, але для них розкид в обертаннях може бути значним, про що говорилося вище.

Закономірності розподілу власних обертань частинок за полем первинної завихреності (13) могли зберегтися лише для малих тіл та частинок, які майже не зазнавали зіткнень, акреції та інших взаємодій у потоці. Це можна продемонструвати на розподілі власних обертань в астероїдному поясі між 4-ю та 6-ю планетами, де існує 30 найбільших астероїдів з параметрами руху, взятими з [16]. Відповідний розподіл частот обертань цих астероїдів зображено на рис. 4; він має дві виразні хвилі коливань. Ці дві хвилі добре корелюються з двома хвилями коливань величини вектора  $\Omega$  між радіусами  $y^* = 28,39$  (4-е кільце) та  $y^* = 41,072$  (6-е кільце), (рис. 3). Максимальні відхилення від середнього значення в експериментальному ряді частот складають 50 – 70 %, що близько до теоретичних відхилень у 42 – 57 % на вказаному проміжку (табл. 2). Наведене вище порівняння максимальних розкидів для цього проміжку теж показує їх близькість з перевищенням на 28 % експериментального розкиду.

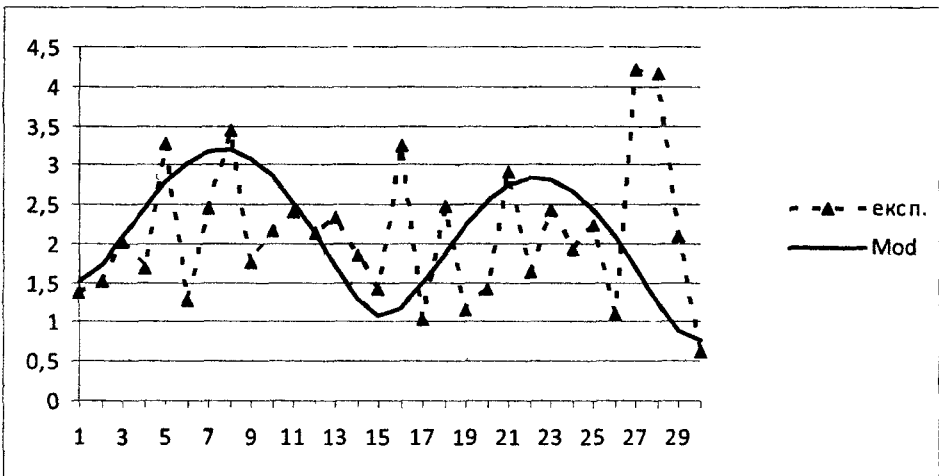


Рис. 4. Кутові швидкості власного обертання астероїдів як функції їх номерів

Крім того, звернемо увагу на ідентичність виразів для  $V_\theta$  у (3),  $\Omega_z$  у (17) та  $\Omega_\theta$  у (7), що впливає з властивості (8) поля і того, що  $\Omega_\theta(\theta = \pi/2) = -\Omega_z$ . Але особливі точки – центри тороїдів знаходилися з умови  $V_\theta = 0$  [13]. Тому на центральних колах вихрових кілець  $y = y^*$  будемо мати

$$\Omega_z^* = 0, \quad \Omega_\rho^* = 0, \quad \Omega_\phi^* = \frac{B}{y^*} \left( \frac{\sin y^*}{y^*} - \cos y^* \right) \quad (19)$$

Дійсно, з табл. 2 видно, що координати середніх точок між аплітудами коливань поля  $\tilde{\Omega}$  з (17) є близькими до радіусів центральних кіл, тобто  $y_{\text{ср}} \cong y^*$ , відповідно, і  $\Omega_{\text{ср}} \cong \Omega_\phi^*$ . При цьому  $\Omega_\phi^* \leq \Omega_{\text{ср}}$ , що узгоджується з (18).

Звідси та з (17) можна зробити висновок, що при подальшому збиранні мас первинного вихору в планети на колах  $y = y^*$  завдяки силам Архімеда [12] та тяжіння остаточно вісь обертання повинна лежати в меридіональній площині і може мати у ній значні азимутальні відхилення завдяки обертанню  $\Omega_\phi^*$  у центрах кілець та їх околах. Це ми і маємо для планет Землі (23,44°), Марса (24,94°), Юпітера (3,13°), Сатурна (26,73°) Урана (97,8°), Нептуна (28,32°), причому в силу вказаної вище властивості збільшення розкиду відхилення осей обертання для далеких планет є більшими, ніж для ближніх.

На рис. 2 центрам кілець  $y^*$  відповідають нулі графіка функції  $\tilde{\Omega}_z$  із (17), у цих же точках функція  $\tilde{\Omega}_\phi$  досягає максимальних значень (19). Але це відбувається лише в горизонтальній площині  $z = 0$ ; з висотою  $z$  поля обертання змінюються і, оскільки у вихорі переважають обертання навколо вертикальної осі, то усереднення обертань при формуванні планет призвело до домінування осевої складової над азимутальною.

Обертання нутації  $\Omega_\rho$  в горизонтальній площині всюди відсутнє,  $\Omega_\rho(y, \pi/2) = 0$ ; відповідно і осі планет мають незначну нутацію як наслідок первинного обертання у вихорі вище та нижче екваторіальної площини.

Далі, якщо екстраполювати зміни характеристик обертання мас при їх 'втягуванні до центрів  $y^*$  у горизонтальній площині з деякого симетричного її околу кутовим розміром  $\pi/2 - \theta_1 \leq \theta \leq \pi/2 + \theta_1$ , ( $\theta_1 \leq \theta^*$ ), то треба оцінити інтеграли функцій (13) вказаних межах:

$$\int_D \Omega_z dq = A_z \int_{\pi/2-\theta_1}^{\pi/2+\theta_1} \cos 2\theta \sin \theta d\theta = A_z \left( \sin \theta_1 - \frac{\sin 3\theta_1}{3} \right) \neq 0, \quad (20)$$

$$\int_D \Omega_\phi dq = A_\phi \int_{\pi/2-\theta_1}^{\pi/2+\theta_1} \sin^2 \theta d\theta = A_\phi \left( \theta_1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_1 \right) \neq 0,$$

$$\int_D \Omega_\rho dq = A_\rho \int_{\pi/2-\theta_1}^{\pi/2+\theta_1} \sin 2\theta \sin \theta d\theta = 0,$$

де  $D$  – область тороїда,  $A_z, A_\phi, A_\rho$  – деякі обмежені константи.

Отже, усереднення по об'єму осевого і азимутального обертань приводить до їх інтегрального накопичення, а усереднення нутаційних антисиметричних полів  $\Omega_\rho$  дає нульову суму і спричиняється до незначних нутаційних обертань тіл Сонячної системи, що ми і спостерігаємо на практиці.

**Висновки.** Наведені вище результати свідчать, що теоретична модель планетарного вихору якісно і кількісно пояснює властивість ізохронності обертань малих тіл у Сонячній системі [1]. Ми не лише отримали якісно подібні розподіли швидкостей обертань у планетарному вихорі та планетарній системі Сонця, але і оцінили діапазони їх розкиду, які за теорією та реальністю відрізняються не в рази, а на відсотки. Це свідчить на користь висновку, що при подальшій еволюції первинні гетерогонічні характеристики обертань у планетарному вихорі в цілому зберегли не лише характерні розподіли, а й величини.

З того, що швидкості власного обертання великих планет також лежать у загальних межах обертань у первинному вихорі, можна зробити висновок, що процеси зіткнень, акреції, злипання та інші спричинялись до об'єднання частинок і тіл з параметрами сумарного обертання того ж порядку, що й обертання складових тіл. При цьому значне зменшення величин швидкостей обертання перших планет порівняно з обертаннями у первинному вихорі слід віднести до значного впливу Сонця на їх формування й розвиток. Існування такого впливу є загальноновизнаним [1], а окремі його прояви були предметом багатьох досліджень [1; 10].

Відомо [1; 5; 14], що збирання до купи частинок і пилу супроводжується в космосі процесами акреції, коагуляції та ін., при цьому у більшості теоретичних моделей [1; 5] акреція спричиняє зменшення інтенсивності обертання контактних тіл та їх об'єднань, хоча і не у всіх випадках. А от гравітаційні та резонансні взаємодії можуть як сповільнювати, так і пришвидшувати обертання космічних тіл [1; 5; 8; 10]. Внаслідок цього межі експериментальних розкидів у деяких випадках можуть перевищувати межі теоретичних розкидів у первинному вихорі. Така тенденція з перевищенням експериментальних розкидів швидкостей обертань над теоретичними простежується і в нашому дослідженні.

Але безсумнівно, що на основі вивіреної у багатьох відношеннях моделі планетарного вихору [12; 13] як початкового стану зіркових систем можна будувати більш адекватні математичні моделі еволюції цих планетарних систем з урахуванням градієнтних, гравітаційних, акреційних та інших взаємодій між їх елементами.

### Бібліографічні посилання

1. Альфвен Х. Структура и эволюционная история Солнечной системы / Х. Альфвен, Г. Аррениус. – К., 1981. – 332 с.
2. Сафронов В.С. О гипотезе турбулентности в протопланетном облаке / В.С.Сафронов, Е.Л.Рускол // Вопросы космогонии, 5, 1957. – С. 22–46.
3. Смирнов О.Г. О законах всемирного вращения / О.Г. Смирнов // Актуальные проблемы современной науки. – 2006. – № 5. – С. 126–133.
4. Смирнов О.Г. Ещё раз о всемирном вращении и движении объектов космоса / О.Г. Смирнов // Актуальные проблемы современной науки. – 2006. – № 6. – С. 179–190.
5. Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет / В.С. Сафронов. – М., 1969. – 244 с.
6. Weizsäcker C.F. Über die Entstehung des Planetensystems / C.F. Weizsäcker // Z Astrophys. – 1943. – 22. – P. 319–355.
7. Chandrasekhar S. The scale of turbulence in a differentially rotating gaseous medium / S. Chandrasekhar, D. Ter Haar. // Astrophys. J. – 1950, 111. – P. 187–200.

8. Kuiper G.P. On the Origion of the Solar System / G.P. Kuiper, J.A. Huneke // Astrophysics, McGraw-Hill Co., New York, 1951. – 365 p.
9. Ter Haar D. Ann. Rev. Astron. Astrophys. 5, 1967/ – P. 267–278.
10. Hoyle F. Origin of the Solar System / F. Hoyle // In R. Jastrow and A.J.W. Cameron (eds) - Academic Press, New York, 1963. – P. 63–71.
11. Перехрест В.І. Новий розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера для сферичних вихрових течій / В.І. Перехрест, Р.В. Іванов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2002. – Вип. 6, т. 1. – С. 60–64.
12. Перехрест В.І. Планетарний вихор та гіпотези Лапласа і Вайцзекера / В.І. Перехрест. // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2009. – Вип. 13, т. 2. – С. 113–124.
13. Перехрест В.І. Про структури планетарних вихорів і закономірності їх обертання / В.І. Перехрест, М.М. Осипчук // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2010. – Вип. 14, т. 1. – С. 109–117.
14. Ксанфомалити Л.В. Солнечная система, планетные системы звёзд и теория последовательной аккреции / Л.В. Ксанфомалити // Кинематика и физика небесных тел. – 2010 – Т. 26, № 4. – С. 84–106.
15. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика / Л.М. Милн-Томсон. – М., 1964. – 655 с.
16. NASA «Sun Fact Sheet»- <http://nssds.gsfc.nasa.gov/plantary> 2009.
17. <http://exoplanets.org/exotable/exotable.html>.

*Надійшла до редколегії 10 01 11*

УДК 533.601:656.2

Е. В. Кравець

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **СТРУКТУРА ВИХРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ВЯЗКИМ НЕСЖИМАЕМЫМ ПОТОКОМ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРИЗМ, РАСПОЛОЖЕННЫХ ТАНДЕМОМ НАД ЭКРАНОМ С ОТКРЫТЫМ МЕЖТОРЦЕВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ**

Проведено тривимірний чисельний розрахунок течії нестисливої в'язкої рідини при обтіканні двох призм, що розташовані тандемом над екраном, які моделюють рух повітря навколо вагонів поблизу поверхні землі при русі швидкісного потяга. Подано огляд досліджень, що спрямовані на зниження аеродинамічного опору міжвагонного простору швидкісного потяга. Виконано аналіз структури течії та закономірностей вихороутворення в міжторцевій області призм. Визначено коефіцієнт аеродинамічного опору відкритого міжторцевого простору.

*Ключові слова* течія в'язкої нестисливої рідини, обтікання двох призм тандемом поблизу екрана, швидкісний потяг, аеродинамічний опір міжторцевого простору, структура вихороутворення

Проведен трехмерный численный расчет течения вязкой несжимаемой жидкости при обтекании двух призм, расположенных тандемом над экраном, моделирующего движение воздуха вокруг вагонов вблизи поверхности земли при движении скоростного железнодорожного состава. Приведен обзор исследований, направленных на снижение аэродинамического сопротивления межвагонного пространства скоростного поезда. Выполнен анализ структуры течения и закономерностей вихреобразования в межторцевой области призм. Определен коэффициент аэродинамического сопротивления открытого межторцевого пространства.

*Ключевые слова*: течения вязкой несжимаемой жидкости, обтекание двух призм по схеме tandem вблизи экрана, скоростной поезд, аэродинамическое сопротивление межвагонного пространства, структура вихреобразования.

The three-dimensional numerical calculation of viscous incompressible liquid flow around two prisms tandem located above the screen is carried out. This flow models the air movement around the cars at near-ground surface while the high-speed train moving. The review of the researches directed to decrease of intercarload space drag of a high-speed train is brought. The analysis of flow structure and vortex formation laws in prisms inter-end space is executed. The drag coefficient of open inter-end space is determined.

*Key words*: incompressible viscous flow, flow about two tandem prisms, high-speed train, drag of the space between the prisms.

**Введение.** Последняя четверть XX века была отмечена бурными темпами роста скорости движения наземного железнодорожного и автомобильного транспорта. Если к 90-м годам средние скорости подвижного железнодорожного состава достигли 200 км/ч, то к началу XXI ст. они превысили 250 км/ч. [6]. Значительное внимание развитию высокоскоростного наземного транспорта уделяется в Японии, Франции, России, Германии и других странах.

С ростом скорости движения наземного транспорта актуальными становятся вопросы взаимодействия его с вязкой воздушной средой и возникающих при этом существенных по величине аэродинамических сил и моментов.

Установлено, что наибольшее влияние ( $\approx 20 \dots 23\%$ ) на аэродинамическое сопротивление подвижного состава оказывают формы лобовой и хвостовой частей поезда, наименьшее влияние ( $\approx 3 \dots 4\%$ ) приходится на элементы конструкции в виде «заглубленных» поручней и окон, а полное перекрытие межвагонных промежутков позволяет снизить аэродинамическое сопротивление поезда на  $\approx 6 \dots 15\%$  в зависимости от числа вагонов в подвижном составе.

**Обзор исследований по снижению сопротивления межвагонного пространства скоростного поезда.** Основные результаты исследований сопротивления движению при высоких скоростях помещены в [1; 14], полученных теоретическими и инженерными расчетами, и в [4-5; 7-13; 15] – с помощью натуральных и модельных экспериментов.

В [15] отмечены трудности постановки эксперимента на модели поезда в аэродинамической трубе, связанные с необходимостью моделирования подвижности поверхности земли; рассмотрены условия, при которых выполняется подобие процессов обтекания модели и натурального состава.

В [1] предложен метод расчета сопротивления поезда на открытой трассе и в тоннеле путем суммирования трения каждого вагона, лобового сопротивления локомотива, сопротивления подвагонного пространства и межвагонных промежутков, а также хвостового сопротивления, возникающего на торце последнего вагона. Для вычисления вкладов каждого из перечисленных элементов использовались экспериментальные данные. При расчете сопротивления межвагонных промежутков предполагалось, что при увлечении поездом завихренной «воздушной пробки», зажатой между вагонами, локомотив затрачивает работу на преодоление силы трения воздуха о воздух. Для расчета этой силы трения в [1] применена теория расп-ространения в газе турбулентной струи такого же газа [14]. Сравнение значений воздушного сопротивления, рассчитанного в [1] и экспериментально [12; 13; 15], показало достаточное согласование.



Експериментальні роботи в аеродинамічній трубі по виявленню впливу елементів, характеризуючих зовнішню форму швидкісного складу, на повітряне опірність були здійснені в Дрездені [13]. Исследовалось влияние целого ряда компонентов внешней формы вагона, в том числе: закрытия подвагонного пространства, межвагонных перекрытий различных геометрических размеров и форм, различных сопряжений боковой поверхности с крышей. В результате была подсчитана экономия мощности, необходимой на преодоление воздушного сопротивления при введении ранее перечисленных компонентов внешней формы.

В Институте Механики МГУ исследованы закономерности изменения полного сопротивления пассажирских поездов и его составляющих (воздушного и механического) от скорости поезда и его длины. В частности, проведено экспериментальное исследование влияния формы открытых межвагонных промежутков и открытого подвагонного пространства швидкісного поезда на повітряне опірність [4; 5]; розроблена методика прогнозирующего расчета основного сопротивления движению поездов обтекаемой формы в диапазоне 200...300 км/ч, учитывающая закрытие межвагонного и подвагонного пространств [7; 10]; розроблена полуэмпирическая методика расчета аеродинамічного опірності натурного швидкісного поезда, учитывающая влияние основных составляющих, в том числе, сопротивления подвагонного и межвагонного промежутков [8; 9]; применен способ управления пограничным слоем для предотвращения отрывных течений в межвагонных промежутках, позволивший уменьшить значение  $C_x$  полносоставного поезда на 20 % при скорости движения  $V_\infty = 120$  км/ч [11].

**Постановка задачі.** Задача о прямоугільних призмах, розположених тандемом над екраном, моделює течення в області, обмеженої торцями двох сусідніх вагонів при умові можливого втекання і витікання потоку со сторони даху вагона, бокових стінок вагона і из-под днища вагона со сторони поверхності землі – екрана.

Прикладний характер цієї задачі зв'язаний з установленням впливу інтенсивності трьохмерного циркуляційного течення на величину аеродинамічного опірності вагона, а також пошуку раціональних рішень по компоновці міжвагонного простору з метою зниження його аеродинамічного опірності. Моделювання турбулентного потоку в міжвагонному просторі проведено для максимальної експлуатаційної швидкості  $V_\infty = 140$  км/ч пасажирських перевозок на Україні. Використовувана математична модель включала систему рівнянь Рейнольдса і нерозривності, рівняння к-ε моделі турбулентності з використанням пристіночних функцій в областях поблизу стінки.

На рис. 1 відносно продольної площини симетрії прямоугільних призм – вагонів 1 і 2 – показана прямоугільна область, прийнята за розрахункову, з вказанням урахування граничними умовами особливостей обтекання в вигляді розположення входного і вихідного сечень, границь розрахункової області, наявності пограничних шарів на верхній грані призми – даху вагона, бокових гранях прямоугільних призм – бокових стінках вагонів і под нижньої гранню – под днищем вагонів, наявністю поверхності Землі і т. д.

**Аналіз результатів.** Течення в області між торцями прямоугільних призм формується під впливом нисхідного потоку з верхньої грані призми,

моделирующей вагон 1, а также со стороны ее нижней грани – днища и боковой грани – боковой стенки вагона. Течение в окрестности торца второй призмы, в основном, формируется потоком, направленным со стороны боковой грани. Для этого сечения характерным является локальное перетекание воздушной среды из межторцовой области в окрестностях верхней и нижней угловых точек торца в обтекающий призмы поток. Отметим, что для верхней угловой точки такое локальное перетекание отсутствует (рис. 2).

На рис. 2, г в изометрии показаны линии тока, проходящие через точки с координатами  $(0.1; 3.8; -0.1)$  м и  $(0.1; 3.8; 0.0)$  м при обтекании двух прямоугольных призм, расположенных тандемом над экраном, а также их виды сбоку (рис. 2, а), спереди (рис. 2, б) и сверху (рис. 2, в).

Аналогичная картина течения, когда линии тока не затекают в межторцовую область, имеет место для потока, движущегося вдоль боковой грани в пространстве с координатами  $X = 0.1$  м,  $0.6 \leq Y \leq 1.8$  м,  $Z = -0.1$  м.

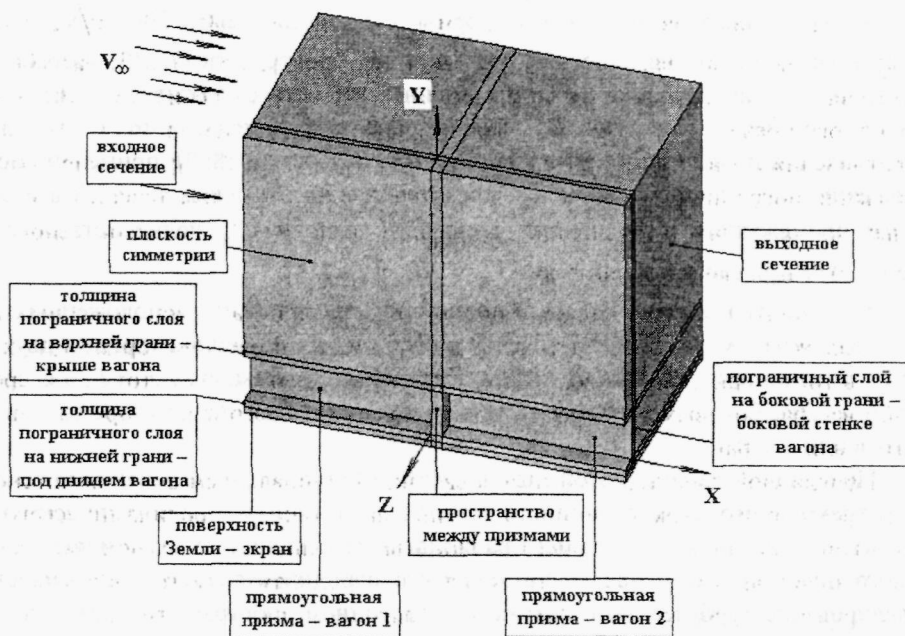


Рис. 1. Схема расчетной области в задаче о течении воздуха между прямоугольными призмами, расположенными «тандемом» над экраном

Отметим, что в окрестность нижней угловой точки торца передней призмы со стороны боковой грани втекает поток из-под нижней грани, причем линии тока этого течения также не попадают в межторцовую область. Такое течение характеризуют линии тока, проходящие через точки 3 и 4 (рис. 3).

Расчетами установлено, что в межторцовую область из-под нижней грани передней призмы попадают не все линии тока, находящиеся в расчетном диапазоне координат  $Z \leq 0.8$  м при  $X = 0.1$  м и  $Y = -0.2$  м (рис. 4), причем указанные линии тока (например, проходящие через точки 5 и 6) в окрестности межторцовой области под воздействием истекающего из нее потока искривляются выпуклостью в сторону экрана.

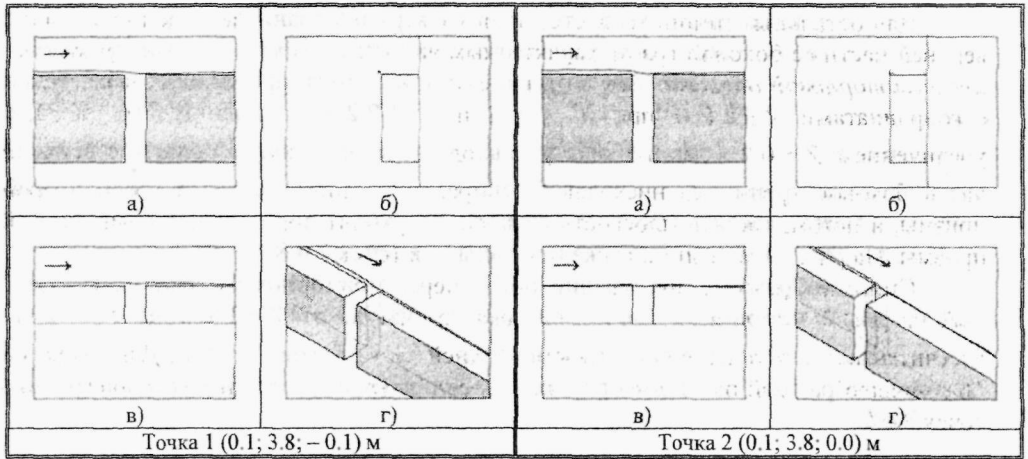


Рис. 2. Лінії тока в околиці верхньої кузової точки торца передньої призми

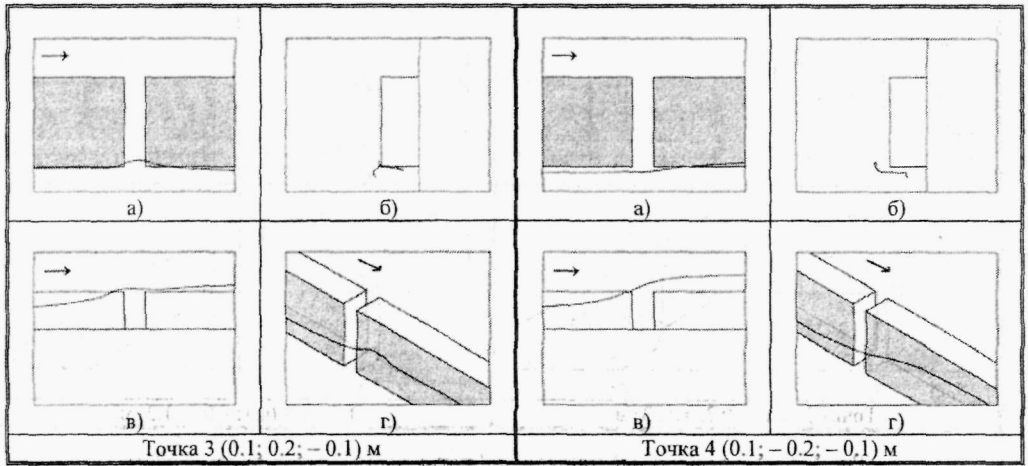


Рис. 3. Затекаєння потоку из-под нижньої грани передньої призми на її бокову грань в околиці нижньої кузової точки торца

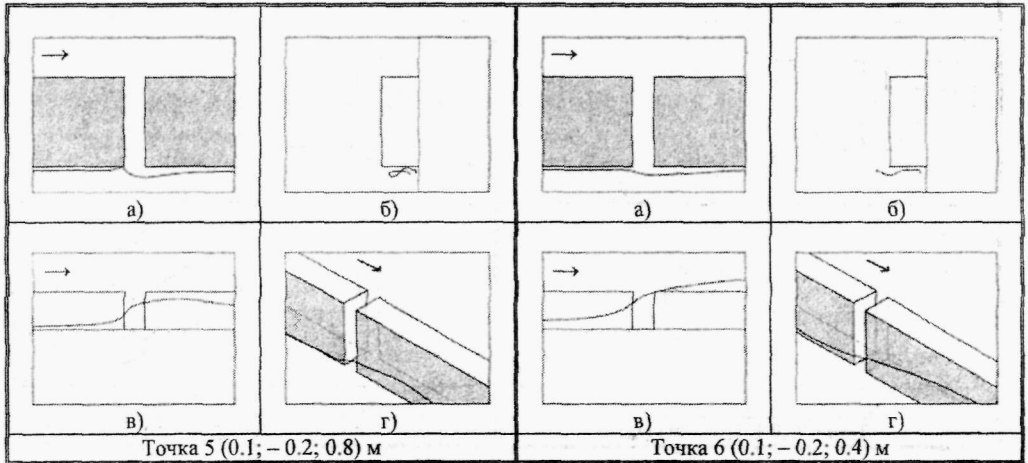


Рис. 4. Обтекание межторцовой области потоком вдоль экрана и нижних граней прямоугольных призм, расположенных тандемом над экраном

Для остальных линий тока, стекающих с верхней грани передней призмы и с верхней части ее боковой грани, характерным является *спиралеобразное прохождение межторцевой области*. Так, в отличие от линий тока, проходящих через точки с координатами  $Z \leq 0.8$  м при  $X = 0.1$  м и  $Y = -0.2$  м, показанных на рис. 4, с увеличением  $Z > 0.8$  м линии тока уже входят в межторцевую область с верхней части боковой грани: по нисходящей спирали достигают сначала торец второй призмы, а потом, касаясь плоскости симметрии, уходят под нижнюю грань второй призмы. На рис. 5 такие линии тока показаны для точек 7 и 8.

Спиралеобразный нисходящий поток через межторцевую область, показанный на рис. 5, установлен для линий тока на участке от  $Y = 3.8$  м до  $Y = 2.2$  м, рассчитанных для точек в окрестности верхней части боковой грани. Для точек 9 и 10 спиралеобразный поток имеет ту же тенденцию (рис. 6), которая установлена для точек 7 и 8.

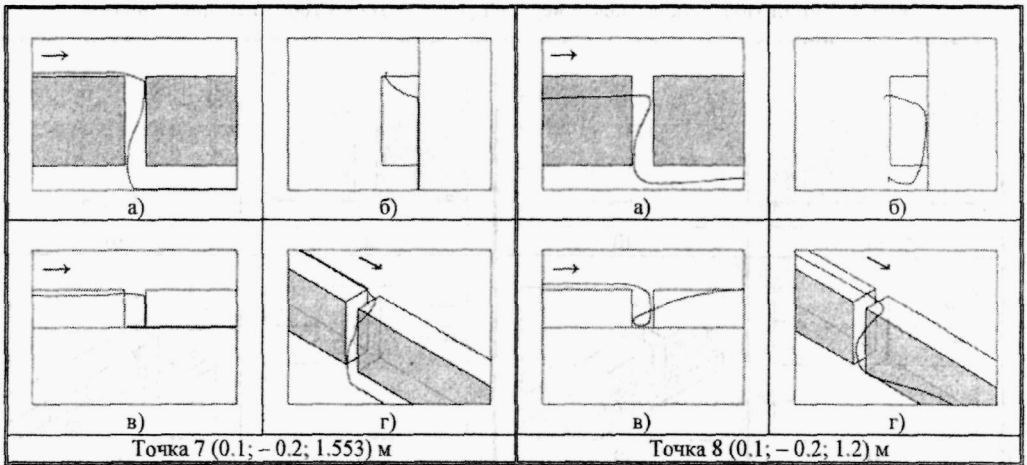


Рис. 5. Спиралеобразный нисходящий поток через межторцевую область с боковой грани под нижнюю грань

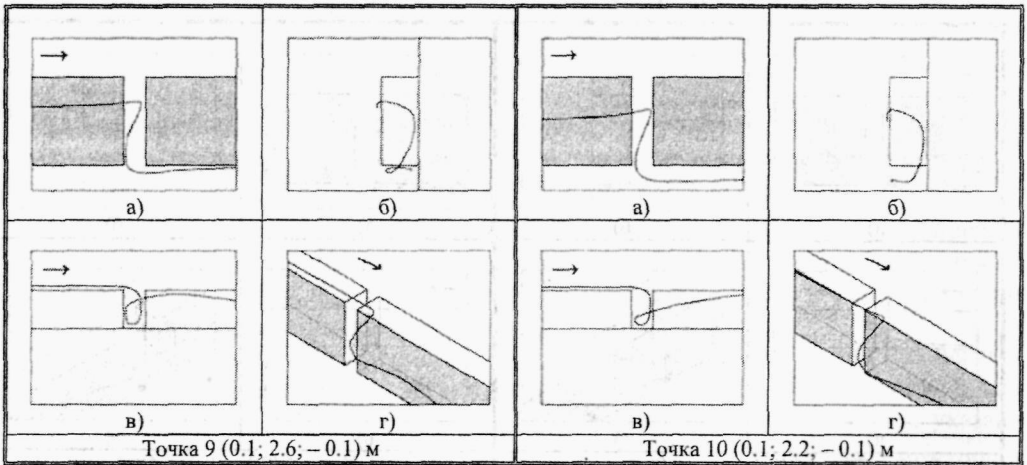
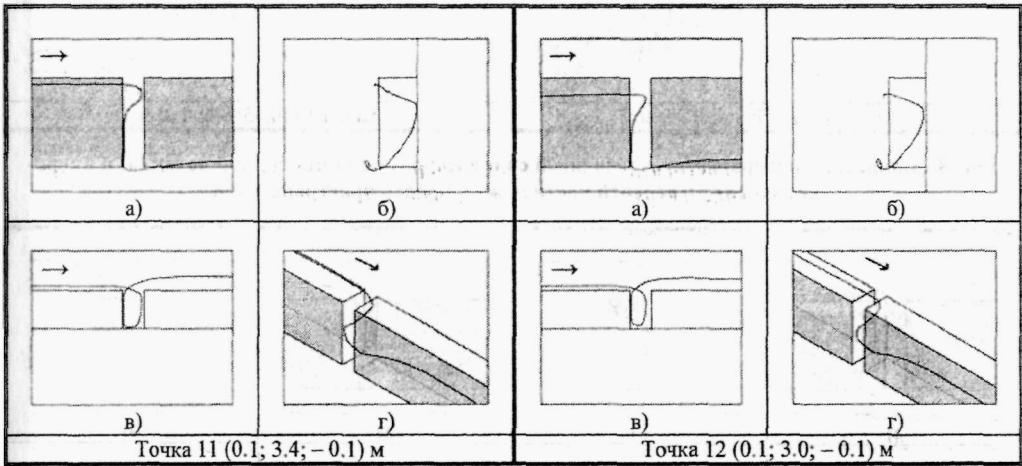


Рис. 6. Спиралеобразный нисходящий поток через межторцевую область с боковой грани под нижнюю грань

Необходимо отметить, что на рис. 5 и рис. 6 на виде «сбоку» (рис. 5, 6, а) конфигурация проекции линии тока характеризует интенсивное течение из межторцевой области под нижнюю и боковую грани второй призмы. Уточним, что через нижний участок боковой грани второй призмы могут проходить линии тока, связанные с точками, расположенными в окрестности верхней части боковой грани в примерном диапазоне  $3.0 м < Y < 3.4 м$ , который соответствует двум расчетным точкам 11 и 12 (рис. 7).

Обратим внимание на то, что линии тока, проходящие через точки 11 и 12, входят в межторцевую область с боковой грани передней призмы, описывают в этой области полный виток нисходящей спирали и выходят, попадая на боковую грань второй призмы. Шаг витка спирали практически соизмерим с высотой боковой грани призмы.



**Рис. 7. Спиралеобразные нисходящие линии тока через точки 15 и 16 в окрестности боковой грани**

Спиралеобразный нисходящий поток частью своей внешней границы совместно с плоскостью симметрии и торцом передней призмы в межторцевой области образуют пространство, в котором потоком с верхней грани призмы формируется еще одно сворачиваемое по спирали течение. На рис. 8 показана линия тока, проходящая через точку 13 (0.45; 3.6; 0.17) м и принадлежащая этой внешней границе. А линия тока, проходящая через рядом стоящую точку 14 (0.45; 3.6; 0.2) м, уже образует *спиральное течение в верхней части межторцевого пространства*. Эта линия тока сходит с верхней грани передней призмы в межторцевое пространство, разворачивается вдоль торца задней призмы по направлению к плоскости симметрии; далее линия тока искривляется, затем вдоль торца передней призмы попадает в область стекающего с верхней грани потока и уносится им вдоль верхней грани задней призмы (рис. 8, б).

В качестве примера линий тока, формирующих вихревое течение в верхней части межторцевого пространства, на рис. 9 показаны линии тока, проходящие через точки 15 и 16.

Аналогичный характер имеют все линии тока, принадлежащие периферийным слоям вихревого течения в верхней части межторцевого пространства, то есть

линии тока с верхней грани передней призмы после циркуляции в межторцовом пространстве попадают на верхнюю грань задней призмы.

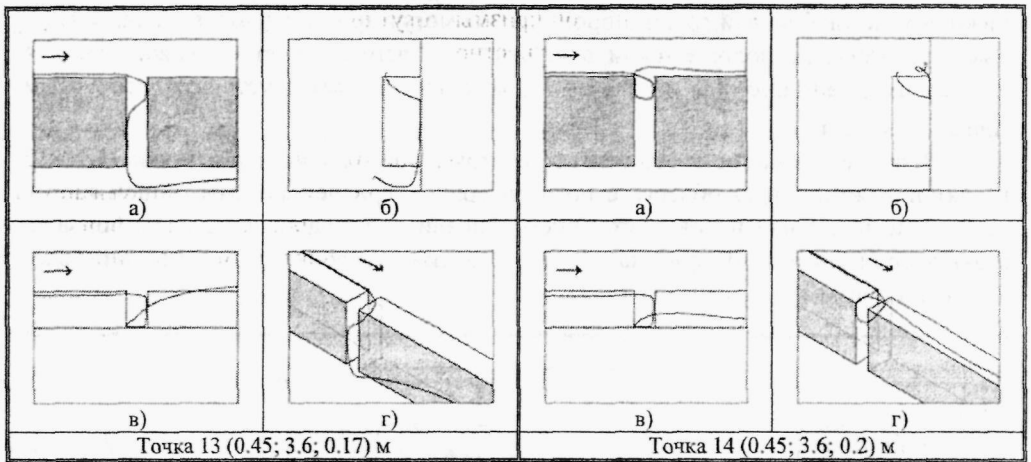


Рис. 8. Линии тока поверхности, отделяющей спиралеобразный нисходящий поток (а) и вихревое течение в верхней части межторцового пространства (б)

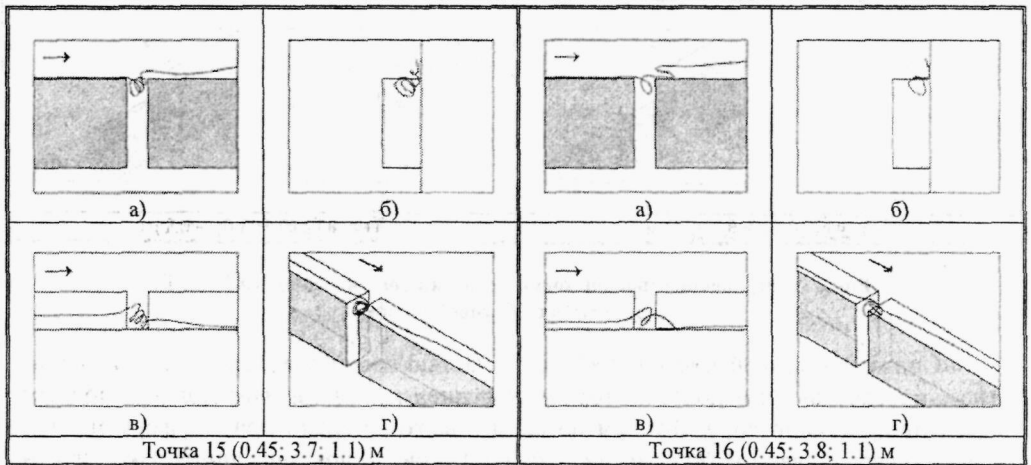


Рис. 9. Вихревое течение в верхней части межторцового пространства

Однако, расчетами установлено, что для линий тока в центральной части вихревого течения характерна иная тенденция, чем отмеченная для точек 14, 15, 16. Линии тока центральной части (окрестность угловой области стекания, образованной торцом и верхней гранью задней призмы с плоскостью симметрии), проходя центральную часть вихревого течения, с высокой частотой вращения на выходе взаимодействуют с нисходящим спиралевидным течением и уносятся под нижнюю грань призмы – днище вагона. Такой характер течения подтверждает рис. 10, построенный для линий тока, проходящих через точки 17 и 18.

В исследуемой области течения между торцами прямоугольных призм (рис. 11) в направлении оси X показана структура течения в сечениях 1 – 9 в виде проекций вектора скорости на рассматриваемое сечение в каждом расчетном узле: сечение 1 для  $X/B \approx 0$ , сечения 2...5 соответственно для



$X/B = 0,25; 0,5; 0,75; \approx 1$ . В напрямленні осі  $Y$  сечення 7 при  $Y=0$  відповідає рівню нижньої грани призми, то єсть днищу вагона, а сечення 8 при  $Y = 3,692 \text{ м}$  – рівню верхньої грани призми, то єсть крыше вагона. Сечення 6 при  $Z = 1,553 \text{ м}$  знаходиться в продольній площині симетрії прямокутних призм, паралельній площині  $XOY$ , а сечення 9 при  $Z = 0$  знаходиться в площині бокової грани призм, імітують бокову стінку вагона. Из структури течення в межторцовому просторі (рис. 11) видно, в частині, як потоки с верхньої і бокової граней передньої призми в схемі «тандем», попадаючи в межторцову область, розворачиваються в напрямленні торця другої призми (сечення 5) і к площині симетрії (сечення 6), на кожній из которых установленны точки присоединения и растекания  $\Pi_5$  и  $\Pi_6$ , соответственно, что указывает на существование вихревых спиралеобразных структур.

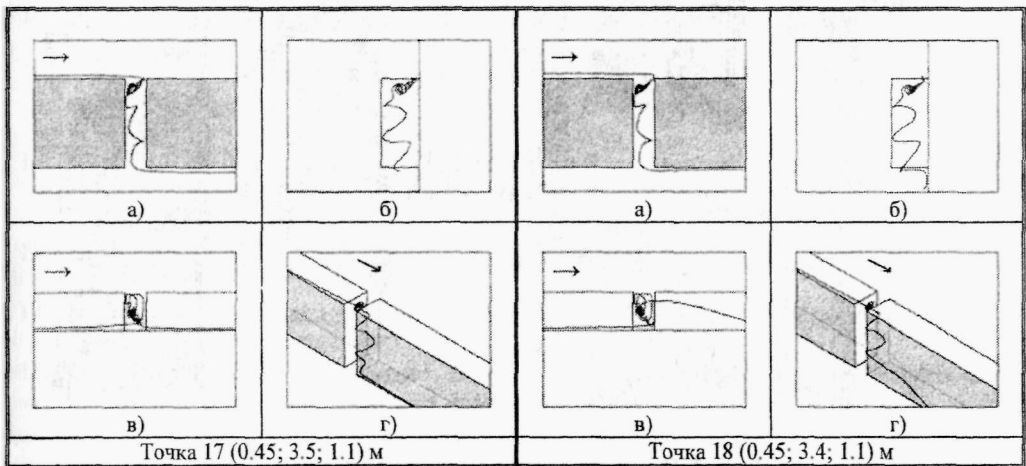


Рис. 10. Течення из центральной области вихря в верхней части межторцового пространства

Таким образом, установленная картина течения в межторцовой области двух призм над экраном принципиально отличается от аналогичной задачи в двумерной постановке [2; 3]. Некоторое внешнее сходство течений можно отметить, сравнивая вихревое течение в верхней части межторцового пространства и циркуляционное течение в каверне без дна над экраном. Однако, по существу, структура трехмерного течения в межторцовой области является гораздо более сложной. Возникает два вихревых течения: одно – *спиралеобразное нисходящее*, другое – *вихревое*, состоящее из *периферийного* и *центрального*, взаимодействующего со спиралеобразным нисходящим. Такой характер течения в межторцовом пространстве вызывает качественно иное распределение кинематических и динамических параметров в исследуемой области течения. А это означает, что корректное моделирование процессов, происходящих в межвагонном пространстве, возможно лишь при рассмотрении задачи в трехмерной постановке.

**Выводы.** Анализ структуры течения в межторцовом пространстве позволил выделить следующие основные потоки и вихревые образования:

- 1) спиралеобразное нисходящее;
- 2) вихревое, состоящее из периферийного и центрального, взаимодействующего со спиралеобразным нисходящим.

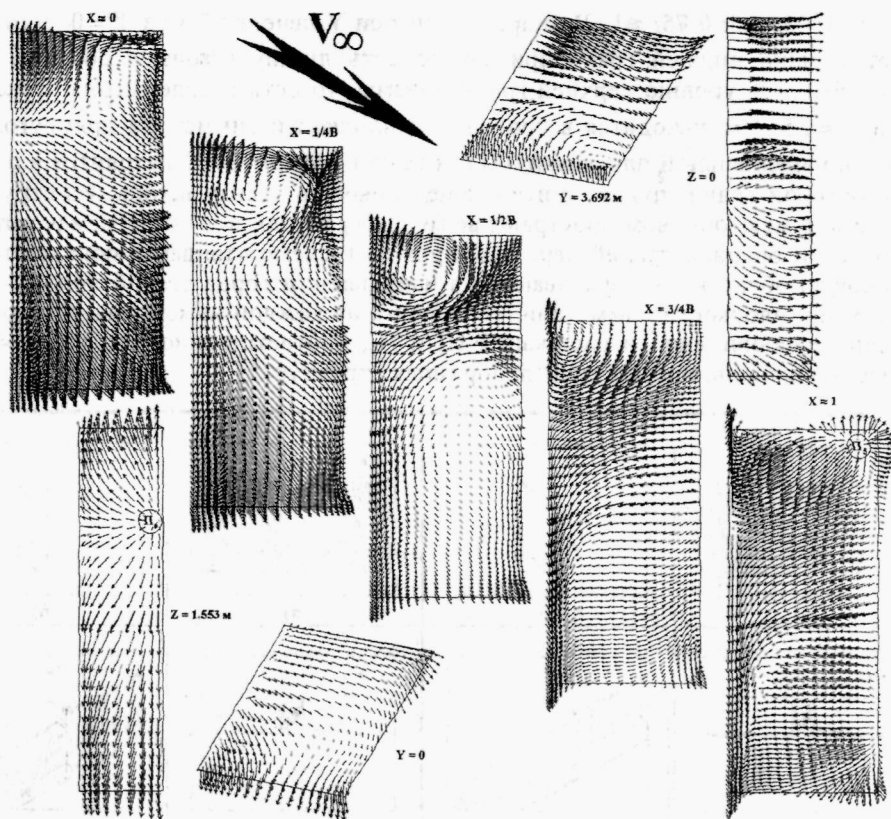


Рис. 11. Проекції вектора швидкості в сеченнях

1 ( $X/B \approx 0$ ), 2 ( $X/B = 0.25$ ),

3 ( $X/B = 0.5$ ), 4 ( $X/B = 0.75$ ),

5 ( $X/B \approx 1$ ), 6 ( $Z = 1.553$  м – площини симетрії),

7 ( $Y = 0$ ), 8 ( $Y = 3.692$  м), 9 ( $Z = 0$ )

між торцями прямокутних призм, розташованих тандемом над екраном

### Бібліографічні посилання

1. **Абрамович А.К.** К расчету воздушного сопротивления поезда на открытой трассе и в тоннеле / А.К. Абрамович. // Труды ЦАГИ. – 1939. – Вып. № 400. – 32 с.
2. **Кравец Е.В.** Влияние типа обтекателя на аэродинамическое сопротивление межвагонного пространства скоростного поезда / Е.В. Кравец // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2006. – Вип. 10, т. 1, № 2/1. – С. 113–119.
3. **Кравец Е.В.** Сравнительный анализ течения в открытом и частично перекрытом межвагонном пространстве при движении скоростного поезда / Е.В. Кравец // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2004. – Вып. 8, т. 1. – С. 26–33.
4. **Петров Г.И.** Экспериментальное исследование аэродинамики скоростных поездов / Г.И. Петров, С.М. Горлин, Г.А. Романенко // Науч. труды НИИ механики МГУ. – 1966. – Вып. № 523. – 128 с.
5. **Романенко Г.А.** Влияние формы скоростного поезда на его воздушное сопротивление / Г.А. Романенко // Науч. труды НИИ механики МГУ. – 1967. – Вып. № 741. – 65 с.



6. **Скоростной и высокоскоростной железнодорожный транспорт.** В прошлом, настоящем и будущем. К 150-летию железнодорожной магистрали Санкт-Петербург–Москва. – Т.1 – СПб., 2001. – 320 с.
7. **Сюзюмова Е.М.** Анализ модельных испытаний в аэродинамической трубе поездов различной геометрической формы и сравнение результатов этих испытаний с натурными опытами для тех же поездов / Е.М. Сюзюмова, Г.А. Романенко // Науч. труды НИИ механики МГУ. – 1974. – Вып. № 21846. – 104 с.
8. **Сюзюмова Е.М.** Оценка количественных и качественных характеристик воздушного сопротивления скоростного поезда / Е.М. Сюзюмова, Г.А. Романенко // Вестник Всесоюз. научн.-исслед. ин-та ж.-д. трансп. – 1979. – № 4. – С. 22–26.
9. **Сюзюмова Е.М.** Экспериментальное исследование поля скоростей вокруг скоростного поезда / Е.М. Сюзюмова, Г.А. Романенко // В кн.: Совершенствование процессов теплообмена и аэродинамики электроподвижного состава. Труды Всесоюзн. науч.-исслед. ин-та ж.-д. трансп. М., 1979. – Вып. 617. – С. 86–96.
10. **Худяков Г.Е.** Исследование ветровых нагрузок, действующих на вагон / Г.Е. Худяков // Науч. труды НИИ механики МГУ. – 1987. – Вып. № 3408. – 21 с.
11. **Худяков Г.Е.** Обоснование выбора внешней геометрической формы скоростных поездов / Г.Е. Худяков // Науч. труды НИИ механики МГУ. – 1988. – Вып. № 3666. – 79 с.
12. **Sutter K.** Untersuchungen über den Luftwiderstand an Eisenbahnfahrzeugen in Tunneln / K. Sutter // Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt. – 1930 – № 18. – S. 109–122.
13. **Theopold L.** Reisezugwagen für 200 km/h / L. Theopold // Deutsches Eisenbahn technick. – 1967. – 15, № 6. – S. 156–162.
14. **Tollmien W.** Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge / W. Tollmien // Zeitschr. Angew. Mathem. u Mech. – 1926. – № 6. – S. 76–79.
15. **Vogelpohl G.** Windkanalversuche über den Luftwiderstand von Eisenbahnfahrzeugen / G. Vogelpohl // Verein Deutscher Ingenieure. – Bd. 78. – 3 Feb. – 1934. – № 5. – S. 59–67.

Надійшла до редколегії 01.10.10

УДК 551.509

Е.В. Егоров, Н.Н. Лычагин

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

## РАСЧЕТ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ ГОРОДСКОГО ЛАБИРИНТА

Розглянуто фільтраційну математичну модель розповсюдження забруднюючих домішок в атмосфері великих міст зі щільною та висотною забудовою (міський лабіринт). Запропоновано наближений метод розрахунку полів швидкості вітру та концентрації забруднень у приземному шарі атмосфери від наземних точкових та лінійних джерел, які моделюють промислові димові труби на рух автомобільного транспорту вздовж вулиць міста.

*Ключові слова:* забруднення міської атмосфери, фільтраційна модель розповсюдження забруднень, точкові та лінійні джерела забруднення.

Рассмотрена фильтрационная математическая модель распространения загрязняющих примесей в атмосфере больших городов с плотной и высотной застройкой (городской лабиринт). Предложен приближенный метод расчета полей скорости ветра и концентрации загрязнений в приземном слое атмосферы, поступающих от наземных точечных и линейных источни-

ков, моделюючих промислові димові труби і подвижні джерела вздовж магістралей, відповідно.

*Ключевые слова* загрязнение городской атмосферы, фильтрационная модель распространения загрязнений, точечные и линейные источники загрязнения.

The mathematical model of filtration flow is applied to calculation of polluted air flow within the complicated urban canopy structure (urban labyrinth). The approximate method for analysis of the flow field and concentration of pollutants, which are spread from pointed and linear sources (modeling the industrial chimneys and automobile traffic along the roads) is suggested.

*Key words* urban pollution, filtration model of the spread of pollution, pointed and linear sources of pollution

**Введение.** В [1] предложена фильтрационная математическая модель распространения загрязняющей примеси в атмосфере городского лабиринта – района плотной и высотной застройки, где из-за резкого ухудшения проветривания происходит возрастание концентрации атмосферных загрязнений. Основным источником такого рода загрязнений в городском лабиринте является автомобильный транспорт, вклад которого в загрязнение атмосферы крупных городов составляет 70–90 % [2].

Предложенная в [1] система нелинейных дифференциальных уравнений фильтрационной математической модели, определяющая поля скорости ветра, температуры, концентрации атмосферных загрязнений может быть решена численными методами [3 – 5]. Они, в принципе, позволяют получить точное решение широкого класса задач с учетом рельефной, температурной и влажностной неоднородности подстилающей поверхности земли.

Вместе с тем, необходимо отметить, что численное решение этих задач довольно трудоемко. Оно требует больших затрат времени работы компьютера. Точность решения ухудшается вследствие аппроксимации точечных и линейных источников выбросов загрязняющей примеси на конечно-разностной сетке. Её шаг приходится задавать достаточно большим, вычисления проводить по всей сетке, даже если область распространения загрязнений от отдельных источников носит локальный характер.

Однако, в практической деятельности специалистов метеорологов и экологов часто возникает необходимость в проведении быстрых и оперативных, оценочного характера, расчетов для анализа и прогноза распространения атмосферных загрязнений на территории со сложной неоднородностью подстилающей поверхности, в различных условиях температурной стратификации атмосферы. Для выполнения такой работы применение численных методов интегрирования не всегда удобно. Возникает необходимость в использовании достаточно простых аналитических или полуаналитических приближенных методов расчета. Уступая в точности численным методам, они позволяют быстро и оперативно получить требуемый результат, даже, если число источников выброса загрязнений велико, так как появляется возможность с необходимой точностью и детальностью указать их расположение.

В настоящей работе предлагается приближенный аналитический метод расчета фильтрационных полей скорости ветра и концентрации атмосферной загрязняющей примеси от наземных точечных и линейных источников, моделирующих движение автомобильного транспорта в условиях городского лабиринта с учетом влияния характера и плотности застройки, а также факторов устойчивости состояния атмосферы.

**Метод расчета поля скорости ветра в приземном слое атмосферы городского лабиринта.** Большинство задач распространения атмосферных загрязнений

решается в квазистационарной постановке, когда предполагается, что время перемещения примеси от источника к рецептору много меньше времени изменения внешних метеорологических условий [3; 6]. В квазистационарном случае система дифференциальных уравнений, определяющих фильтрационное поле скорости ветра в приземном слое атмосферы городского лабиринта  $0 < z < H$ , имеет вид [1]:

$$m^2 g \left( \frac{\partial h}{\partial x} + B u \sqrt{u^2 + v^2} \right) = v \Omega_z, \quad (1)$$

$$m^2 g \left( \frac{\partial h}{\partial y} + B v \sqrt{u^2 + v^2} \right) = -u \Omega_z, \quad (2)$$

$$m^2 g \left( \frac{\partial h}{\partial z} + \beta \Delta T \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Уравнения (1) – (4) записаны с использованием величины  $h$ , (м), которая представляет собой полный напор воздушного потока в порах городского лабиринта

$$h = \frac{u^2 + v^2}{2m^2 g} + \frac{p - p_0}{m\gamma} + z, \quad (5)$$

а также вертикальной составляющей вектора вихря, (сек)<sup>-1</sup>

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (6)$$

В соотношениях (1) – (6) обозначено:  $x, y, z$  – декартовы координаты, (м);  $u, v, w$  – проекции вектора фильтрационной скорости ветра на оси декартовой системы координат  $Oxyz$ , (м/сек), в которой оси  $Ox, Oy$  расположены на подстилающей поверхности земли: ось  $Ox$  направлена по вектору скорости ветра вдали от городского лабиринта ( $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ ), а ось  $Oz$  – перпендикулярно ей;  $p - p_0$  – избыточное давление над подстилающей поверхностью, (Па);  $\Delta T = T(x, y, z) - T_0(x, y)$  – избыточная температура над подстилающей поверхностью, (К);  $B$  – коэффициент силы сопротивления твердого каркаса городского лабиринта, (сек/м)<sup>2</sup>;  $\beta$  – коэффициент объемного термического расширения воздуха, (К);  $g = 9,8$  м/сек<sup>2</sup> – ускорение земного тяготения;  $\gamma$  – удельный вес воздуха, (Н/м<sup>3</sup>);  $H_0 = (50 \div 100)$  м – верхняя граница приземного слоя атмосферы;  $m$  – коэффициент плотности застройки городского лабиринта,  $0 < m < 1$ . Система уравнений (1) – (4) решается при следующих граничных условиях:  $u = v = w = h = \Delta T = 0$ , при  $z = 0$ , (7)

$$\begin{cases} u = u_1 (z / z_1)^n, & v = w = 0, \\ h = \frac{u_1^2}{2g} \left( \frac{z}{z_1} \right)^{2n}, & \frac{\Delta T}{\Delta T_1} = \mp \frac{z}{100}, \text{ при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty \end{cases} \quad (8)$$

В условиях (8) обозначено:  $z_1 \approx 1$  м – некоторая высота над уровнем подстилающей поверхности;  $u_1, v_1$  – компоненты скорости ветра на высоте  $z = z_1$ ;  $\Delta T_1 = (0,6 \div 1,3)^\circ\text{C}$  – падение температуры на каждые 100 м высоты в пограничном

слоє атмосфери в залежності від її стану;  $0,1 \leq n \leq 0,5$  – показник, що враховує стан атмосфери, її температурну стратифікацію; знак «-» в вираженні (8) береться при  $0,1 \leq n \leq 0,3$ , а знак «+» – при  $n > 0,3$ .

Приближенні вираження для компонентів швидкості вітру в атмосфері міського лабіринту будемо знаходити, виходячи з виду рівнянь (1) – (4), граничних умов (7), (8), а також керуючись розглядами розмірності та фізичного змісту. З рівняння (3) маємо:

$$u^2 + v^2 = 2m^2 g [h + \beta\theta(x, y, z)], \quad (9)$$

$$\text{де } \theta(x, y, z) = \int_0^z \Delta T(x, y, \zeta) d\zeta.$$

Далі поступимо наступним чином.

1) В рівняннях (1), (2) апроксимуємо величину  $\Omega_z$  приблизним вираженням

$$\Omega_z \approx c \frac{v}{h}, \quad \text{де } c = \text{const} \quad (10)$$

в силу того, що  $\Omega_z$  в приземному шарі атмосфери міського лабіринту виникає виключно за рахунок рельєфної та температурної неоднорідності підстилаючої поверхні лабіринту. При  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$  ця величина повинна прагнути до нуля, згідно з граничною умовою (8), так як за межами міського лабіринту неоднорідність підстилаючої поверхні відсутня.

2) Положимо, що

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} = mA, \\ \frac{\partial h}{\partial y} = (\bar{z})^n + mA, \quad \text{де } \bar{z} = \frac{z}{z_1}, \quad A = Bu\sqrt{2g(h + \beta\theta)} \end{cases} \quad (11)$$

Використовуючи (9), (10), (11), з рівнянь (1), (2) можна отримати наступні приблизні співвідношення

$$\begin{cases} \bar{u} = \frac{u}{u_1} \approx m \left[ (\bar{z})^n + (1 + v/u) mA \right], \\ \bar{v} = \frac{v}{v_1} \approx -2m^2 A \end{cases} \quad (12)$$

3) Величини  $u$ ,  $v$ ,  $h$ ,  $\theta$ , що входять у праві частини співвідношень (12), приблизно замінимо їх граничними значеннями (8). Отримаємо

$$\begin{cases} \bar{u} \approx m\bar{z}^n (1 - ma), \\ \bar{v} \approx 2m^2 \bar{z}^n a, \end{cases} \quad (13)$$

де

$$a = Bu_1^2 m\bar{z}^{2n} \sqrt{1 \mp \gamma_1 \beta \Delta T_1 \bar{z}^{2(1-n)}}. \quad (14)$$

В выражении (14) используется параметр:  $\gamma_1 = \frac{gz_1}{u_1^2} \cdot \frac{z_1}{100}$ , а значение величины

$\sqrt{2g(h + \beta\theta)}$  из физических соображений взято со знаком минус.

4) Усредним по высоте приземного слоя атмосферы  $\bar{H}_0 = H_0 / z_1$  величины  $\bar{z}^n$  и  $\bar{z}^{2(1-n)}$

$$\frac{1}{\bar{H}_0} \int_0^{\bar{H}_0} \bar{z}^n d\bar{z} = \frac{\bar{H}_0^n}{n+1}, \quad \frac{1}{\bar{H}_0} \int_0^{\bar{H}_0} \bar{z}^{2(1-n)} d\bar{z} = \frac{\bar{H}_0^{2(1-n)}}{2(1-n)+1}$$

и подставим их в правые части соотношений (13). Получим

$$\begin{cases} \bar{u} \approx m(1 - m\alpha)\bar{z}^n, \\ \bar{v} \approx 2m^2\alpha\bar{z}^n, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$\alpha = \frac{Bu_1^2 \bar{H}_0^n}{n+1} \sqrt{1 \mp \frac{\gamma_1 \beta \Delta T_1 \bar{H}_0^{2(1-n)}}{2(1-n)+1}}. \quad (16)$$

Соотношения (15), (16) представляют собой приближенные выражения для расчета горизонтальных компонент вектора фильтрационной скорости ветра в приземном слое атмосферы городского лабиринта. Они удовлетворяют как граничным условиям (8), так и соображениям физического характера. В самом деле, коэффициент сил сопротивления твердого каркаса городского лабиринта можно приближенно вычислить по формуле

$$B = \frac{1-m}{2mg\ell_{cp}} C_{xD}, \quad (17)$$

где  $C_{xD}$  – средний коэффициент силы сопротивления одного, отдельно взятого здания (сооружения) в городском лабиринте;  $\ell_{cp}$  – средний горизонтальный размер этого здания, (м).

Тогда из (15), (16), (17) очевидно, что при  $m \rightarrow 0$  (очень плотная застройка),  $\bar{u} \rightarrow 0$ ,  $\bar{v} \rightarrow 0$ , а при  $m \rightarrow 1$  (отсутствие всякой застройки),  $\bar{u} \rightarrow \bar{z}^n$ ,  $\bar{v} \rightarrow 0$ , то есть выполняются граничные условия (8).

Вертикальную компоненту  $w$  вектора скорости можно определить, интегрируя уравнения неразрывности (4), если соотношения (15) представить в более общем виде, как функции  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ . Например, так:

$$\begin{cases} \bar{u} = m[1 - m\alpha f_1(\bar{x}, \bar{y})]\bar{z}^n, \\ \bar{v} = 2m^2\alpha f_2(\bar{x}, \bar{y})\bar{z}^n \end{cases} \quad (18)$$

где  $\bar{x} = x / z_1$ ,  $\bar{y} = y / z_1$ ; а функции  $f_{1,2}(\bar{x}, \bar{y})$  находятся из решения задачи (1) – (4), (7), (8).

Следует отметить, что в приземном слое атмосферы вертикальная компонента скорости ветра мала и при расчете распространения легкой загрязняющей примеси её влиянием можно пренебречь [6].

**Метод расчета поля концентрации загрязняющей примеси.** Как указывалось ранее, основным источником загрязнения атмосферы городского лабиринта является автомобильный транспорт. Его действие хорошо моделируется непрерывно функционирующими наземными точечными и линейными источниками. Выхлопные газы автомобилей можно рассматривать как легкую загрязняющую примесь, слабо поглощаемую городской подстилающей поверхностью. Конвективным переносом загрязнения в вертикальном направлении можно пренебречь [6].

В случае единичного, непрерывно действующего наземного точечного источника легкой загрязняющей примеси, расположенного в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , где  $z_0$  – уровень шероховатости подстилающей поверхности (для города  $z_0 \approx 1$  м), уравнение переноса атмосферных загрязнений в городском лабиринте имеет вид [1]:

$$m \frac{\partial}{\partial z} \left[ v_{\phi z}^T(z) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] - u \frac{\partial \phi}{\partial x} - v \frac{\partial \phi}{\partial y} - m \sigma \phi = -q \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0). \quad (19)$$

В уравнении (19) обозначено:

$\phi(x, y, z)$  – концентрация загрязняющей примеси,  $(\text{кг}/\text{м}^3)$ ;  $v_{\phi z}^T(z)$  – вертикальный кинематический коэффициент турбулентной диффузии примеси,  $(\text{м}^2/\text{с})$ ;  $\sigma$  – параметр нейтрализации примеси в атмосфере,  $(\text{с})^{-1}$ ,  $q$  – интенсивность точечного источника,  $(\text{кг}/\text{с})$ ;  $\delta(x_i)$  – дельта-функция Дирака,  $(\text{м})^{-1}$ .

Граничные условия для уравнения (19) имеют вид:

$$v_{\phi z}^T(z) \frac{\partial \phi}{\partial z} \approx 0, \quad \text{при } z = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad (21)$$

$$\phi \rightarrow 0, \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \quad (22)$$

В качестве компонент скорости ветра  $u$ ,  $v$  в атмосфере городского лабиринта возьмем соотношения (15), (16), а кинематический коэффициент турбулентного обмена  $v_{\phi z}^T(z)$  будем задать в виде (7)

$$v_{\phi z}^T(z) = k_1(z / z_1)^P = k_1 \bar{z}^P, \quad (23)$$

Приближенное решение задачи (19) – (22) будем отыскивать следующим образом.

Осредним функцию  $u(\bar{z})$ ,  $v(\bar{z})$ ,  $v_{\phi z}^T(\bar{z})$  по концентрации  $\phi(x, y, \bar{z})$  в пределах высоты приземного слоя атмосферы городского лабиринта  $\bar{H}_0$ , используя соотношения (15), (23) и теорему о среднем значении интеграла. Будем иметь.

$$\phi_e = \int_0^{\bar{H}_0} \phi(x, y, \bar{z}') d\bar{z}',$$

$$u_e = \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\bar{H}_0} u(\bar{z}) \phi(x, y, \bar{z}') d\bar{z}' \approx u_1 m (1 - m_1 \alpha) (\bar{H}_0 / 2)^n, \quad (24)$$

$$v_e = \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\bar{H}_0} v(\bar{z}) \phi(x, y, \bar{z}') d\bar{z}' \approx 2u_1 m^2 \alpha (\bar{H}_0 / 2)^n,$$

$$v_e^T = \frac{1}{\phi_e} \int_0^{\bar{H}_0} v_{\phi z}^T(\bar{z}) \phi(x, y, \bar{z}') d\bar{z}' \approx K_1 (\bar{H}_0 / 2)^n.$$

Заменим исходную задачу (19) – (22) приближенной задачей

$$mv_e^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \left( u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - m\sigma\phi = -q\delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0). \quad (25)$$

$$v_e^T \frac{\partial \phi}{\partial z} \approx 0, \quad \text{при } z = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \rightarrow 0, \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad (27)$$

$$\phi \rightarrow 0, \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \quad (28)$$

где величины  $u_e, v_e, v_e^T$  определены соотношениями (24).

Наличие городской застройки и обусловленное этим действие сил сопротивления, приводит к отклонению главного вектора фильтрационной скорости ветра в городском лабиринте от направления скорости ветра вне лабиринта на угол

$$\theta = \pm \arccos(u_e / V_e), \quad (29)$$

где

$$V_e = \sqrt{u_e^2 + v_e^2} = u_1 m (\bar{H}_0 / 2)^2 \sqrt{1 - 2m\alpha + 5(m\alpha)^2} \quad (30)$$

В (25) – (28) сделаем замену переменных

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{v_e} [(x - x_0) \cos\theta + (y - y_0) \sin\theta], \\ y_1 = \frac{1}{z_0} [-(x - x_0) \sin\theta + (y - y_0) \cos\theta], \\ z_1 = \frac{z}{\sqrt{mv_e^T}}, \quad z_{01} = \frac{z_0}{\sqrt{mv_e^T}}, \end{cases} \quad (31)$$

где

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{u_e}{V_e} = \frac{1 - m\alpha}{\sqrt{1 - 2m\alpha + 5(m\alpha)^2}}, \\ \sin\theta = \frac{v_e}{V_e} = \frac{\pm 2m\alpha}{\sqrt{1 - 2m\alpha + 5(m\alpha)^2}}, \end{cases} \quad (32)$$

а затем сделаем замену искомой функции  $\phi(x, y, z)$

$$\phi(t_1, y_1, z_1) = \bar{\phi}(t_1, y_1, z_1) \exp(-m\sigma t_1). \quad (33)$$

В итоге, приходим к задаче

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z_1^2} - \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t_1} = -\frac{q \exp(m\sigma t_1)}{z_0 V_e \sqrt{mv_e^T}} \delta(t_1) \delta(y_1) \delta(z_1 - z_{01}), \quad (34)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z_1} \approx 0, \quad \text{при } z_1 = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z_1} \rightarrow 0, \quad \text{при } z_1 \rightarrow \infty, \quad (36)$$

$$\bar{\phi} \rightarrow 0, \quad \text{при } t_1^2 + y_1^2 \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Решение задачи (34) – (37) имеет вид:

$$\bar{\phi}(t_1, y_1, z_1) = -\frac{q}{2\sqrt{\pi}z_0V_e\sqrt{mv_e^T t_1}} \left\{ \exp\left[-\frac{(z_1 - z_0)^2}{4t_1}\right] + \exp\left[-\frac{(z_1 + z_0)^2}{4t_1}\right] \right\}. \quad (38)$$

Учитывая (31), (33), получим из (38) распределение концентрации загрязняющей примеси от точечного источника в приземленном слое атмосферы городского лабиринта в виде:

$$\phi(t, y, z) = \frac{q}{2\sqrt{\pi}} \phi'(t, y, z), \quad (39)$$

$$\phi'(t, y, z) = -\frac{\exp(-m\sigma x' / V_e)}{\sqrt{mv_e^T V_e x'}} \left\{ \exp\left[-\frac{V_e(z - z_0)^2}{4mv_e^T x'}\right] + \exp\left[-\frac{V_e(z + z_0)^2}{4mv_e^T x'}\right] \right\} \quad (40)$$

где

$$x'(x, y) = (x - x_0)\cos\theta + (y - y_0)\sin\theta. \quad (41)$$

Для линейного наземного источника интенсивности  $q_e \left( \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} \right)$ , действующего на конечном отрезке  $y = f(x)$  подстилающей поверхности городского лабиринта, соответственно будем иметь:

$$\phi_e = \frac{q_e}{2\sqrt{\pi}z_0} \int_{x_1}^{x_2} \phi'_f(x, y, z) dx_0, \quad (42)$$

$$\phi'_f(t, y, z) = -\frac{\exp(-m\sigma x' / V_e)}{\sqrt{mv_e^T V_e x'_f}} \left\{ \exp\left[-\frac{V_e(z - z_0)^2}{4mv_e^T x'_f}\right] + \exp\left[-\frac{V_e(z + z_0)^2}{4mv_e^T x'_f}\right] \right\}. \quad (43)$$

где

$$x'_f(x, y) = (x - x_0)\cos\theta + [(y - f(x_0))]\sin\theta. \quad (44)$$

В выражении (42)  $x_1, x_2$  – координаты начала и конца линейного источника загрязнений.

**Результаты расчетов.** С целью выявления влияния изменения плотности застройки (коэффициента  $m$ ) на характер изменения скорости ветра и концентрации загрязняющей примеси в атмосфере городского лабиринта были проведены расчёты для случая одного наземного точечного источника окиси углерода CO (основной компонент выхлопных газов автомобилей) интенсивности  $q=0,1 \frac{\text{кг}}{\text{с}}$  в различных сек



умовлях стану стійкості атмосфери. Рашчѣти проводились при наступляючих значеннях исходних параметрів:  $H_0 = 80\text{м}$ ;  $\sigma = 10^{-4}\text{с}^{-1}$ ;  $z_0 = z_1 = 1\text{м}$ ;  $U_1 = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ,  $k_1 = 0,2 \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ . При рашчѣте коеффіцієнта сил спротивлення твѣрдого каркаса городського лабіринта  $B$  параметри  $C_{xD}$ ,  $\ell_{cp}$  вычислялись по експериментальним даним [7] и задавались в виде:  $C_{xD} \approx 1,11$ ;  $\ell_{cp} \approx 1,22H_0$ . Влиянием силы плавучести пренебрегалось ( $\beta = 0$ ).

На рис 1 представлен безразмерный вертикальный профиль продольной компоненты скорости ветра  $\bar{U}(\bar{z})$ , рассчитанный по формулам (15) – (17) для двух значений коэффициента плотности застройки в зависимости от характера устойчивости атмосферы

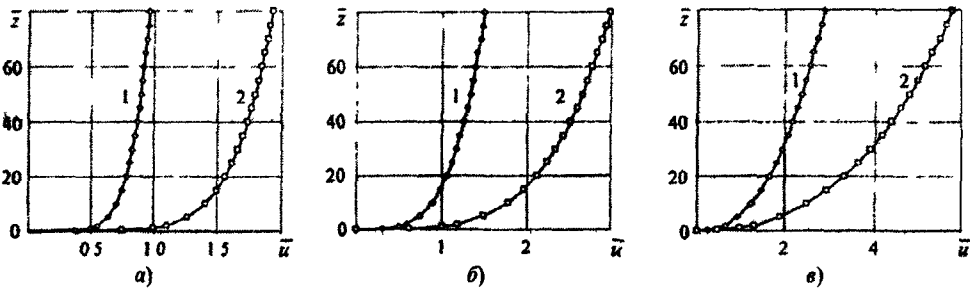


Рис. 1. Изменение продольной скорости ветра при  $m=0,5$  (кривая 1),  $m=1,0$  (кривая 2) в зависимости от характера устойчивости атмосферы: а) неустойчивая  $n = 0,5$ ; б) равновесная  $n = 0,25$ ; в) устойчивая  $n = 0,4$

На рис. 2 представлен безразмерный, отнесенный к разовой гранично допустимой концентрации окиси углерода ( $\Gamma_{DKCO} = 5 \text{мг/м}^3$ ) вертикальный профиль  $\bar{\phi}(\bar{z})$  концентрации CO, рассчитанный по формулам (39) – (41) при  $x_0 = y_0 = 0$  и  $x = y = 1000 \text{м}$  для двух значений коэффициента плотности застройки в зависимости от характера устойчивости атмосферы.

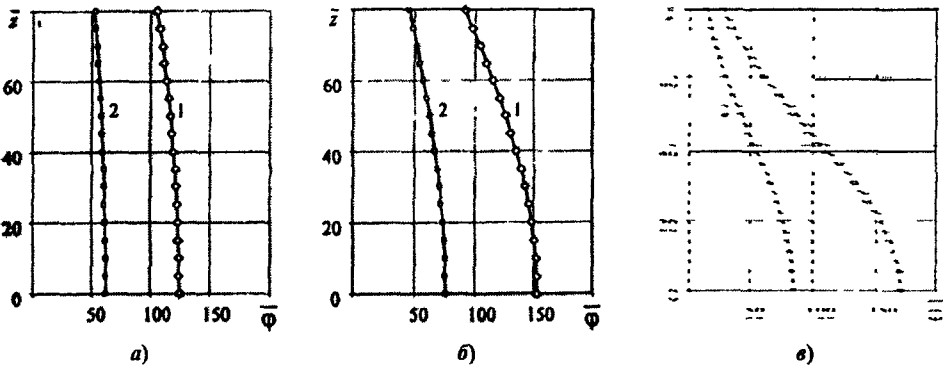


Рис. 2. Изменение вертикального профиля концентрации окиси углерода при  $m = 0,5$  (кривая 1),  $m=1,0$  (кривая 2) в зависимости от характера устойчивости атмосферы: а) неустойчивая  $n = 0,15, p = 1,2$ ; б) равновесная  $n = 0,25, p = 1,0$ ; в) устойчивая  $n = 0,4, p = 0,8$

На рис.3 представлено безрозмірне, отнесенне к  $\text{ГДК}_{\text{CO}}=5 \text{ мг/м}^3$ , наземне розподілення концентрації  $\bar{\phi}_{z_0}$  окиси вугледа, розраховане по формулам (39) – (41) при  $x_0 = y_0 = 0$  и  $z = z_0$  для двох значень коефіцієнта щільності застройки в залежності от характеру устійності атмосфери.

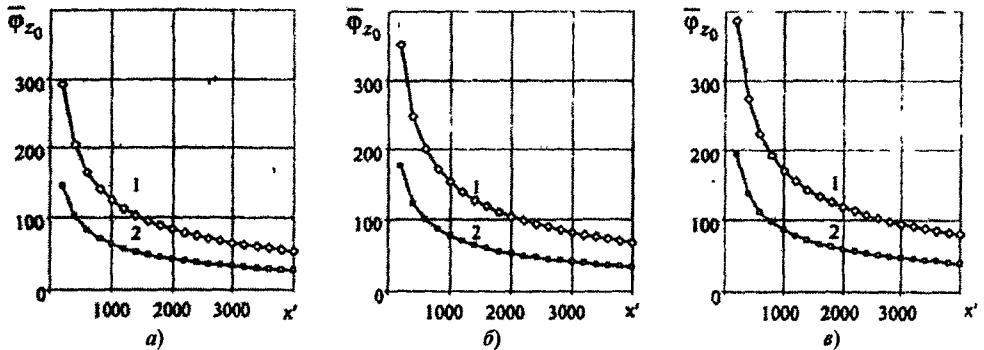


Рис. 3. Розподілення наземної концентрації окиси вугледа при  $m = 0,5$  (крива 1),  $m = 1,0$  (крива 2) в залежності от характеру устійності атмосфери: а) неустойчивая  $n = 0,15, p = 1,2$ ; б) равновесная  $n = 0,25, p = 1,0$ ; в) устойчивая  $n = 0,4, p = 0,8$ .

Результаты представленных расчетов свидетельствуют о том, что увеличение плотности застройки городского лабиринта (уменьшение коэффициента  $m$ ) однозначно приводит к уменьшению скорости ветра и возрастанию концентрации загрязняющей примеси в атмосфере.

Состояние атмосферы влияет на степень гладкости распределения концентрации по высоте. В неустойчивой атмосфере концентрация примеси слабо изменяется по высоте слоя. Для устойчивого состояния характерно повышение концентрации загрязнения в нижней части атмосферы по сравнению с её неустойчивым состоянием. Плотность застройки слабо влияет на указанное повышение. Аналогичное сравнение величин концентрации в верхней части атмосферы показывает противоположное изменение.

**Выводы.** На основе фильтрационной математической модели разработан приближенный метод расчета поля скоростей ветра и концентрации загрязняющей примеси от наземных точечного и линейного источников в приземном слое атмосферы городского лабиринта, моделирующих движение автомобильного транспорта в городе. Метод позволяет проводить быстрые оценочные расчеты анализа и прогноза распространения загрязнений в атмосфере городов, имеющих плотную и высотную застройку, оценить влияние плотности застройки на характер распространения и величину концентрации загрязняющей примеси в различных условиях атмосферной стратификации.

Результаты работы могут быть полезны для специалистов, работающих в области метеорологии и экологии атмосферы больших городов.

### Библиографические ссылки

- 1 Егоров Е.В. Фильтрационная модель распространения загрязняющих примесей в атмосфере городских лабиринтов / Е.В. Егоров, Н.Н. Лычагин // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2010. – Вип 14, т.1 – С. 143–151

2. **Абрамовский Е.Р.** Атмосфера больших городов / Е.Р. Абрамовский, Н.Н. Переметчик.–Д., 2007.– 188с.
3. **Марчук Г.И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г.И. Марчук. – М., 1982. – 320 с.
4. **Згуровский М.З.** Численное моделирование распространения загрязнений в окружающей среде / М.З. Згуровский, В.В. Скопецкий, В.К. Хрущ, Н.Н. Беляев –К., 1997. – 368 с.
5. **Пененко М.Е.** Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы / М.Е. Пененко – Н., 1985. – 272 с.
6. **Берлянд М.Е.** Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы / М.Е. Берлянд – Л., 1985 – 72 с.
7. **Simiu E.** Wind effects on structures. Second edition / E. Simiu, R.Y. Scanlan. – New York, 1986 – 589 p.

Надійшла до редколегії 05 12 10

УДК 532.5

В.А. Катан

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА, ПЛАВАЮЩЕГО НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ**

Розглянуто задачу про ударну взаємодію нестисливої рідини та твердого віссиметричного тіла, що плаває на її вільній поверхні. На основі непрямого варіанта методу граничних інтегральних рівнянь розроблено алгоритм її розв'язання, що зводить її до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Наведено приклади розв'язання задачі.

*Ключові слова* удар по тілу, що плаває на поверхні рідини, непрямий метод граничних інтегральних рівнянь.

Рассмотрена задача об ударном взаимодействии несжимаемой жидкости и твердого осесимметричного тела, плавающего на ее свободной поверхности. На основании непрямого варианта метода граничных интегральных уравнений разработан алгоритм ее решения, который приводит ее к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Приведены примеры решения задачи.

*Ключевые слова* удар по телу, плавающему на поверхности жидкости, непрямой метод граничных интегральных уравнений

The problem of a impact interaction of incompressible fluid with the rigid body of revolution floating on its surface is considered. On the basis of indirect method of boundary integral equations the algorithm of problem solution was developed which leads to Fredholm integral equation of the second type. The examples of solytion are presented.

*Key words* impact of the floating body of revolution, indirect method of boundary integral equation method

**Введение.** Классическая постановка задачи об ударном взаимодействии несжимаемой жидкости и твердого тела, плавающего на ее свободной поверхности хорошо известна. Обзор и библиография по этим вопросам содержится в [1–3].

Рассмотрим твердое тело вращения, плавающее на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей соосный осесимметричный резервуар (рис.1). В момент  $t=0$  к телу внезапно прикладывается внешняя импульсная сила и

оно мгновенно приобретает вертикальную скорость  $V$ . Возникающее из состояния покоя под действием нормальных давлений движение жидкости будет осесимметричным и потенциальным. Из интеграла Коши-Лагранжа [4] вытекает связь между потенциалом движения жидкости и импульсным давлением

$$p_i = -\rho\phi, \tag{1}$$

где  $\rho$  – плотность жидкости.

Определение потенциала  $\phi$  в момент, следующий непосредственно после удара, сводится к решению смешанной осесимметричной краевой задачи для уравнения Лапласа [1; 4]

$$\Delta\phi = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_S = V_n, \tag{3}$$

$$\phi\Big|_\Gamma = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_\Sigma = 0, \tag{5}$$

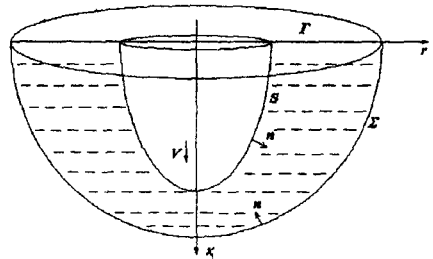


Рис. 1. Схема задачи

где  $V_n$  – проекция скорости жидкости после удара на нормаль к смоченной поверхности тела  $S$ ;  $\Gamma$  – свободная поверхность жидкости.

Условия (3) и (5) следуют из предположения о безотрывности удара. На свободной поверхности жидкости отсутствует импульсное давление, поэтому из соотношения (1) вытекает условие (4).

**Метод граничных интегральных уравнений.** Особенностью рассматриваемой смешанной задачи гидродинамического удара при больших числах Фруда является наличие на отдельных частях границы условий различного типа (либо Дирихле, либо Неймана). Этот факт позволяет с помощью специального представления искомой функции свести решение задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода на всей границе. Представим функцию  $\phi(M)$  в произвольной точке  $M$  области  $\Omega$  в виде суммы двух интегралов

$$\phi(M) = \int_{S+\Sigma} v(Q) \frac{dS_Q}{r_{MQ}} + \int_{\Gamma} \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left( \frac{1}{r_{MQ}} \right) dS_Q, \tag{6}$$

где  $n$  – внутренняя нормаль к поверхности  $S+\Gamma+\Sigma$ ,  $r_{MQ}$  – расстояние между точками  $M$  и  $Q$ .

Первый интеграл в представлении (6) является потенциалом простого слоя интенсивности  $v(Q)$ , распределенного на поверхностях  $S$  и  $\Sigma$ , а второй интеграл – потенциалом двойного слоя интенсивности  $\mu(Q)$ , распределенного на поверхности  $\Gamma$ .

Интегральные уравнения для определения неизвестных функций  $v(Q)$  и  $\mu(Q)$  получаются в результате предельного перехода на границу области  $\Omega$ . Если точка  $P$  принадлежит поверхности  $\Gamma$ , то при стремлении точки  $M$  к точке  $P$  изнутри области  $\Omega$  с учетом условия Дирихле на поверхности  $\Gamma$  интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции  $\mu(Q)$  будет иметь вид

$$\int_{S+\Sigma} v(Q) \frac{dS_Q}{r_{PQ}} + \int_{\Gamma} \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right) dS_Q + 2\pi\mu(P) = f(P), \tag{7}$$

где  $f(P)$  – заданное значение функции  $\varphi(P)$  в точке  $P$  поверхности  $\Gamma$ . Если точка  $P$  принадлежит поверхности  $S$  или  $\Sigma$ , то при предельном переходе  $M \rightarrow P$  изнутри области получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно функции  $v(Q)$

$$-2\pi v(P) + \int_{S+\Sigma} v(Q) \frac{\partial}{\partial n_P} \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right) dS_Q + \int_{\Gamma} \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n_P} \left[ \frac{\partial}{\partial n_Q} \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right) \right] dS_Q = g(P), \quad (8)$$

где  $g(P)$  заданное значение нормальной производной  $\frac{\partial \phi(M)}{\partial n}$  в точке  $P$  поверхности  $S$  или  $\Sigma$ .

В случае ударного взаимодействия твердого тела и несжимаемой жидкости функции  $f(P)$  и  $g(P)$  определяются по формулам:

$$f(M) = 0, \quad P \in \Gamma, \\ g(M) = \begin{cases} n_x, & P \in S, \\ 0, & P \in \Sigma \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, решение смешанной краевой задачи сводится к решению системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Уравнения системы (7) и (8) с учетом осевой симметрии после перехода к повторному интегрированию превращаются в систему одномерных уравнений Фредгольма второго рода относительно интенсивностей  $v(Q)$  и  $\mu(Q)$ :

$$\begin{cases} \pi v(P) + \int_0^{s_S} v(Q) R(P, Q) ds_Q + 2 \int_{s_S}^{s_\Gamma} \mu(Q) F(P, Q) ds_Q + \\ + \int_{s_\Gamma}^{s_S} v(Q) R(P, Q) ds_Q = -0,5r_s(P), \quad P \in S, \\ 2 \int_0^{s_S} v(Q) G(P, Q) ds_Q + \pi \mu(P) + 2 \int_{s_\Gamma}^{s_S} v(Q) G(P, Q) ds_Q = 0, \quad P \in \Gamma, \\ \int_0^{s_S} v(Q) R(P, Q) ds_Q + 2 \int_{s_S}^{s_\Gamma} \mu(Q) F(P, Q) ds_Q + \\ + \int_{s_\Gamma}^{s_S} v(Q) R(P, Q) ds_Q + \pi v(P) = 0, \quad P \in \Sigma, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$R(P, Q) = \frac{r(Q)}{\eta} \left[ A(P, Q) E(k) + \frac{4x_s(P)r(Q)}{\eta^2} \cdot \frac{E(k) - K(k)}{k^2} \right], \\ G(P, Q) = \frac{r(Q)}{\eta} K(k),$$

$$F(P, Q) = \frac{r(Q)}{\eta_1^3 (1-k^2)} \left\{ \begin{aligned} & B(P, Q) \frac{x(P)}{\eta_1^2} \cdot K(k) - \\ & - E(k) \left[ r_s(P) + \frac{2x(P)}{\eta_1^2} \left( B(P, Q) + \frac{B(P, Q) - r(Q)x_s(P)}{1-k^2} \right) \right] \end{aligned} \right\} -$$

$$- \frac{2r^2(Q)x(P)x_s(P)}{\eta_1^5 (1-k^2)k^2} \left\{ K(k) - \frac{E(k)}{1-k^2} \right\},$$

$$A(P, Q) = 2 \frac{r_s(P)(x(P) - x(Q)) + x_s(P)(r(Q) - r(P))}{(1-k^2)\eta_1^2},$$

$$B(P, Q) = x_s(P)(r(Q) + r(P)) - r_s(P)x(P),$$

$$k^2 = 4r_P r_Q \eta_1^{-2};$$

$$\eta_1^2 = x^2(Q) + (r(P) + r(Q))^2,$$

$K(k)$  и  $E(k)$  – полные эллиптические интегралы I-го и II-го рода. Здесь и дальше индекс  $s$  означает дифференцирование по длине контура смоченной поверхности тела вращения.

**Метод численного решения системы интегральных уравнений.** Система уравнений (10) решается методом коллокаций, в котором интегралы заменены конечными суммами. Отрезок интегрирования  $[0, s_\Sigma]$  узлами  $s_i, i = 1, 2, \dots, N+1$ , разбивается на  $N$  промежутков, при этом контуру тела соответствует отрезок  $[0, s_S]$ , свободной поверхности – отрезок  $[s_S, s_\Gamma]$ , контуру резервуара – отрезок  $[s_\Gamma, s_\Sigma]$ . На каждом промежутке искомая функция – одна из интенсивностей  $v(Q)$  и  $\mu(Q)$  представлена как постоянная

$$\begin{cases} v \\ \mu \end{cases} (s) = \begin{cases} v \\ \mu \end{cases} (s_{i+1/2}) = \Phi_i \quad \text{при } s_i \leq s \leq s_{i+1},$$

где  $s_{i+1/2}$  – середина отрезка  $[s_i, s_{i+1}]$ . В качестве точек коллокации выбраны середины отрезков  $s_{i+1/2}$ . Система уравнений (10) сводится к системе алгебраических линейных уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных  $\Phi_i, i = 1, 2, \dots, N$ . Коэффициенты СЛАУ определяются по квадратурной формуле Гаусса 10-го порядка. В случае особых интегралов при вычислении диагональных коэффициентов применяется квадратурная формула 10-го порядка с весовой функцией  $\ln x$  [6]. Решение СЛАУ производится методом Гаусса.

Коэффициент присоединенной массы  $\mu$  определяется по формуле

$$\mu = -2\pi\rho \int_0^s \phi(s) r(s) r_s(s) ds. \tag{11}$$

По описанному алгоритму составлена программа для расчета вертикального удара плавающего тела вращения.

В качестве теста при отладке программы использовалось аналитическое решение задач о вертикальном ударе шара, полупогруженного в несжимаемую жид-

кость, диска, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости неограниченной глубины, и шара, плавающего в центре полусферического резервуара, наполненного несжимаемой жидкости. В табл. 1 приведены данные расчета и теоретические значения для импульсного давления на поверхности шара, а в табл. 2 – для импульсного давления на поверхности полусферического резервуара, при разбиении контура шара единичного радиуса на 27 отрезков, контура свободной поверхности – на 45 отрезков, контура полусферического резервуара радиуса 2 – на 28 отрезков. При разбиении контура шара единичного радиуса на 27 отрезков, контура свободной поверхности – на 45 отрезков, контура полусферического резервуара радиуса 2 – на 28 отрезков. Наибольшее расхождение между теоретическими и численными данными наблюдается в окрестности точек стыка твердых поверхностей и свободной поверхности жидкости.

Таблица 1

## Распределение импульсивного давления по контуру поверхности плавающего шара

N	x/R	r/R	$p_i$ (теория)	$p_i$ (расчет)
1	0,99958	0,02908	0,71398	0,71386
2	0,98944	0,14493	0,70674	0,70662
3	0,96593	0,25882	0,68995	0,68983
4	0,92935	0,36921	0,66382	0,66370
5	0,88020	0,47460	0,62872	0,62859
6	0,81915	0,57358	0,58511	0,58498
7	0,74703	0,68480	0,53359	0,53345
8	0,66480	0,74702	0,47485	0,47469
9	0,57358	0,81915	0,40970	0,40951
10	0,47460	0,88020	0,33900	0,33877
11	0,36921	0,92935	0,26372	0,26343
12	0,25882	0,96593	0,18487	0,18447
13	0,14493	0,98944	0,10352	0,10282
14	0,02909	0,99958	0,02078	0,02660

Таблица 2

## Распределение импульсивного давления по контуру поверхности сферического резервуара

N	x/R	r/R	$p_i$ (теория)	$p_i$ (расчет)
1	0,02856	1,9998	0,00612	0,00894
2	0,19959	1,9900	0,04277	0,04242
3	0,36915	1,9656	0,07910	0,07888
4	0,53600	1,9268	0,11486	0,11467
5	0,69893	1,8739	0,14977	0,14960
6	0,85672	1,8072	0,18358	0,18342
7	1,0082	1,7273	0,21605	0,21589
8	1,1523	1,6347	0,24693	0,24678
9	1,2880	1,5300	0,27600	0,27585
10	1,4142	1,4142	0,30305	0,30290
11	1,5300	1,2880	0,32787	0,32773
12	1,6347	1,1523	0,35028	0,35016
13	1,7273	1,0082	0,37013	0,37001
14	1,8072	0,85673	0,38726	0,38715
15	1,8739	0,69893	0,40155	0,40145
16	1,9268	0,53600	0,41289	0,41280
17	1,9656	0,36915	0,42127	0,42112
18	1,9900	0,19959	0,42643	0,42635
19	1,9998	0,02856	0,42853	0,42845

По данной программе проведены расчеты вертикального удара в зависимости от глубины погружения плавающего шара, эллипсоида, конуса, параболоида вращения как в безграничной жидкости, так и в соосном осесимметричном резервуаре.

Рис. 2 содержит график зависимости отношения коэффициента присоединенной массы конуса единичной высоты к массе вытесненной конусом жидкости, который плавает в полусфере двойного радиуса, от угла полураствора конуса. Штриховой линией показаны изменения коэффициента присоединенной массы конуса, плавающего на поверхности безграничной несжимаемой жидкости. Приведенные расчеты показывают, что при наличии резервуара, стесняющего движение жидкости, значение коэффициента присоединенной массы и максимальное импульсивное давление возрастают, что ранее было отмечено рядом авторов [2; 3].

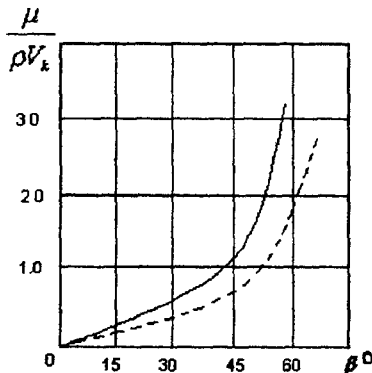


Рис. 2. Сравнение присоединенных масс конуса

**Выводы.** Описанный алгоритм расчета позволяет определить гидродинамические характеристики ударного взаимодействия жидкости и твердого тела вращения произвольной формы, плавающего на поверхности жидкости, занимающей соосный осесимметричный резервуар или слой конечной глубины или нижнее полупространство.

### Библиографические ссылки

1. Гуревич М.И. Теория течений со свободными границами / М.И. Гуревич // Итоги науки. Гидромеханика. – 1971. – Т. 5. – С. 32–114.
2. Григолоук Э.И. Взаимодействие упругих конструкций с жидкостью (удар и погружение) / Э.И. Григолоук, А.Г. Горшков. – Л., 1976. – 200 с.
3. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами / Г.В. Логвинович. – К., 1969. – 216 с.
4. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л.И. Седов. – М., 1980. – 448 с.
5. Риццо Ф. Метод граничных интегральных уравнений – современный метод прикладной механики / Ф. Риццо // Метод граничных интегральных уравнений. – М., 1978. – С. 11–17.
6. Крылов В.И. Таблицы численного интегрирования функций с логарифмическими и степенными особенностями. / В.И. Крылов, А.А. Пальцев. – Минск, 1967. – 214 с.

Надійшла до редколлеґії 13 03 11



УДК 533.6.

Е.Р. Абрамовский\*, И.Г. Варшавская\*, В.И. Кукушкин\*\*

\*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

\*\*НПО «Южный машиностроительный завод имени А.М. Макарова»

## АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТУПЕНЧАТОЙ ЛОПАСТИ ГОРИЗОНТАЛЬНО-ОСЕВОГО ВЕТРОДВИГАТЕЛЯ

Розглядається можливість заміни суцільної лопаті горизонтально-осьового вітродвигуна (ГОВД) з прямолінійними окрайками на лопать, що складається з кількох окремих елементів. Кожен з них має фіксовані значення хорди, кута установки лопаті і відносної товщини аеродинамічного профілю. Передбачається, що запропонована форма лопаті може мати значні технологічні переваги, які можна використовувати у процесі виготовлення і виконання монтажних робіт у пункті установки вітродвигуна.

*Ключові слова* горизонтально-осьовий вітродвигун, форма лопаті, кут установки

Рассматривается возможность замены сплошной лопасти горизонтально-осевого ветродвигателя (ГОВД) с прямолинейной кромкой на лопасть, которая состоит из нескольких отдельных элементов. Каждый из них имеет фиксированное значение угла установки лопасти и относительной толщины аэродинамического профиля. Предусматривается, что предложенная лопасть может иметь значительные технологические преимущества, которые можно использовать в процессе изготовления и проведения монтажных работ в пункте установки ветродвигателя.

*Ключевые слова* горизонтально-осевой ветродвигатель, форма лопасти, угол установки

The replacement of traditional solid blade of horizontal-axis wind turbine (HAWT), having the straight-lined edges, by the blade consisting of several and separate parts, is considered. Every such part has fixed values of chord, pitch angle and relative thickness of aerofoil sections. It is supposed that suggested shape of blade can have important technological advantages, which can be used in the process of manufacturing of wind turbine and installing it at the selected site.

*Key words* horizontal-axis wind turbine, blade, pitch angle

**Введение.** Известно, что производство и эксплуатация ветряных двигателей во многих странах мира в последние десятилетия развивается довольно быстрыми темпами. Лидирующую роль в этом развитии играют такие страны как Германия, Испания, США, Индия, Дания и другие. В соответствии с планами Европейской Ассоциации по Ветроэнергетике (European Wind Energy Association) уже к 2020 году предполагается, что страны, члены Ассоциации, достигнут 10-процентной доли ветровой энергии в общенергетическом балансе.

В Украине к настоящему времени на 6 ветростанциях работают несколько более 1000 ветроагрегатов с общей установленной мощностью около 90 мегаватт (в Германии, например, этот показатель превышает 20 тысяч мегаватт).

С целью увеличения объема производимой ветровой энергии в нашей стране необходимо решить ряд важных проблем. Прежде всего, необходимо приспособить проектные параметры применяемых у нас ветродвигателей к локальным ветровым условиям. Кроме того, следует существенно усовершенствовать технологию изготовления ветроагрегатов с целью упрощения и удешевления себестоимости процесса их производства.

Одним из наиболее сложных в изготовлении и дорогостоящих элементов горизонтально-осевого ветродвигателя, являются лопасти ротора. Сложности непрерывно нарастают по мере увеличения мощности каждого ветроагрегата (что соответствует современной тенденции). Так, агрегат мегаваттной мощности должен иметь лопасть длиной около 30 м. При ее изготовлении необходимо обеспечить пе-

ременное по длине значение установочного угла  $\varphi$  (угла крутки), переменное значение хорды  $b$  и относительной толщины профиля лопасти  $\bar{\delta} = \delta/b$ . Типовая форма лопасти ветроагрегата с мощностью  $P_H = 600$  кВт представлена на рис. 1.

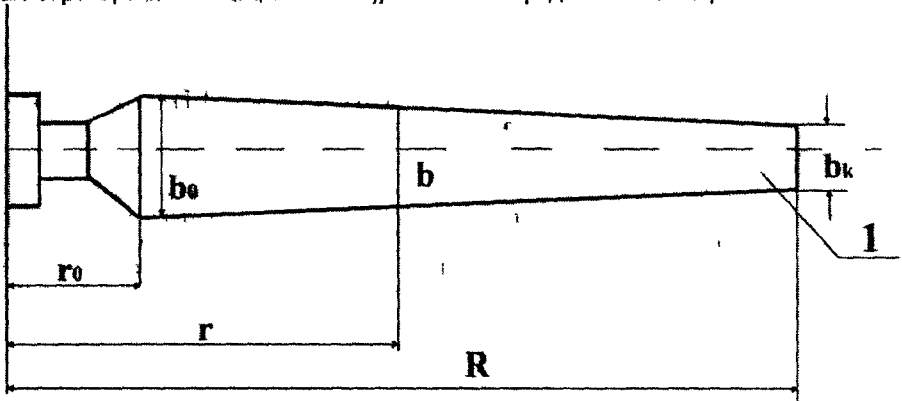


Рис. 1. Типовая форма лопасти ГОВД

Угол наклона хорды  $b_0$  к плоскости вращения ротора на расстоянии  $r_0$  от оси вращения составляет  $\varphi_0 = 19,17^\circ$ , а на конце лопасти  $\varphi_k = 0^\circ$ . При этом  $\bar{b}_0 = 0,09$ ,  $\bar{b}_k = 0,021$ ,  $R = 24$  м,  $\bar{\delta}_0 = 0,4$ ,  $\bar{\delta}_k = 0,15$ , ( $\bar{b} = b/R$ ).

В исходной и в измененных лопастях применяется профиль типа «Espero» с известными аэродинамическими характеристиками.

Изучению возможных вариантов упрощения технологии лопасти путем разбиения ее на отдельные отрезки и анализу влияния этой процедуры на энергетические и аэродинамические характеристики ротора и посвящена данная работа.

**Геометрия предлагаемой лопасти.** Предлагается два способа построения лопасти при разбиении ее на три и четыре отдельных элемента (рис. 2).

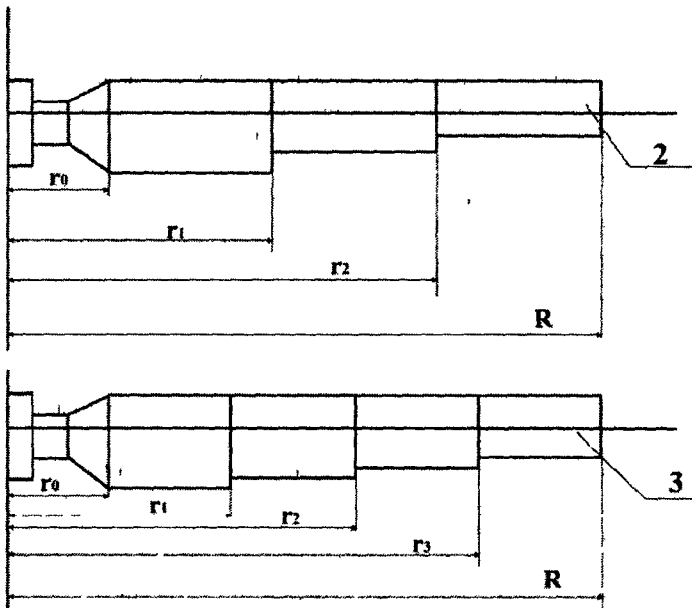


Рис. 2. Варианты построения ступенчатых лопастей

Разбиение с целью сравнения осуществляется с учетом геометрии сплошной лопасти № 1, которая представлена на рис. 1. При этом, на каждом участке соблюдается постоянство хорды  $b$ , угла крутки  $\varphi$  и относительной толщины профиля  $\bar{\delta}$ .

Таблица 1

Геометрия лопасти № 2

Участок	$r_0 - r_1$	$r_1 - r_2$	$r_2 - r_3$
Хорда	$\bar{b}_1 = 0,08$	$\bar{b}_2 = 0,058$	$\bar{b}_3 = 0,031$
Угол крутки	$\varphi_1 = 15,48$	$\varphi_2 = 5,36$	$\varphi_3 = 1,45$
Оптимальная толщина	$\bar{\delta}_1 = 0,35$	$\bar{\delta}_2 = 0,22$	$\bar{\delta}_3 = 0,13$

Для лопасти № 3 данные представлены в табл. 2.

Таблица 2

Геометрия лопасти № 3

Участок	$r_0 - r_1$	$r_1 - r_2$	$r_2 - r_3$	$r_3 - r_4$
Хорда	$\bar{b}_1 = 0,08$	$\bar{b}_2 = 0,062$	$\bar{b}_3 = 0,045$	$\bar{b}_4 = 0,028$
Угол крутки	$\varphi_1 = 15,48$	$\varphi_2 = 6,018$	$\varphi_3 = 3,31$	$\varphi_4 = 1,031$
Оптимальная толщина	$\bar{\delta}_1 = 0,35$	$\bar{\delta}_2 = 0,23$	$\bar{\delta}_3 = 0,16$	$\bar{\delta}_4 = 0,13$

В связи с тем, что в местах соединения участков имеется разрыв конструктивных размеров, здесь предлагается ставить поперечные пластины (шайбы) во избежание перетекания и дополнительных возмущений в потоке. На рис. 3 пунктиром показана возможная форма пластины, отделяющей соседние части

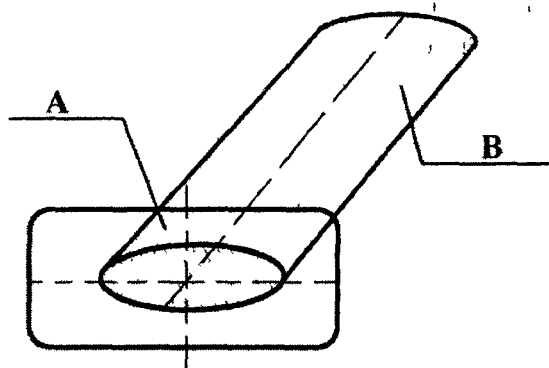


Рис. 3. Поперечная разделяющая пластина А на участке В

Каждый из элементов лопасти изготавливается отдельно по упрощенной технологии, поскольку во всех сечениях участка геометрические параметры неизменны. Соединения отдельных частей в единое целое можно осуществить с помощью установки продольных элементов крепления (их конструкция должна быть разработана дополнительно).

**Основные расчетные соотношения.** Основным соотношением, определяющим функциональные характеристики ветродвигателя, является зависимость коэффициента мощности  $C_p$  от коэффициента быстроходности  $\lambda$ . При этом

$$C_p = \frac{P}{P_0}, \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{\omega R}{V_0}, \quad (2)$$

Здесь  $P$  – мощность, реализуемая на ведущем валу ротора,  $P_0$  – мощность набегающего ветрового потока на ометаемой площади  $S$  (для ГОВД  $S = \pi R^2$ ). Скорость набегающего потока обозначим  $V_0$  (м/с), угловую скорость ротора –  $\omega$  (1/с). Зависимость  $C_p(\lambda)$  для сплошной лопасти получаем из выражения [1]:

$$C_p = 8\lambda \int_{\bar{r}_0}^1 (1 - \bar{V}_1) \bar{U}_1^2 \bar{r}^2 d\bar{r}. \quad (3)$$

Для лопастей, состоящих из 3-х и 4-х участков, получим соответственно

$$C_p = 8\lambda \left( \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}_1} (1 - \bar{V}_1) \bar{U}_1^2 \bar{r}^2 d\bar{r} + \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} (1 - \bar{V}_1) \bar{U}_1^2 \bar{r}^2 d\bar{r} + \int_{\bar{r}_2}^{\bar{r}_3} (1 - \bar{V}_1) \bar{U}_1^2 \bar{r}^2 d\bar{r} \right), \quad (4)$$

$$C_p = 8\lambda \left( \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}_1} (1 - \bar{V}_1) \bar{U}_1^2 \bar{r}^2 d\bar{r} + \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} (1 - \bar{V}_1) \bar{U}_1^2 \bar{r}^2 d\bar{r} + \int_{\bar{r}_2}^{\bar{r}_3} (1 - \bar{V}_1) \bar{U}_1^2 \bar{r}^2 d\bar{r} + \int_{\bar{r}_3}^{\bar{r}_4} (1 - \bar{V}_1) \bar{U}_1^2 \bar{r}^2 d\bar{r} \right) \quad (5)$$

Значения индуктивных скоростей  $\bar{V}_1(\bar{r})$  и  $\bar{U}_1(\bar{r})$  будем определять по методу элементарных струй, решая систему уравнений

$$\frac{\bar{V}_1}{1 - \bar{V}_1} = \frac{\sigma (C_y \cos \beta + C_x \sin \beta)}{8\bar{r} \sin^2 \beta}, \quad (6)$$

$$\frac{\bar{U}_1}{1 - \bar{U}_1} = \frac{\sigma (C_y \sin \beta - C_x \cos \beta)}{8\bar{r} \sin \beta \cos \beta}, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1 - \bar{V}_1}{\lambda \bar{r} + \bar{U}_1}, \quad (8)$$

$$\alpha = \beta - \phi, \quad (9)$$

$$\sigma = \frac{b l}{\pi R}. \quad (10)$$

Здесь  $\beta$  – угол притекания, определяемый соотношением (8);  $\phi$  – угол крутки (он задается, как функция  $\bar{r}$ );  $\alpha$  – угол атаки набегающего потока в заданном сечении;  $l$  – число лопастей;  $C_x$ ,  $C_y$  – аэродинамические характеристики профиля, зависящие от угла  $\alpha$ .

Для всех трех лопастей были построены зависимости  $C_p(\lambda)$ , которые представлены на графике рис. 4.

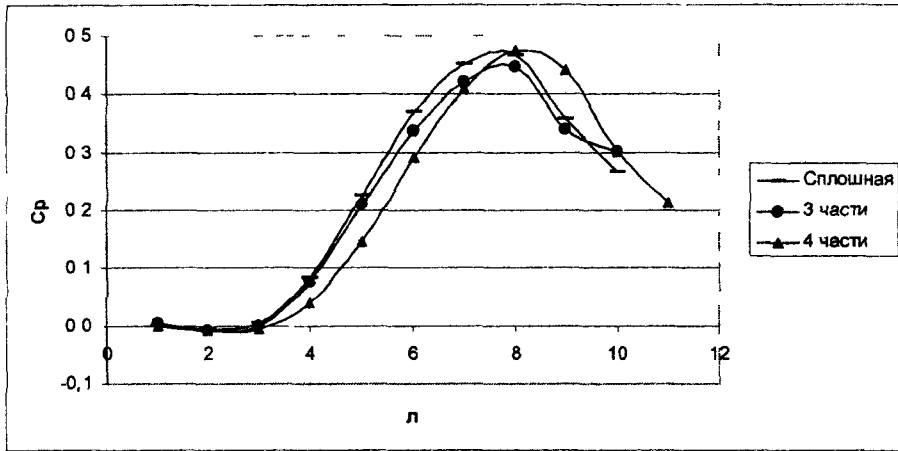


Рис. 4. Зависимость  $C_p(\lambda)$  для лопастей № 1, 2, 3

Определение зависимости  $C_p(\lambda)$  и поиск оптимального варианта этой зависимости является начальным этапом проектных расчетов ГОВД. Следующим этапом является определение оптимальных значений номинальной скорости ветра  $V_H$  и номинальной угловой скорости ротора  $\omega_H$ , которые обеспечивают максимальную годовую энергоотдачу на единицу ометаемой площади  $\bar{E} = E/S$  (кВт час/м<sup>2</sup>) в заданном месте установки ветродвигателя. При этом

$$\bar{E} = \frac{E}{S} = \frac{\rho\eta\Gamma}{2000} \int_{V_S}^{V_H} V^3 C_p(V) f(V) dV + \frac{P_H\Gamma}{S} \int_{V_K}^{V_S} f(V) dV. \quad (11)$$

Здесь  $T = 8760$  часов – годовое время;  $\rho$  – плотность воздуха;  $\eta$  – коэффициент потери энергии в механической системе и на генераторе ( $\eta = 0,8-0,85$ );  $V_S$  и  $V_K$  стартовая скорость и скорость бурового отключения ГОВД соответственно;  $f(V)$  – функция, определяющая частоту повторения скорости ветра в заданной местности.

При проведении второго этапа проектных расчетов учитывается, что геометрия лопасти уже определена, известна зависимость  $C_p(\lambda)$ , и в частности, значение  $C_{pm}$  и соответствующее ему значение  $\lambda_m$ . Заданными являются номинальная мощность  $P_H$  и функция  $f(V)$ . Варьируемым параметром является  $V_H$ . Далее воспользуемся соотношениями [2]:

$$\lambda = \frac{\omega_0 R}{V_0}, \quad (12)$$

$$P = \frac{1}{2} \rho C_{pm} \eta \pi \lambda_m^2 \frac{V_0^5}{\omega_0^2}, \quad (13)$$

Задавая различные значения  $V_0 = V_H$ , из выражения (13) находим  $\omega_0 = \omega_H$  при известном  $P = P_H$ . Далее из (12) находим  $R$  и площадь  $S = \pi R^2$ . В выражении

(11) величину  $C_p(V)$  определяем из зависимости  $C_p(\lambda)$ , поскольку  $\lambda$  при известном  $\omega$  и  $R$  зависит только от  $V$ .

В качестве примера рассчитано значение  $V_H$ , соответствующее  $\bar{E} = \bar{E}_{max}$  для фиксированного пункта установки ветродвигателя. В данном случае были рассмотрены метеоусловия в г. Дебальцево [3]. Для этих условий среднегодовая скорость равна  $V_c = 5,1$  м/с, а номинальная скорость, обеспечивающая  $\bar{E}_{max}$ , равна  $V_H = 10$  м/с. Поскольку зависимости  $C_p(\lambda)$  для всех рассмотренных вариантов лопастей отличаются незначительно, то можно считать, что номинальные скорости для них также будут близки по значению к  $V_H = 10$  м/с.

Итак, можно утверждать, что замена сплошной лопасти на ступенчатую фактически не снижает ее энергетических характеристик и в то же время существенно может упростить технологию ее изготовления.

### Библіографічні посилання

1. **Абрамовский Е. Р.** Аэродинамика ветродвигателей : учеб. пособие / Е. Р. Абрамовский, С. В. Горюшко, Н. В. Свиридов. – Д., 1987. – 220 с.
2. **Abramovsky Yev. R.** Aerodynamic theory of wind turbines . study guide / Yev R. Abramovsky. – Dnipropetrovsk, 2008. – 242 p.
3. Справочник по климату СССР // Украинская ССР, Гидрометеорология. Вып. 10, ч 3. – С. 235–300.

*Надійшла до редколегії 11 03 11*

УДК 539.386:622.647.2

Р.В. Кирия

*Институт геотехнической механики имени Н.С. Полякова НАН Украины*

## ИСТЕЧЕНИЕ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ ИЗ БУНКЕРА С РАЗЛИЧНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ВЫПУСКНОГО ОТВЕРСТИЯ

На підставі аналізу структурно-механічного стану сипкого середовища одержано математичні моделі його витікання з бункера з різним розташуванням і формою випускного отвору. Встановлено залежність витрати сипкого середовища від параметрів випускного отвору і властивостей сипкого середовища.

*Ключові слова* сипке середовище, витікання, бункер, випускний отвір, динамічне склепіння, структурно-механічний стан

На основании анализа структурно-механического состояния сыпучей среды получены математические модели его истечения из бункера с различным расположением и формой выпускного отверстия. Установлены зависимости расхода сыпучей среды от параметров выпускного отверстия и свойств сыпучей среды.

*Ключевые слова* сыпучая среда, истечение, бункер, выпускное отверстие, динамический свод, структурно-механическое состояние

In the work on the basis of analysis of the structural-mechanical state of friable environment the mathematical models of his expiration from a bunker with a different location and form of tape-

hole are got. Dependences of expense of friable environment on the parameters of tape-hole and properties of friable environment are set.

*Key words* friable environment, expiration, bunker, tape-hole, dynamic vault, structural-mechanical state

**Введение.** Вопросом истечения сыпучих сред из бункеров занимались многие исследователи [1 – 7]. Однако эта проблема в настоящее время остается все еще не решенной. Это связано с недостаточной изученностью физических процессов истечения сыпучей среды из бункера на микроуровне, то есть на уровне взаимодействия частиц.

Изучение этих процессов, происходящих на микроуровне, позволяет установить структурно-механическое состояние, в котором находится дисперсная среда, и, следовательно, установить связь между процессами, происходящими на микроуровне, с процессами, происходящими на макроуровне. Другими словами, разработать математическую модель движения дисперсной (в частности, сыпучей) среды как модель механики сплошной среды [8 – 10].

В литературе такие модели механики сплошной среды называются реологическими моделями дисперсных сред (структурно-механические модели) [10]

Исследования показали, что при определенных условиях сыпучая среда при движении может находиться в трех структурно-механических состояниях: твердого тела, пластичного и свободнодисперсного [11; 12].

При этом, если сыпучая среда находится в твердом состоянии, то ее частицы связаны между собой, их взаимное перемещение отсутствует и для внутренних напряжений справедлив закон Гука; если сыпучая среда находится в пластичном состоянии (медленное движение), то для внутренних напряжений справедлив закон Кулона; при свободнодисперсном состоянии (быстрое движение) частицы сыпучей среды не связаны между собой, находятся в непрерывном хаотическом движении и взаимодействуют между собой в результате столкновений (ударов). В последнем случае, согласно [11; 12], внутренние касательные и нормальные напряжения определяются по формулам:

$$\tau = \frac{1}{3} \rho_c k^2 d^2 \left( \frac{\partial v_c}{\partial y} \right)^2; \quad p = \frac{1}{3} \rho_c k' k^2 d^2 \left( \frac{\partial v_c}{\partial y} \right)^2, \quad (1)$$

где  $\rho_c$  – плотность сыпучей среды;  $k$  – кинетический коэффициент, характеризующий потерю механической энергии потока сыпучей среды в результате столкновения частиц ( $k = 10 \div 13$ );  $k'$  – безразмерный коэффициент характеризующий потерю механической энергии частиц сыпучей среды в результате ударов частиц между собой ( $k' = 0,3 \div 0,4$ );  $d$  – средний диаметр частицы сыпучей среды;  $v_c$  – средняя скорость потока сыпучей среды в данной точке.

Следовательно, сыпучая среда, с точки зрения реологии дисперсных сред, представляет собой пластическое (твердообразное) дилатантное тело [10].

Твердое состояние сыпучей среды описывается уравнениями теории упругости, пластичное состояние – уравнениями движения сыпучей среды, находящейся в предельном состоянии. Свободнодисперсное состояние сыпучей среды описывается уравнением Навье-Стокса для вязкой жидкости. При этом вместо коэффициента молекулярной вязкости вводится коэффициент макровязкости, который характеризует перенос количества движения в результате случайного столкновения частиц сыпучей среды [1].

**Постановка задачи.** В представленной работе на основании анализа структурно-механического состояния сыпучей среды получены математические модели его истечения из бункера с различным расположением и формой выпускного отверстия. При этом рассматривались бункеры с горизонтальными днищем и со щелевым и круг-

лым выпускным отверстием, расположенном на дне бункера, а также бункеры с боковым щелевым выпускным отверстием, расположенным на стенке бункера (рис. 1, а, б).

**Бункер с горизонтальным выпускным отверстием.** Рассмотрим истечение несвязной сыпучей среды из прямоугольного бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием шириной  $a$  и длиной  $b$  ( $b > a$ ) (рис. 1, а). Согласно экспериментальным исследованиям [1; 2; 6; 7], при истечении сыпучей среды из бункера можно выделить 5 зон (рис. 1, а).

В зоне А (см. рис. 1, а) частицы сыпучей среды связаны между собой и движутся с малой скоростью параллельно стенкам бункера. В зоне В (рис. 1, а) частицы сыпучей среды скользят относительно друг друга, а их траектории искривляются в направлении к оси бункера. В этой зоне скорости частиц также малы и изменяются незначительно. В зоне динамического свода С (рис. 1, а) частицы сыпучей среды образуют подвижные своды, движущиеся вниз, скользя по стенкам канала, ширина которого приблизительно равна ширине выпускного отверстия. При этом скорости частиц сыпучей среды существенно увеличиваются, а их траектории приближаются к вертикальным линиям. В зоне обрушения (перемешивания) D связи между частицами сыпучей среды разрушаются, при этом они находятся в непрерывном хаотическом движении, сталкиваясь между собой. Траектории движения частиц в этой зоне совпадают с прямыми линиями, а их скорость увеличивается за счет силы тяжести. В зоне E частицы сыпучей среды находятся в неподвижном состоянии.

Кроме того, нормальные напряжения  $p$  сыпучей среды в бункере в зоне А увеличиваются с глубиной бункера линейно. В зоне В нормальное напряжение достигает максимального значения  $\sigma_n$  и не изменяется с глубиной бункера, а в зоне С нормальное напряжение уменьшается с глубиной бункера линейно и при приближении к выпускному отверстию уменьшается до нуля (рис. 1, а).

Опишем движение сыпучей среды в каждой зоне.

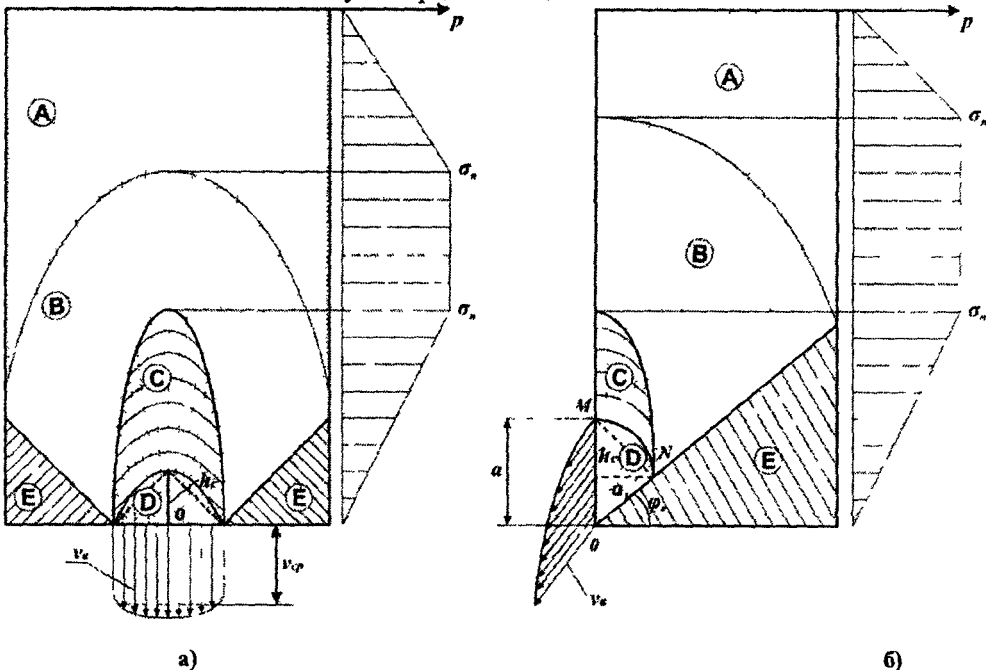


Рис. 1. Зоны структурно-механического состояния сыпучей среды при его истечении из бункера: а) горизонтальное щелевое выпускное отверстие; б) боковое щелевое выпускное отверстие



**Зона А.** Сыпучая среда движется как твердое тело с неизменной малой скоростью. При этом нормальное напряжение  $p$  увеличивается от нуля до максимального значения  $\sigma_n$  (рис. 1, а).

**Зона В.** Сыпучая среда движется также с малой скоростью, находясь в пластичном состоянии, и для внутренних напряжений справедлив закон Кулона [4; 13].

При этом, если высота сыпучей среды в бункере намного больше его ширины, то, согласно [4], внутренние напряжения в зоне В принимают максимальные значения и не изменяются с глубиной сыпучей среды (рис. 1, а). Это связано с тем, что с увеличением глубины сыпучей среды за счет его веса нормальные напряжения увеличиваются и из-за бокового распора увеличиваются касательные напряжения, которые на определенной глубине бункера уравниваются силами веса сыпучей среды. Поэтому, нормальные и касательные напряжения, действующие на сыпучую среду, принимают максимальные значения и с увеличением глубины не изменяются.

Определим максимальные напряжения в этой зоне. Выделим малый прямоугольный элемент сыпучей среды с шириной  $\Delta x$  и высотой  $\Delta y$  (рис. 2, а).

Так как в зоне В скорости частиц сыпучей среды малы, то условия равновесия выделенного элемента сыпучей среды имеют вид

$$\Delta G + F_c = 0, \tag{2}$$

где  $\Delta G$  – вес элемента сыпучей среды;  $F_c$  – касательная сила, действующая на элемент сыпучей среды

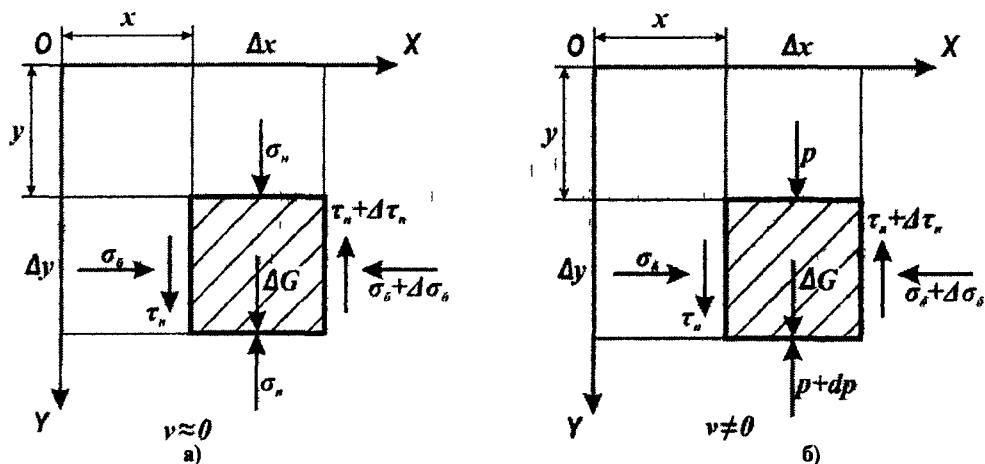


Рис. 2. Расчетная схема определения напряжений и скоростей: а) в зоне В; б) в зоне С

Вес элемента сыпучей среды равен

$$\gamma_{\eta} (x) = -c \ln(a^2 - x^2), \tag{3}$$

где  $\Delta m$  – масса выделенного элемента, равная  $\sigma_z (x, h) = -c \ln(a^2 - x^2) f(x)$ ;  $\gamma$  – удельный вес сыпучей среды.

Касательные силы, действующие на элемент сыпучей среды, определяются через касательные напряжения по формуле

$$|x| < a, \quad (4)$$

где  $\tau_n$  – максимальные касательные напряжения.

Учитывая, что максимальные касательные напряжения от  $y$  не зависят, подставляя (3) и (4) в (2), после преобразования, устремив  $\Delta x$  к нулю ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), получим

$$\eta = \frac{3}{2}. \quad (5)$$

Решим уравнение (5) при условии: при  $x=0$   $\tau_n=0$ , получим

$$\tau_n = \gamma|x|. \quad (6)$$

Из круга Мора [4] с учетом (6) имеем

$$\eta = 1; \quad (7)$$

$$\sigma_b = \frac{\tau_n}{f} = \frac{\gamma}{f}|x|; \quad (8)$$

где  $f$  – коэффициент внутреннего трения сыпучей среды;

Следовательно, максимальные касательные  $\tau_n$  и нормальные напряжения  $\sigma_n$ ,  $\sigma_b$  являются линейными функциями от координаты  $x$ .

Главные нормальные напряжения в этой зоне, согласно [4], определяются по формулам:

$$\kappa = \frac{2\mu b}{\pi(2-\omega)}; \quad (9)$$

$$\sigma_2 = \tau_n \left( \frac{1}{f} + f - \sqrt{1+f^2} \right) = \gamma|x| \left( \frac{1}{f} + f - \sqrt{1+f^2} \right). \quad (10)$$

**Зона С.** Сыпучая среда здесь находится в пластичном состоянии. При этом на границе с зоной В напряжения принимают максимальные значения  $\tau_n$  и  $\sigma_n$ . Из-за близости этой зоны к выпускному отверстию нормальные напряжения  $p$  уменьшаются и на выходе из нее принимают значения, равные нулю (рис. 1, а).

Для определения скорости частиц в зоне С, также как в зоне В, выделим малый элемент сыпучей среды (рис. 2, б) и применим к нему закон Ньютона. Тогда в проекциях на вертикальную ось получим

$$\Delta m \frac{dv}{dt} = [p - (p + \Delta p)] \Delta x b + \Delta G + [\tau_n - (\tau_n + \Delta \tau_n)] \Delta y b, \quad (11)$$

где  $p$  – нормальное давление, действующее на частицы сыпучей среды в зоне динамического свода и зависящее от  $x$  и  $y$ .

Подставив (3) в (11), после преобразования, устремив  $\eta = \frac{1}{2}$  и  $\eta = \frac{3}{2}$ , получим

$$\sum_{i=0}^n \rho_i \left[ \ln(a^2 - x^2) S_{2i}(x) - \kappa \int_{-a}^a S_{2i}(x) (a^2 - t^2) R_1(t-x) dt - \kappa F_i(x) \right] = -bg(x) \quad (12)$$

Предположим, что в зоне динамического свода С, также как и в зоне В, силы тяжести сыпучей среды уравновешиваются касательными напряжениями, то есть выполняется равенство (5).

Следовательно, уравнение (12) с учетом (5) примет вид:

$$\eta = 1. \quad (13)$$

В силу стационарности движения истечения сыпучей среды из бункера имеем  

$$v = v(x, y).$$

После дифференцирования по времени  $t$  предыдущего равенства имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Учитывая, что в зоне динамического свода  $C$  горизонтальная составляющая скорости частиц сыпучей среды мала, то есть  $\frac{dx}{dt} = 0$  и  $\frac{dy}{dt} = v$ , последнее равенство перепишем в виде

$$\frac{dv}{dt} = v \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (14)$$

Подставив (14) в (13), получим

$$\tilde{\mu} = \mu a / Q. \quad (15)$$

Проинтегрируем последнее уравнение при начальных условиях  $v=0, p=\sigma_n$  и получим скорость в любой точке динамического свода, равную

$$\tilde{b} = bQ/a, \quad (16)$$

где  $p=p(x, y)$ .

Из (16) следует, что скорость частиц сыпучей среды в зоне динамического свода зависит только от распределения нормального давления  $p$  по высоте и сечению бункера.

Подставив в левую часть равенства (16)  $p = 0$ , определим скорость на выходе из динамического свода, равную

$$v_0 = \sqrt{2g \frac{\sigma_n}{\gamma}}. \quad (17)$$

Из (17) и (8) следует, что скорость на выходе из динамического свода зависит только от максимального нормального давления и является функцией от координаты  $x$ .

Последняя формула совпадает с формулой Зенкова [4]. Однако, в отличие от формулы Зенкова, в формуле (17)  $v_0$  есть скорость частиц сыпучей среды на выходе из зоны динамического свода  $C$ . В то же время в формуле Зенкова  $v_0$  есть скорость частиц сыпучей среды на выходе из бункера. Кроме того, у Зенкова вместо  $\sigma_n$  стоит некоторое среднее нормальное давление, равное

$$\sigma_{cp} = \frac{1}{2} \gamma a \chi, \quad (18)$$

где  $\chi = \frac{1}{f} + 2f - \sqrt{1 + f^2}$ .

Подставив в (17) вместо  $\sigma_n$  среднее значение  $\sigma_{cp}$  из (18), получим скорость сыпучей среды на выходе из бункера, совпадающую с формулой Зенкова

$$v_0 = \sqrt{ga\chi}. \quad (19)$$

Согласно экспериментальным данным [6] в зоне динамического свода траектории частиц сыпучей среды приблизительно совпадают с прямолинейными лучами, идущими в некоторый центр, расположенный на оси бункера и находящийся ниже щелевого отверстия.

В этом случае, согласно [13], меньшее главное напряжение  $\sigma_2$  в любой точке движущейся сыпучей среды совпадает с траекториями движения частиц. С другой стороны, так как траектории движения частиц сыпучей среды в зоне динамического

свода мало отличаются от вертикальных линий, то нормальная составляющая приближенно совпадает с главным напряжением  $\sigma_n \approx \sigma_2$ .

Подставив в формулу (17) вместо  $\sigma_n$  главное нормальное напряжение  $\sigma_2$ , получим скорость движения частиц сыпучей среды на выходе из зоны динамического свода

$$v_d = \sqrt{2g \frac{\sigma_2}{\gamma}}. \tag{20}$$

**Зона D.** Как отмечалось выше, в зоне обрушения **D** частицы сыпучей среды находятся в непрерывном хаотическом движении в результате столкновений между собой. Следовательно, сыпучая среда в этой зоне находится в свободнодисперсном состоянии и, согласно [11; 12], его движение описывается уравнениями Навье-Стокса для сыпучих сред.

С помощью круга Мора можно показать, что для несвязной сыпучей среды граница между динамическим сводом **C** и зоной обрушения **D** представляет собой перевернутую параболу [4]

$$y = h_c \left[ 1 - \left( \frac{2x}{a} \right)^2 \right], \tag{21}$$

где  $h_c$  – высота параболы, определяемая по формуле

$$h_c = \frac{a}{4} \frac{(1 + \sin \phi)}{\cos \phi} = \frac{a}{4} \left( f + \sqrt{1 + f^2} \right). \tag{22}$$

Заменим границу между зоной динамического свода и зоной обрушения прямолинейными отрезками, совпадающими с боковыми сторонами равнобедренного треугольника, основание которого совпадает со щелевым отверстием бункера, а высота совпадает с высотой параболы  $h_c$  (рис. 3,а). Уравнение этой границы можно записать в виде

$$y = h_c \left( 1 - \frac{2|x|}{a} \right), \tag{23}$$

где  $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$ .

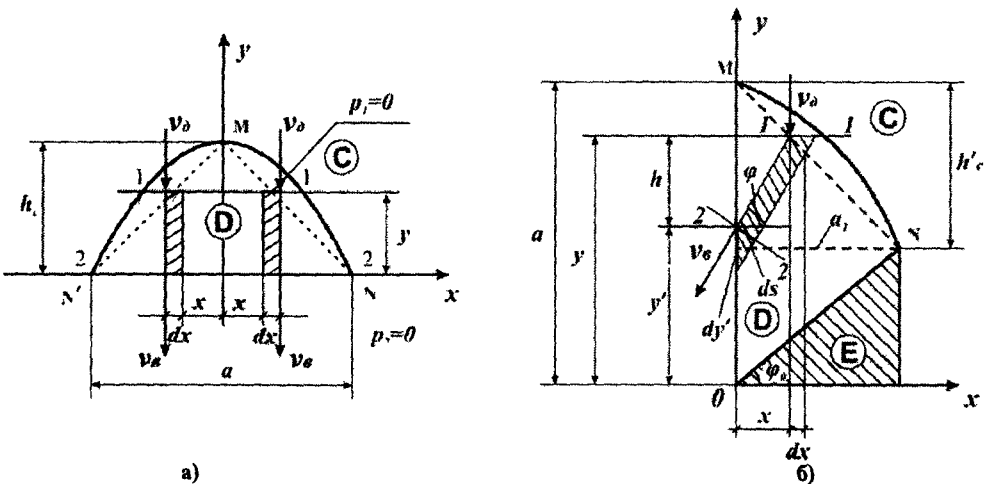


Рис. 3. Расчетные схемы определения скорости истечения сыпучей среды в зоне D: а) прямое выпускное щелевое отверстие; б) боковое выпускное щелевое отверстие

Применив уравнение Бернулли для сыпучих сред к сечениям 1 – 1 и 2 – 2 выделенных трубок в зоне перемешивания **D** (рис. 3, а), получим

$$y_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = y_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g} \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{h}), \quad (24)$$

где  $y_1, y_2$  – уровни сечений 1 – 1 и 2 – 2 относительно оси  $ox$ ;  $p_1, p_2$  – нормальные напряжения сыпучей среды в точках пересечения сечения 1-1 с боковыми сторонами треугольника и соответствующих точек сечения на выходе из бункера;  $v_1, v_2$  – скорости частиц сыпучей среды в тех же точках сечений 1 – 1 и 2 – 2;  $\zeta$  – коэффициент местных потерь Дарси-Вейсбаха при движении сыпучей среды в зоне обрушения, характеризующий потери механической энергии потока сыпучей среды при столкновении частиц между собой [14;15].

Подставим в (24) соответствующие значения  $y_1=y; y_2=0; p_1=0; p_2=0; v_1=v_0; v_2=v_0$ . После преобразований получим значение скорости частиц сыпучей среды на выходе из бункера

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2gy + v_0^2} \tilde{b}. \quad (25)$$

Последнее равенство с учетом (20) примет вид

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2g \left( y + \frac{\sigma_2}{\gamma} \right)} \tilde{\sigma}_z(\tilde{x}, \tilde{h}). \quad (26)$$

Объемный расход через щелевое отверстие определим по формуле

$$Q = \int_{-a/2}^{a/2} v_0 b dx \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{h}). \quad (27)$$

Подставив в последнее выражение (25), получим

$$Q = \frac{b}{\sqrt{1+\zeta}} \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{2g \left( y + \frac{\sigma_2}{\gamma} \right)} dx. \quad (28)$$

Подставив (10) и (23) в (28), после интегрирования получим

$$Q = \frac{2}{3} ba^{1,5} \sqrt{g} \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \frac{K_1^{1,5}}{(K_1 - \chi')} \left[ 1 - \left( \frac{\chi'}{K_1} \right)^{1,5} \right], \quad (29)$$

где  $K_1 = \frac{1}{2} \left( f + \sqrt{1+f^2} \right)$ ,  $\chi' = f + \frac{1}{f} - \sqrt{1+f^2}$ .

Определим коэффициент местных потерь  $\zeta$  при движении сыпучего материала в зоне обрушения.

Согласно [15], коэффициент  $\zeta$  при движении сыпучей среды по прямолинейному каналу определяется по формуле

$$\zeta = K_2 \frac{k^2 d^2 l}{h^3}; \quad (30)$$

где  $K_2$  – некоторый безразмерный коэффициент, зависящий от условий истечения сыпучей среды из бункера (прямое или боковое истечение сыпучей среды из бункера) и определяемый из эксперимента;  $l$  – длина канала,  $h$  – высота канала.

Подставив в выражение (30)  $l=h_c$  и  $h=a$ , получим

$$\zeta = K_2 k^2 d^2 \frac{h_c}{a^3}. \quad (31)$$

Согласно (22), максимальную высоту границы динамического свода  $h_c$  можно записать в виде

$$h_c = K_1 \frac{a}{2}. \quad (32)$$

Подставив (32) в (31), получим

$$\zeta = K_1 K_2 \frac{k^2 d^2}{a^2}. \quad (33)$$

Коэффициент расхода при истечении сыпучей среды из бункера согласно [1] определяется по формуле

$$\eta = \frac{Q}{ba^{1,5}\sqrt{g}}. \quad (34)$$

Подставляя (29) в (34) с учетом (33), после преобразований получим

$$\eta = \frac{\delta \eta_0}{\sqrt{\delta^2 + k^2 K_1 K_2}}, \quad (35)$$

где  $\eta_0 = \frac{2}{3} \frac{K_1^{1,5}}{(K_1 - \chi') \left[ 1 - \left( \frac{\chi'}{K_1} \right)^{1,5} \right]}$ ;  $\delta = \frac{a}{d}$ .

В этом случае, согласно экспериментальным данным,  $K_2 = 1$ .

Из формулы (35) следует, что если  $\delta \rightarrow \infty$ , то  $\eta \rightarrow \eta_0$ .

Расчеты показали, что при  $f = 0,58-0,7$   $\eta_0 \approx 1$ . Это означает, что для мелких сыпучих сред ( $\delta > 100$ ) коэффициент расхода  $\eta$  мало зависит от коэффициента внутреннего трения, ширины щели и диаметра частиц. В этом случае, согласно (34), критерий Фруда приближенно равен 1, то есть

$$Fr = \frac{v_{cp}^2}{ag} \approx 1.$$

Для сравнения определим коэффициент расхода  $\eta$  на основе теории Зенкова [4].

Подставив (19) в (27), имеем

$$Q = ba^{1,5} \sqrt{g\chi}. \quad (36)$$

Затем, подставив (36) в (34), получим

$$\eta = \sqrt{\chi}. \quad (37)$$

Расчеты показали, что при  $f=0,7-0,58$   $\eta = 1,27-1,31$ .

Из формулы (35) следует, что коэффициент расхода при истечении сыпучей среды из бункера зависит от его коэффициента внутреннего трения  $f$  и отношения ширины щели бункера к диаметру частиц. В то же время, по теории Зенкова (37) этот коэффициент зависит только от коэффициента  $f$  внутреннего трения и не зави-

сит от ширины выпускного отверстия  $a$  бункера и диаметра частиц сыпучей среды  $d$ .

**Бункер с круглым выпускным отверстием.** Рассмотрим истечение сыпучей среды из бункера с круглым выпускным отверстием, расположенным в дне бункера.

В этом случае зоны структурно-механического состояния сыпучей среды в бункере совпадают с такими же зонами в бункере с горизонтальным щелевым выпускным отверстием (рис. 1, а).

При этом касательные и нормальные напряжения в зоне **В** определяются по формулам:

$$\tau_n = \gamma \frac{r}{2}, \quad \sigma_n = \tau_n (1 + 2f^2) = \frac{\gamma r}{2} (1 + 2f^2), \quad (38)$$

а главные нормальные напряжения определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \tau_n \left( \frac{1}{f} + f + \sqrt{1 + f^2} \right) = \gamma \frac{r}{2} \left( \frac{1}{f} + f + \sqrt{1 + f^2} \right), \\ \sigma_2 &= \tau_n \left( \frac{1}{f} + f - \sqrt{1 + f^2} \right) = \gamma \frac{r}{2} \left( \frac{1}{f} + f - \sqrt{1 + f^2} \right), \end{aligned} \quad (39)$$

где  $r$  – радиальная координата, цилиндрической системы координат, в которой ось  $ou$  совпадает с осью бункера, а ось  $or$  совпадает с радиусом бункера.

Кроме того, для бункера с круглым выпускным отверстием имеет место формула Зенкова (17), а границей между зоной динамического свода **В** и зоной обрушения **Д** является параболоид вращения с высотой, определяемой по формуле (22), в которой  $a$  является диаметром выпускного отверстия.

Проведя выкладки, такие же, как и для бункера со щелевым выпускным отверстием, получим коэффициент расхода сыпучей среды из бункера с круглым выпускным отверстием, определяемый по формуле (35), в которой  $\eta_0$  определяется из равенства

$$\eta_0 = \frac{\pi}{6} K_1^{0,5} \left[ \left( 1 + \frac{\chi''}{K_1} \right)^{1,5} - \left( \frac{\chi''}{K_1} \right)^{1,5} \right], \quad (40)$$

где  $\delta = \frac{a}{d}$ ;  $\chi'' = \frac{1}{4} \left( f + \frac{1}{f} - \sqrt{1 + f^2} \right)$ .

В этом случае согласно экспериментальным данным  $K_2 = 3$ .

Из уравнений (35) и (40) следует, что если  $\delta \rightarrow \infty$ , то  $\eta \rightarrow \eta_0$ . Расчеты показали, что при  $f = 0,58-0,7$  коэффициент  $\eta_0 = 0,64-0,66$ .

**Бункер с боковым щелевым отверстием.** Рассмотрим истечение сыпучей среды из прямоугольного бункера с боковым щелевым выпускным отверстием шириной  $a$  и длиной  $b$  ( $b > a$ ) (рис. 1, б).

На основе визуальных исследований процесса истечения сыпучей среды из бункера с боковым щелевым отверстием, так же, как и для бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием, можно выделить такие же 5 зон: **А, В, С, Д, Е**, отличающихся друг от друга структурно-механическим состоянием (рис. 1, б).

Сыпучая среда в зонах **А, В, С, Е** движется так же, как и в бункере с горизонтальным щелевым выпускным отверстием. Поэтому все уравнения, описывающие состояние сыпучей среды в этих зонах для бункера с горизонтальным щелевым вы-

пускным отверстием, совпадают с аналогичными величинами для бункера с боковым щелевым выпускным отверстием.

В зоне обрушения (перемешивания) **D**, в отличие от истечения сыпучей среды из бункера с горизонтальным щелевым отверстием, траектории движения частиц совпадают с прямыми наклонными линиями, составляющими угол наклона к горизонту  $\varphi$ . При этом угол  $\varphi$  изменяется с изменением координаты  $y$  в пределах  $\varphi_0 < \varphi < 90^\circ$ . Угол  $\varphi_0$  равен углу наклона границы, разделяющей область подвижного и область неподвижного состояния **E** сыпучей среды в бункере (рис. 1, б).

Кроме того, в этом случае – нормальные напряжения  $p$  сыпучей среды в бункере изменяются по высоте бункера так же, как и в случае истечения сыпучей среды из бункера с прямым щелевым выпускным отверстием (рис. 1, б).

Так же, как и для бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием, применим уравнение Бернулли для сыпучих сред [14] к сечениям 1 – 1 и 2 – 2 элементарной трубки (заштрихованы на рис. 3, б), вдоль которой движутся частицы сыпучей среды в зоне **D**. В результате согласно (24) и (20), получим

$$v_g = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2g \left( h + \frac{\sigma_2}{\gamma} \right)}. \quad (41)$$

Так же, как и в случае истечения сыпучей среды из бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием, граница между зоной динамического свода **C** и зоной обрушения **D** совпадает с параболой  $MN$  уравнение которой имеет вид (рис. 3, б)

$$y = h'_c \left[ 1 - \left( \frac{x}{a_1} \right)^2 \right] + a_1 \operatorname{tg} \phi_0, \quad (42)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{a}{K_1 + \operatorname{tg} \phi_0}; \quad h'_c = \frac{aK_1}{K_1 + \operatorname{tg} \phi_0}; \quad K_1 = \frac{1}{2} \left( f + \sqrt{1+f^2} \right).$$

Заменив параболу  $MN$  приближенно на прямую (рис. 3, б), получим

$$y \approx h'_c \left( 1 - \frac{x}{a_1} \right) + a_1 \operatorname{tg} \phi_0. \quad (43)$$

Объемный расход сыпучей среды через боковое щелевое выпускное отверстие бункера определим по формуле

$$Q = \int v_g ds, \quad (44)$$

где  $ds$  – площадь нормального сечения элементарной трубки (см. рис. 3, б).

Из рис. 3, б имеем

$$ds = \cos \phi dy'.$$

Подставив последнее равенство в (44), получим

$$Q = \int_0^a v_g \cos \phi dy'. \quad (45)$$

Из рис. 3, б имеем также

$$h = x \operatorname{tg} \phi; \quad y' = y - x \operatorname{tg} \phi. \quad (46)$$

Положим в (45) и (46)  $\phi = \varphi_c = \text{const}$ , где  $\varphi_c$  – некоторое среднее значение  $\varphi$ . Тогда, подставив (41) в (45), с учетом (43) и (46), после интегрирования получим



$$Q = \frac{2}{3} ba^{1,5} \sqrt{2g} \frac{\cos \phi_c}{\sqrt{1 + \zeta}} (K_1 + tg \phi_c) \sqrt{\chi' + tg \phi_c} \left( \frac{tg \phi_0}{1 + K_1 tg \phi_0} \right)^{3/2} \quad (47)$$

Коефіцієнт местных потерь  $\zeta$  при движении сыпучей среды в зоне обрушения [1] определяется также по формуле (33).

Для определения коэффициента расхода подставим (47) в (34), с учетом (33) после преобразования приходим к формуле (35), в которой  $\eta_0$  определяется из выражения

$$\eta_0 = \frac{2}{3} \cos \phi_c (K_1 + tg \phi_c) \sqrt{2(\chi' + tg \phi_c)} \left( \frac{tg \phi_0}{1 + K_1 tg \phi_0} \right)^{3/2} \quad (48)$$

В этом случае, согласно экспериментальным данным,  $K_2 = 0,5$ .

Из формул (35) и (48) следует, что при  $\delta \rightarrow \infty \eta \rightarrow \eta_0$ .

Расчеты показали, что при  $f = 0,58-0,7$  коэффициент  $\eta_0 = 0,3-0,38$ .

Из формул (35) и (48) следует, что коэффициент расхода сыпучей среды из бункера с боковым щелевым выпускным отверстием зависит от  $\delta$ , то есть от отношения ширины отверстия  $a$  к диаметру частицы сыпучей среды  $d$ , его коэффициента внутреннего трения  $f$  и углов  $\phi_c, \phi_0$ . Как показали экспериментальные исследования, углы  $\phi_c$  и  $\phi_0$  не зависят от угла внутреннего трения и в зависимости от диаметра частиц изменяются в пределах  $\phi_c = 67-72^\circ, \phi_0 = 35-45^\circ$ . При этом с увеличением диаметра частиц  $d$  углы  $\phi_c$  и  $\phi_0$  увеличиваются.

На рис. 4 показаны графики зависимости коэффициента расхода  $\eta$  сыпучей среды из бункера с горизонтальным щелевым, круглым и боковым щелевым выпускными отверстиями от безразмерной величины  $\delta$  (кривые 2, 3, 4 соответственно).

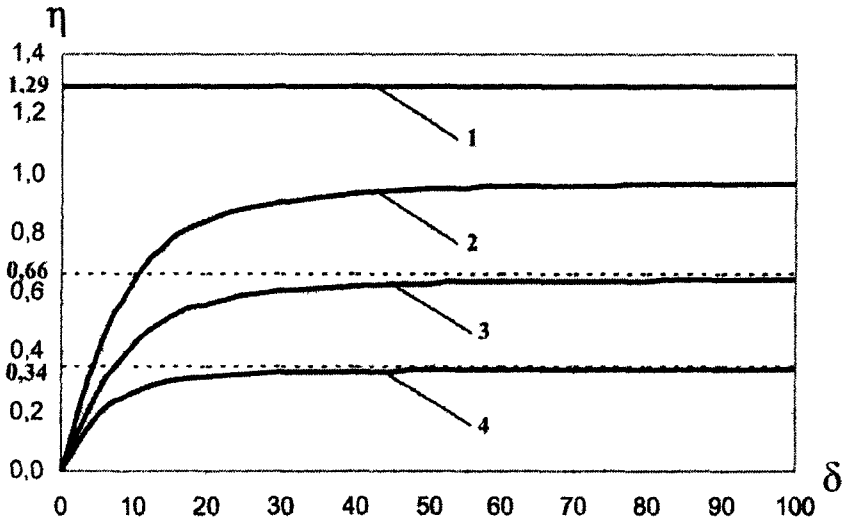


Рис. 4. Графики зависимости коэффициента расхода при истечении сыпучей среды из бункера

Кривая 1 на рис. 4 построена согласно формуле (37) и соответствует теории Зенкова; кривая 2 соответствует формуле (35); кривая 3 соответствует формулам (35) и (40); кривая 4 соответствует формулам (35) и (48). При этом параметры бун-

кера и сыпучей среды принимали значения  $b=0,09$  м;  $f=0,64$ ;  $k=12$ ;  $5 \leq a \leq 50$  мм и  $0,35 \leq d \leq 7$  мм,  $\varphi_c = 72^\circ$ ,  $\varphi_0 = 45^\circ$ .

Из рисунка 4 видно, что для небольших  $\delta$  ( $0 < \delta < 100$ ) коэффициенты расхода (кривые 2,3,4) с увеличением  $\delta$  увеличиваются. При больших  $\delta$  ( $\delta > 100$ ) коэффициенты расхода практически не изменяются, принимая постоянные значения  $\eta \approx 1$  (кривая 2),  $\eta \approx 0,66$  (кривая 3) и  $\eta \approx 0,34$  (кривая 4). В то же время прямая 1 принимает постоянное значение  $\eta = 1,29$  при любых  $\delta$ .

**Выводы.** Коэффициент расхода при истечении сыпучей среды из бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием больше на 34 %, чем коэффициент расхода из бункера с круглым щелевым выпускным отверстием и практически в три раза больше коэффициента расхода из бункера с боковым щелевым выпускным отверстием.

Кроме того, коэффициент расхода при истечении сыпучей среды из бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием по теории Зенкова на 30 % больше коэффициента расхода, рассчитанного по нашей теории (кривые 1 и 2 на рис. 4).

Согласно формулам (35), (40) и (48), расход сыпучей среды из бункера зависит от диаметра отверстия и размера частиц сыпучей среды и для наиболее распространенных сыпучих сред практически не зависит от коэффициента внутреннего трения. При этом для сыпучих сред, для которых  $\delta \geq 50$  (то есть в случае, когда размер частиц значительно меньше размеров выпускного отверстия) объемный расход  $Q$  и средняя скорость на выходе из бункера  $v_{cp}$  согласно (34), определяются по формулам:

$$Q \approx \eta_0 b a^{1,5} \sqrt{g}, \quad (49)$$

$$v_{cp} \approx \eta_0 \sqrt{g a}. \quad (50)$$

При этом для бункера с горизонтальным щелевым выпускным отверстием  $\eta_0 = 1$ , для бункера с круглым выпускным отверстием  $\eta_0 = 0,66$ , а для бункера с боковым щелевым выпускным отверстием в зависимости от  $d$  принимает значения  $\eta_0 = 0,3 \div 0,38$ .

Как показали экспериментальные исследования [1; 16; 17], разница результатов теории и экспериментальных данных не превышает 10 %.

### Библиографические ссылки

1. Кенеман Ф.Е. О свободном истечении сыпучих тел / Ф.Е. Кенеман // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. – 1960. – № 2. – С. 70–77.
2. Квапил Р. Движение сыпучих материалов в бункерах / Р. Квапил. – М., 1961. – 80 с.
3. Лукьянов П.И. Аппараты с движущимся зернистым слоем. Теория и расчет / П.И. Лукьянов. – М., 1974. – 184 с.
4. Зенков Р.Л. Механика насыпных грузов / Р.Л. Зенков. – М., 1964. – 251 с.
5. Платонов Н.П. Некоторые вопросы механики потока сыпучих сред / Н.П. Платонов // Инжен.-физ. журн. – 1967. – Т. 12, № 6. – С. 806–812.
6. Кочанова И.И. О видах движения при гравитационном истечении сыпучих материалов / И.И. Кочанова // Инж.-физ. журн. – 1971. – Т. 10, №5. – С. 815–821.
7. Сэвидж С.Г. Гравитационное течение несвязных гранулированных материалов в лотках и каналах / С.Г. Сэвидж // Механика гранулированных сред; под. ред. А.Ю. Ишлинского. – М., 1985. – Вып. 36. – С. 86–146.
8. Базаров И.П. Неравновесная термодинамика и физическая кинетика / И.П. Базаров, Э.В. Геворкян, П.Н. Николаев. – М., 1989. – 240 с.

9. Кайзер Джон. Статистическая термодинамика неравновесных систем / Джон Кайзер. – М., 1990. – 608 с.
10. Овчинников П.Ф. Виброреология / П.Ф. Овчинников – Киев, 1983. – 272 с.
11. Кирия Р.В. Кинетический подход к выводу уравнений движения сыпучих сред / Р.В. Кирия // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 1999. – Вип. 2. – С. 143 – 150.
12. Механика гранулированных сред / Теория быстрых движений, Сб. №36; под. ред. А.Ю. Ишлинского. – М., 1985. – 279 с.
13. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. – М., 1969. – Т.2. – 864 с.
14. Штернлихт Д.В. Гидравлика / Д.В. Штернлихт. – М., 1984. – 639 с.
15. Кирия Р.В. О коэффициенте внутренних потерь при движении сыпучей среды по элементам перегрузочных узлов ленточных конвейеров / Р.В. Кирия // Геотехническая механика. – Днепропетровск, 2003. – Вип. № 41. – С. 159–167.
16. Кирия Р.В. К вопросу об истечении сыпучего груза из бункера со щелевым отверстием / Р.В. Кирия, В.Ю. Максютенко, Д.Д. Брагинец, Б.И. Мостовой // Геотехническая механика. – Днепропетровск, 2008. – № 80. – С. 351–362.
17. Кирия Р.В. Истечение сыпучего груза из бункера с боковым щелевым отверстием / Р.В. Кирия, Д.Д. Брагинец, Б.И. Мостовой : сб. науч. тр. Нац. горн. ун-та. – Днепропетровск, 2009. – № 32. – С. 114–122.

Надійшла до редакції 24 02 11

УДК 532.593

Д.О. Черников

*Інститут гідромеханіки НАН України*

## ГЕНЕРАЦИЯ ВОЛН ПОДВИЖКАМИ ДОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Досліджується відхилення вільної поверхні шару рідини при повторюваних збудженнях донної поверхні. Завдання вирішується за допомогою перетворення Лапласа за часом з наступним чисельним зверненням. Проводиться аналіз отриманих результатів для двох локальних підйомів дна.

*Ключові слова: шар рідини, хвилі на вільній поверхні, порухи донної поверхні*

Исследуется отклонение свободной поверхности слоя жидкости изменяющихся возмущениях донной поверхности. Задача решается при помощи преобразования Лапласа по времени с последующим численным обращением. Проводится анализ полученных результатов для двух случаев подвижки дна.

*Ключевые слова: слой жидкости, волны на свободной поверхности, подвижки дна.*

The perturbation of a liquid free surface, excited by changing of a bottom shape is considered. The problem is solved by means of Laplas transformation with respect to time and subsequent numerical re-transformation. The analysis of the obtained results for two local elevation of a bottom is presented.

*Key words: layer of a liquid, waves on a free surface, changes of a bottom shap.*

**Введение.** Исследование распространения неустановившихся волновых движений в жидкости конечной глубины представляет большой интерес в океанологии. Известные методы решения задач генерации волн подвижками донной поверхности, позволяют получить решение только для простейших форм отклонения и мгновенной подвижки дна. В более общем случае решение может быть получено с по-

мощью теории интегральных преобразований. Рассматриваемая задача представляет особый интерес для проблемы цунами [11]. Из наблюдений цунами в Тихом океане 28 марта 1964 г следует, что длина волны может превышать глубину в пять раз [12] и, следовательно, явление может описываться теорией волн мелкой воды. Однако в случае генерации волн возмущениями донной поверхности необходимо рассматривать задачу в жидкости конечной глубины. Проблема цунами рассматривалась также в [3; 4; 7; 9].

**Постановка задачи.** Рассматривается область, заполненная жидкостью, которая ограничена сверху свободной поверхностью, снизу – твердой границей и не ограничена в направлении распространения волн. В начальный момент жидкость находится в покое, а глубина жидкости постоянна. Предполагается, что начальное возмущение генерируется подъемом горизонтального дна при  $t=0$ , а при  $t=t_d$  происходит повторное возмущение дна.

Математическая постановка начально-краевой задачи сводится к определению потенциалов скоростей  $\varphi(r, \vartheta, z, t)$ , удовлетворяющих уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0; \quad (1)$$

$$-H_0 \leq z \leq 0, \quad r > 0, \quad t > 0;$$

а также следующим граничным и начальным условиям на свободной поверхности:

$$\left( \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = 0, \quad \eta = - \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0}, \quad (2)$$

на донной поверхности:

$$\frac{\partial \varphi(r, \vartheta, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=-H_0} = \frac{\partial \eta^b}{\partial t}; \quad (3)$$

начальные условия:

$$\varphi(r, \vartheta, z, t) \Big|_{t=0} = \frac{\partial \varphi(r, \vartheta, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \eta^b \Big|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

где  $\eta^b$  – отклонение дна,  $\eta$  – отклонение свободной поверхности.

Будем предполагать, что возмущение дна осесимметрично, причем при  $t=0$  включается одно возмущение, а при  $t=t_d$  – другое, так что функции  $\eta_1^b$  и  $\eta_2^b$  задаются в виде:

$$\eta_1^b = \eta_0 \psi(r) f(t); \quad \eta_2^b = \eta_0^d \psi^d(r) f^d(t). \quad (5)$$

**Метод решения.** Введем безразмерные переменные перемещения (далее звездочки опущены)

$$r^* = \frac{r}{r_0}, \quad z^* = \frac{z}{H_0}, \quad t^* = t \frac{\sqrt{gH_0}}{r_0}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{H_0}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi}{r_0 \sqrt{gH_0}}, \quad (6)$$

где  $H_0$  – глубина жидкости,  $r_0$  – радиус возмущения отклонения дна,  $t$  – время,  $g$  – ускорение силы тяжести.

Применим интегральное преобразование Лапласа по времени  $t$  [1]

$$f^L(r, \vartheta, z, s) = \int_0^{\infty} f(r, \vartheta, z, t) e^{-st} dt. \quad (7)$$

В принятых обозначениях (6) задача (1) – (5) приводится к следующей

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi^L}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi^L}{\partial r} \right) = 0; \quad -1 \leq z \leq 0, \quad (8)$$

$$\left( s^2 \varphi^L + \beta^2 \frac{\partial \varphi^L}{\partial r} \right)_{z=0} = 0; \quad (9)$$

$$\beta^2 \frac{\partial \varphi^L}{\partial z} \Big|_{z=-1} = s \eta_0 \psi^d(r) f^{dL}(s); \quad (10)$$

где  $s$  – параметр преобразования Лапласа,  $\beta = \frac{r_0}{H_0}$ .

Зададим решение задачи (8) – (10) в виде произведения трех функций

$$\varphi^L = R(r) \Phi(\vartheta) Z(z); \quad (11)$$

каждая из которых зависит только от одной переменной. Тогда частными решениями уравнения (8) являются функции [2]

$$I_n(hr) e^{in\vartheta} e^{\frac{h}{\beta} z} \quad (12)$$

$$K_n(hr) e^{in\vartheta} e^{\frac{h}{\beta} z}; \quad (13)$$

где  $I_n(\zeta)$  и  $K_n(\zeta)$  – функции Бесселя,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $h$  – волновое число.

Функции (12), (13) должны удовлетворять условию регулярности при  $r = 0$ . Поэтому решение уравнения (8) для потенциалов скоростей записывается в виде:

$$\varphi^L = \left[ A_n \cos\left(\frac{h}{\beta} z + n\vartheta\right) + B_n \sin\left(\frac{h}{\beta} z + n\vartheta\right) \right] I_n(hr). \quad (14)$$

Применим интегральное преобразование Ханкеля по радиальной координате  $r$

$$f^H(\lambda) = \int_0^{\infty} f(r) r J_0(\lambda r) dr, \quad (15)$$

где  $\lambda$  – параметр преобразования Ханкеля.

Задача (1) – (5) с учетом преобразований (7) – (15) приводится к определению произвольных постоянных в решении

$$\varphi^{LH} = \left[ A_n \cos\left(\frac{h}{\beta} z + n\vartheta\right) + B_n \sin\left(\frac{h}{\beta} z + n\vartheta\right) \right] \omega(\lambda), \quad (16)$$

$$\left( s^2 \varphi^{LH} + \beta^2 \frac{d\varphi^{LH}}{dz} \right)_{z=0} = 0, \quad (17)$$

$$\beta^2 \frac{d\varphi^{LH}}{dz} \Big|_{z=-1} = s\eta_0 \psi^{dH}(\lambda) f^{dL}(s) \quad (18)$$

Подставляя решение (16) в условия (17) и (18), получим значения коэффициентов:

$$A_n = \frac{s\eta_0 \psi^{dH}(\lambda) f^{dL}(s) \left[ s^2 \sin(n\vartheta) + h\beta \cos(n\vartheta) \right]}{h\beta\omega(\lambda) \left[ h\beta \sin\left(2n\vartheta - \frac{h}{\beta}\right) - s^2 \cos\left(2n\vartheta - \frac{h}{\beta}\right) \right]}, \quad (19)$$

$$B_n = -\frac{s\eta_0 \psi^{dH}(\lambda) f^{dL}(s) \left[ s^2 \cos(n\vartheta) - h\beta \sin(n\vartheta) \right]}{h\beta\omega(\lambda) \left[ h\beta \sin\left(2n\vartheta - \frac{h}{\beta}\right) - s^2 \cos\left(2n\vartheta - \frac{h}{\beta}\right) \right]} \quad (20)$$

**Численные расчеты и анализ результатов.** Численное обращение преобразования Лапласа может проводиться различными методами [6; 8]. В [6] исследуется алгоритм обращения с применением рядов Фурье по синусам [10]. В [8] рассмотрены методы, основанные на обращении с помощью полиномов Лежандра и Чебышева, рядов Фурье, функций Лагерра. В данном случае задача восстановления оригинала  $f(t)$  требует привлечения подходов, чувствительных даже к незначительным вариациям изображения  $F(s)$  [2]. Численное обращение на основе разложений Фурье-Бесселя есть в [5], где представлены результаты тестовых расчетов и сопоставление с точными (табличными) обращениями и некоторыми точными решениями. Расчеты проводились с удержанием различного числа членов (5, 6, ..., 10) и показано достаточное число членов для получения надлежащей точности.

Здесь для вычисления оригинала применяется метод [10], согласно которому требуются только значения изображения  $F(s)$  при равностоящих значениях  $s = (2n+1)\sigma$ , где  $\sigma$  – произвольное число, большее нуля,  $\sigma > 0$ , а  $n = 0, 1, \dots$ . Переменная  $t$  заменяется на  $\theta$  и функция  $\varphi(\theta)$  под интегралом разлагается в ряд Фурье по функциям  $\sin(2\nu+1)\theta$ . Параметр  $\sigma$  при малых  $t$  выбирается большим, а при больших  $t$  – меньшим.

В данном сообщении рассматривается задача генерации волн на воде в жидкости конечной глубины двумя донными возбуждениями, которые одно за другим, когда после первого основного толчка через некоторое время следует еще один, который может отличаться от первого как силой, так и временем задержки и быстротой нарастания и спада.

Предполагалось, что возмущение генерируется подъемом горизонтального дна

$$\psi^d(r) = \zeta(\zeta^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \zeta > 0 \quad (21)$$

и последовательным включением двух возмущений  $f_k^d$  ( $k = 1, 2$ ):

$$f_1^d(t) = te^{-\alpha t}, \text{ при } t \geq 0, f_2^d(t) = te^{-\alpha t} H(t - t_d) \text{ при } t \geq t_d, \quad (22)$$

где  $H(t)$  функция Хевисайда.

Исследовалось отклонение свободной поверхности для различных удалений от эпицентра  $r = 0$ . Было установлено, что в случае включения второго возмущения амплитуды отклонения свободной поверхности возрастает примерно на 30 % для  $r=1$  и 20 % для  $r=2$ .

### Библиографические ссылки

1. Диткин В. А. Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М., 1965. – 468 с.
2. Крылов В.И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа / В.И. Крылов, Н.С. Скобля. – М., 1974. – 224 с.
3. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами / Е.Н. Пелиновский. – Нижний Новгород, 1996. – 276 с
4. Селезов И.Т. Генерация поверхностных гравитационных волн донным повторяющимся во времени импульсом / И.Т. Селезов, В.Н. Кузнецов, Д.О. Черников // *Мат. методы и физико-мех. поля.* – 2009. – 52, № 3. – С. 140–145.
5. Селезов И.Т. Численное обращение преобразования Лапласа на основе разложений Фурье-Бесселя / И.Т. Селезов, С.В. Корсунский // *Докл. АН УССР. Сер. А* – 1986. – № 11. – С. 25–28.
6. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. – М., 1971. – 288 с.
7. Geist E.L. Tsunami Wave of change / E.L. Geist, V.V. Titov, C.E. Synolakis // *Scientific American.* – 2005.
8. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа / К. Ланцош. – М., 1981. – 524 с.
9. Мурти Т.С. Сейсмические морские волны цунами / Т.С. Мурти. – Л., 1981. – 448 с.
10. Papoulis A. A new method of inversion of the Laplace transform / A. Papoulis // *Quart. Appl Math.* – 1957, №14 – С. 405–414.
11. Selezov I.T. Modeling of tsunami wave generation and propagation / I.T. Selezov // *Int. J. Fluid Mechanics Research.* – 2006. – 33, №1. – С. 44–54.
12. Вейль П. Популярная океанография / П. Вейль. – Л., 1977. – 504 с.

Надійшла до редколегії 10 12 10

УДК 532.593

О.Г. Гоман\*, Е.А. Тихая\*\*

\*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

\*\*Запорожский гуманитарный колледж ЗНТУ

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ–ПУАССОНА ДЛЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Розглядається задача про визначення форми вільної поверхні шару рідини певної глибини у процесі збурень, викликаних деформацією донної поверхні. Задача розглядається в рамках класичної постановки теорії малих хвиль Коші-Пуассона для ідеальної рідини. Запропонований

підхід зводить задачу до розв'язання деякого інтегрального (чи інтегро-диференціального) рівняння для певної гідродинамічної функції на вільній поверхні.

*Ключові слова:* хвилі в шарі рідини, задача Коши-Пуассона, метод граничних інтегральних рівнянь

Рассматривается задача об определении формы свободной поверхности слоя жидкости конечной глубины в процессе возмущений, вызванных изменением поверхности дна. Задача рассматривается в рамках классической постановки теории малых волн Коши-Пуассона для идеальной жидкости. Предположенный метод сводится к решению некоторого интегрального или интегро-дифференциального уравнения для некоторой гидродинамической функции на свободной поверхности.

*Ключевые слова.* волны в слое жидкости, задача Коши-Пуассона, метод граничных интегральных уравнений.

It deals with the task of examining the form of a free surface of a final depth liquid layer in the process of perturbation caused by a surface change. The research is based on classical statement of Cauchy-Poisson's small waves theory for an ideal liquid. The proposed method makes it possible to solve the integral or integro-differential equation for hydrodynamic function when studying a free surface.

*Key words* waves in a liquid layer, Cauchy-Poisson's problem, boundary integral equation method

**Введение.** Задачи о движении жидкости в слоях конечной глубины со свободной поверхностью представляют большой интерес в различных областях человеческой деятельности: это, во-первых, течения в каналах, используемых в различных современных технологиях; во-вторых, течения в руслах рек, естественных или искусственных каналах различного целевого назначения и, в-третьих, это течения в океанологии, вызванные землетрясениями и вулканической деятельностью. В то время как в первых двух указанных случаях отраслях достигнут определенный прогресс в их описании, проблема описания волновых движений в океанологии в настоящее время усиленно исследуется в основном с целью предсказания возникновения цунами, последствий и поиска путей смягчения их воздействия на берега. Не вдаваясь в подробную библиографию по вопросам генерации океанических волн, которая насчитывает сотни и тысячи наименований, укажем на монографию [1], содержащую систематические данные наблюдений за цунами и другими явлениями распространения волн в мировом океане, а также на [2; 3], близкие по тематике к данной работе авторов.

**Постановка задачи.** Рассматривается классическая задача Коши-Пуассона (в плоской постановке) о волновом движении несжимаемой жидкости в бесконечном слое постоянной глубины  $h$  при возмущении поверхности дна. Задача рассматривается в рамках линейной теории волн для идеальной несжимаемой жидкости.

Выберем начало координат декартовой системы  $xoy$  на невозмущенной поверхности дна, оси  $x$  направив вдоль свободной поверхности дна, а ось  $y$  – вертикально вверх. Тогда, как известно [4], задача Коши-Пуассона имеет следующую постановку: в полосе  $0 < y < h$  имеет место уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (1)$$

для потенциала скоростей возникающего движения жидкости; на свободной поверхности  $y = h$  выполняется условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \Big|_{y=h} = 0. \quad (2)$$

На нижнем основании слоя  $z = 0$  выполняется условие непроницаемости в виде

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0} = f(x, t), \quad (3)$$



где  $y=f(x,t)$  – уравнение «подвижки» донной поверхности слоя, которое будем считать заданным. Уравнение свободной поверхности в любой момент времени через потенциал скоростей выражается формулой

$$\zeta = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{y=h} \quad \zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{y=h}, \tag{4}$$

а давление в толще жидкости – при помощи линеаризованного интеграла Коши-Лагранжа

$$\frac{p-p_a}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gy, \tag{5}$$

где  $p_a$  – атмосферное давление над слоем жидкости, которое предполагается постоянным.

Схема области представлена на рис. 1.

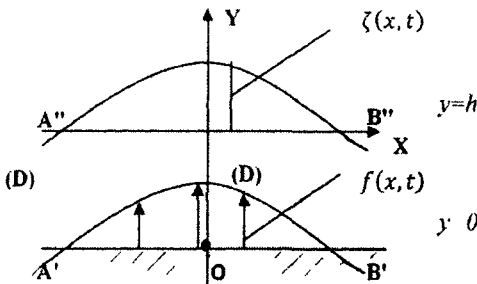


Рис. 1. Схема области течения

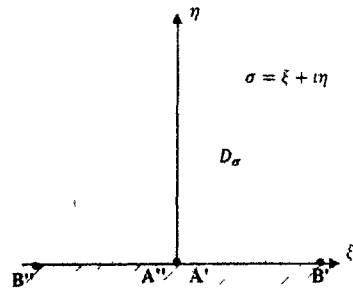


Рис. 2. Отображение области течения на верхнюю полуплоскость

Для полной постановки нестационарной задачи необходимо задать начальное значение потенциала в слое  $(\varphi)_{t=0}$  и его производную  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{t=0}$ , которые, для определенности, будем считать нулевыми.

**Идея метода решения задачи.** Введем в рассмотрение, как обычно, комплексный потенциал рассматриваемого течения  $w(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ , который будем рассматривать как функцию комплексного переменного  $z = x+iy$ , изменяющегося в полосе (D):

$$-\infty < x < \infty, 0 < y < h. \tag{6}$$

В качестве основной искомой функции выберем функцию

$$\chi(z) = i \frac{dw}{dz} = i(v_x - iv_y) = v_y + iv_x. \tag{7}$$

Тогда задача сводится к определению аналитической функции  $\chi(z)$  в полосе (D) (7) по заданной ее действительной части  $v_y$  на границе  $y = 0$ :

$$(v_y)_{y=0} = f(x,t) \equiv \psi_0(x,t) \tag{8}$$

и заданной связи (2) между действительной частью функции  $\chi$  на верхней границе

$$v_y \Big|_{y=h} \equiv \psi_1(x,t) \tag{9}$$

и производной  $\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_{y=h}$  :

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=h} = \psi_1(x, y) = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{y=h} . \quad (10)$$

Идея предлагаемого подхода решения поставленной задачи состоит в следующем: будем временно предполагать, что функция  $\psi_1(x, t)$  (то есть значение  $v_y$  на свободной поверхности) задана; тогда исходная задача сводится к задаче Дирихле для аналитической функции  $\chi$  в полосе с заданными значениями ее действительной части на границах полосы. Решение этой задачи (при некоторых предположениях) может быть записано явно (интеграл Шварца для полосы, [2]), т.е.  $\chi(z)$  будет представлено в виде

$$\chi(z) = S[\psi_1(x, t)], \quad (11)$$

где функция  $\psi_1(x, t)$  рассматривается как аргумент оператора Шварца  $S$  для полосы.

С другой стороны, по определению

$$w(z) = -i \int \chi(z) dz = \varphi + i\psi, \quad (12)$$

так что потенциал  $\varphi$  оказывается также некоторым оператором  $A$  от  $\psi_1$ :

$$\varphi = A[\psi_1, x, y, t]. \quad (13)$$

Вычисляя отсюда производную  $\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_{y=h}$ , из условия (10) получим некоторое

интегро-дифференциальное уравнение для определения заранее неизвестной функции  $\psi_1(x, t)$ .

Целью данной работы является получение указанного интегро-дифференциального уравнения.

Совершим конформное преобразование полосы на верхнюю полуплоскость переменной  $\zeta = \xi + i\eta$  так, чтобы бесконечно-удаленная точка  $A$  плоскости  $z$  перешла в начало координат плоскости  $\zeta$ , а бесконечно удаленная точка  $B$  плоскости  $z$  перешла в бесконечно удаленную точку плоскости  $\zeta$  (рис. 2). Это отображение осуществляется функцией

$$z = \frac{h}{\pi} \ln \zeta, \quad (14)$$

причем основание дна слоя  $y = 0$  переходит в положительную полуось  $\xi > 0$  с соответствием точек:

$$\xi = e^{\frac{\pi x}{h}}, \quad x = \frac{h}{\pi} \ln |\xi|, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < \xi < \infty, \quad (15)$$

а уровень  $y = h$  переходит в отрицательную полуось  $\xi < 0$  с соответствием

$$\xi = -e^{\frac{\pi x}{h}}, \quad x = \frac{h}{\pi} \ln|\xi|, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \xi < 0, \quad (16)$$

Соответственно функции  $\psi_0(x, t)$  и  $\psi_1(x, t)$  перейдут в

$$\psi_0\left(\frac{h}{\pi} \ln \xi, t\right) = \bar{\psi}_0(\xi, t), \quad 0 < \xi < \infty,$$

$$\psi_1\left(\frac{h}{\pi} \ln|\xi|, t\right) = \bar{\psi}_1(\xi, t), \quad -\infty < \xi < 0$$

и мы приходим к задаче Дирихле для полуплоскости  $\text{Im} \zeta > 0$  для функции  $\chi(\zeta, t)$ , решение которой задается в виде [5]

$$\chi(\zeta, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{\bar{\psi}_1(\xi', t) d\xi'}{\xi' - \zeta} + \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\psi}_0(\xi', t) d\xi'}{\xi' - \zeta} + iC, \quad (17)$$

причем второй интеграл в последнем выражении представляет собой известную функцию от  $\zeta$ , если функцию  $\psi_0$  считается известной.

Вычислим функцию  $\chi$  на участке  $-\infty < \xi < 0$ , который в физической плоскости соответствует свободной поверхности  $y = h$ . Согласно формуле Сохоцкого получим

$$\chi_{-\infty < \xi < 0} = \bar{\psi}_1(\xi, t) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{\bar{\psi}_1(\xi', t) d\xi'}{\xi' - \xi} - \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\psi}_0(\xi', t) d\xi'}{\xi' - \xi} + iC.$$

Из определения (7) функции  $\chi$  получим

$$v_{x\bar{x}}(\xi, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\bar{\psi}_1(\xi', t) d\xi'}{\xi' - \xi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\psi}_0(\xi', t) d\xi'}{\xi' - \xi} + C, \quad (18)$$

где  $v_{x\bar{x}}(\xi, t)$  – означает горизонтальную компоненту скорости на свободной поверхности в физической плоскости, выраженную через переменную  $\xi$  на соответствующей границе вспомогательной плоскости  $\zeta$ .

Отметим, что в силу того, что  $-\infty < \xi < 0$ , первый интеграл в выражении (18) является особым в смысле Коши.

Возвратившись в физическую плоскость, вместо (18) получим выражение

$$v_{x\bar{x}}(x, t) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_1(x', t) e^{\pi x'/h} dx'}{e^{\pi x'/h} - e^{\pi x/h}} - \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi_0(x', t) e^{\pi x'/h} dx'}{e^{\pi x'/h} + e^{\pi x/h}} + C, \quad (19)$$

которое связывает касательную компоненту скорости жидкости на свободной поверхности  $v_{x\bar{x}}(\xi, t)$  с нормальной компонентой на этой же поверхности  $v_{y\bar{y}}(x, t) = \psi_1(x, t)$  и нормальной компонентой на дне  $v_{y\bar{y}}(x, t) = \psi_0(x, t)$ .

Если закон движения дна известен, то есть, если известна функция  $\psi_0(x, t)$ , то второй интеграл в (19) представляет собой известную функцию переменных  $x$  и  $t$ .

Чтобы воспользоваться граничным условием на свободной поверхности (10), сначала найдем значение потенциала при  $x = -\infty$ . Будем здесь для простоты предполагать, что скорость набегающего потока в слое на бесконечности отсутствует, что сводится к равенству  $C=0$ . Так как потенциал определяется с точностью до произвольной постоянной, будем считать, что  $\varphi = 0$  при  $x = -\infty$ . Тогда из определения функции  $\chi$  имеем

$$\frac{dw}{d\zeta} = -i\chi(\zeta) \frac{dz}{d\zeta} = -\frac{ih}{\pi\zeta} \chi(\zeta),$$

откуда получим

$$w = -\frac{ih}{\pi} \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{\chi(\zeta)}{\zeta} d\zeta,$$

что с точностью до несуществующей постоянной дает выражение

$$w(\zeta, t) = -\frac{h}{\pi^2} \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{\bar{\psi}_1(\xi', t)}{\xi'} \ln \frac{\xi}{\xi' - \xi'} d\xi' + \int_0^{\infty} \frac{\bar{\psi}_0(\xi', t)}{\xi'} \ln \frac{\xi}{\xi' - \xi'} d\xi' \right\} + \frac{h}{\pi} C \ln \zeta. \quad (20)$$

Последнее слагаемое соответствует источнику в начале координат полуплоскости  $\zeta$  и, значит, наличию общей скорости течения в слое; если эта скорость отсутствует, то  $C=0$ , что и будем предполагать в дальнейшем. Вычисляя последнее выражение при  $-\infty < \xi < 0$ , найдем значение потенциала на свободной поверхности

$$\phi(x, t) = -\frac{h}{\pi^2} \int_{-\infty}^0 \frac{\bar{\psi}_1(\xi', t)}{\xi'} \ln \frac{|\xi|}{|\xi' - \xi|} d\xi' - \frac{h}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\bar{\psi}_0(\xi', t)}{\xi'} \ln \frac{|\xi|}{|\xi' - \xi|} d\xi', \quad (21)$$

или в физических переменных

$$\phi(x, t)_{y=h} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x', t) \ln \frac{e^{\pi x/h}}{|e^{\pi x/h} - e^{\pi x'/h}|} dx' - F(x, t), \quad (22)$$

где через  $F(x, t)$  обозначена известная функция

$$F(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x', t) \ln \frac{e^{\pi x'/h}}{|e^{\pi x'/h} + e^{\pi x/h}|} dx'$$

Из (22) получаем

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)_{y=h} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}(x, t) K(x, x') dx' - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x, t),$$

где через  $K(x, x')$  обозначено ядро

$$K(x, x') = \ln \frac{e^{\pi x/h}}{|e^{\pi x/h} - e^{\pi x'/h}|}.$$

Теперь, используя граничное условие (2), получим следующие интегродифференциальное уравнение для функции  $(v_y)_{y=h} = \psi_1(x, t)$ :

$$\psi_1(x, t) + \frac{1}{\pi g} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \psi_1(x', t)}{\partial t^2} K(x, x') dx' = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad (23)$$

где, в свою очередь,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \psi_0(x', t)}{\partial t^2} \ln \frac{e^{\pi x/h}}{|e^{\pi x/h} + e^{\pi x'/h}|} dx'$$

Выражение (23) представляет собой основное уравнение предлагаемого метода. Для решения этого уравнения должны быть заданы начальные значения

$$(\psi_1)_{t=0} \text{ и } \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right)_{t=0},$$

которые в случае, если процесс начинается из состояния равновесия, могут быть приняты равными нулю.

В качестве более простого примера можно рассмотреть случай, когда нижнее основание совершает гармонические колебания по закону

$$f(x, t) = \Delta_n(x)e^{i\omega t},$$

Тогда  $\psi_0(x, t) = i\omega\Delta_n(x)e^{i\omega t}$ , и вертикальную компоненту скорости на свободной границе удобно представить в виде

$$(v_{y0})_{y=h} = \psi_1(x, t) = i\omega\Delta_n(x)e^{i\omega t}.$$

Теперь уравнение (23) превратится в интегральное уравнение Фредгольма относительно амплитуды вертикальной компоненты скорости на свободной поверхности.

$$\Delta_n(x) - \frac{\omega^2}{\pi g} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_n(x')K(x, x')dx' = F_0(x), \quad (24)$$

где

$$F_0(x) = -\frac{\omega^2}{\pi g} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_n(x') \ln \frac{e^{\pi x/h}}{|e^{\pi x'/h} + e^{\pi x/h}|} dx'.$$

Сведение исходной задачи к уравнению Фредгольма второго рода вносит в проблему вопрос об определении собственных чисел (то есть собственных частот), при некоторых возможно появление собственных колебаний слоя жидкости.

**Вывод.** Для задачи о колебании слоя жидкости под действием вертикального движения дна получено интегро-дифференциальное уравнение, определяющее зависимость вертикальной компоненты скорости на свободной поверхности от скорости вертикального перемещения дна. В случае гармонических колебаний поверхности дна задача сводится к уравнению Фредгольма второго рода и вовлекает в рассмотрение проблему определения собственных чисел колебания слоя.

### Библиографические ссылки

1. Мурти Т.С. Сейсмические морские волны цунами / Т.С. Мурти ; пер. с англ. [под ред. проф. А.В. Некрасова]. – Л. 1981. – 448 с.
2. Селезов И. Т. Генерация поверхностно-гравитационных волн данным повторяющимся во времени импульсом / И.Т. Селезов, В.Н. Кузнецов, Д.О. Черников // Мат. методы и физико-мех. поля. – 2009. – 52, №3. – С. 140–145.
3. Черников Д.О. Генерация волн подвижками данной поверхности / Д.О. Черников // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2011. – Вип.15, т.1. – С. 89–93.
4. Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика, Ч.1 / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – М., 1956. – 560 с.
5. Лаврентьев М. А. Методы теории функции комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М., 1965. – 716 с.

Надійшла до редколеги 20 12 10

УДК 532.593

Е.В.Козлова, О.В.Козлова

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара***О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ**

Розглядаються різні підходи до використання методу граничних інтегральних рівнянь для розв'язання задачі про рух рідини в шарі, як у плоскій так і просторовій постановці. Аналізуються деякі позитивні та негативні риси підходів, що розглядаються.

*Ключові слова* течія ідеальної рідини в шарі, теорія потенціалу, граничні інтегральні рівняння

Рассматриваются различные подходы к использованию метода граничных интегральных уравнений для решения задачи о движении жидкости в слое в плоской и пространственной постановке. Анализируются некоторые положительные и отрицательные стороны различных подходов.

*Ключевые слова* течение идеальной жидкости в слое, теория потенциала, граничные интегральные уравнения

Different approaches for the use of boundary integral equations method applied to solution of the problem of liquid motion within the layer in the plane and the spatial dimensions are considered. Some positive and negative aspects of different approaches are analyzed.

*Key words* frictionless flow of fluid layer, potential theory, boundary integral equations

**Введение.** Задачи о движении жидкости в слое (канале) со свободной поверхностью относятся к наиболее сложным задачам гидромеханики, даже в постановке идеальной среды из-за нелинейных граничных условий на свободной поверхности. В настоящее время, ни один из развитых численных методов (конечных разностей, конечных элементов и граничных элементов) для таких задач не может рассматриваться как достаточно эффективный из-за трудности алгоритмизации определения положения свободной границы в текущий момент времени. Для стационарных нелинейных плоских задач в рамках модели теории струй идеальной невесомой жидкости существует целый арсенал аналитических средств, которые основаны на применении аппарата теории аналитических функций и которые можно объединить под общим названием как метод Жуковского-Чаплыгина – МЖЧ.

Известно, что метод МЖЧ ориентирован на применение к таким задачам теории струй, у которых твердая граница представляет собой полигон (многоугольник), на сторонах которого известен угол наклона вектора скорости. Именно это свойство твердых участков границ, а также тот факт, что на свободных участках границ сохраняется модуль скорости (для невесомой жидкости), обеспечивают то важное свойство, что на комплексной плоскости Жуковского

$$\omega = \ln \frac{v_0}{v} + i\theta \quad (1)$$

область изменения переменной  $\omega$  имеет форму обобщенного многоугольника, для отображения которого на каноническую область – верхнюю полуплоскость – используется интеграл Шварца-Кристоффеля.

Успех применения интеграла Шварца-Кристоффеля зависит от количества существующих в нем параметров-констант, для определения которых в общем случае приходится решать довольно сложную нелинейную систему трансцендентных

уравнений, содержащих некоторые интегралы с неизвестными заранее упомянутыми константами. Если число этих констант незначительно, то в простейших случаях их удастся определить явно без решения указанных трансцендентных уравнений. При значительном же числе этих констант задача их определения из упомянутой системы уравнений может представлять существенные трудности, которые, хотя принципиально и преодолимы, однако значительно снижают практическую эффективность МЖЧ, в связи с чем, для таких задач может оказаться более целесообразным, непосредственное применение метода граничных интегральных уравнений.

**Постановка вопроса.** Рассмотрим некоторые варианты применения метода граничных интегральных уравнений к задачам гидромеханики. Пусть функция  $u$  удовлетворяет уравнению Лапласа в некоторой области  $D$

$$\Delta u = 0.$$

Тогда в пространственном случае эта функция может быть представима формулой Грина в виде

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{r_{MP}} dS - \frac{1}{4\pi} \int_S u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{MP}} \right) dS, \quad (2)$$

где  $S$  – поверхность, охватывающая область  $D$ , содержащую внутри себя интересующую нас точку наблюдения  $M$ ;  $r_{MP}$  – расстояние между точкой  $M$  и произвольной точкой  $P$  на границе  $S$ ; производная  $\frac{\partial}{\partial n}$  вычисляется в точке границы  $S$  по внешней нормали по отношению к области  $D$ .

В плоском случае имеет место аналогичная формула

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial u}{\partial n} \ln \frac{1}{r_{MP}} ds - \frac{1}{2\pi} \int_C u \frac{\partial}{\partial n} \ln \left( \frac{1}{r_{MP}} \right) ds, \quad (3)$$

где интегрирование производится вдоль замкнутой контура  $C$ , охватывающего плоскую область  $D$  и точка  $M$  находится внутри  $D$ .

Первый интеграл справа в формулах (2) и (3) представляет собой потенциал простого слоя, (расположенного соответственно на поверхности  $S$  или на кривой  $C$ ), а второй интеграл – потенциал двойного слоя, сосредоточенный на той же поверхности или кривой.

Отметим, что формула (2) справедлива при наличии в пространстве любой совокупности замкнутых или незамкнутых поверхностей  $S_i$  и в равной мере может использоваться как для внутренней, так и для внешней задачи. Точно также формула (3) для плоской задачи может использоваться при некоторых дополнительных предположениях как для внутренней, так и для внешней области, и также в случае наличия в области нескольких замкнутых контуров  $C_i$ .

Сами по себе формулы (2) и (3) краевых задач теории потенциала не разрешают, поскольку они содержат на границе в качестве используемых функций одновременно  $u_s$  и  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_s$ , что в физически корректно поставленных задачах не случается. Известно, что для уравнения Лапласа корректно поставленная задача допускает задание в каждой точке границы или  $u_s$ , или  $\left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_s$ ; одновременно эти величины произвольным образом заданы быть не могут. Таким образом, в конкретных фи-

зических, и, в частности, гидродинамических задачах, мы встречаемся с тремя возможными случаями задания граничных условий:

а) на всей границе задана функция  $u_s$  (задача Дирихле);

б) на всей границе задана нормальная производная  $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$  (задача Неймана);

в) на отдельных частях границы задана  $u_s$ , а на других  $-\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$  (смешанная

задача, или задача Кельдыша-Седова).

Формулы (2) и (3) могут дать эффективное решение краевой задачи для уравнения Лапласа лишь в том случае, когда на границе известны одновременно и  $u_s$ , и

$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$ . Поэтому для использования формул (2) и (3) необходимо сначала найти

средство для доопределения неизвестных функций на границе, а именно, на тех участках, на которых известна функция  $u$ , нужно рассчитать  $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$ , а на тех участ-

ках, где известна  $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$ , первоначально нужно суметь вычислить саму функцию  $u$ .

Такую возможность как раз и предоставляют формулы Грина (2) и (3).

Именно, если в формуле (2) совершить предельный переход точки  $M$  из области  $D$  на границу  $S$ , то благодаря разрывному поведению потенциала двойного слоя, получим такое тождество (уравнение)

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{r_{MP}} dS - \frac{1}{2\pi} \int_S u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MP}}\right) dS. \quad (4)$$

Аналогично, для плоского случая будем иметь:

$$u(M) = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\partial u}{\partial n} \ln \frac{1}{r_{MP}} ds - \frac{1}{\pi} \int_C u \frac{\partial}{\partial n} \ln \left(\frac{1}{r_{MP}}\right) ds. \quad (5)$$

Выражения (4) и (5) представляют собой граничные интегральные уравнения. В принципе эти уравнения позволяют восстановить неизвестные заранее функции на участках поверхности  $S$  (или кривой  $C$ ): на тех участках  $S$  ( $C$ ), где известна  $u$ , из интегрального уравнения восстанавливается неизвестная  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , а на тех участках,

где известна  $\frac{\partial u}{\partial n}$  восстанавливается  $u$ . После этого формулы Грина (2) и (3) представляют собой явные формулы для вычисления функции  $u$  в любом месте области ( $D$ ). Формулы (2) и (3) являются выражением того факта, что значение функции  $u$  в любой точке  $M$  области является итогом суммирования возмущений приходящих в эту точку от всех точек граничной поверхности.

Обычно считается, что граничное интегральное уравнение типа (4) (или (5)) достаточно для того, чтобы довосстановить на участках границы неизвестную там

заранее функцию  $u$ , или  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , если там известна  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , или  $u$ .



Однако, как оказывается, в конкретных гидродинамических задачах это сделать не всегда удаётся. Приведём некоторые примеры того, когда тождества Грина приводят к неэффективным граничным интегральным уравнениям.

**Течение жидкости в канале переменного сечения.** Для простоты рассмотрим плоскую задачу о безотрывном течении жидкости в канале бесконечной протяженности.

Пусть нижняя и верхняя границы канала ограничены кривыми  $y = f_n(x)$  и  $y = f_g(x)$ , имеющими в бесконечности горизонтальные асимптоты. Схема области показана на рис. 1.

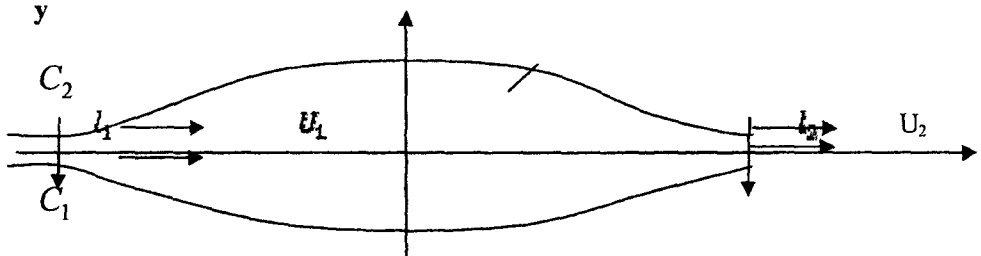


Рис. 1. Схема области течения

Ширину канала на входе  $x \rightarrow -\infty$  обозначим через  $h_1$ , на выходе  $x \rightarrow +\infty$  через  $h_2$ . По условию несжимаемости имеем

$$U_1 h_1 = U_2 h_2. \tag{6}$$

Для применения формулы Грина (3) и формулы для интегрального уравнения (5) в качестве замкнутого контура  $S$  выберем контур, состоящий из нижней границы  $C_1$  и верхней  $C_2$ , дополненной двумя вертикальными участками  $l_1$  и  $l_2$ , расположенными как угодно далеко от начала координат  $x = R$  и  $x = -R$ , ( $R \rightarrow \infty$ ), где границы  $y_n(x)$  и  $y_g(x)$  выходят на свои горизонтальные асимптоты.

В качестве исходной искомой функции выберем потенциал течения  $\varphi(x, y)$ . Тогда, поскольку по условиям непроницаемости на верхней и нижней границах  $V_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ , а интегралы

$$\int_{l_1} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \ln \frac{1}{r_{MP}} ds \text{ и } \int_{l_2} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \ln \frac{1}{r_{MP}} ds$$

в силу (6) взаимно уничтожаются, из (3) получим следующую формулу Грина для представления  $\varphi(x, y)$  в области течения:

$$\varphi(M) = -\frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{r_{MP}} \right) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{C_2} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{r_{MP}} \right) ds, \tag{7}$$

а из (5) – следующее граничное интегральное уравнение для граничных значений  $\varphi$

$$\varphi(M) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_1} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{r_{MP}} \right) ds - \frac{1}{\pi} \int_{C_2} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{r_{MP}} \right) ds. \tag{8}$$

Уравнение (8) является однородным, поскольку из физической постановки гидродинамической задачи значение  $\varphi$  заранее неизвестно, и максимум что может быть задано дополнительно – это скорость  $U_1$  на входе в канал (то есть

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x \rightarrow -\infty} = U_1) \text{ или расход } Q = U_1 h_1. \text{ Из уравнения (8) видно, что если } \varphi_0 \text{ явля-}$$

ется его решением, то и  $\varphi = A\varphi_0$ , где  $A$  – произвольная константа, тоже является решением, что соответствует тому факту, что в канале возможно гидродинамическое течение с любой скоростью на входе.

Таким образом, для решения однородного уравнения (8) можно выставить дополнительное условие нормировки

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x \rightarrow -\infty} = 1, \quad (9)$$

однако даже при этом условии трудно представить себе такую численную процедуру, которая позволила бы найти единственное решение этого однородного уравнения.

Рассмотрим теперь попытку получения граничных интегральных уравнений исходя из формулы Коши. Именно, если в области (D) с границей C задана аналитическая функция  $f(z)$ , то её значение в области может быть выражено через граничные значения в виде

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (10)$$

где точка  $\zeta$  принадлежит границе C и  $f(\zeta)$  – значение функции на границе.

Для рассматриваемой выше задачи о течении жидкости в канале с твёрдыми стенками выберем в качестве аналитической функции  $f(z)$  производную комплексной скорости

$$\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y.$$

Для неё будем иметь формулу Коши (10):

$$v_x - iv_y = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(v_x - iv_y)_C d\zeta}{\zeta - z}. \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что и здесь соответствующие интегралы по  $l_1$  и  $l_2$  в силу (6) взаимно уничтожаются и формула (11) сводится к виду

$$v_x - iv_y = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 + C_2} \frac{(v_x - iv_y)_C d\zeta}{\zeta - z}. \quad (12)$$

Интересно, что для твёрдых участков границы, которые мы здесь только и рассматриваем, по условию непроницаемости имеем

$$(v_x - iv_y) d\zeta = ve^{-i\theta} ds e^{i\theta} = v ds = v_\tau ds, \quad (13)$$

где  $v_\tau$  – касательная компонента скорости на элементах границ вдоль направления обхода. Таким образом,

$$v_x + iv_y = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1+C_2} \frac{v_\tau ds}{\xi - z}, \quad (14)$$

и, соответственно, имеем граничное интегральное уравнение

$$V_x - iV_y = \frac{1}{\pi i} \iint_{C_1+C_2} \frac{V_\tau dS}{\xi - z}, \quad (15)$$

где точка наблюдения  $M$  имеет координату  $z$  и расположена или на  $C_1$ , или  $C_2$ . Поскольку касательная компонента скорости  $v_\tau$  заранее на границах нигде не известна, то интегральные члены в (15) заранее не могут быть определены. Умножим левую и правую часть выражения на  $e^{i\theta_M}$ , где  $\theta_M$  – угол наклона касательной в точке  $M$ . В силу условия непроницаемости получим тождество

$$v_\tau(M) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\pi} \int_{C_1+C_2} \frac{v_\tau ds}{\xi - z} \right) \cos \theta_M - \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\pi} \int_{C_1+C_2} \frac{v_\tau ds}{\xi - z} \right) \sin \theta_M, \quad (16)$$

где  $v_\tau(M) = v_x(M) \cos \theta_M + v_y(M) \sin \theta_M$ , которое, хотя и обязано выполняться для граничных значений аналитической функции, но в силу его однородности непригодно для численного определения касательной компоненты скорости  $v_\tau$  на границах области.

С другой стороны, в качестве исходной функции рассмотрим функцию тока  $\psi(x, y)$  Пользуясь очевидной асимптотикой

$$\psi(x, y)_{x \rightarrow -\infty} = U_1 y, \dots \psi(x, y)_{x \rightarrow +\infty} = U_2 y,$$

где  $U_1$  и  $U_2$  связаны условием (6), нетрудно доказать, что интегралы по упомянутым отрезкам  $l_1$  и  $l_2$  взаимно компенсируют друг друга при  $R \rightarrow \infty$ , так что формула Грина для функции  $\psi$  будет

$$\psi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_1+C_2} \left\{ \ln \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r_{MP}} \right\} ds, \quad (17)$$

а граничное интегральное уравнение –

$$\begin{aligned} \psi(M) = & \frac{1}{\pi} \int_{C_1} \left\{ \ln \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r_{MP}} \right\} ds + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{C_2} \left\{ \ln \frac{1}{r_{MP}} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{r_{MP}} \right\} ds, \end{aligned} \quad (18)$$

где точка  $M$  принадлежит или границе  $C_1$ , или границе  $C_2$ .

Выражение (18) может быть с успехом использовано в качестве конструктивного интегрального уравнения. В самом деле, на границах  $C_1$  и  $C_2$  функция  $\psi$  известна, причём на  $C_1$  можно положить  $(\psi)_{C_1} = 0$ , а на  $C_2$ :  $(\psi)_{C_2} = Q$ , где  $Q$  расход через рассматриваемый канал. Величина  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ , входящая в (18), на нижней гра-

ниче имеет смысл  $\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{C_1} = -v_s$ , а на верхней границе  $\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{C_2} = v_s$ . Далее, на  $C_2$ :

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \ln \frac{1}{r_{MP}} \right) = -\frac{1}{r} \cos(\theta_{MP} - \beta_{MP}),$$

где  $\theta_{MP}$  - угол вектора  $\overline{MP}$  с выбранной осью абсцисс,  $\beta_P$  угол внешней нормали  $\bar{n}_P$  к контуру  $C_2$  в точке P по отношению к оси  $x$ .

Применив формулу (18) к точке M, принадлежащей  $C_1$  или  $C_2$ , получим следующее интегральное уравнение для определения касательной скорости  $v_s$  на нижней и верхней сторонах контура

$$\frac{1}{\pi} \int_{C_1} v_s(P) \ln \frac{1}{r_{MP}} ds - \frac{1}{\pi} \int_{C_2} v_s(P) \ln \frac{1}{r_{MP}} ds = F(M), \quad (19)$$

где интегрирование совершается вдоль кривых  $C_1$  и  $C_2$  от левого конца к правому.

При этом, если точка  $M \in C_1$ , то

$$\text{при } P \in C_1: r_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (f_H(x) - f_H(x_0))^2}.$$

$$\text{при } P \in C_2: r_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (f_\theta(x) - f_H(x_0))^2}.$$

$$\text{и } F(M) = \frac{Q}{\pi} \int_{C_2} \frac{\cos(\theta_{MP} - \beta_P) ds}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (f_\theta(x) - f_H(x_0))^2}}.$$

Если  $M \in C_2$ , то

$$\text{при } P \in C_1: r_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (f_H(x) - f_\theta(x_0))^2}.$$

$$\text{при } P \in C_2: r_{MP} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (f_\theta(x) - f_\theta(x_0))^2}.$$

$$\text{и } F(M) = -Q \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \int_{C_2} \frac{\cos(\theta_{MP} - \beta_P) ds}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (f_\theta(x) - f_\theta(x_0))^2}} \right\}.$$

Уравнение (19), является интегральным уравнением Фредгольма первого рода, и хотя его решение предоставляет известные трудности, оно, в принципе, позволяет найти распределение касательной скорости  $v_s$  на границах области, а затем, при помощи формулы Грина (17) распределение функции тока и компоненты скорости во всей области течения. В противоположность этому использование формулы (8) для потенциала течения не приводит к конструктивному интегральному уравнению.

**Выводы.** В работе показано, что использование формул Грина в качестве источника получения граничных интегральных уравнений для решения задач теории потенциала, в частности, задач гидромеханики, не всегда приводит к конструктивным уравнениям, позволяющим организовать вычислительный процесс. В некоторых случаях формулы Грина приводят только к тождествам, которые не могут быть использованы в качестве интегральных уравнений.

## Библиографические ссылки

1. Кочин Н.Е. Теоретическая гидромеханика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – М., 1956. – 560 с.
2. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М., 1965. – 716 с.
3. Гуревич М.И. Теория струй идеальной жидкости / М.И. Гуревич. – М., 1961. – 302 с.
4. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М., 1953. – 680 с.

Надійшла до редколегії 22.12.10

УДК 621.479

Л.И. Кныш, В.И. Давыдов

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

### МЕТОДИКА РАСЧЁТА ОБЛУЧЕННОСТИ ТРУБЧАТОГО ПРИЕМНИКА ТЕПЛА В СОСТАВЕ СОЛНЕЧНОЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАБОЛОЦИЛИНДРИЧЕСКИМ КОНЦЕНТРАТОРОМ

Розроблено методику визначення теплових потоків на поверхні лінійного та трубчатого приймача сонячного випромінювання, що знаходиться у фокусі параболоциліндричного концентратора. Проведено чисельні експерименти, що виявили основні закономірності процесу, пов'язані, головним чином, з вибором геометрії системи. Показано задовільний збіг результатів чисельного та експериментального досліджень.

*Ключові слова: сонячна енергетична система, параболоциліндричний концентратор, теплоприймач.*

Разработана методика по определению тепловых потоков на поверхности линейного и трубчатого приёмника солнечного излучения, который находится в фокусе параболоцилиндрического концентратора. Проведены численные эксперименты, выявившие основные закономерности процесса, связанные, главным образом, с выбором геометрии системы. Показано удовлетворительное совпадение результатов численного и экспериментального исследований.

*Ключевые слова: солнечная энергетическая система, параболоцилиндрический концентратор, теплоприёмник.*

A method for determination of heat flows on the surface of linear and tube solar receiver, which located in the focus of cylindrical parabolic concentrator, is developed. The numerical experimentations have revealed fundamental regularities of the process. These regularities connected with selection of system geometry. Satisfactory fit of results numerical and experimental investigations are demonstrated.

*Key words: solar power system, cylindrical parabolic concentrator, heat receiver.*

**Введение.** В настоящее время на Украине существуют объективные причины, стимулирующие развитие различных энергосберегающих технологий, а также установок, использующих нетрадиционные и возобновляемые источники энергии. Перспективным направлением крупномасштабного использования солнечной энергии можно считать интегрирование в энергетическую систему региона солнечных энергетических станций (СЭС) на базе параболоцилиндрических концентраторов (ПЦК). Именно в этом направлении развивается мировая солнечная энергетика.

Существенные успехи уже достигнуты в США, Израиле, Испании, Германии. Под эгидой Европейского Союза ведутся работы над крупномасштабным проектом Desertec, в рамках которого предполагается строительство более 100 солнечных электростанций на севере Африки, электроэнергия от которых будет передаваться через Средиземное море в Европу [1].

Анализ научных публикаций по вопросам проектирования и эксплуатации подобных объектов [2; 3] и др. позволяет сделать вывод о необходимости проведения более детальных исследований, в первую очередь, по основному элементу СЭС – системе ПЦК – трубчатый приёмник тепла.

Создание эффективной системы приёма солнечного излучения заключается в определении основных геометрических параметров концентратора (фокусного расстояния  $f_K$ , радиуса  $r_K$ , угла раскрытия  $u_K$ ), и также неточностей геометрии (среднеквадратичных отклонений  $\sigma_\phi$ ,  $\sigma_\gamma$ ), при которых обеспечивается требуемая степень концентрации по лучевоспринимающей поверхности приёмника. Это, в свою очередь, даёт возможность получать необходимые уровни температур и тепловых потоков в теплоприемнике, минимизируя тепловые потери.

**Цель работы.** Целью работы является определение тепловых потоков, которые попадают на линейный и трубчатый приёмник тепла от ПЦК и выбор, базируясь на этих значениях, наиболее рациональных геометрических характеристик теплоприемника.

**Математическая постановка задачи.** В [4] была создана обобщённая математическая модель процесса концентрации солнечного излучения, в которой, в рамках фотометрического подхода учтены все факторы, влияющие на лучистый теплообмен в системе Солнце-концентратор-приёмник. Применим основные положения этой модели к рассмотрению точно ориентированных на Солнце ПЦК, в фокусе которых располагается трубчатый теплоприемник. На рис.1 показана схема распределения лучистых потоков в рассматриваемой системе.

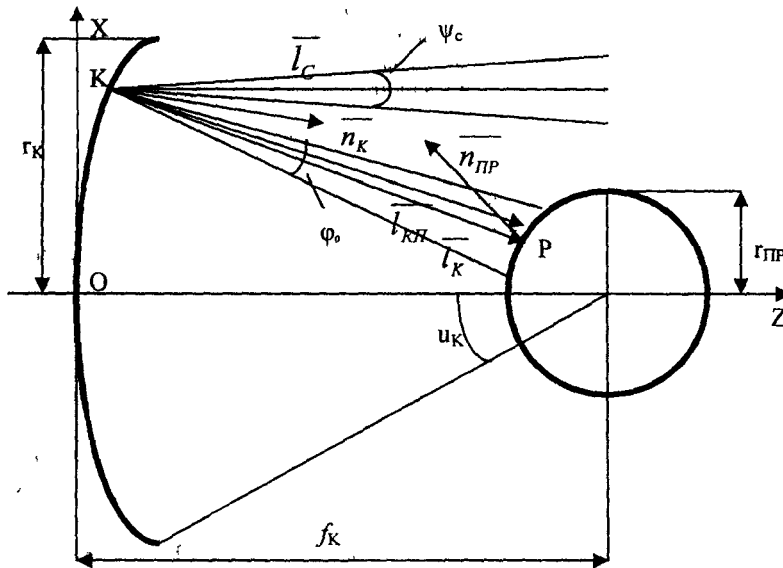


Рис. 1. Схема к определению облучённости приёмника в системе ПЦК – трубчатый теплоприемник

Определим облучённость приёмника, приходящую на единицу длины рассматриваемой системы. Если обозначить текущие точки на поверхности концентратора и приёмника  $K(x, z)$  и  $P(x, z)$ , то полный поток энергии, падающий на точку  $K(x, z)$  концентратора равен

$$d\Phi_0 = \beta_3 d\Phi_{\text{ПДЦ}} = \beta_3 E_C dl \cos(-\vec{l}_C^0, \vec{n}_K), \quad (1)$$

где  $\beta_3$  – коэффициент зеркального отражения лучевоспринимающей поверхности концентратора;  $dl$  – длина элементарной площадки концентратора, м,  $E_C$  – суммарная солнечная радиация, Вт/м<sup>2</sup>.

Будем считать, что отражённое излучение распространяется в углу  $\phi_0$  в соответствии с законом, определяемым функцией индикатрисы излучения  $f(\phi)$ , которая имеет вид

$$f(\phi) = \frac{dI(\phi)}{dI(0)}, \quad 0 \leq \phi \leq \phi_0, \quad (2)$$

где  $dI(\phi)$  – элемент поля интенсивностей излучения внутри угла  $\phi_0$ ;  $dI(0)$  – интенсивность излучения в направлении, выбранном за основное. Тогда поток энергии, отражённый от концентратора, будет равен

$$d\Phi_0 = \int_0^{\phi_0} dI(\phi) d\phi.$$

Учитывая (2), получаем

$$d\Phi_0 = dI(0) \int_0^{\phi_0} f(\phi) d\phi. \quad (3)$$

Приравняем правые части (1) и (3)

$$dI(0) = \frac{\beta_3 E_C dl \cos(-\vec{l}_C^0, \vec{n}_K)}{\int_0^{\phi_0} f(\phi) d\phi},$$

или

$$dI(\phi) = \frac{f(\phi) \beta_3 E_C dl \cos(-\vec{l}_C^0, \vec{n}_K)}{\int_0^{\phi_0} f(\phi) d\phi}. \quad (4)$$

Рассматривая элемент поверхности концентратора как вторичный точечный источник излучения, определяем плотность теплового потока в точке  $P(x, z)$  на основании известного фотометрического соотношения, которое объединяет закон косинусов и квадрата расстояний

$$dE_{\Pi} = \frac{dI(\phi) \cdot \xi(\vec{l}_{\text{КП}}) \cdot \cos \vartheta(\vec{l}_{\text{КП}}, -\vec{n}_{\Pi})}{l_{\text{КП}}^2}, \quad (5)$$

где  $l_{\text{КП}}$  – расстояние между точками поверхности приёмника и концентратора;

$$\xi(\bar{l}_{KP}) = \begin{cases} 1, & \text{если } (\bar{l}_{KP}^0 \bar{l}_K^0) \geq \cos \phi_0 \\ 0, & \text{если } (\bar{l}_{KP}^0 \bar{l}_K^0) < \cos \phi_0 \end{cases}$$

функция Хевисайда, показывающая, попал ли луч, идущий от концентратора  $\bar{l}_K$ , в пучок лучей  $\phi_0$ , падающий в окрестность рассматриваемой точки приёмника.

Подставляя (4) в (5), получаем

$$E_{\Pi} = \int_L \frac{\beta_3 f(\phi) \cdot E_C \cdot \xi(\bar{l}_{KP}) \cos(-\bar{l}_C^0, \bar{n}_K) \cos(\bar{l}_{KP}^0, -\bar{n}_{PP}) dl}{l_{KP}^2 \int_0^{\phi_0} f(\phi) d\phi}, \quad (6)$$

где  $L$  – длина параболы в сечении параболоцилиндра.

Нахождение облученности трубчатого приёмника сводится к вычислению криволинейного интеграла (6), при этом учёт неточностей, возникающих при изготовлении и эксплуатации концентратора предлагается проводить с помощью введения углов  $\Delta\gamma_K, \Delta\nu_K$ , характеризующих отклонение нормали поверхности реального концентратора  $\bar{n}_K$  от математически идеальной  $\bar{n}_K^{-И}$ , а именно

$$\bar{n}_K = \bar{n}_K^{-И}(\bar{n}_K^{-И}, \Delta\gamma_K, \Delta\nu_K).$$

Не имея данных абберационных испытаний реальных концентраторов, можно предположить, что распределение локальных угловых ошибок подчиняется нормальному вероятностному закону, который для случая, когда  $\Delta\gamma_K \gg \Delta\nu_K$ , имеет вид

$$P(\Delta\gamma_K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\gamma} \exp\left(-\frac{\Delta\gamma_K^2}{2\sigma_\gamma^2}\right).$$

**Численный метод исследования.** Выбор метода решения задачи связан с физическими особенностями протекания процесса. Аберрации, существующие на поверхности концентратора, приводят к тому, что не все лучи, отражённые от него, попадают на тепловоспринимающую поверхность приёмника. Таким образом, значение подынтегральной функции в (6) носит случайный характер. Кроме того, при определении отклонения нормали реального концентратора от математически идеального, использовался вероятностный подход. В связи с этим, в качестве основного метода решения данной задачи, выбран метод статистических испытаний. Он был реализован при следующих допущениях, часто используемых в гелиотехнических расчётах [5], а именно, предполагалось, что отражённый пучок имеет угол раскрытия, равный солнечному  $\phi_0 = \psi_C \approx 32'$ , распределение интенсивности излучения по направлениям в пучке равномерное  $f(\phi) = 1$ , коэффициент отражения зеркальной поверхности концентратора  $\beta_3$  в пучке является постоянной величиной.

Численные исследования проведены для линейного и трубчатого приёмника тепла при различных углах раскрытия концентратора  $u_K$ .

Первоначально исследован линейный приёмник тепла, находящийся в фокусе ПЦК. Результаты численного эксперимента представлены на рис. 2.



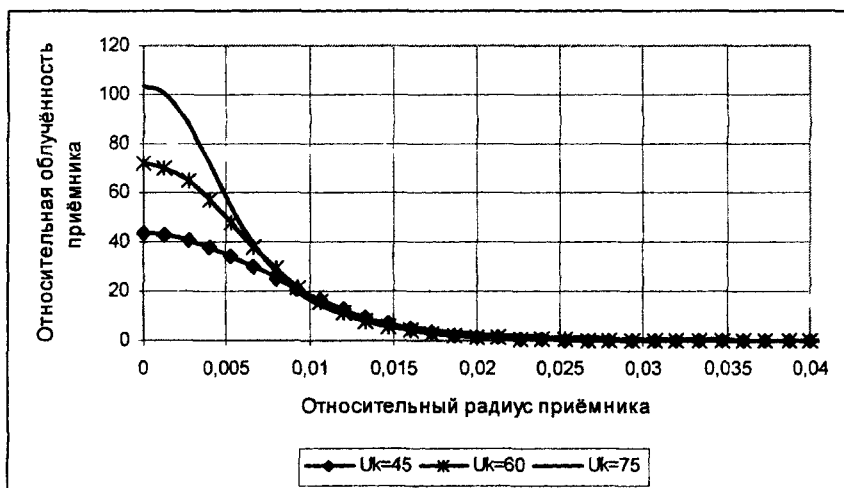


Рис.2. Изменение облучённости линейного приёмника при различных углах раскрытия концентратора

При вычислениях выбиралось среднее квадратичное отклонение  $\sigma_\gamma = 0.5\psi_C$ . Исследование проводилось для приёмника, имеющего максимальный относительный радиус  $\bar{r}_{MAX} = \frac{r_{PP}}{r_K} = 0.05$ . Как видно из графика, в фокусе теплоприёмника тепловой поток, идущий от Солнца, может быть увеличен более чем в 100 раз, однако его значение существенно снижается даже при небольшом отдалении от фокуса. Поэтому средняя степень концентрации не будет превышать 40 – 50.

На рис. 3 представлено изменение относительной облучённости трубчатого приёмника  $\bar{E} = \frac{E_{П}}{E_C}$  в направлении оси x при различных углах раскрытия концентратора. Графики построены при фиксированном максимальном относительном радиусе трубы, также равном  $\bar{r}_{MAX} = 0.05$ .

На рис. 3 представлено изменение относительной облучённости трубчатого приёмника  $\bar{E} = \frac{E_{П}}{E_C}$  в направлении оси x при различных углах раскрытия концентратора. Графики построены при фиксированном максимальном относительном радиусе трубы, также равном  $\bar{r}_{MAX} = 0.05$ .

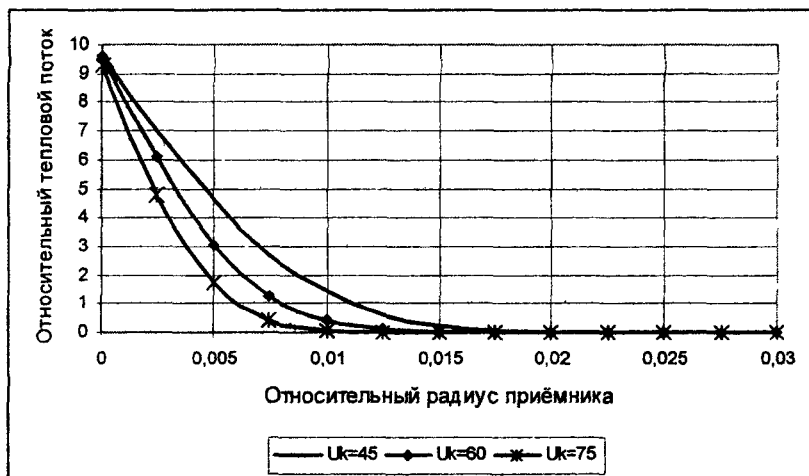


Рис. 3. Изменение облучённости трубчатого приёмника при различных углах раскрытия концентратора

Как видно из графика, излучение от концентратора попадает лишь на часть приёмника, находящуюся в афокальных плоскостях, в окрестности главной оптической оси. На остальную часть трубчатого приёмника концентрированное солнечное излучение практически не попадает. Такое распределение тепловых потоков приводит к относительно низкому значению коэффициента концентрации, которое для точек оптической оси не превышает 10.

Методика, описанная выше, позволяет определить характер распределения тепловых потоков внутри трубчатого приёмника вдоль оси  $z$ . Кривые, представленные на рис. 4, показывают распределение лучистых потоков, идущих от концентратора, при различных фиксированных значениях максимального относительного радиуса трубы. Кривые построены при фиксированном угле раскрытия концентратора, равного  $u_K = 60^\circ$ . Как видно из графика, тепловой поток, идущий от концентратора, распространяется внутри трубы в направлении оси  $z$  неравномерно, в узкой области, прилегающей к главной оптической оси. Этот факт необходимо учитывать при расчете и проектировании трубчатых теплоприемников для оптимизации их геометрических размеров и минимизации тепловых потерь.

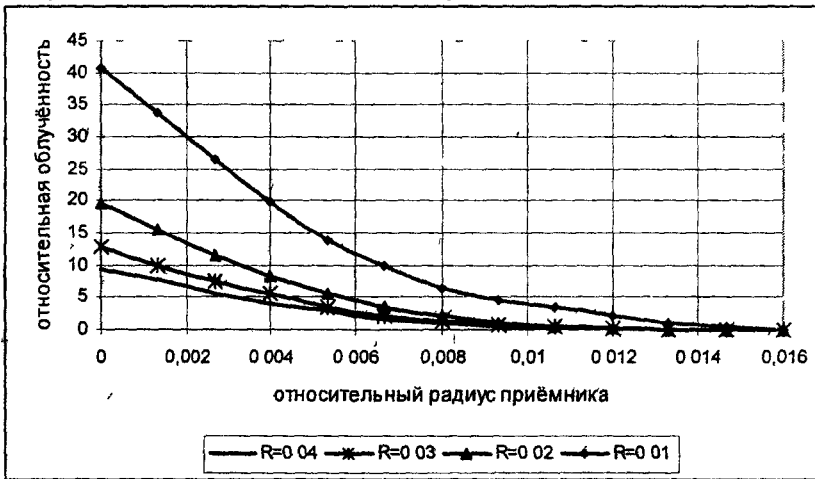


Рис. 4. Характер распределения тепловых потоков в трубе в направлении оси  $z$

Параллельно с этим можно определить и максимальный относительный радиус теплоприемника, при котором использование концентратора заданной геометрии имеет смысл. На рис. 5 представлена зависимость величины относительного теплового потока, что падает на границу трубчатого приёмника в точке пересечения его с оптической осью концентратора, при угле раскрытия концентратора равном  $u_K = 60^\circ$ . Как видно из графика, десятикратное увеличение плотности теплового

потока, идущего от Солнца, достигается при отношении  $\frac{r_{ПР}}{r_K} = \bar{r}_{MAX} = \frac{1}{20}$ . Дальнейшее увеличение радиуса приёмника является практически бесполезным с точки зрения усиления мощности лучистого потока, идущего от Солнца.

**Сравнение результатов численного и экспериментального исследований.** Выбор геометрии исследуемой системы был определён геометрией системы ПЦК — линейный приёмник, которая исследовалась экспериментально. Результаты экспериментов описаны в [6]. Наатурные исследования проводились при различных значениях прямой солнечной радиации  $E_C$  для параболоцилиндрической гелиоустановки с горизонтальной оптической осью и углом раскрытия  $u_K = 60^\circ$ . Отражатель установки

представлял собой несущую раму V-образного сечения с отражающим покрытием из листов зеркального алюминия с коэффициентом отражения солнечных лучей  $\beta_3 = 0,78 - 0,8$ . Теоретический профиль поперечного сечения зеркала соответствовал параболе  $y^2 = 2,6x$ . Теплоприемник данной установки представлял собой стальную трубу с наружным диаметром  $d_{ТР} = 0,042\text{ м}$ , покрытую термостойкой краской. Стальная труба приёмника была помещена в стеклянную трубу диаметром  $d_{СТ} = 0,07\text{ м}$ . По необлучаемой поверхности был установлен теплоизоляционный экран.

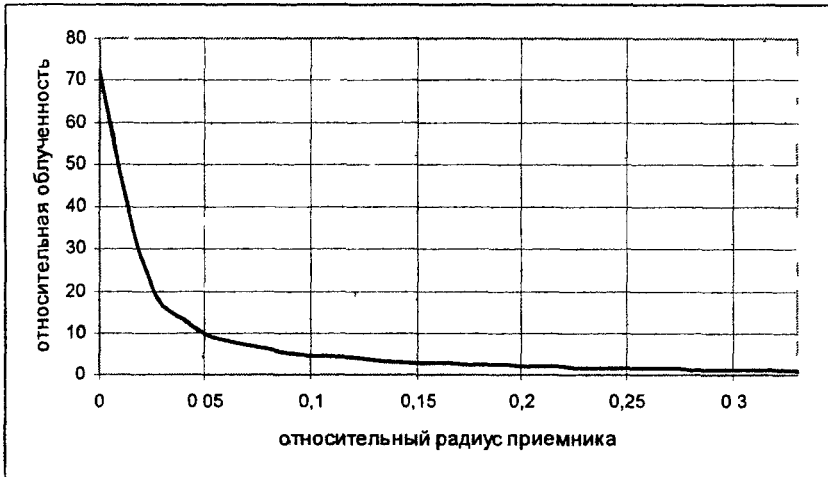


Рис. 5. Тепловые потоки в точках пересечения границы теплоприемника с оптической осью концентратора

На рис. 6 представлены результаты натурного эксперимента, проведенного при  $E_C = 700\text{ Вт} / \text{м}^2$ . Они близки к результатам численного исследования для точек приемника, расположенных в окрестности фокуса. Для периферийных областей численный эксперимент даёт несколько заниженный результат, что связано, скорее всего, с приближённым характером учёта неровностей поверхности зеркала.

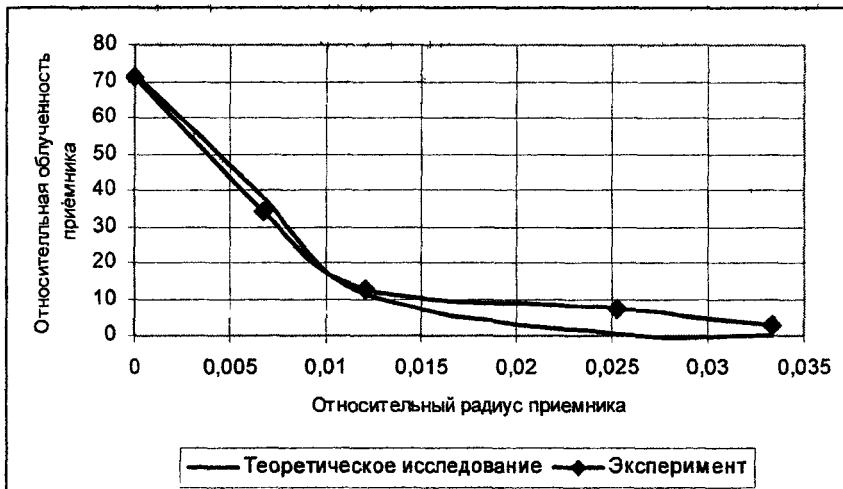


Рис. 6. Сравнение результатов численного исследования с результатами экспериментов

**Выводы.** В работе представлен численный алгоритм по определению величины тепловых потоков, идущих от параболоцилиндрического концентратора (ПЦК) на приёмник тепла, расположенный в его фокусе. Выявлены основные энергетические характеристики подобной системы для линейного и трубчатого приёмника тепла. Удовлетворительное совпадение результатов численного и экспериментального исследований подтверждает корректность данной методики и возможность её использования для теплоприемников различной геометрии, расположенных в фокальной и афокальной плоскостях ПЦК, точно ориентированного на Солнце.

### Библиографические ссылки

1. [www.ehorussia.ru/new/book/export/html/1307](http://www.ehorussia.ru/new/book/export/html/1307).
2. Cliff M. Webb SEGS Plant Design and Operation / M. Cliff – Los Angeles. – 1989. – 42 p.
3. Клычев Ш.И. Методика расчёта системы параболоцилиндрический концентратор-трубчатый приёмник солнечных теплоэнергетических установок / Ш.И. Клычев, М.М. Мухитдинов, С.А. Бахрамов // Гелиотехника. – 2003 – №4. – С. 50–55.
4. Кныш Л.И. Применение метода статистических испытаний для расчёта облучённости приёмника тепла концентрируемым потоком солнечной энергии / Л.И. Кныш, В.И. Давыдов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка.– 2009. – Вип. 13, т.1. – С. 51–59.
5. Мак-Клелланд Д. Концентраторы солнечного излучения для высокотемпературных установок КА. / Д. Мак-Клелланд // Энергетические установки космических аппаратов. – М., 1964. – С. 95–110.
6. Результаты испытаний солнечной параболоцилиндрической установки / И.И. Кохова, В.И. Кабаков, С.Ф. Эргашев, О.С. Дробязгина // Гелиотехника. – 1991 – №2. – С 14 – 16.

Надійшла до редколегії 05 01 11

УДК 532.516

В.И. Елисеєв\*, Т.А. Рузова\*, А.П. Толстопят\*, Л.А. Флеєр\*,  
А.Ф. Шевченко\*\*, С.А. Шевченко\*\*

\*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара  
\*\*Інститут чорної металургії НАН України

### ДИНАМИКА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ ПОДАЧЕ ГАЗОВОГО ПОТОКА ЧЕРЕЗ ВЕРТИКАЛЬНУЮ ЗАГЛУБЛЕННУЮ ФУРМУ

Наведено результати комп'ютерної обробки відеозображень коливної поверхні рідини при подаванні газового потоку через вертикальну заглиблену фурму. Отримано амплітудно-частотні характеристики коливального руху, значення характерних розмірів пазирів і величин сплесків на поверхні рідини.

*Ключові слова* вертикально заглиблена фурма, вдування газу в рідину, коливання вільної поверхні рідини при вдуванні газу

Приведены результаты компьютерной обработки видеозображений колеблющейся поверхности жидкости при подаче газового потока через вертикальную заглибленную фурму. Получены амплитудно-частотные характеристики колебательного движения, значения характерных размеров пазирей и величин всплесков на поверхности жидкости.

*Ключевые слова* вертикально заглибленная фурма, вдув газа в жидкость, колебания свободной поверхности жидкости при вдуве газа

**The paper deals with the results of computer processing of video images of liquid oscillating surface when gas stream supplying through vertical sunken tuyere. There are received amplitude-frequency response of oscillatory motion, the values of bubbles characteristic dimension and splashes on liquid surface.**

*Key words* vertical sunken tuyere, supply of gas through free surface, oscillatory motion of free surface at a supply of a gas

**Введение.** При продувке ванны с жидкостью газовым потоком на поверхности возникает волновое движение. Как правило, оно является нерегулярным и сопровождается некоторым общим подъемом жидкости, вследствие образования газовых пузырей в объеме, образованием разномасштабных волн, взаимодействующих друг с другом, и возникновением всплесков в виде как больших волновых образований, длинных тонких струй, так и отдельных капель, поднимающихся иногда на значительную высоту. Все эти качественные явления хорошо известны и многие детали волнового движения поверхностей описаны в многочисленных работах и монографиях, например, [1]. Однако только в последнее время, при развитии компьютерных технологий, связанных с обработкой видеоизображений, удается не только наблюдать, но и делать количественный анализ возмущенных поверхностей. Практический интерес к этим явлениям обусловлен многими проблемами, стоящими при разработке технологий в химической и металлургической отраслях промышленности. Основываясь на разработанной нами программе компьютерной обработки видеоизображений [2], ниже даются результаты такой обработки для случая подачи газового потока через вертикальную фурму в слой воды, находящейся в ванне. Такая схема является одной из широко используемых конструкций промышленных аппаратов для осуществления целого ряда известных технологических процессов.

**Описание эксперимента и методика обработки.** Авторами разработана компьютерная методика обработки видеоизображений применительно к процессу газожидкостных взаимодействий при заглубленном вдуве [2; 3], результаты использования которой представлены ниже.

Исследование проводилось на модели чугуновозного ковша, выполненной из органического стекла, геометрические параметры которого были:  $H = 430$  мм,  $D = 330$  мм.

В качестве рабочей жидкости использовалась вода с высотой налива  $H_n = 300$  мм. Рабочим газом служил воздух, подаваемый через имитатор фурменного дутьевого устройства, заглубленного под уровень жидкости на величину  $h_f = 200$  мм. Имитатор фурменного дутьевого устройства – трубка, которая имела следующие параметры:  $d_n = 3$  мм;  $d_{\text{вн}} = 2$  мм;  $d_c = 2.0$  мм, 1.8 мм, 1.6 мм, 1.4 мм. Угол отклонения дутья от оси трубки:  $\alpha = 0^\circ; 45^\circ; 90^\circ$ .

Газ, подаваемый на сопло фурменного устройства, последовательно проходил через регулирующий вентиль, манометр и батарею параллельно соединенных ротаметров. Показания ротаметров корректировались с учетом показаний манометра, а величина скорости газа, истекающего из сопла фурменного устройства, рассчитывалась по данным датчика полного давления (трубка Пито), устанавливаемого на срезе сопла при предварительно проводимой тарировке.

Поскольку величины значений расхода газа и скорости его на срезе сопла, при которых проводились эксперименты, определялись не напрямую, а расчетом по измеренным параметрам, то режимы продувки задавались и регистрировались по показаниям манометра. Показания эти измерялись в интервале 0.1 – 1.5 ати. Расход газа изменялся в диапазоне 0.3 – 2.2 м<sup>3</sup>/ч. По этой причине величины расходов газа в разных сериях опытов не совпадают.

В указанном интервале расхода газа ( $Q$ ) задавались 6 – 8 значений (примерно с равным интервалом) этой величины, при которых исследовалось видеоизображение процесса газожидкостного взаимодействия.

Відеозапис велась на цифрову відеокамеру VPC-HD1000 с затвором  $\sim 1/10000$  и частотой  $1/60$  кадр/сек в проходящем свете – источник света, модель ковша и объектив камеры размещались на одной оси

Відеозапис кожного режиму процесу проводилась в теченні 10 с., за котріє реєструвалось 600 кадрів процесу

Отснятые материалы по каждому из режимов далее подвергались компьютерной обработке по специальной программе обработки видеоизображений.

**Результаты анализа.** На рис. 1,а и 2,а показаны кривые изменения во времени средней величины поверхности слоя жидкости, из которых видно, что характер этого изменения статистический. Для выявления частотных особенностей движения поверхности используется быстрое преобразование Фурье, позволяющее определить основные частоты этого колебательного движения [4] Методика быстрого преобразования Фурье приобрела в последнее время широкое применение благодаря хорошей точности и быстрой вычисления частотных характеристик Быстрота вычисления достигается обрезанием высоких частот (сглаживанием) и, соответственно, уменьшением количества членов в рядах

На рис. 1,б и 2,б показаны амплитудно-частотные характеристики колебаний поверхности, соответствующие рис. 1,а и 2,а Из рисунков видно, что преобладающими частотами колебаний поверхности являются довольно низкие величины, что важно, как для анализа исследуемого явления, так и для оценки его точности Здесь важным аспектом является то, что сравнительно большие амплитуды приходятся на частоты, лежащие в первой половине рассматриваемого интервала частот Наши тестовые оценки показали, что точность величин амплитуд, находящихся в этой половине достаточно высока (погрешность составляет менее 1 %) При переходе во вторую половину точность падает и к концу рассматриваемого интервала погрешность значительно увеличивается. Для более точного расчета необходимо увеличивать количество членов рядов Фурье.

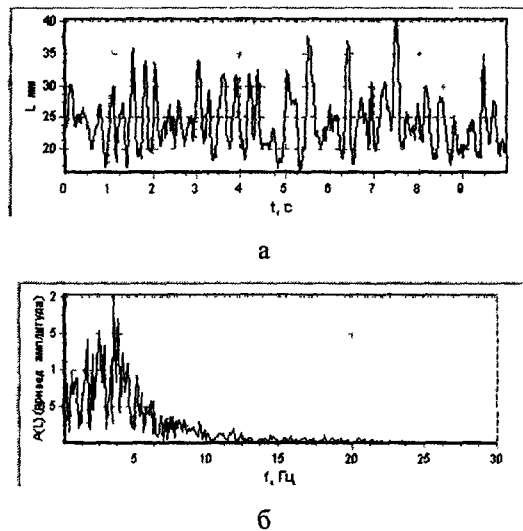


Рис. 1. Поверхность слоя жидкости (а) и ее амплитудно-частотная характеристика (б):  $Q=2,2$   
 $m^3/m^3$ ;  $d=2,0$  мм;  $\alpha=0^\circ$

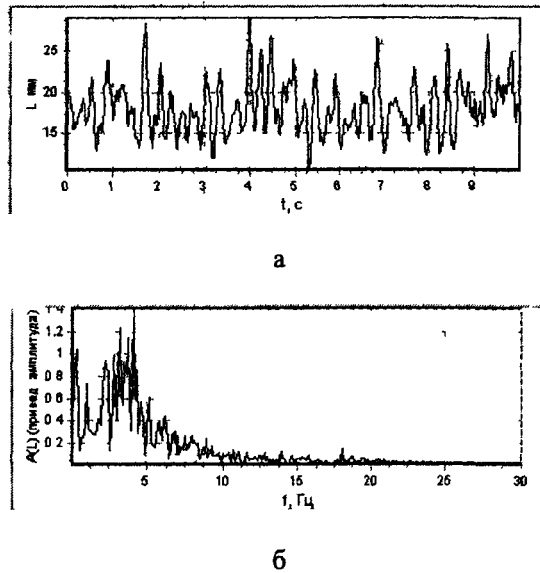


Рис. 2. Поверхность слоя жидкости (а) и ее амплитудно-частотная характеристика (б):  $Q=1,1$   $m^3/ч$ ;  $d=2,0$  мм;  $\alpha=0^\circ$

Таким образом, выбранное количество членов в преобразовании и сам частотный интервал позволяет достаточно быстро найти основные характерные особенности, которые представляют интерес для анализа. Как следует из приведенных рисунков, амплитудно-частотные кривые имеют ярко выраженные пики, причем среди них выделяются максимальные, соответствующие некоторой частоте. Анализ многочисленных экспериментов показал, что и величина пика и его соответствие частоте связано с расходом подаваемого газа. Если предположить, что частота максимального пика соответствует некоторому периодическому, точнее квазипериодическому движению, то можно получить оценку этого характерного движения. Таким квазипериодическим движением является выход пузыря или ансамбля пузырей из слоя жидкости. Оценки собственных колебаний жидкости с найденными величинами газосодержания указывают на то, что частота этих колебаний на порядок выше. Таким образом, определяется временная зависимость выхода пузырей, и, соответственно этому, может быть определен важный линейный размер – характерный масштаб некоторого осредненного пузыря.

Определению характерного размера пузырей при барботировании ванны, вследствие важности этой величины, посвящено значительное количество работ, например [5, 6]. В основе определения ее лежит теория устойчивости, разработанная Рэлеем [7] для изучения распада струй капиллярной жидкости. Использование этой теории для получения величин диаметров отрыва пузырей также нашло широкое применение в многочисленных работах, например [8]. Однако, количественная сторона процесса наталкивается здесь на ряд сложностей, связанных с физическими особенностями течения: ограниченностью пространства, значительной нелинейностью процесса, многофакторностью (возмущением поверхности жидкости, существенной вынужденной конвекцией, влиянием газового тракта). Полученная нами амплитудно-частотная характеристика колебания поверхности

сти, дает возможность реальной оценки осредненного характерного размера пузыря. Считая процесс квазипериодическим с некоторым средним периодом  $T = 1/f_{max}$  ( $f_{max}$  – значение частоты, соответствующей максимальной амплитуде на кривых, представленных на рис. 1, б и 2, б), примем, что это время равно времени надувания отрывного пузыря при некотором определенном объемном расходе газа  $Q$ , тогда легко получить следующий характерный радиус пузыря

$$r_p = \left( \frac{3 Q}{4\pi f_{max}} \right)^{1/3}. \quad (1)$$

Ниже в таблицах приведены значения  $r_p$  для различных расходов газа, заданных в эксперименте, и определены частоты, отвечающие максимальным амплитудам при этих расходах.

Из таблиц следует, что частоты  $f_{max}$  с изменением объемного расхода изменяются в целом немонотонно – видна стохастичность процесса. Однако радиус пузыря с ростом расхода газа увеличивается довольно четко. Таким образом, частотный анализ колебания поверхности слоя жидкости позволяет определить характерный размер пузыря, что является важным моментом для изучения массообменных процессов. Преимуществом этого метода является сравнительно большая доступность получения информации о проходящем в реальных условиях процессе.

Таблица 1

**Зависимость частоты и радиуса пузыря от расхода (d=1,4мм;  $\alpha=0^\circ$ )**

$Q$ (м <sup>3</sup> /ч)	2.04	1.82	1.58	1.32	1.02	0.65	0.49	0.33
$f_{max}$ (Гц)	3.85	3.5	2.2	2.0	3.38	2.38	3.15	2.93
$r_p$ (м)	0.053	0.051	0.049	0.044	0.042	0.036	0.033	0.029

Таблица 2

**Зависимость частоты и радиуса пузыря от расхода (d=1,4 мм;  $\alpha=45^\circ$ )**

$Q$ (м <sup>3</sup> /ч)	2.12	1.87	1.59	1.25	0.79	0.50	0.33
$f_{max}$ (Гц)	2.86	2.1	1.5	1.52	2.0	3.05	2.55
$r_p$ (м)	0.037	0.039	0.041	0.032	0.029	0.022	0.02

Таблица 3

**Зависимость частоты и радиуса пузыря от расхода (d=2,0 мм;  $\alpha=0^\circ$ )**

$Q$ (м <sup>3</sup> /ч)	2.19	2.0	1.82	1.51	1.3	0.87	0.56	0.31
$f_{max}$ (Гц)	3.5	3.05	3.5	3.53	3.3	4.13	2.76	2.60
$r_p$ (м)	0.035	0.035	0.031	0.031	0.030	0.024	0.023	0.020

Таблица 4

**Зависимость частоты и радиуса пузыря от расхода (d=2,0 мм;  $\alpha=45^\circ$ )**

$Q$ (м <sup>3</sup> /ч)	1.95	1.74	1.55	1.31	0.87	0.56	0.31
$f_{max}$ (Гц)	1.52	3.50	2.35	3.40	3.20	3.00	1.50
$r_p$ (м)	0.044	0.032	0.035	0.029	0.026	0.023	0.024



Еще одним важным аспектом наблюдения поверхности и обработки видеоизображений, на наш взгляд, является определение величин подъема всплесков. Под всплеском понимается максимальный подъем жидкости, зафиксированный на каждом конкретном снимке поверхности. При рассмотрении всплесков определялись фактически два параметра: максимальный подъем струйки над поверхностью жидкости в серии снимков и ее вероятность в данной серии. Серия из  $N$  видеоизображений характеризовалась определенными значениями диаметра сопла и расхода газа. Для каждого кадра определялся всплеск. Статистический анализ проводился по известной схеме [9; 10]: весь диапазон всплесков разбивался на  $m$  интервалов. Для каждого интервала  $j$  определяется частота  $N_j$  – число всплесков, попавших в заданный интервал, при этом  $\sum_{j=1}^m N_j = N$ . Тогда вероятность попадания величины всплеска в заданный интервал (более правильно – частота) определяется по формуле

$$w_j = N_j / N, \quad j = \overline{1, m}, \quad \left( \sum_{j=1}^m w_j = 1 \right). \quad (2)$$

На рис. 3 показаны кривые наиболее вероятных значений всплесков от подаваемого расхода  $Q$ . Из рисунков видно, что, несмотря на немонотонный характер кривых, просматривается явная зависимость этих величин от расхода. Более того, несложно заметить, что с ростом расхода высота наиболее вероятных всплесков увеличивается. Такой же характер просматривается и для максимальных всплесков, найденных в каждой серии обрабатываемых снимков, кривые которых приведены на рис. 4.

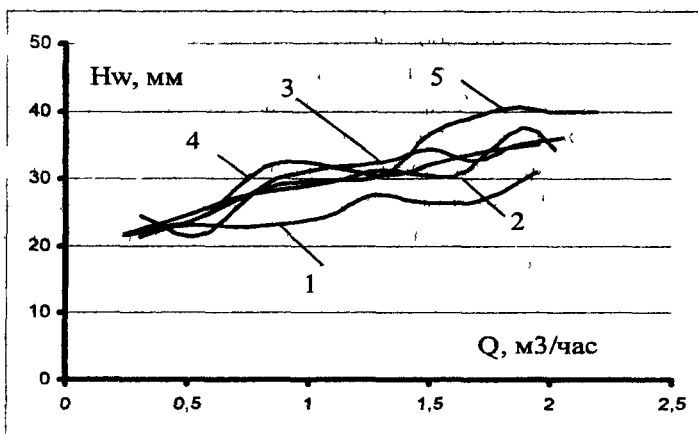


Рис. 3. Зависимость наиболее вероятного всплеска  $H_w$  от расхода газа  $Q$ :

- 1 –  $d_c = 1.4$  мм,  $\alpha = 45^\circ$ ;
- 2 –  $d_c = 1.6$  мм,  $\alpha = 45^\circ$ ;
- 3 –  $d_c = 1.8$  мм,  $\alpha = 45^\circ$ ;
- 4 –  $d_c = 2.0$  мм,  $\alpha = 45^\circ$ ;
- 5 –  $d_c = 2.0$  мм,  $\alpha = 0^\circ$

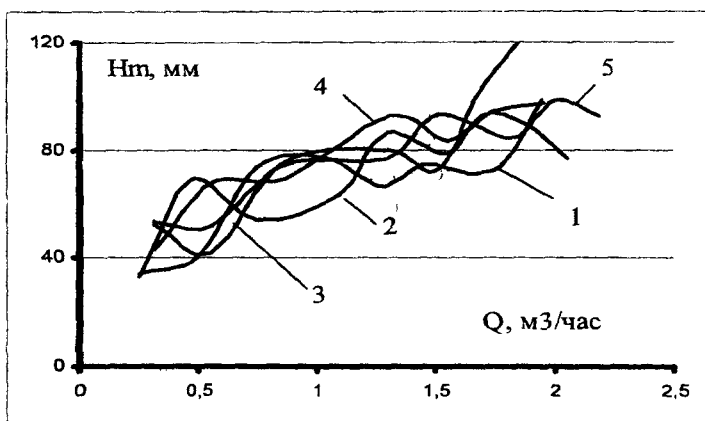


Рис. 4. Залежність максимальних значень всплесків  $H_m$  від расхода газа  $Q$ :

- 1 -  $d_c = 1.4$  мм,  $\alpha = 45^\circ$ ;
- 2 -  $d_c = 1.6$  мм,  $\alpha = 45^\circ$ ;
- 3 -  $d_c = 1.8$  мм,  $\alpha = 45^\circ$ ;
- 4 -  $d_c = 2.0$  мм,  $\alpha = 45^\circ$ ;
- 5 -  $d_c = 2.0$  мм,  $\alpha = 0^\circ$

Сравнивая величины всплесков на рис. 3, 4, не трудно видеть, что наиболее вероятные примерно в половину меньше максимальных, а значения максимальных величин достаточно существенны. Это объясняет явления выбросов, например, металла из обрабатываемых ковшей [11], или образований различных металлических наслоений на деталях технологического оборудования [12]. На приведенном рисунке также хорошо просматривается тенденция увеличения максимальных всплесков с увеличением расхода подаваемого газа. С другой стороны, хорошо видна хаотичность кривых, свидетельствующая в случайности процесса. Под понятие всплески, графики которых показаны, подпадают при обработке кадров как довольно крупный подъем волны, так и тонкие струйки, которые могут быть и кумулятивными возникающими в результате взаимодействия волн. Чаще всего высокие значения всплесков соответствуют, видимо, кумулятивным струям. Возникновение кумулятивной струи, скорость ее движения и, соответственно, высота ее подъема зависят от локальных параметров взаимодействующих волн, однако, видимо, статистически общий рост длин кумулятивных струй в большой степени зависит от общей энергии волнового движения поверхности, которая в нашем случае определяет положение средней линии волновой поверхности. В заключение, необходимо отметить, что, как представляется авторам, показанные результаты и выбранное направление работ, связанных с динамикой поверхностей слоев жидкостей в технологических аппаратах, в дальнейшем, дадут возможность получить интересные и важные для практики сведения.

### Бібліографічні посилання

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости / Л. Н. Сретенский. – М., 1977 – 816 с.

2. Рузова Т. А. Компьютерная обработка кинограмм процесса взаимодействия газовых струй с жидкостью / Т. А. Рузова, А.П. Толстопят, А.Ф. Шевченко, С.А. Шевченко // Наук. вісник Нац. гірнич. ун-ту. – 2007. – № 12. – С. 91–96
3. Рузова Т.А. Компьютерная обработка видеоизображений газовых пузырей в жидкости / Т.А. Рузова, В.И. Елисеев, А.П.Толстопят, Л.А. Флер. // Оптические методы исследования потоков Труды IX междунар. научно-технич. конф. – М., 2007. – С.48–49.
4. Numerical Recipes In C : The Art Of Scientific Computing / W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling. – Cambridge University Press, 1993. – 967 p.
5. Явойский В.И. Теория продувки сталеплавильной ванны / В.И. Явойский, Г.А. Дорофеев, И.А. Повх. – М., 1974. – 495 с.
6. Охотский В.Б. Физико-химическая механика сталеплавильных процессов / В.Б. Охотский. – М., 1993. – 151 с.
7. Рэлей Дж. В. Теория звука. Т. II. / Дж. В. Рэлей. – М.-Л., 1944. – 476 с.
8. Левич В.Г. Физико-химическая гидромеханика / В.Г. Левич. – М., 1959. – 670 с.
9. Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. – Л., 1985. – 248 с.
10. Рудзит Я.А Основы метрологии, точность и надежность в приборостроении / Я.А Рудзит, В.Н. Плуталов. – М., 1991. – 304 с.
11. Бойченко Б.М. Конвертерное производство стали: теория, технология, качество стали, конструкция аппаратов, рециркуляция металлов и экология / Б.М. Бойченко, В.Б. Охотский, П.С. Харлашин. – Дніпропетровськ, 2006. – 454 с.
12. Елисеев В.И. О возможных причинах попадания расплава металла внутрь дутьевого канала фурмы / В.И. Елисеев, А.П. Толстопят, Л.А. Флеер // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2006, № 2/1. – С. 106–112.

Надійшла до редколеги 08 11 10

УДК 532.516

В.И. Елисеев, В.В. Давидсон

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **ИОНООБМЕН В ДИСПЕРСИОННЫХ СРЕДАХ, НАХОДЯЩИХСЯ В ПОЛЕ ПЕРЕМЕННОГО НАПРЯЖЕНИЯ**

У рамках теорії іонообміну розглянуто завдання про розповсюдження електричного струму в гетерогенних середовищах, що складаються з твердих пористих тіл і рідких електролітів. На основі виконаних експериментів і теоретичних рішень отримані залежності амплітуд реактивних і активних струмів від частоти і величини напруги, що подається.

*Ключові слова* дисперснi середовища, іонообмін, змінний струм в гетерогенних середовищах, залежність струму від частоти і амплітуди напруги

В рамках теории ионообмена рассмотрена задача о распространении электрического тока в гетерогенных средах, состоящих из твердых пористых тел и жидких электролитов. На основе выполненных экспериментов и теоретических решений получены зависимости амплитуд реактивных и активных токов от частоты и величины подаваемого напряжения.

*Ключевые слова* дисперсные среды, ионообмен, переменный ток в гетерогенных средах, зависимость тока от частоты и амплитуд напряжений

The problem of electric alternating current propagation in heterogeneous mediums consisting of solid porous bodies and liquid electrolytes is considered in terms of ion interchange theory. On the basis of experiments and theoretical solutions dependences of active and reactive current amplitudes from frequencies and supplied voltage have been received.

*Key words* disperse medium, ion exchange, alternatively current in heterogeneous medium, variation of current with respect to frequency and amplitude of voltage

**Введение.** Электрические методы измерения широко используются для проведения качественного и количественного анализа различных дисперсных сред [1] Их отличает повышенная точность, быстроедействие, возможность регистрации и обработки результатов в режиме реального времени, а также, в случае необходимости, пространственное разнесение датчиков и измерительной аппаратуры при исследовании опасных и агрессивных сред. Вместе с тем для косвенных измерений, какими в данном случае являются электрические измерения, существует проблема интерпретации экспериментальных результатов, то есть выявление связей между непосредственно наблюдаемыми величинами, такими как токи, напряжения, сопротивления и емкости, с физико-химическими характеристиками вещества. Несмотря на огромное число работ, посвященных данному вопросу [2], проблема интерпретации, ввиду сложности и многообразия одновременно происходящих процессов, далека от полного разрешения. Необходимо также отметить, что основная часть работ посвящена изучению электрохимических процессов на постоянном токе, в то время как значительно более сложные по механизму и интересные в прикладном плане процессы на переменном токе изучены недостаточно. Данная работа является попыткой в какой-то мере восполнить этот пробел. В [3] в рамках теории массообмена в электрохимических средах рассмотрена задача о распространении электрического тока в электрохимической ячейке под действием гармонического напряжения В данной работе на основе феноменологической теории полученные ранее результаты обобщаются на гетерогенные дисперсные среды.

**Постановка задачи.** В рамках феноменологической модели, считая плотность раствора постоянной, выпишем одномерные нестационарные уравнения бинарного ионообмена в поровом пространстве

$$\frac{\partial \alpha_G N}{\partial t} = D_{eff}^{H_2O} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial N}{\partial x} \right) + r + s_{GT} q, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \alpha_G N^+}{\partial t} = D_{eff}^+ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial N^+}{\partial \zeta} + \gamma N^+ \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) + r^+ + s_{GT} q^+, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \alpha_G N^-}{\partial t} = D_{eff}^- \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial N^-}{\partial x} - \gamma N^- \frac{\partial \phi_G}{\partial x} \right) + r^- + s_{GT} q^-, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 (\epsilon_0 \epsilon_{eff}^G \phi_G)}{\partial x^2} - s_{GT} \epsilon_0 \epsilon_{eff}^G E_{GT} = \alpha_G F (N^- - N^+), \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 (\epsilon_0 \epsilon_{eff}^T \phi_T)}{\partial x^2} - s_{GT} \epsilon_0 \epsilon_{eff}^T E_{GT} = 0, \quad (5)$$

где  $t$  – время;  $x$  – продольная координата;  $N, N^+, N^-$  – мольные концентрации, соответственно, воды, положительных ионов и отрицательных ионов;  $\alpha_G$  – объемная доля жидкости;  $s_{GT}$  – удельная внутренняя поверхность;  $\gamma$  – отношение эффективной подвижности иона и его эффективного коэффициента диффузии;  $\phi_G, \phi_T$  – электрические потенциалы, соответственно, в жидкости и в твердом теле;

$r^+ r^-$  – величини, описывающие объемные реакции,  $\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная вакуума,  $\epsilon_{eff}^G, \epsilon_{eff}^T$  – эффективные коэффициенты диэлектрических постоянных соответственно, жидкости и твердого тела,  $E_{GT}$  – напряженность на внутренней границе жидкой фазы.

Вводя безразмерные величины:  $\tau = t/T$ ,  $\zeta = x/h$  ( $T$  – масштаб времени;  $h$  – линейный масштаб, полуширина рабочей ячейки), перепишем уравнения (1) – (5) в следующем виде

$$\frac{\partial \alpha_G N}{\partial \tau} = d^+ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial N}{\partial \zeta} \right) + Tr + Ts_{GT} q, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \alpha_G N^+}{\partial \tau} = d^+ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial N^+}{\partial \zeta} + \gamma N^+ \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) + Tr^+ + Ts_{GT} q^+, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \alpha_G N^-}{\partial \tau} = d^- \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial N^-}{\partial \zeta} - \gamma N^- \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) + Tr^- + Ts_{GT} q^-, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_G}{\partial \zeta^2} - s_{GT} E_{GT} = \Phi (N^- - N^+), \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_T}{\partial \zeta^2} - s_{GT} E_{TG} = 0, \tag{10}$$

где  $d^+ = \frac{D_{eff}^+}{D_{H2O}^{H2O}}$ ,  $d^- = \frac{D_{eff}^-}{D_{H2O}^{H2O}}$ ,  $T = \frac{h^2}{D_{eff}^{H2O}}$ ,  $\Phi = \frac{\alpha_G F h^2}{\epsilon_0 \epsilon_{eff}^G}$ .

Используя тот же самый прием, что и в однородной жидкости [3], получим следующие выражения для потоков ионов и для потенциала:

$$d^+ \left( \frac{\partial N^+}{\partial \zeta} + \gamma N^+ \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) = \left( \frac{d \overline{\alpha_G N^+}}{d \tau} - \overline{Tr^+} - \overline{Ts_{GT} q^+} \right) \zeta + C^+, \tag{11}$$

$$d^- \left( \frac{\partial N^-}{\partial \zeta} - \gamma N^- \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) = \left( \frac{d \overline{\alpha_G N^-}}{d \tau} - \overline{Tr^-} - \overline{Ts_{GT} q^-} \right) \zeta + C^-, \tag{12}$$

$$\phi_G = \frac{1}{2} \left[ \Phi (\overline{N^-} - \overline{N^+}) + \overline{s_{GT} E_{GT}} \right] \zeta^2 + C_G \zeta + D_G. \tag{13}$$

Как и ранее, из граничных условий при  $\zeta = -1$  (точка А) и  $\zeta = 1$  (точка В) будем иметь, что

$$C_G = -a \sin(2\pi \bar{f} \tau) + \frac{1}{2} \left( J R_W^A + J_G^A R_{GE}^A + J_G^B R_{GE}^B \right),$$

$$C^+ = \frac{1}{2} (g_A^+ + g_B^+), \quad C^- = \frac{1}{2} (g_A^- + g_B^-); \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\alpha_G N^+}}{d\tau} - T\overline{r^+} - T\overline{s_{GT} q^+} &= \frac{1}{2}(g_B^+ - g_A^+), \\ \frac{d\overline{\alpha_G N^-}}{d\tau} - T\overline{r^-} - T\overline{s_{GT} q^-} &= \frac{1}{2}(g_B^- - g_A^-), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $R_W$  – сопротивление внешней цепи;  $R_{GE}^A, R_{GE}^B$  – контактные сопротивления (сопротивления двойных слоев) в точках А и В;  $j_G^A, j_G^B$  – токи в жидкости на поверхностях электродов, соответственно в точках А и В;  $j$  – общий ток в цепи;  $g_A^-, g_B^-, g_A^+, g_B^+$  – потоки отрицательных и положительных ионов в точках А и В, соответственно;  $\overline{f} = fT$ ;  $f$  – частота, Гц. Для дисперсного тела вместо (13) будем иметь

$$\phi_T = \frac{1}{2} \overline{s_{GT} E_{GT} \zeta^2} + C_T \zeta + D_T, \quad (16)$$

при этом

$$C_T = -a \sin(2\pi \overline{f} \tau) + \frac{1}{2} (jR_W + j_T^A R_{TE}^A + j_T^B R_{TE}^B), \quad (17)$$

где  $R_{TE}^A, R_{TE}^B$  – контактные сопротивления в точках А и В;  $j_T^A, j_T^B$  – токи в твердом теле в этих же точках. Составим теперь выражение для тока проводимости ( $S$  – площадь электрода):

$$\begin{aligned} j_{pr} = -SF \frac{D_{eff}^{H2O}}{h} \left[ \frac{d\overline{\alpha_G N^+}}{d\tau} - \frac{d\overline{\alpha_G N^-}}{d\tau} - T(\overline{r^+} - \overline{r^-}) - T\overline{s_{GT}}(\overline{q^+} - \overline{q^-}) \right] \zeta - \\ - SF \frac{D_{eff}^{H2O}}{h} (C^+ - C^-) - S \frac{\sigma_{eff}^T}{h} (\overline{s_{GT} E_{GT} \zeta} + C_T). \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку на внутренних поверхностях токи равны, то есть  $\sigma_{eff}^T \overline{s_{GT} E_{GT}} = FD_{eff}^{H2O} T \overline{s_{GT}} (\overline{q^-} - \overline{q^+})$  и, принимая во внимание, что при  $\zeta = \pm 1$  токи должны быть одинаковы, то будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{\alpha_G N^+}}{d\tau} - \frac{d\overline{\alpha_G N^-}}{d\tau} - T(\overline{r^+} - \overline{r^-}) &= 0, \\ T\overline{s_{GT}}(\overline{q^-} - \overline{q^+}) &= \frac{1}{2} [(g_B^+ - g_A^+) - (g_B^- - g_A^-)] \end{aligned} \quad (19)$$

и тогда

$$\begin{aligned} j_{pr} = -SF \frac{D_{eff}^{H2O}}{2h} [(g_A^+ + g_B^+) - (g_A^- + g_B^-)] + \\ + S \frac{\sigma_{eff}^T}{h} \left[ a \sin(2\pi \overline{f} \tau) - \frac{1}{2} (jR_W + j_T^A R_{TE}^A + j_T^B R_{TE}^B) \right] \end{aligned} \quad (20)$$

Выпишем выражение для тока смещения

$$\begin{aligned}
 j_{sm} &= -S \frac{D^{H_2O}}{h^2} \frac{\varepsilon_0}{h} \left[ \varepsilon_{eff}^G \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \phi_G}{\partial \tau} \right) + \varepsilon_{eff}^T \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \phi_T}{\partial \tau} \right) \right] = \\
 &= -S \frac{D^{H_2O}}{h^2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{eff}^G}{h} \left\{ \Phi \left( \frac{dN^-}{d\tau} - \frac{dN^+}{d\tau} \right) \zeta + \right. \\
 &+ \left. \left[ \frac{1}{2} \left( R_W \frac{dj}{d\tau} + R_{TE}^A \frac{dj_G^A}{d\tau} + R_{TE}^B \frac{dj_G^B}{d\tau} \right) - 2\pi \bar{f} a \cos(2\pi \bar{f} \tau) \right] \right\} - \quad (21) \\
 &- S \frac{D^{H_2O}}{h^2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{eff}^T}{h} \left[ \frac{1}{2} \left( R_W \frac{dj}{d\tau} + R_{TE}^A \frac{dj_T^A}{d\tau} + R_{TE}^B \frac{dj_T^B}{d\tau} \right) - 2\pi \bar{f} a \cos(2\pi \bar{f} \tau) \right] + \\
 &+ \varepsilon_0 S \frac{D^{H_2O}}{h^2} \frac{s_{GT}}{h} \frac{d}{d\tau} \left( \varepsilon_{eff}^G \overline{E_{GT}} + \varepsilon_{eff}^T \overline{E_{TG}} \right) \zeta
 \end{aligned}$$

Из граничных условий следует, что если нет поверхностных зарядов, то последнее выражение в круглых скобках равно нулю то есть

$$\varepsilon_{eff}^G \overline{E_{GT}} + \varepsilon_{eff}^T \overline{E_{TG}} = 0, \quad (22)$$

тогда и

$$\left( \frac{dN^-}{d\tau} - \frac{dN^+}{d\tau} \right) = 0, \quad (23)$$

после чего будем иметь

$$\begin{aligned}
 j_{sm} &= -S \frac{D^{H_2O}}{h^3} \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{2} \left( \varepsilon_{eff}^G + \varepsilon_{eff}^T \right) R_W \frac{dj}{d\tau} + \right. \\
 &+ \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_{eff}^G \left( R_{GE}^b \frac{dj_G^b}{d\tau} + R_{GE}^c \frac{dj_G^c}{d\tau} \right) + \varepsilon_{eff}^T \left( R_{TE}^b \frac{dj_T^b}{d\tau} + R_{TE}^c \frac{dj_T^c}{d\tau} \right) \right] - \\
 &\left. - \left( \varepsilon_{eff}^G + \varepsilon_{eff}^T \right) 2\pi \bar{f} a \cos(2\pi \bar{f} \tau) \right\} \quad (24)
 \end{aligned}$$

**Определение зависимости амплитуд токов от частоты и величины напряжения.** Для дальнейшего связывания токов с потенциалом необходимо ввести кинетические уравнения на границах рабочей области, описывающие электродные реакции. Как и в [3], введем в рассмотрение модельные кинетические соотношения, когда на одной границе в течении полупериода ионы  $N^-$  переходят в ионы  $N^+$ , на другой, наоборот. В этом случае можно положить, что

$$g_B^+ = -g_B^- = k_B (N_B^- - N_B^+), \quad g_A^+ = -g_A^- = k_A (N_A^- - N_A^+). \quad (25)$$

Из интегрирования (11) и (12) по всему отрезку  $(-1, +1)$  после несложных преобразований, с учетом (25) и граничного условия (19), можно получить

$$\left[ (g_A^+ + g_B^+) - (g_A^- + g_B^-) \right] = 8\gamma N_0 \left[ 2 \frac{d^- + d^+}{d^- d^+} - \frac{k_B - k_A}{k_A k_B} \right]^{-1} (\phi_B - \phi_A) + 2 \left\{ 2 \left[ 2 \frac{d^- + d^+}{d^- d^+} - \frac{k_B - k_A}{k_A k_B} \right]^{-1} \frac{[d^- d^+ + (d^- + d^+) k_B]}{d^- d^+ k_B} - 1 \right\} T s_{GT} (\overline{q^-} - \overline{q^+}) \quad (26)$$

Соотношение (26) устанавливает связь между потоками зарядонесущих компонентов через поверхности электродов, внутренние поверхности гетерогенных сред внутри рабочего объема и разностью потенциалов на границах. Для полного определения этих потоков необходимо знать кинетические параметры на внутренних поверхностях, то есть  $\overline{q^-}$ ,  $\overline{q^+}$ . Здесь можно отметить, что для модельного кинетического процесса типа (25)  $\overline{q^-} - \overline{q^+} = 0$ , в силу условия (23). Если положить в выражении (26)  $k_B = -k_A = k$ , то будем иметь, как и в [3]

$$g_A^+ + g_B^+ = 2\gamma N_0 \frac{[d^- d^+ + (d^- + d^+) k]}{d^- d^+ k} (\phi_B - \phi_A), \quad (27)$$

при этом второе слагаемое становится равным нулю. Как следует из (26) величины  $k_A$  и  $k_B$  могут лимитировать электроперенос в жидкости. При малых величинах этих коэффициентов первый член в (26) будет иметь порядок этих значений, второй, если  $\overline{q^-} - \overline{q^+} \neq 0$ , может иметь различную величину. При больших значениях коэффициентов  $k_A$  и  $k_B$  с их ростом выражение в фигурных скобках стремится к нулю, поэтому величина второго слагаемого (26) зависит от кинетических параметров на поверхности гетерогенной структуры и от величины самой внутренней поверхности. Если реакционные процессы на внутренней поверхности значительно менее активны, чем на электродах, то процесс электропереноса определяется внутренней проводимостью этой жидкости, то есть

$$\left[ (g_A^+ + g_B^+) - (g_A^- + g_B^-) \right] = 4\gamma \frac{d^- + d^+}{d^- d^+} N_0 (\phi_B - \phi_A), \quad (28)$$

что соответствует (27) при  $k \rightarrow \infty$ . Объединяя активный и реактивный токи, будем иметь

$$j = j_{pr} + j_{sm} = \frac{S}{h} \sigma_{eff}^G \left[ a \sin(2\pi \bar{f} \tau) - \frac{1}{2} (R_W j + j_G^A R_{GE}^A + j_G^B R_{GE}^B) \right] + \frac{S}{h} \sigma_{eff}^T \left[ a \sin(2\pi \bar{f} \tau) - \frac{1}{2} (R_W j + j_T^A R_{TE}^A + j_T^B R_{TE}^B) \right] - \frac{S}{h} \frac{D_{eff}}{h^2} \left\{ \varepsilon_0 \varepsilon_{eff}^G \left[ \frac{1}{2} R_W \frac{dj}{d\tau} + \frac{1}{2} \left( R_{TE}^A \frac{dj_T^A}{d\tau} + R_{TE}^B \frac{dj_T^B}{d\tau} \right) - 2\pi \bar{f} a \cos(2\pi \bar{f} \tau) \right] + \right. \\ \left. + \varepsilon_0 \varepsilon_{eff}^T \left[ \frac{1}{2} R_W \frac{dj}{d\tau} + \frac{1}{2} \left( R_{GE}^A \frac{dj_G^A}{d\tau} + R_{GE}^B \frac{dj_G^B}{d\tau} \right) - 2\pi \bar{f} a \cos(2\pi \bar{f} \tau) \right] \right\} - \frac{S}{h} \frac{D_{eff}^{H2O}}{h} F R_{GT} T s_{GT} (\overline{q^-} - \overline{q^+}) \quad (29)$$



где  $\sigma_{eff}^G = 4D_{eff}^{H2O} F \gamma N_0 \left[ 2 \frac{d^- + d^+}{d^- d^+} - \frac{k_B - k_A}{k_A k_B} \right]^{-1}$ ;  $j_G^A + j_T^A = j$ ,  $j_G^B + j_T^B = j$ ;

$$R_{GT} = \left\{ 2 \left[ 2 \frac{d^- + d^+}{d^- d^+} - \frac{k_B - k_A}{k_A k_B} \right]^{-1} \frac{[d^- d^+ + (d^- + d^+) k_B]}{d^- d^+ k_B} - 1 \right\}.$$

Для идеальной системы (отбрасывая входные и внешние сопротивления, пренебрегая процессами на внутренней поверхности) получим классическую форму, формально справедливую для диэлектриков

$$j = \frac{S}{h} \sigma_{eff}^\Sigma a \sin(2\pi \bar{f} \tau) - \frac{S}{h} \epsilon_0 \epsilon_{eff}^\Sigma 2\pi \bar{f} a \cos(2\pi \bar{f} \tau), \quad (30)$$

из которой следует, что амплитуды для активного и реактивного токов равны соответственно

$$I_A = \sigma_{eff}^\Sigma \frac{S}{h} a, \quad I_R = \epsilon_0 \epsilon_{eff}^\Sigma 2\pi \bar{f} \frac{S}{h} a, \quad (31)$$

при этом

$$\sigma_{eff}^\Sigma = \sigma_{eff}^G + \sigma_{eff}^T, \quad \epsilon_{eff}^\Sigma = \epsilon_{eff}^G + \epsilon_{eff}^T. \quad (32)$$

Интересным является вопрос о поверхностных зарядах. Если они присутствуют, то тогда

$$\left( \epsilon_0 \epsilon_{eff}^G \overline{E_{GT}} + \epsilon_0 \epsilon_{eff}^T \overline{E_{TG}} \right) = \overline{q_S}, \quad (33)$$

при этом в силу равенства токов на границах вместо (22) будет иметь место равенство

$$\left( \frac{dN^-}{d\tau} - \frac{dN^+}{d\tau} \right) = \frac{\alpha_T s_{GT}}{\epsilon_0 \epsilon_{eff}^G \Phi} \cdot \frac{d\overline{q_S}}{d\tau}, \quad (34)$$

но тогда необходимо принять, что между токами при гетерогенных реакциях при наличии свободных зарядов возможен скачок

$$TFD_{eff} s_{GT} (\overline{q^+} - \overline{q^-}) = \sigma_{Teff} s_{GT} \overline{E_{GT}} + \frac{s_{GT}}{\epsilon_0 \epsilon_{eff}^G \Phi} \cdot \frac{d\overline{q_S}}{d\tau}, \quad (35)$$

то есть появление поверхностных зарядов и их изменение связано с какой-то несогласованностью в передаче зарядов при прохождении гетерогенных реакций, такая возможность отмечается в [1; 4]. В [2] существование поверхностной проводимости связывается с наличием двойных электрических слоев. Интересно отметить, что это неравенство в токах проявляется в нестационарном случае. Теперь уравнение (29) без учета контактных сопротивлений на электродах можно записать как

$$j_\Sigma = \frac{S}{h} \sigma_{eff}^\Sigma a \sin(2\pi \bar{f} \tau) - \frac{S}{h} \epsilon_0 \epsilon_{eff}^\Sigma 2\pi \bar{f} a \cos(2\pi \bar{f} \tau) - s_{GT} \frac{S}{h} D_{eff}^{H2O} FR_{GT} \left[ T(\overline{q^-} - \overline{q^+}) + \frac{\alpha_G}{\epsilon_0 \epsilon_{eff}^G \Phi} \cdot \frac{d\overline{q_S}}{d\tau} \right]. \quad (36)$$

Из выражения (36) видно, что при нахождении амплитуд реактивного и активного токов необходимо учитывать величину в квадратных скобках, которая может быть представленной как  $B_S \sin(2\pi \bar{f} \tau) + 2\pi \bar{f} B_C \cos(2\pi \bar{f} \tau)$ . Это значит, что процессы, проходящие на гетерогенных поверхностях могут значительно изменять соотношения активных и реактивных токов и, соответственно, тангенс потерь и тангенс фазового сдвига. Как показано выше, для модельной реакции на электродах с увеличением ее скорости  $R_{GT} \rightarrow 0$ , что указывает на возможность изменения влияния этого члена на общую картину при подборе электродов.

Согласно современным представлениям массообмена в поровом пространстве дисперсной среды  $D_{eff} = D \frac{\alpha_G}{\ell_G^2}$ , где  $D$  – молекулярный коэффициент диффузии;

$\ell_G$  – коэффициент извилистости, что приводит суммарный коэффициент эффективной проводимости  $\sigma_{eff}^\Sigma = \sigma_{eff}^G + \sigma_{eff}^T$  при  $\sigma_{eff}^T = 0$  к виду

$$\sigma_{eff}^\Sigma = \alpha_G \frac{\sigma_G}{\ell_G^2}. \quad (37)$$

В расчетах массообменных процессов величина извилистости играет важную роль, поэтому зависимость вида (37) имеет большое значение для определения этой величины. В [1; 5] даны формулы для расчета эффективной проводимости жидкости с непроводящими электрический ток включениями при различных объемных концентрациях этих включений. Приведенные там формулы (Рунге (III.7), Фрике (III.9), Машовца (III.10) в [5]) дают возможность определить извилистость  $\ell_G$ .

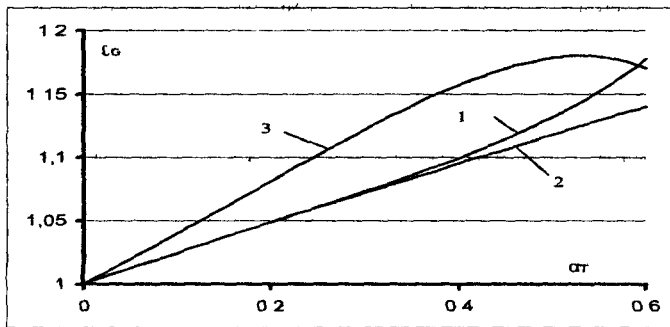


Рис. 1. Изменение извилистости  $\ell_G$  в зависимости от объемной доли дисперсной фазы  $\alpha_T$ : 1 – по формулам (III.7); 2 – (III.9); 3 – (III.10), взятым из [5]

На рис. 1 показаны кривые, получающиеся при расчете по этим формулам. Проведенные нами эксперименты по определению порозности и электропроводности воды с песком и стеклянными шариками с помощью переменного тока с частотой 1000 Гц показали, что для плотной нерегулярной укладки величина  $\ell_G = 1.158$  при  $\alpha_G = 0.446$  (стеклянные шарики) и  $\ell_G = 1.141$  при  $\alpha_G = 0.323$ ,  $\ell_G = 1.058$  при  $\alpha_G = 0.33$  (речной песок), то есть полученные значения извилистости лежат примерно по середине между величинами, получаемыми из приведенных в [5] формул.

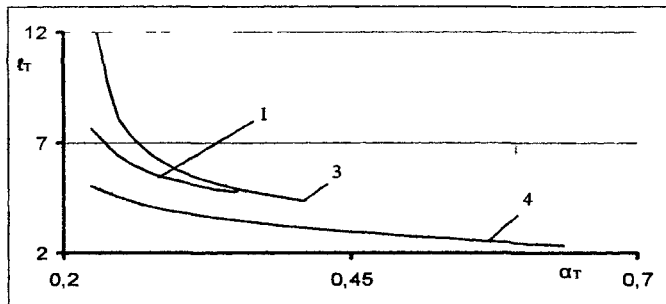


Рис. 2. Изменение извилистости  $\ell_T$  в зависимости от объемной доли дисперсной фазы  $\alpha_T$ : 1 – из экспериментов [6]; 2 – по данным [7] (рис. 5 кривая 1); 3 – [7] (рис. 5 кривая 2)

Вид выражений (32), (37) диктует, что и в общем случае такие параметры как электропроводимость, коэффициент диэлектрической проницаемости и коэффициент теплопроводности для связанных гетерогенных сред без контактных сопротивлений могут быть представлены в виде:

$$\sigma_{eff}^{\Sigma} = (\sigma_{eff}^G + \sigma_{eff}^T) = \frac{\alpha_G}{\ell_G^2} \sigma_G + \frac{\alpha_T}{\ell_T^2} \sigma_T, \quad \varepsilon_{eff}^{\Sigma} = (\varepsilon_{eff}^G + \varepsilon_{eff}^T) = \frac{\alpha_G}{\ell_G^2} \varepsilon_G + \frac{\alpha_T}{\ell_T^2} \varepsilon_T,$$

$$\lambda_{eff}^{\Sigma} = (\lambda_{eff}^G + \lambda_{eff}^T) = \frac{\alpha_G}{\ell_G^2} \lambda_G + \frac{\alpha_T}{\ell_T^2} \lambda_T. \quad (38)$$

Используя результаты экспериментов по эмульгированию мазута [6], а также данные из [7], можно найти из соотношений (38) величины  $\ell_T$  в зависимости от  $\alpha_T$ . Представляя извилистость для жидкости в виде линейной зависимости  $\ell_G = 1 + p\alpha_T$ , где коэффициент  $p$  в соответствии с рис. 1 примем равным 0.3 найдем извилистость для дисперсной фазы ( кривые представлены на рис. 2).

В области примерно до некоторого значения зависимости (38) имеют формальный характер, так как система дисперсных включений может быть несвязной. Согласно фрактальной теории связности [8] для объемных систем она наступает при  $\alpha_T \approx 0,31$  (таблица 1.2, задача узлов). Расчеты по определению  $\ell_T$ , проведенные по таблице 3.2 работы [9] также показали, что разброс в значениях этой величины достаточно большой, хотя порядок такой же, как и на рис. 2. Отличие одних величин от других, возможно, возникает из-за наличия дополнительных контактных сопротивлений. В [9] приведены критические замечания по поводу линейности зависимостей вида (38), однако нам представляется, что для идеальных систем такие зависимости могут быть полезными.

**Выводы.** Полученные зависимости свидетельствуют о сложности рассматриваемых процессов, ввиду многообразия форм гетерогенных включений, в связи с этим попытки электрических измерений и установления электродинамических характеристик сред часто наталкиваются на неоднозначность получаемых параметров. Тем не менее, такие измерения получили широкое распространение, так как при тщательной подготовке могут давать нужные оценки необходимых величин.

В частности, эксперименты, проведенные нами со стеклянными шариками, показали справедливость зависимостей (30), (31). В этих экспериментах определялись проводимость и диэлектрическая проницаемость воды без шариков, а затем плотной засыпки стеклянных шариков в воде. Результаты показаны на рис. 3, 4. В расчетах принималось:  $\alpha_T = 0.387$ ,  $\ell_G = 1.096$ , которые также находились из эксперимента. В расчетах эффективных величин проводимости и диэлектрической постоянной использовались выражения (38) и найденные оценки  $\ell_T$ .

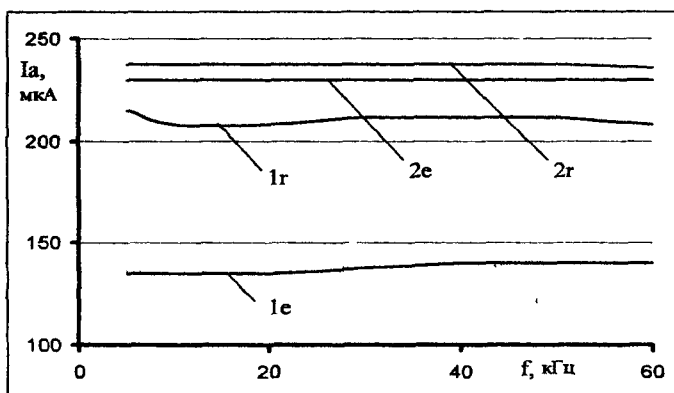


Рис. 3. Амплитуда активного тока в среде вода-стеклянные шарики: 1e, 2e – эксперимент; 1r, 2r – расчет

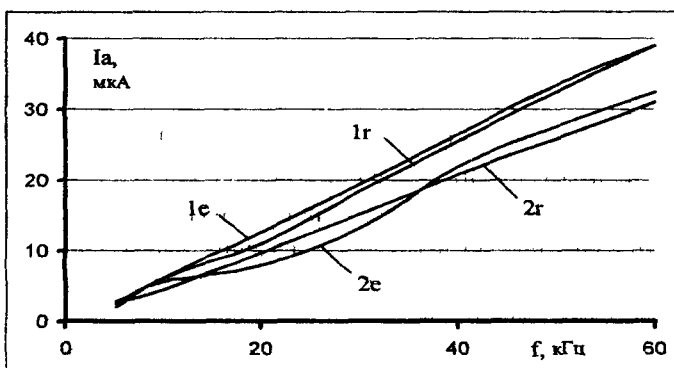


Рис. 4. Амплитуда реактивного тока в среде вода-стеклянные шарики: 1e, 2e – эксперимент; 1r, 2r – расчет

Из литературы известно, что при таких частотах, при которых проводились эксперименты (более килогерца), двойными слоями (одна из составляющих контактных сопротивлений) можно пренебречь, что дает возможность получить оценки величин активных и реактивных токов среды. Графики показывают, что активный ток в соответствии с (30) практически постоянен, хотя в разных экспериментах и отличается один от другого. Реактивный же ток также в соответствии с формулой (30) практически линейно зависит от частоты. Полученные результаты известны в теории диэлектриков, однако с точки зрения теории массообмена в электрохимических ячейках они показывают справедливость математической модели в поровых пространствах дисперсных сред.

## Библиографические ссылки

1. Тареев Б.М. Физика диэлектрических материалов / Б.М. Тареев. – М., 1982 – 320 с.
2. Духин С.С. Диэлектрические явления и двойной слой в дисперсных системах и поли-электролитах / С.С. Духин, В.Н. Шилов. – Киев, 1973. – 203 с.
3. Елисеев В.И. Массообмен в электрохимической ячейке, находящейся в поле переменного напряжения // В.И. Елисеев, В.В. Давидсон // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2010. – Вип. 14, т. 1. – С. 135–145.
4. Поливанов К.М. Теоретические основы электротехники. Часть третья / К.М. Поливанов. – М., 1969. – 352 с.
5. Перепелкин К.Е. Газовые эмульсии / К.Е. Перепелкин, В.С. Матвеев – Л., 1979. – 200 с.
6. Давидсон В.В. Автоматическое регулирование величины водности водомазутных эмульсий / В.В. Давидсон, А.П. Толстопят, Л.А. Флеер // Пробл. высокотемп. техники. – 2002, ДНУ. – С. 49–50.
7. Корягин В.А. Сжигание водотопливных эмульсий и снижение вредных выбросов / В.А. Корягин. – СПб, 1995. – 304 с.
8. Кулак М.И. Фрактальная механика материалов / М.И. Кулак – Мн., 2002. – 304 с.
9. Дульнев Г.Н. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Справочная книга / Г.Н. Дульнев, Ю.П. Заричняк. – Л., 1974. – 264 с.

Надійшла до редакції 08 11 10

УДК 539.3:620.198

В. А. Шевчук

*Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины имени  
Я С Подстригача*

## РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕЛАХ С ТОНКИМИ МНОГОСЛОЙНЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

Розвинуто підхід для наближеного розв'язування задач термопружності для тіл з багатошаровими тонкими покриттями, який ґрунтується на застосуванні математичної моделі з узагальненими граничними умовами термомеханічного спряження тіла з середовищем через покриття. Ці умови дають можливість істотно спростити розрахунок термонапруженого стану системи «тіло-покриття». Ефективність використовуваного підходу показано порівнянням результатів, отриманих на його основі, з точним розв'язком тестової задачі про термонапружений стан циліндра з  $n$ -шаровим покриттям.

*Ключові слова* багатошарові покриття, термопружні напруження, узагальнені умови термопружного спряження

Разработан подход для приближенного решения задач термоупругости для тел с многослойными тонкими покрытиями, основанный на применении математической модели с обобщенными граничными условиями термомеханического сопряжения тела со средой через покрытие. Эти условия дают возможность существенно упростить расчет термонапряженного состояния системы «тело-покрытие». Эффективность использованного подхода показана сравнением результатов, полученных при его использовании, с точным решением тестовой задачи о термонапряженном состоянии цилиндра с  $n$ -слойным покрытием.

*Ключевые слова* многослойные покрытия, термоупругие напряжения, обобщенные условия термоупругого сопряжения.

An approximate approach to the solution of thermoelasticity problems for the bodies having thin multilayered coverings is worked out. It is based on the application of mathematical model with

generalized boundary conditions determined by termomechanical matching of the body with external environment through the coverings. These conditions open the possibility to simplify sufficiently the calculation of thermostresses in the system «body-covering». The efficiency of the used approach is demonstrated by comparison of results, obtained with its application to the results, obtained from exact solution of test problem about thermostress conditions of cyfnder with n-layered coverings.

*Key words* multilayered coverings, thermal stresses, generalized condition of thermoelastic mat-ching

**Введение.** Для защиты элементов конструкций от влияния агрессивной среды используются специальные покрытия, обычно имеющие неоднородные свойства, что связано с условиями их изготовления или функциональными требованиями. Такие покрытия могут иметь кусочно-однородные свойства, то есть являться многослойными.

Обычно расчет термомеханического состояния тел со слоистыми покрытиями связан с формулированием и решением соответствующих задач математической физики для многослойных систем [7; 10; 11; 13; 14].

Точные решения таких задач громоздки и неэффективны для практических целей и обычно используются как эталонные. Поэтому важно разрабатывать приближенные методики, достаточно точные для практических потребностей.

Предложены различные подходы [10; 12; 13], учитывающие специфическую особенность таких систем – малость толщины покрытия в сравнении с толщиной подложки – при расчете температурных напряжений в телах с покрытиями. Один из таких эффективных подходов состоит в моделировании влияния тонкостенных элементов конструкций специальными граничными условиями [4; 5; 8; 9]. Он существенно упрощает решение задач определения термонапряженного состояния конструкций с тонкими покрытиями.

В данной статье обобщение граничных условий для многослойных покрытий [9] получено для случая термоупругости. Вместе с обобщенными граничными условиями для теплопереноса [8] они позволяют формулировать и решать задачи определения температурных напряжений при нестационарных тепловых процессах. Вывод обобщенных граничных условий механического сопряжения тела со средой через тонкое многослойное покрытие проведен на основе применения уравнений теории термоупругости тонких многослойных оболочек [1; 3], использующей априорное предположение о линейной зависимости перемещений по всей толщине покрытия.

Эффективность подхода проиллюстрирована на примере решения тестовой задачи.

**Постановка задачи термоупругости.** Исследуемый объект – тело с многослойным покрытием толщины  $\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i$ , слои которого изготовлены из различных

изотропных материалов. При этом  $n$ -слойное покрытие рассматриваем как тонкую оболочку, отнесенную к триортогональной смешанной системе координат  $(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$ , которые являются соответственно линиями главных кривизн поверхности раздела тело-покрытие и нормалью к ней (рис. 1).

Принимаем, что на границе покрытие-среда задан вектор напряжений

$$\sigma_3^n = \sigma_3^c \quad \text{при} \quad \gamma = \gamma_n = \sum_{i=1}^n \delta_i = \delta, \quad (1)$$

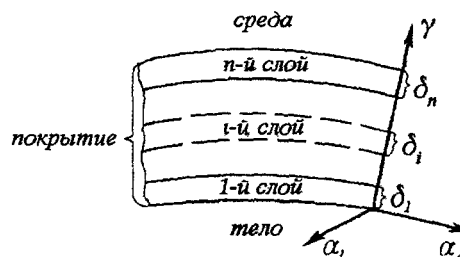


Рис. 1. Схема к постановке задачи

а на поверхностях контакту слоев покpытия и покpытия с телом выполняются условия идеального механического контакту

$$U_i = U_{i-1} \text{ при } \gamma = \gamma_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \delta_j, \quad i = \overline{2, n}, \quad U_1 = U_T \text{ при } \gamma = \gamma_0 = 0, \quad (2)$$

$$\sigma_3^i = \sigma_3^{i-1} \text{ при } \gamma = \gamma_{i-1}, \quad i = \overline{2, n}, \quad \sigma_3^1 = \sigma_3^T \text{ при } \gamma = \gamma_0 = 0, \quad (3)$$

Тут и далее индексы  $i, T$  и  $C$  относятся к  $i$ -му слою покpытия, телу и среде соответственно,  $\sigma_3$  – вектор напряжений, действующий на поверхности  $\gamma = const$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{13}e_1 + \sigma_{23}e_2 + \sigma_{33}e_3$ ;  $e_1, e_2, e_3$  – орты координатного триэдра на базисной поверхности  $S_0$  оболочки;  $\delta_i, U_i$  – толщина и вектор перемещений точек  $i$ -го слоя ( $i = \overline{1, n}$ );  $U_T = u_T e_1 + v_T e_2 + w_T e_3$  – значение вектора перемещений точек тела (подложки) на поверхности контакту с покpытием.

Распределение изменения температуры  $t_i(\alpha_1, \alpha_2, \gamma)$  в  $n$ -слойном покpытии считается заданным. Оно может быть определено по методике, изложенной в [8].

Уравнения равновесия слоистой оболочки при отсутствии массовых сил при учете контактных условий (3) и условия (1) записываются в виде [3]:

$$C\xi = B, \quad (4)$$

$$\xi = [N_1, N_2, N_{12}, N_{21}, Q_1, Q_2, M_1, M_2, M_{12}, M_{21}]^T, \quad B = [q_1, q_2, q_3, m_1, m_2, 0]^T, \\ q_j = \sigma_{j3}^C(1 + \delta k_1)(1 + \delta k_2) - \sigma_{j3}^T \quad j=1,2,3, \quad m_j = \delta \sigma_{j3}^C(1 + \delta k_1)(1 + \delta k_2) \quad j=1,2,$$

где  $C$  – матрица дифференциальных операторов:

$$C = \frac{1}{A_1 A_2} \begin{pmatrix} -\partial_1(A_2(\ )) & A_{1,2} & k_1 A_1 A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & -\partial_2(A_1(\ )) & k_2 A_1 A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_{1,2} & -\partial_1(A_2(\ )) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\partial_2(A_1(\ )) & -A_{2,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -k_1 A_1 A_2 & 0 & -\partial_1(A_2(\ )) & A_1 A_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 A_1 A_2 & -\partial_2(A_1(\ )) & 0 & A_1 A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_1(A_2(\ )) & A_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{2,1} & -\partial_2(A_1(\ )) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A_{1,2} & -\partial_1(A_2(\ )) & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_2(A_1(\ )) & -A_{2,1} & -k_2 & 0 \end{pmatrix}^T;$$

$\xi$  – вектор-столбец усилий и моментов, возникающих в покpытии;  $A_1, A_2$  – параметры Ламе,  $k_1, k_2$  – кривизны координатных линий базисной поверхности  $S_0$ ;  $A_{j,l} = \partial A_j / \partial \alpha_l$ ,  $\partial_j = \partial / \partial \alpha_j$ ,  $j, l = 1, 2$ ; скобки ( ) обозначают расположение оператора в соответствующих выражениях; символ  $T$  – знак транспонирования.

**Обобщенные граничные условия механического сопряжения.** Исключая в уравнениях (4) перерезывающие силы и пренебрегая слагаемыми высшего порядка малости (с учетом  $k_1 \delta, k_2 \delta \ll 1$ ), представим их в трансформированном виде

$$\begin{cases} \sigma_{j3}^T - F_j [N_1, N_2, S, M_1, M_2, H] = \sigma_{j3}^C & j=1,2, \\ \sigma_{33}^T - F_3 [N_1, N_2, S, M_1, M_2, H] = \sigma_{33}^C + \frac{\delta}{A_1 A_2} (\partial_1 (A_2 \sigma_{13}^C) + \partial_2 (A_1 \sigma_{23}^C)), \end{cases} \quad (5)$$

где  $S = N_{12} - k_2 M_{21} = N_{21} - k_1 M_{12}$ ,  $H = (M_{12} + M_{21}) / 2$ ,  $F_j$  – некоторые дифференциальные операторы [9].

Принимая кинематическую гипотезу недеформируемых нормалей для всего пакета  $n$ -слойной оболочки [1] (что обеспечивает, в частности, автоматическое выполнение условий контакта для перемещений (2)), запишем соотношения термоупругости с учетом нормальных поперечных напряжений в виде

$$\theta = K\varepsilon - \theta_t + \theta_q, \quad (6)$$

$$\theta = [N_1, N_2, S, M_1, M_2, H]^T, \quad \theta_t = [N_t, N_t, 0, M_t, M_t, 0]^T,$$

$$\theta_q = [N_q, N_q, 0, M_q, M_q, 0]^T, \quad \varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}]^T,$$

$$N_t = \sum_{i=1}^n \frac{E_i \beta_i}{1 - \nu_i} T_i, \quad M_t = \sum_{i=1}^n \frac{E_i \beta_i}{1 - \nu_i} T_i^*, \quad T_i = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_i d\gamma, \quad T_i^* = \int_{\gamma_{i-1}}^{\gamma_i} t_i \gamma d\gamma,$$

$$N_q = C_1 \sigma_{33}^C + C_2 \sigma_{33}^T, \quad M_q = D_1 \sigma_{33}^C + D_2 \sigma_{33}^T,$$

$$K = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 & G_{21} & G_{22} & 0 \\ G_{12} & G_{11} & 0 & G_{22} & G_{21} & 0 \\ 0 & 0 & G_{13} & 0 & 0 & 2G_{23} \\ G_{21} & G_{22} & 0 & G_{31} & G_{32} & 0 \\ G_{22} & G_{21} & 0 & G_{32} & G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 & 2G_{33} \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} G_{j1} \\ G_{j2} \\ G_{j3} \end{cases} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{1 - \nu_i^2} \begin{cases} 1 \\ \nu_i \\ \frac{1 - \nu_i}{2} \end{cases} (\gamma_i^j - \gamma_{i-1}^j)$$

Тут  $K$  – матрица упругих констант;  $\varepsilon$  – вектор-столбец компонент деформаций базисной поверхности;  $\theta$  – вектор-столбец усилий и моментов в покрытии;  $\theta_q$  – вектор-столбец величин (усилий и моментов), учитывающих нормальные поперечные напряжения в оболочке покрытия (выражения для констант  $C_1, C_2, D_1, D_2$  приведены в [9]);  $\theta_t$  – вектор-столбец величин, учитывающих тепловые деформации в покрытии;  $E_i, \nu_i, \beta_i$  – модуль Юнга, коэффициенты Пуассона и линейного температурного расширения  $i$ -го слоя покрытия ( $i = \overline{1, n}$ ), соответственно.

Подставляя выражения (6) и геометрические соотношения между компонентами деформации отсчетной поверхности подложка-покрытие и перемещениями этой поверхности



$$\varepsilon = \Pi [u_1, v_1, w_1]^T \quad \text{при } \gamma = \gamma_0 = 0, \quad (7)$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{\partial_1(\cdot)}{A_1} & \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2} & k_1 \\ \frac{A_{2,1}}{A_1 A_2} & \frac{\partial_2(\cdot)}{A_2} & k_2 \\ \frac{A_1}{A_2} \partial_2 \frac{(\cdot)}{A_1} & \frac{A_2}{A_1} \partial_1 \frac{(\cdot)}{A_2} & 0 \\ \frac{k_1}{A_1} \partial_1(\cdot) & \frac{k_2 A_{1,2}}{A_1 A_2} & -\frac{1}{A_1} \partial_1 \left( \frac{\partial_1(\cdot)}{A_1} \right) - \frac{A_{1,2}}{A_1 A_2^2} \partial_2(\cdot) \\ \frac{k_1 A_{2,1}}{A_1 A_2} & \frac{k_2}{A_2} \partial_2(\cdot) & -\frac{1}{A_2} \partial_2 \left( \frac{\partial_2(\cdot)}{A_2} \right) - \frac{A_{2,1}}{A_1^2 A_2} \partial_1(\cdot) \\ k_1 \frac{A_1}{A_2} \partial_2 \frac{(\cdot)}{A_1} & k_2 \frac{A_2}{A_1} \partial_1 \frac{(\cdot)}{A_2} & -\frac{1}{A_1 A_2} \left( \partial_1 \partial_2(\cdot) - \frac{A_{1,2}}{A_1} \partial_1(\cdot) - \frac{A_{2,1}}{A_2} \partial_2(\cdot) \right) \end{pmatrix}$$

в уравнения равновесия (5) и учитывая непрерывность перемещений на поверхности тело-покрытие (2), получим соотношения:

$$\begin{cases} \sigma_{j3}^T - \frac{C_2}{A_j} \partial_j \sigma_{33}^T + L_{j1} u_T + L_{j2} v_T + L_{j3} w_T = \sigma_{j3}^C + \frac{C_1}{A_j} \partial_j \sigma_{33}^C - \frac{1}{A_j} \partial_j N_t, \quad j=1,2, \\ (1 - D_2 \Delta) \sigma_{33}^T + L_{31} u_T + L_{32} v_T + L_{33} w_T = (1 + D_1 \Delta) \sigma_{33}^C - \\ - \frac{\delta}{A_1 A_2} \left[ (A_{2,1} + A_2 \partial_1) \sigma_{13}^C + (A_{1,2} + A_1 \partial_2) \sigma_{23}^C \right] - \Delta M_t + (k_1 + k_2) N_t, \end{cases} \quad (8)$$

где  $\Delta = \frac{1}{A_1 A_2} \left( \partial_1 \left( \frac{A_2}{A_1} \partial_1 \right) + \partial_2 \left( \frac{A_1}{A_2} \partial_2 \right) \right)$ ,  $L_{jl}$  – некоторые дифференциальные операторы [9]

Поскольку соотношения (8) связывают компоненты тензора напряжений и вектора перемещений на границе тела с компонентами заданной поверхностной нагрузки, то их можно трактовать как обобщенные граничные условия для механических переменных тела, которые учитывают влияние тепловых деформаций в многослойном покрытии и, таким образом, обобщают граничные условия, полученные в [9]

**Случай отсутствия изгибных деформаций и кручения поверхности раздела «тело-покрытие».** Для частного случая напряженно-деформированного состояния, при котором отсутствуют изгибные деформации и кручение поверхности раздела тело-покрытие ( $\kappa_j = \kappa_2 = \kappa_{j2} = 0$ ), можно получить упрощенный вариант обобщенных граничных условий, содержащих только компоненты тензора напряжений.

В этом случае, в силу непрерывности тангенциальных деформаций вдоль поверхности раздела тело-покрытие ( $\varepsilon_1 = e_{11}^T$ ,  $\varepsilon_2 = e_{22}^T$ ,  $\varepsilon_{12} = 2e_{12}^T$ ), усилия и моменты в покрытии можно выразить только через граничные значения тензора деформации тела

$$\theta = K [e_{11}^T, e_{22}^T, 2e_{12}^T, 0, 0, 0]^T - \theta_t + \theta_q. \quad (9)$$

Подстановка соотношений (9) в уравнения равновесия (5) с учетом соотношений Дюгамеля-Неймана для тела

$$e_{jl} = \frac{1 + \nu_T}{E_T} \sigma_{jl} - \frac{\nu_T}{E_T} \sigma_{ll} \delta_{jl} + \beta_T t \delta_{jl} \quad (10)$$

(где  $\delta_{jl}$  – символ Кронекера,  $E_T$ ,  $\nu_T$ ,  $\beta_T$  – модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного температурного расширения тела) приводит к условиям:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sigma_{j3}^T + p_{j1} \sigma_{11}^T + p_{j2} \sigma_{22}^T + p_{j3} \sigma_{33}^T + p_{j4} \sigma_{12}^T - \frac{G_{11} + G_{12}}{A_j} \beta_T \partial_j t_T = \\ & = \sigma_{j3}^C + \frac{C_1}{A_j} \partial_j \sigma_{33}^C - \frac{1}{A_j} \partial_j N_t \quad j=1,2, \\ & (1 + p_{33}) \sigma_{33}^T + p_{31} \sigma_{11}^T + p_{32} \sigma_{22}^T + p_{34} \sigma_{12}^T - \\ & \quad - (G_{21} + G_{22}) \beta_T \Delta t_T + (G_{11} + G_{12}) \beta_T (k_1 + k_2) t_T = \\ & (1 + D_1 \Delta) \sigma_{33}^C - \frac{\delta}{A_1 A_2} \left[ (A_{2,1} + A_2 \partial_1) \sigma_{13}^C + (A_{1,2} + A_1 \partial_2) \sigma_{23}^C \right] + (k_1 + k_2) N_t, \end{aligned} \right. \quad (11)$$

где  $p_{jl}$  – некоторые дифференциальные операторы [9],  $t_T$  – граничное значение температуры на поверхности раздела «тело-покрытие».

**Определение термонапряженного состояния в покрытии.** После нахождения напряженно-деформированного состояния тела на основе уравнений трехмерной теории упругости и использования одного из вариантов обобщенных граничных условий (8) или (11), интегральные усилия и моменты по всему покрытию могут быть определены соотношениями (6) (при учете (7) и (2)). Таким же образом могут быть вычислены усилия и моменты в каждом из слоев покрытия по формулам:

$$\theta^i = \mathbf{K}_i \boldsymbol{\varepsilon} - \theta_t^i + \theta_q^i \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

$$\theta^i = [N_1^i, N_2^i, S^i, M_1^i, M_2^i, H^i]^T, \quad \theta_t^i = [N_t^i, N_t^i, 0, M_t^i, M_t^i, 0]^T,$$

$$\theta_q^i = [N_q^i, N_q^i, 0, M_q^i, M_q^i, 0]^T, \quad N_t^i = \frac{E_i \beta_i}{1 - \nu_i} T_i, \quad M_t^i = \frac{E_i \beta_i}{1 - \nu_i} T_i^*,$$

$$N_q^i = C_1^i \sigma_{33}^C + C_2^i \sigma_{33}^T, \quad M_q^i = D_1^i \sigma_{33}^C + D_2^i \sigma_{33}^T.$$

Выражения для коэффициентов матрицы  $\mathbf{K}_i$  и констант  $C_1^i$ ,  $C_2^i$ ,  $D_1^i$ ,  $D_2^i$  приведены в [9].

В случае отсутствия изгибных деформаций и кручения поверхности раздела тело-покрытие ( $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_{12} = 0$ ) напряжения в покрытии определяются формулами

$$\sigma_{33}^i(\gamma) = \frac{\sigma_{33}^C + \sigma_{33}^T}{2} - \left( \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{\delta} \right) \left( 3 - \left( 1 - \frac{2\gamma}{\delta} \right)^2 \right) \frac{\sigma_{33}^C - \sigma_{33}^T}{2},$$

$$\sigma'_{jj}(\gamma) = \frac{E_i}{E_T(1-\nu_i^2)} \left[ (1-\nu_i\nu_T)\sigma_{jj}^T + (\nu_i-\nu_T)\sigma_{ii}^T - \nu_T(1+\nu_i)\sigma_{33}^T \right] + \frac{\nu_i}{1-\nu_i}\sigma_{33}^i(\gamma) + \frac{E_i}{1-\nu_i}(\beta_T t_T + \beta_i t_i(\gamma)), \quad (13)$$

$$\sigma'_{12} = \frac{E_i(1+\nu_T)}{E_T(1+\nu_i)}\sigma_{12}^T, \quad j=1,2, \quad l=3-j, \quad 0<\gamma<\delta,$$

которые следуют из представления касательных тангенциальных напряжений в покрытии через деформации, нормальных тангенциальных напряжений – через деформации и нормальные поперечные напряжения согласно [1], использования условий непрерывности тангенциальных деформаций на поверхности раздела тело-покрытие и соотношений Дюгамеля-Неймана.

**Методика решения.** Таким образом, методика определения термонапряженного состояния системы тело-многослойное покрытие состоит из двух этапов:

- 1) решение неклассической краевой задачи для тела с использованием одного из представленных вариантов обобщенных граничных условий;
- 2) определение температурных напряжений в покрытии формулами восстановления через граничные значения компонент тензора напряжений тела, заданную поверхностную нагрузку и с учетом температурной деформации.

**Тестовая задача термоупругости для цилиндра с многослойным покрытием.** Как тестовый пример, рассмотрим задачу определения остаточных напряжений в сплошном цилиндре радиуса  $R$  с  $n$ -слойным покрытием под действием равномерного теплового нагрева  $t_C$ . Считаем, что цилиндр закреплен по торцам от осевых перемещений и отсутствует внешнее нагружение. В этом случае третье обобщенное граничное условие (11) примет вид (первые два удовлетворяются тождественно) при  $r = R$

$$\left(1 - \frac{\nu_T(G_{11} + G_{12})}{RE_T}\right)\sigma_{rr}^T + \frac{G_{12} - \nu_T G_{11}}{RE_T}\sigma_{zz}^T + \frac{G_{11} - \nu_T G_{12}}{RE_T}\sigma_{\theta\theta}^T = \frac{G_\alpha - (G_{11} + G_{12})\beta_T}{R}t_T, \quad (14)$$

где  $t_T$  равно заданному значению изменения температуры  $t_C$ ,  $G_\alpha = \sum_{i=1}^n \frac{E_i \beta_i \delta_i}{1 - \nu_i}$ .

Используя представление для напряжений в виде [6]

$$\sigma_{rr}^T(r) = a + \frac{b}{r^2} - \frac{E_T \beta_T}{(1-\nu_T)r^2} \int_0^r t r dr, \quad \sigma_{\theta\theta}^T(r) = a - \frac{b}{r^2} + \frac{E_T \beta_T}{(1-\nu_T)r^2} \int_0^r t r dr - \frac{E_T \beta_T t}{(1-\nu_T)},$$

учитывая условия  $\sigma_{rr}^T|_{r=0} \neq \infty$  и  $\varepsilon_{zz} \equiv 0$ , соотношения Дюгамеля-Неймана (10) и обобщенное граничное условие (14), в итоге находим приближенное решение задачи в цилиндре

$$\sigma_{rr}^T = \sigma_{\theta\theta}^T = \frac{t_T [G_\alpha - (1 + \nu_T)\beta_T G_{11}]}{Rh}, \quad \sigma_{zz}^T = 2\nu_T \sigma_{rr}^T - E_T \alpha_T t_T, \quad (15)$$

где  $h = 1 + \frac{G_{11}(1 - \nu_T - 2\nu_T^2)}{RE_T}$ .

Подставляя выражения (15) в (13), находим напряжения в покрытии ( $i = \overline{1, n}$ ):

$$\sigma_{rr}^i = \frac{\sigma_{rr}^T}{2} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} - \frac{r-R}{\delta} \right) \left( 3 - \left( 1 - 2 \frac{r-R}{\delta} \right)^2 \right) \right], \tag{16}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^i = \frac{E_i \beta_T t_T}{1 - \nu_i} \left[ \frac{(1 + \nu_T) \left( 1 + \frac{(1 - 2\nu_T) G_\alpha}{RE_T \alpha_T} \right)}{(1 + \nu_i) h} - \frac{\beta_i}{\beta_T} \right] + \frac{\nu_i}{1 - \nu_i} \sigma_{rr}^i, \tag{17}$$

$$\sigma_{zz}^i = \frac{E_i \beta_T t_T}{1 - \nu_i} \left[ \frac{\nu_i (1 + \nu_T) \left( 1 + \frac{(1 - 2\nu_T) G_\alpha}{RE_T \beta_T} \right)}{(1 + \nu_i) h} - \frac{\beta_i}{\beta_T} \right] + \frac{\nu_i}{1 - \nu_i} \sigma_{rr}^i. \tag{18}$$

Точное аналитическое решение данной задачи, полученное аналогично подходу [2], имеет вид для  $0 \leq \rho \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(\rho) &= \frac{\nu_T}{2\lambda_T(1-\nu_T)} [X_1(\rho)(P - \Phi_2(\rho)) + X_2(\rho)\Phi_1(\rho)], \\ \sigma_{\theta\theta}(\rho) &= \frac{\nu_T}{2\lambda_T(1-\nu_T)} [Y_1(\rho)(P - \Phi_2(\rho)) + Y_2(\rho)\Phi_1(\rho)] - \frac{E(\rho)\beta(\rho)\mu(\rho)}{1-\nu(\rho)}, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\sigma_{zz}(\rho) = \frac{\nu_T}{2\lambda_T(1-\nu_T)} [Z_1(\rho)(P - \Phi_2(\rho)) + Z_2(\rho)\Phi_1(\rho)] - \frac{E(\rho)\beta(\rho)\mu(\rho)}{1-\nu(\rho)},$$

$$X_1(\rho) = \frac{\lambda(\rho)}{\nu(\rho)} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n S_+(\rho - \rho_{i-1}) \left[ 1 + (1 - 2\nu(\rho)) \frac{\rho_{i-1}^2}{\rho^2} \right] a_i \right\},$$

$$X_2(\rho) = \frac{\lambda(\rho)}{\nu(\rho)} \left\{ \frac{2\nu(\rho) - 1}{\rho^2} + \sum_{i=1}^n S_+(\rho - \rho_{i-1}) \left[ 1 + (1 - 2\nu(\rho)) \frac{\rho_{i-1}^2}{\rho^2} \right] b_i \right\},$$

$$Y_1(\rho) = \frac{\lambda(\rho)}{\nu(\rho)} \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n S_+(\rho - \rho_{i-1}) \left[ 1 - (1 - 2\nu(\rho)) \frac{\rho_{i-1}^2}{\rho^2} \right] a_i \right\},$$

$$Y_2(\rho) = \frac{\lambda(\rho)}{\nu(\rho)} \left\{ \frac{1 - 2\nu(\rho)}{\rho^2} + \sum_{i=1}^n S_+(\rho - \rho_{i-1}) \left[ 1 - (1 - 2\nu(\rho)) \frac{\rho_{i-1}^2}{\rho^2} \right] b_i \right\},$$

$$Z_1(\rho) = 2\lambda(\rho) \left\{ 1 - \sum_{i=1}^n S_+(\rho - \rho_{i-1}) a_i \right\}, \quad Z_2(\rho) = 2\lambda(\rho) \sum_{i=1}^n S_+(\rho - \rho_{i-1}) b_i,$$

$$\Phi_1(\rho) = t_T \sum_{i=0}^n [S_+(\rho - \rho_{i-1}) - S_+(\rho - \rho_i)] \left\{ \sum_{k=0}^{i-1} \frac{E_k \beta_k}{1 - 2\nu_k} (\rho_k^2 - \rho_{k-1}^2) \left( 1 - \sum_{j=1}^k a_j \right) + \frac{E_i \beta_i}{1 - 2\nu_i} (\rho^2 - \rho_{i-1}^2) \left( 1 - \sum_{j=1}^i a_j \right) \right\}$$

$$\Phi_2(\rho) = t_T \sum_{i=0}^n [S_+(\rho - \rho_{i-1}) - S_+(\rho - \rho_i)] \left\{ \sum_{k=0}^{i-1} \frac{E_k \beta_k}{1 - 2\nu_k} (\rho_k^2 - \rho_{k-1}^2) \sum_{j=1}^k b_j + \frac{E_i \beta_i}{1 - 2\nu_i} (\rho^2 - \rho_{i-1}^2) \sum_{j=1}^i b_j \right\}$$

$$P = \Phi_2(1) - \Phi_1(1) \frac{X_2(1)}{X_1(1)}, \quad \lambda(\rho) = \frac{E(\rho)\nu(\rho)}{(1 + \nu(\rho))(1 - 2\nu(\rho))}, \quad S_+(\rho - \rho_i) = \begin{cases} 0, & \rho \leq \rho_i, \\ 1, & \rho > \rho_i, \end{cases}$$

$$\rho = \frac{r}{R + \delta}, \quad r_i = R + \gamma_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad r_{-1} = 0, \quad E_0 = E_T, \quad \beta_0 = \beta_T, \quad \nu_0 = \nu_T,$$

$$a_i = c_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_j (c_i + d_i \rho_{j-1}^2), \quad b_i = d_i - \sum_{j=1}^{i-1} b_j (c_i + d_i \rho_{j-1}^2),$$

$$c_i = \frac{1}{2(1 - \nu_i)} \left( 1 - \frac{E_{i-1}(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)}{E_i(1 + \nu_{i-1})(1 - 2\nu_{i-1})} \right), \quad d_i = \frac{1 - 2\nu_i}{2(1 - \nu_i)\rho_{i-1}^2} \left( 1 - \frac{E_{i-1}(1 + \nu_i)}{E_i(1 + \nu_{i-1})} \right),$$

$$i = \overline{1, n}.$$

Для количественного сравнения приближенного и точного решений в таблицах 1-3 приведены значения безразмерных межслойных окружных напряжений  $\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta} / (E_T \beta_T t_T)$ , рассчитанных по приближенным формулам (15) и (17) (в верхних строках) и по точным формулам (19) (в нижних строках) в зависимости от относительной толщины покрытия  $\delta / R$  (таблица 1), от относительной жесткости материала покрытия  $\psi = E_1 / E_T$  (таблица 2), от относительного коэффициента температурного расширения материала покрытия  $\omega = \beta_1 / \beta_T$  (таблица 3).

При этом в первом столбце показаны значения напряжений в теле  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}^T = \lim_{r \rightarrow R-0} \sigma_{\theta\theta}^T / (E_T \beta_T t_T)$ , а в следующих - граничные значения  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}^i = \lim_{r \rightarrow R + \delta_i - \delta_i + 0} \sigma_{\theta\theta}^i / (E_T \beta_T t_T)$  в  $i$ -м слое покрытия. При вычислениях принимались следующие значения параметров:  $n = 3, E_1 : E_2 : E_3 = 4 : 15 : 2, \nu_T = 0.3, \nu_1 = 0.2, \nu_2 = 0.35, \nu_3 = 0.4, \delta_1 = \delta_2 = 0.5\delta_3 = 0.25\delta, \beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = 1 : 2 : 4$ .

На основе сравнения приближенного и точного решений этой задачи установлено, что погрешность вычислений определяется лишь отношением толщины покрытия  $\delta$  к радиусу цилиндра  $R$  (не превышая 2.5% при  $\delta / R \leq 0.03$ ) и не зависит от соотношения жесткостных и теплофизических свойств покрытия и подложки.

Таблиця 1

Зависимость контактных напряжений  
от относительной толщины покрытия при  $\psi = 0.4$ ,  $\omega = 0.2$

$\delta / R$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^T$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^1$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^2$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^3$
0.001	$-0.45648 \cdot 10^{-3}$ $-0.45612 \cdot 10^{-3}$	0.44145 0.44145	1.29853 1.29799	0.042648 0.042638
0.010	$-0.45509 \cdot 10^{-2}$ $-0.45155 \cdot 10^{-2}$	0.43954 0.43956	1.29303 1.28762	0.040777 0.040686
0.020	$-0.90713 \cdot 10^{-2}$ $-0.89309 \cdot 10^{-2}$	0.43743 0.43750	1.28696 1.27623	0.038710 0.038558
0.030	$-0.13561 \cdot 10^{-1}$ $-0.13255 \cdot 10^{-1}$	0.43534 0.43548	1.28093 1.26496	0.036658 0.036472
0.050	$-0.22452 \cdot 10^{-1}$ $-0.21599 \cdot 10^{-1}$	0.43119 0.43158	1.26899 1.24825	0.032593 0.032421

Таблиця 2

Зависимость контактных напряжений  
от относительной жесткости материала покрытия при  $\delta / R = 0.01$ ,  $\omega = 0.2$

$\psi$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^T$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^1$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^2$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^3$
0.01	$-0.11415 \cdot 10^{-2}$ $-0.11316 \cdot 10^{-2}$	$0.11012 \cdot 10^{-1}$ $0.11013 \cdot 10^{-1}$	$0.32424 \cdot 10^{-1}$ $0.32288 \cdot 10^{-1}$	$0.10330 \cdot 10^{-2}$ $0.10306 \cdot 10^{-2}$
0.1	$-0.11406 \cdot 10^{-2}$ $-0.11317 \cdot 10^{-2}$	0.11007 0.11007	0.32401 0.32260	$0.10299 \cdot 10^{-1}$ $0.10275 \cdot 10^{-1}$
1	$-0.11320 \cdot 10^{-1}$ $-0.11232 \cdot 10^{-1}$	$0.10952 \cdot 10^1$ $0.10953 \cdot 10^1$	$0.32176 \cdot 10^1$ $0.32042 \cdot 10^1$	$0.99866 \cdot 10^{-1}$ $0.99657 \cdot 10^{-1}$
10	-0.10526 -0.10449	$0.10445 \cdot 10^2$ $0.10450 \cdot 10^2$	$0.30092 \cdot 10^2$ $0.29980 \cdot 10^2$	0.71055 0.71087
100	-0.61850 -0.61568	$0.76760 \cdot 10^3$ $0.76913 \cdot 10^3$	$0.18706 \cdot 10^3$ $0.18675 \cdot 10^3$	$-0.86358 \cdot 10^1$ $-0.85518 \cdot 10^1$

Таблиця 3

Зависимость контактных напряжений от относительного коэффициента  
теплового расширения материала покрытия при  $\delta / R = 0.01$ ,  $\psi = 0.4$

$\omega$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^T$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^1$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^2$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^3$
0.01	$-0.82349 \cdot 10^{-2}$ $-0.81761 \cdot 10^{-2}$	0.53283 0.53285	$0.21650 \cdot 10^1$ $0.21582 \cdot 10^1$	0.29243 0.29210
0.1	$-0.64899 \cdot 10^{-2}$ $-0.64421 \cdot 10^{-2}$	0.48864 0.48866	$0.17520 \cdot 10^1$ $0.17458 \cdot 10^1$	0.17322 0.17301
1	$0.10961 \cdot 10^{-1}$ $0.10897 \cdot 10^{-1}$	$0.46781 \cdot 10^{-1}$ $0.46752 \cdot 10^{-1}$	$-0.23784 \cdot 10^1$ $-0.23780 \cdot 10^1$	$-0.10188 \cdot 10^1$ $-0.10179 \cdot 10^1$
10	0.18547 0.18429	$-0.43718 \cdot 10^1$ $-0.43723 \cdot 10^1$	$-0.43683 \cdot 10^2$ $-0.43617 \cdot 10^2$	$-0.12939 \cdot 10^2$ $-0.12927 \cdot 10^2$
100	$0.19305 \cdot 10^1$ $0.19183 \cdot 10^1$	$-0.48557 \cdot 10^2$ $-0.48563 \cdot 10^2$	$-0.45672 \cdot 10^3$ $-0.45600 \cdot 10^3$	$-0.13214 \cdot 10^3$ $-0.13202 \cdot 10^3$

**Выводы.** На основе полученных обобщенных граничных условий разработана методика расчета температурных напряжений в телах с многослойными тонкими покрытиями. Эта методика имеет такие преимущества:

- 1) существенное упрощение расчета и сокращение вычислительного времени;
- 2) возможность получения относительно-простых аналитических решений практически важных задач, что позволяет давать качественную и количественную оценку механического состояния тел с покрытиями без громоздких вычислений. В то же время полученные обобщенные граничные условия могут использоваться как для аналитического решения (когда это возможно), так и для численного;
- 3) возрастание эффективности данного подхода при уменьшении толщины покрытия в сравнении с прямыми методами, применение которых без предварительных преобразований исходных задач в этом случае может быть осложнено.

### Библиографические ссылки

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М., 1972. – 446 с.
2. Вигак В. М. Температурные напряжения в многослойном кусочно-однородном цилиндре / В. М. Вигак, А. М. Ригин // Матем. методы и физ.-мех. поля. – 1982. – Вып. 15. – С. 63-67.
3. Методы расчета оболочек, т.4. Теория оболочек переменной жесткости / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко. – Киев, 1981. – 544 с.
4. Пелех Б. Л. Приближенный метод решения задач теории упругости для тел с тонкими криволинейными покрытиями / Б. Л. Пелех, Ф. Н. Флейшман // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – № 5. – С. 36-41.
5. Подстригач Я. С., Шевчук П. Р. Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями / Я. С. Подстригач, П. Р. Шевчук // Тепл. напряж. в элем. конструк. – 1967. – Вып. 7. – С. 227-233.
6. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М., 1975. – 576 с.
7. Третьяченко Г. Н. Тепловое и напряженное состояние многослойных покрытий / Г. Н. Третьяченко, В. Г. Барило // Пробл. прочности. – 1993. – № 1. – С. 41-49.
8. Шевчук В. А. Моделирование и расчет теплопереноса в системе тело-многослойное покрытие / В. А. Шевчук // Матер. 5-го Междунар. форума по теплообмену (24-28 мая 2004г.). – CD-ROM. Статья № 3-36. Минск, 10 с.
9. Шевчук В. А. Расчет напряженного состояния тел с многослойными тонкими покрытиями / В. А. Шевчук // Пробл. прочности. – 2000. – № 1. – С. 136-150.
10. Elperin T. Photothermal reliability testing of a multilayer coating-substrate assembly: a theoretical approach / T. Elperin, G. Rudin // J. Electronic Packaging. – 1998. – Vol. 120. – P. 82-88.
11. Nusier S. Q. Transient residual stresses in thermal barrier coatings: analytical and numerical results / S. Q. Nusier, G. M. Newaz // ASME J. Appl. Mech. – 1998. – Vol. 65. – P. 346-353.
12. Savula Ya. H. Heterogeneous mathematical models in numerical analysis of structures / Ya. H. Savula, I. I. Dyyak, V. V. Krevs // Computers and Mathematics with Applications. – 2001. – Vol. 42, iss. 8-9. – P. 1201-1216.
13. Suhir E. An approximate analysis of stresses in multilayered elastic thin films / E. Suhir // ASME J. Appl. Mech. – 1988. – Vol. 55. – P. 143-148.
14. Zhang X. C. Prediction of three-dimensional residual stresses in the multilayer coating-based systems with cylindrical geometry / X. C. Zhang, B. S. Xu, H. D. Wang, Y. Jiang, Y. X. Wu // Composites Science and Technology. – 2006. – Vol. 66. – P. 2249-2256.

Надійшла до редколегії 27.12.10

УДК 669.04

С.И. Гинкул, Ю.В. Подобед  
Донецкий национальный технический университет**РАЗРАБОТКА РЕЖИМОВ НАГРЕВА МЕТАЛЛА ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ  
МАССЕ ЗАГОТОВОК В МЕТОДИЧЕСКОЙ ПЕЧИ**

Методичні нагрівальні печі у зв'язку зі зменшенням кількості металу, що плавиться, працюють не на повну потужність. У багатьох випадках для їх довантаження використовують «купуваний» метал. Такий метал, що поступає з інших заводів, за сортаментом може відрізнитись від того, котрий випускається на даному заводі. Час нагрівання залежить від сортаменту завезених заготовок та їх теплофізичних властивостей. Для скорочення часу на перенастройку нагрівальної печі на роботу з іншим сортаментом і маркою сталі доцільно провести моделювання роботи печі.

*Ключові слова* методична нагрівальна пч, режими нагрівання, моделювання роботи печі

Методические нагревательные печи в связи с сокращением количества выплавляемого металла работают не на полную производительность. Во многих случаях для их загрузки используют «покупной» металл. Металл, поступающий с других заводов, по сортаменту может отличаться от выпускаемого на данном заводе. Время нагрева заготовок зависит от сортамента привезенных заготовок и их теплофизических свойств. Для сокращения времени на перестройку нагревательной печи на работу с другим сортаментом и маркой стали целесообразно выполнить моделирование работы печи.

*Ключевые слова* методическая нагревательная печь, режими нагрєва, моделювання роботи печі

The methodical heating furnaces work with limited output power due to the decreasing of the mass of metal which is put in them for melting. In many cases for their loading the so-called purchased metal is used. Such metal is obtained from different industrial plants and can differ from those one, which is produced at a given plant. It is known that period of heating depends upon the thermophysical properties of delivered metal. In order to reduce the time on reconfiguration of furnace according to different grade of metal it is necessary to perform a proper modeling of a furnace.

*Key words:* methodical furnace, modes of heating, modeling of heating process

**Постановка задачі.** Существоющие нагревательные печи проектировались более 30 лет назад под конкретный сорт металл с основным требованием – обеспечение максимальной производительности. Температурные режимы рассчитывали так же на максимальную производительность. Эксплуатировать печь таким образом экономически целесообразно только в том случае, если её производительность колеблется в узком диапазоне и близка к расчетной.

В современных условиях сокращено количество выплавляемого металла. В имеющихся печах греются заготовки других типоразмеров, используется другое топливо. В связи с этим целесообразно разработать математическую модель и алгоритм, смоделировать режим нагрева заготовок данного сортамента, определить расход топлива на нагрев, удельный расход топлива и удельный расход условного топлива.

**Анализ публикаций по теме исследования.** Конструкциям и расчетам методических печей, а так же их тепловым режимам и моделированию нагрева металла уделено большое внимание в работах [1 – 5]. Расчет степени черноты газов по методике, изложенной в [3], не позволяет автоматизировать процесс определения степени черноты. Степени черноты газов  $H_2O$  и  $CO_2$  необходимо определять по номограммам. Приведенные в [2] аналитические зависимости позволяют разработать



алгоритм расчета степени черноты газов в зависимости от парциального давления, эффективной толщины газового слоя и температуры газов.

Разработка энергосберегающего режима нагрева металла и моделирование нагрева слябов в методических печах выполнено в [4; 5]. В [4] для моделирования нагрева сляба была создана трехмерная геометрическая и конечно-элементная модель сляба, трубы и рейтера, задавались граничные условия теплообмена. При этом считалось, что теплообмен с внешней средой происходит на верхней, нижней и торцевой гранях сляба. Для расчета рационального температурного режима нагрева металла в [5] принялись условия, что минимальные значения температуры уходящих газов и расхода топлива осуществляются при линейном изменении среднemasовой температуры металла в координатах: температура металла и время его нагрева.

**Формулировка целей статьи.** Нагрев заготовок в методических нагревательных печах должен обеспечивать заданное качество нагрева металла (в конце методической зоны температура по толщине заготовки должна превышать температуру пластичности, во избежание возникновения в металле термических напряжений, поскольку в сварочной зоне происходит интенсивный нагрев металла). В конце сварочной зоны температура поверхности металла должна быть равной температуре выдачи металла из печи. Цель работы: разработать математическую модель нагрева металла в методической печи, которая на реально действующей печи позволит рассчитывать режимы нагрева металла при различном сортаменте и любой марке стали, отличающихся от проектных [6]. При использовании различного вида топлива необходимо рассчитать радиационные характеристики продуктов сгорания.

**Основная часть.** Методическая печь является высокотемпературной технологической установкой, предназначенной для нагрева заготовок под прокатку. Конструктивно печь состоит из трех зон – методической, сварочной (верхней и нижней) и томильной. В печи заготовки лежат вплотную друг к другу. В методической и сварочной зонах они перемещаются по глянсажным водоохлаждаемым трубам. В этих зонах имеет место двусторонний несимметричный нагрев металла, поскольку, его интенсивность сверху выше, чем снизу. В томильной зоне металл, лежащий на монолитной подине, греется сверху (выдерживается при постоянной температуре поверхности заготовки). Температурное поле заготовки изменяется по толщине и во времени. Для моделирования нагрева металла в методической печи воспользуемся дифференциальным уравнением теплопроводности, описывающим одномерное температурное поле:

$$c(t)\rho(t)\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial x} \right], \quad (1)$$

где  $\lambda(t)$ ,  $c(t)$ ,  $\rho(t)$  – соответственно коэффициент теплопроводности,  $\frac{Вт}{м К}$ ; теплoемкость,  $\frac{Дж}{кг К}$ ; плотность,  $\frac{кг}{м^3}$ .

За начальные условия принимаем распределение температуры по сечению заготовки в начальный момент времени, то есть при  $\tau = 0$   $t = f(x)$ .

Граничные условия имеют вид:

В методической и сварочной зонах

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial x} &= \alpha_g (t_{zg} - t_{ng}); \\ \text{при } x = l_x \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial x} &= \alpha_n (t_{zn} - t_{nn}); \end{aligned} \quad (2)$$

В томильной зоне металл греется при постоянной температуре поверхности.  
 На рис. 1 приведена схема расположения заготовок по длине печи.

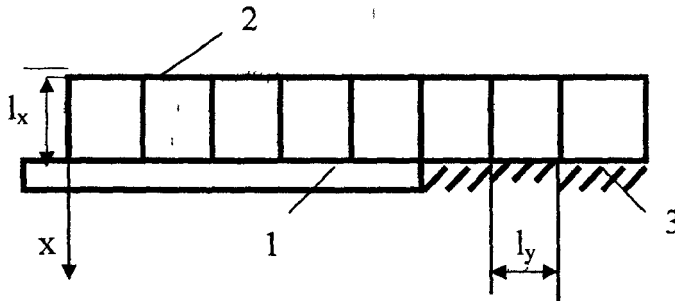


Рис. 1. Схема расположения заготовок в печи:  
 1 – глиссажная труба; 2 – заготовки; 3 – монолитный под.

Различные конфигурации методической и сварочной зон и различная температура продуктов сгорания обуславливает различные значения коэффициентов теплоотдачи излучением [7]. Коэффициенты теплоотдачи излучением при переменной температуре газов по длине зоны определяются по зависимости.

$$\alpha_{изл} = 10^{-8} \cdot C_0 \sqrt{\varepsilon_{np}^n \varepsilon_{np}^k (T_{zn} + T_{mn}) (T_{zn}^2 + T_{mn}^2) (T_{zk} + T_{mk}) (T_{zk}^2 + T_{mk}^2)} \quad (3)$$

При постоянной температуре газов по длине зоны

$$\alpha_{изл} = 10^{-8} \cdot C_0 \varepsilon_{np} \sqrt{(T_g + T_{mn}) (T_g^2 + T_{mn}^2) (T_g + T_{mk}) (T_g^2 + T_{mk}^2)}, \quad (4)$$

где  $C_0$  – коэффициент излучения абсолютно черного тела,  $\frac{Вт}{м^2 \cdot К^4}$ ,  $T_{zn}$ ,  $T_{zk}$  – температура газа в начале и конце методической зоны,  $K$ ;  $T_g$  – температура газа по длине сварочной зоны,  $K$ ,  $T_{mn}$ ,  $T_{mk}$  – температура металла в начале и конце зоны,  $K$ .

Приведенная степень черноты зависит от степени развития кладки, степени черноты металла и продуктов сгорания и определяется по формуле

$$\varepsilon_{np} = \varepsilon_m \frac{\omega + 1 - \varepsilon_2}{\left[ \varepsilon_m + \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_m) \right] \frac{1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_2} + \omega}, \quad (5)$$

где  $\omega$  – степень развития кладки,  $\varepsilon_m, \varepsilon_2$  – соответственно степень черноты металла и продуктов сгорания

Степень черноты продуктов сгорания рассчитывается по формуле [2]

$$\varepsilon_2 = 1 - \exp(-K_2 l_{\text{эф}}), \quad (6)$$

где  $l_{\text{эф}}$  – эффективная длина газа в газовых объемах, м;  $K_2$  – коэффициент поглощения, определяющийся по следующей формуле:

$$K_2 = \left( \frac{0,78 + 1,6 \cdot r_{\text{H}_2\text{O}}}{\sqrt{P_n} l_{\text{эф}}} - 1 \right) \left( 1 - 0,37 \frac{T_2}{1000} \right) \cdot r_n, \quad (7)$$

где  $T_2$  – температура уходящих из камеры газов, К;  $P_n = p r_n$  – суммарное парциальное давление трехатомных газов,  $r_n = r_{\text{CO}_2} r_{\text{H}_2\text{O}}$  – объемные доли трехатомных газов.

Расчет горения топлива выполняется по отдельной процедуре и позволяет определить требуемое количество кислородоносителя для сжигания топлива, выход продуктов сгорания и их состав. Эти данные используются для расчета приведенной черноты системы. Дифференциальное уравнение (1) с условиями однозначности и граничными условиями (2) решалось конечно-разностным методом с использованием метода прогонки [8; 9].

Производительность печи определяется производительностью прокатного стана. При постоянной производительности время нагрева будет зависеть от массы нагреваемых заготовок

$$\tau = \frac{G}{P}, \quad (8)$$

где  $G$  – масса заготовок в печи, кг;  $P$  – производительность печи,  $\frac{\text{кг}}{\text{с}}$ .

Для имеющейся печи при известных длинах зон можно определить время нагрева металла по зонам, воспользовавшись формулой (8).

Для проверки адекватности математической модели в качестве экспериментальных данных были приняты результаты расчета, приведенные в [7]. Рассматривался нагрев слябов размерами  $l_y \times l_x \times l_z$  в методической печи, ширина и длина слябов оставались постоянными  $l_y = 1,4$  м,  $l_z = 10,5$  м, а толщина – варьировалась.

В этом случае количество заготовок в печи оставалось неизменным, а масса заготовок изменялась в зависимости от толщины сляба  $l_x$ . Изменение толщины сляба приводило к изменению и времени нагрева. В табл. 1 приведено изменение времени нагрева в зависимости от толщины сляба.

Таблица 1

Изменение времени нагрева в зависимости от толщины заготовок

Толщина заготовки, м	0,15	0,18	0,21	0,24	0,27
Время нагрева, с	5756	6853	8058	9202	10280

На рис. 2 приведены результаты нагрева заготовки толщиной 240 мм при двух режимах: обычном и предложенном.

Как видно из рис. 2, при предложенном режиме температуры газов в методической зоне меньше, чем температуры газов в этой же зоне при обычном режиме, что обеспечивает нагрев заготовки до температуры, выше которой начинается пластическая деформация.

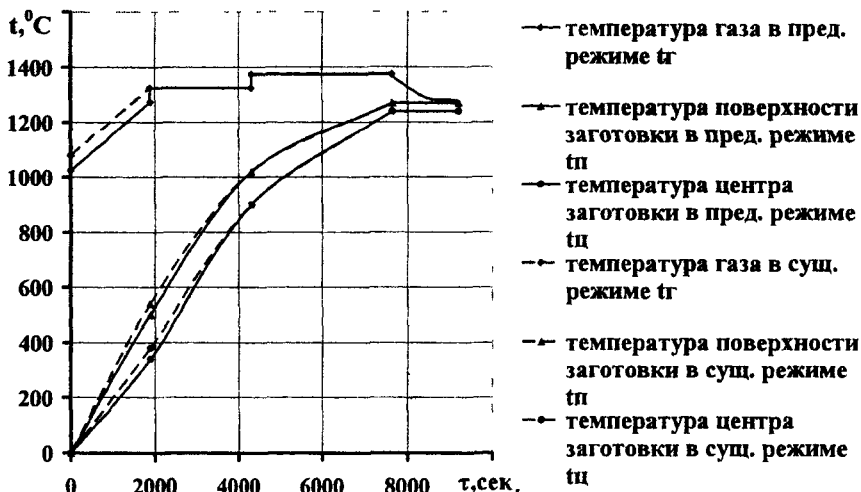


Рис. 2. Сравнение существующего режима с предлагаемым для нагрева заготовки толщиной 240 мм.

Таблица 2

Сравнение экономических показателей работы печи при нагреве заготовок толщиной 240 мм и 210 мм при двух режимах (обычном и рекомендуемом)

Толщина заготовки, мм	Обычный режим			Предлагаемый режим		
	расход топлива, В, м <sup>3</sup> /с	тепловая мощность $M_{\text{общ}} \cdot 10^{-5}$ , Вт	удельный расход условного топлива, $b_{\text{усл}}$ , кг.у.т/т	расход топлива, В, м <sup>3</sup> /с	тепловая мощность $M_{\text{общ}} \cdot 10^{-5}$ , Вт	удельный расход условного топлива, $b_{\text{усл}}$ , кг.у.т/т
210	5,435	1,135	53,63	5,357	1,118	52,86
240	5,451	1,138	53,79	5,288	1,104	52,18

Предлагаемые температуры газов по зонам печи приведены в табл. 3.

Таблица 3

Предлагаемые температуры газов по зонам печи

Толщина заготовки, мм	Температуры по зонам печи					
	методическая		1-ая сварочная		2-ая сварочная	
	начало	конец	начало	конец	начало	Конец
210	1045	1295	1325	1325	1375	1375
240	1025	1275	1325	1325	1375	1375

Большее падение температуры газов по длине методической зоны для заготовки толщиной 240 мм, нежели для заготовки толщиной 210 мм (табл. 2), приводит к лучшим экономическим показателям (табл. 3).

**Выводы.** Таким образом, в результате выполненных исследований разработан алгоритм и выполнено моделирование нагрева металла при постоянной производительности печи и различной толщине заготовки. Изменение толщины заготовки приводит к изменению времени нагрева, что, в соответствии с полученными результатами, может достигаться изменением времени пребывания металла в зонах печи. Это, в свою очередь, приводит к изменению скорости продвижения металла в печи. Изменение температурного режима приводит к изменению экономических показателей работы печи.

В дальнейшем планируется выполнить исследование на реальной методической печи не только при постоянной производительности, но и при переменной.

### **Библиографические ссылки**

1. Ткаченко В.Н. Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов / В.Н. Ткаченко. – К., 2008. – 244 с.
2. Розенгарт Ю.И. Теплообмен и тепловые режимы в промышленных печах / Ю.И. Розенгарт, Б.Б. Потапов, В.М. Ольшанский, А.В. Бородулин. – Киев: Донецк, 1986. – 296 с.
3. Казанцев Е.И. Промышленные печи / Е.И. Казанцев – М., 1975. – 368 с.
4. Найзабеков А.Б. Моделирование нагрева слябов в методических печах различной конструкции / А.Б. Найзабеков, В.А. Талмазан, Н.В. Ахметгалина // *Сталь*. – 2010. – №6. – С. 66–69.
5. Пульпинский В.Б. Разработка и внедрение энергосберегающего режима нагрева металла в проходных печах методического типа / В.Б. Пульпинский // *Электронный журнал энергосервисной компании «Экологические системы»*. 2005. – №5. – С. 31–38.
6. Гинкул С.И. Моделирование нагрева металла при переменной массе заготовок в методической печи / С.И. Гинкул, А.Н. Лебедев, Ю.В. Подобед // *Прикладні проблеми аерогідромеханіки та тепломасопереносу : матер. міжнар. наук. конф.* – Д., 2010. – С. 115–118.
7. Мастрюков Б.С. Теория, конструкции и расчеты металлургических печей, т.2 / Б.С. Мастрюков – М., 1986. – 376 с.
8. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А. Самарский. – М., – 1971. – 552 с.
9. Гинкул С.И. Тепломассообмен / С.И. Гинкул, В.И. Шелудченко, В.В. Кравцов, С.В. Палкина. – Донецк, 2006. – 298 с.

*Надійшла до редколеги 27.12.10*

**УДК 519.6**

Д. В. Евдокимов, Н. В. Поляков, Д. Н. Сербиченко  
*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

### **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА БИОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР**

На базі аналізу математичної моделі тепломасопереносу в процесі метаболізму біологічного об'єкта розвинуто нову асимптотичну модель процесу росту біологічних структур. Запропоноване наближення проілюстроване декількома прикладами чисельного розв'язку.

*Ключові слова* процес метаболізму в біологічному об'єкті, нова математична модель зросту біологічних структур.

На основе анализа математической модели теплопереноса в течение процесса метаболизма биологического объекта развивается новая асимптотическая математическая модель процессов роста биологических структур. Предложенная модель иллюстрируется несколькими примерами численного решения.

*Ключевые слова* процесс метаболизма биологического объекта, новая математическая модель роста биологических структур

On the base of analysis of mathematical models of heat and mass transfer during metabolism processes of biological object, a new asymptotic mathematical model of growth processes of biological structures is developed in the present paper. The proposed approach is illustrated by the several examples of numerical calculations.

*Key words* metabolism process of biological object, a new mathematical model of growth of biological structures

**Общая постановка задачи и её актуальность.** На современном этапе развития биотехнологий, медицины, сельского хозяйства и других областей человеческой деятельности, которые связаны с биологическими процессами, характерно значительное расширение спектра применяемых математических моделей. Математические модели в биологии применяются для моделирования биологических структур в целом, а также отдельных функций и процессов на разных уровнях организации живого: молекулярном, субклеточном, клеточном, органно-системном, организменном и популяционно-биоценозическом. Широкие возможности открывает использование математических моделей для описания физико-химических процессов, которые происходят в живых организмах во время их жизнедеятельности, то есть, для количественного описания процессов метаболизма.

Математические модели процессов метаболизма относятся к наиболее сложным объектам современного математического и численного моделирования. В настоящее время, несмотря на интенсивное развитие биологии, еще не построены полные математические модели, учитывающие индивидуальность живых организмов и позволяющие при сопоставлении результатов моделирования и результатов лабораторного биологического эксперимента добиться количественного соответствия.

Таким образом, математическое моделирование в биологии пока что ориентировано преимущественно на качественное объяснение процессов.

Среди математических моделей биологических процессов [1 – 9] следует особенно выделить математические модели теплообмена, поскольку биологические процессы по своей природе являются физико-химическими процессами, то есть, их характер и режим протекания определяются концентрациями соответствующих химических веществ и физическими условиями, в которых они протекают. Несмотря на некоторые ограничения подобного подхода, который не принимает во внимание биологические особенности объекта, он представляется наиболее предпочтительным путем построения соответствующих математических моделей, поскольку позволяет применять достаточно развитый математический аппарат теории теплообмена.

Проблема роста живых организмов является одной из фундаментальных проблем развития биологии. Помимо описания определенного этапа развития каждого живого организма, эта проблема связана с такими областями теоретической биологии, как старение организмов, регенерация органов и тканей, злокачественный рост, рост популяций и т. д. Знание закономерностей процессов роста чрезвычайно важно для практики, например, сельского хозяйства и медицины. Рост биоло-

гических структур представляет собой сложный процесс, который, как правило, обусловлен химическими, физическими и биологическими факторами.

Истоки исследования авторов. В [10] построены математические модели диффузионного типа для процессов тепломассообмена в биологических структурах, а также путем численного эксперимента показано, что нелинейность, присущая построенным моделям, может привести к гистерезисным явлениям и процессам самоорганизации в биологических структурах. Рассмотренная математическая модель является наиболее общей из математических моделей, использующихся в теоретической биологии и биофизике [2 – 7].

В [7; 8] проблема биологического роста трактуется как задача с подвижной границей, но в этих работах данную проблему рассматривали как задачу Стефана [12], но в [10] показано, что данная задача не является классической задачей Стефана, хотя между ними и существует определенная аналогия. В предшествующих работах также не учитывалось то, что процесс роста является достаточно медленным.

И только в [11] этот факт учтен и предложена асимптотическая по времени математическая модель процесса роста, а также построены аналитические решения для нулевого и первого приближений одномерной по пространству задачи. Благодаря полученному решению удалось исследовать зависимость скорости роста биологической структуры от концентрации питательных веществ. Существенным недостатком [11] являются существенные упрощения, например, рассмотрение ограничено одномерным по пространству случаем, что не представляет интереса с практической точки зрения.

**Цель работы.** Основной целью данной работы является развитие асимптотической математической модели процесса роста биологической структуры и разработка эффективных методов численного расчета процессов роста на основе вычислительной теории потенциала.

Актуальность данной работы обусловлена важностью задач определения темпов роста животных и растений для широкого круга биологических наук.

В основу работы положен асимптотический анализ [13; 14] процессов роста, основанный на идее быстрых (характерное время метаболизма) и медленных (характерное время роста) темпоральных переменных.

Полученные в данной работе результаты имеют принципиальное теоретическое значение для биологии и сельскохозяйственных наук.

**Постановка задачи.** Постановку задачи тепломассообмена в биологической структуре приведем согласно [10]. Рассмотрим область  $D_1$ , заполненную некоторой биологической структурой, в простейшем случае однородной (недифференцированной) клеточной массой. Ограничим дальнейшее рассмотрение случаем однородных клеточных структур. Клеточная масса в области  $D_1$ , представляет собой пористую среду, в которой роль каркаса играют сами клетки, а роль пор – межклеточное пространство. Полагаем, что межклеточное пространство заполнено жидкостью, которая представляет собой сложный раствор питательных веществ и экскрементов клеток. Область  $D_1$  полностью или частично окружена областью  $D_2$ , заполненной аналогичным раствором, но не содержащей клеток. Особенностью процессов в описанной структуре является интенсивный тепломассообмен между каркасом и содержимым пор. Тогда математическая модель процессов тепломассообмена в описанной системе запишется следующим образом:

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} = a_1 \Delta T_1 + q_{T_1}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial C_{i1}}{\partial \tau} = d_{i1} \Delta C_{i1} + q_{i1}, \quad \dots, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \tau} = a_2 \Delta T_2, \quad (3)$$

$$\frac{\partial C_{i2}}{\partial \tau} = d_{i2} \Delta C_{i2}, \quad \dots, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4)$$

где  $T_1$  – температура в области  $D_1$  (здесь и далее используется одностепенная модель, когда температуры внутри клеток и в межклеточном пространстве предполагаются одинаковыми);  $a_1$  – коэффициент температуропроводности пористой среды;  $q_{T_1}$  – источник тепла, связанный с метаболизмом клеток;  $C_{i1}$  – концентрация  $i$ -ой компоненты в порах;  $d_{i1}$  – коэффициент диффузии  $i$ -ой компоненты в пористой среде;  $q_{i1}$  – источник (сток)  $i$ -ой компоненты в пористой среде, связанный с метаболизмом клеток;  $T_2$  – температура в области  $D_2$ ;  $a_2$  – коэффициент температуропроводности раствора;  $C_{i2}$  – концентрация  $i$ -ой компоненты в области  $D_2$ ;  $d_{i2}$  – коэффициент диффузии  $i$ -ой компоненты в области  $D_2$ ;  $N$  – количество компонент, принимающих участие в процессе тепломассообмена;  $\tau$  – время;  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Обозначим общую границу областей  $D_1$  и  $D_2$  через  $\Gamma$ , а другие части границы – через  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , соответственно. На границах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  поставим традиционные граничные условия первого рода:

$$T_1|_{\Gamma_1} = T_{1e}, \quad C_{i1}|_{\Gamma_1} = C_{i1e}, \quad T_2|_{\Gamma_2} = T_{2e}, \quad C_{i2}|_{\Gamma_2} = C_{i2e}, \quad (5)$$

второго рода:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} &= g_{1e}, & d_{i1} \frac{\partial C_{i1}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} &= g_{i1e}, \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} &= g_{2e}, & d_{i2} \frac{\partial C_{i2}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} &= g_{i2e}, \end{aligned} \quad (6)$$

или третьего рода:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} + \alpha_1 (T_1|_{\Gamma_1} - T_{1e}) &= 0, & d_{i1} \frac{\partial C_{i1}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_1} + \alpha_{i1} (C_{i1}|_{\Gamma_1} - C_{i1e}) &= 0, \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} + \alpha_2 (T_2|_{\Gamma_2} - T_{2e}) &= 0, & d_{i2} \frac{\partial C_{i2}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} + \alpha_{i2} (C_{i2}|_{\Gamma_2} - C_{i2e}) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $T_{1e}$ ,  $C_{i1e}$ ,  $T_{2e}$ ,  $C_{i2e}$ ,  $g_{1e}$ ,  $g_{i1e}$ ,  $g_{2e}$ ,  $g_{i2e}$  – суть известные функции; другие коэффициенты в граничных условиях (5) – (7) понимаются в обычном смысле.

Начальные условия будут иметь вид:

$$T_1(0) = T_{10}, \quad T_2(0) = T_{20}, \quad C_{i1}(0) = C_{i10}, \quad C_{i2}(0) = C_{i20} \quad (8)$$

Функция, которая описывает интенсивность метаболизма – количественная оценка метаболизма – есть понятие абстрактное и, как правило, определяется по частоте делений клетки или по росту клеточной массы. Однако, процесс деления



клетки – это процесс дискретный с большим временем запаздывания, а в сложных клеточных структурах важную роль играет предыстория процесса (для случая быстрых изменений условий). То есть, интенсивность метаболизма трудно ввести как однозначную характеристику биологического процесса на основании проведенных измерений. Для количественного описания процесса метаболизма предположим существование функции интенсивности метаболизма  $\omega(T_1, C_{i1})$ , тогда соответствующие источниковые члены имеют величину:

$$q_{i1} = \sigma_i \omega, \quad q_{T_1} = \sigma_T \omega. \quad (9)$$

Функция  $\omega$  определяется экспериментально. Возможные зависимости функции  $\omega$  от температуры и концентраций химических веществ приведены и подробно проанализированы в [10].

Рассмотрим граничные условия на границе  $\Gamma$ . Очевидны условия:

$$T_1|_{\Gamma} = T_2|_{\Gamma}, \quad (10)$$

$$C_{i1}|_{\Gamma} = C_{i2}|_{\Gamma}, \quad (11)$$

которые могут быть дополнены, например, условиями четвертого рода;

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad (12)$$

$$d_{i1} \frac{\partial C_{i1}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = d_{i2} \frac{\partial C_{i2}}{\partial n} \Big|_{\Gamma}. \quad (13)$$

Условия (12), (13) отвечают случаю деления клеток во всей области  $D_1$ . Однако, возможна и ситуация, когда деление клеток происходит только на границе  $\Gamma$ , тогда условие (12) сохраняется, а условие (13) следует заменить на следующее условие [10]:

$$d_{i1} \frac{\partial C_{i1}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - d_{i2} \frac{\partial C_{i2}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \chi_i \frac{\partial n}{\partial \tau}, \quad (14)$$

где  $\frac{\partial n}{\partial \tau}$  – скорость продвижения границы (скорость роста биологической структуры);  $\chi_i$  – коэффициент «расхода»  $i$ -ой компоненты в процессе роста биологической структуры. Отметим, что, несмотря на аналогичную форму, условие (14) не является условием Стефана, так как правая часть условия (14) определяется условиями деления, то есть, температурами и концентрациями и, возможно, их предысториями, таким образом, правая часть условия (14) задана. Это означает, что данная задача аналогична задаче о фазовом переходе с заданной скоростью движения границы фазового перехода, которая определена в рассматриваемой математической модели как функция от интенсивности метаболизма.

Обезразмерим краевую задачу (1) – (5), (8), (10) – (12) и (14). Введем безразмерные температуры и концентрации, полагая наличие двух характерных температур ( $T^*$  и  $T^{**}$ ), и концентраций ( $C_i^*$  и  $C_i^{**}$ ):

$$\theta_1 = \frac{T_1 - T^*}{T^{**} - T^*}, \quad \theta_2 = \frac{T_2 - T^*}{T^{**} - T^*}. \quad (15)$$

$$\bar{C}_{i1} = \frac{C_{i1} - C_i^*}{C_i^{**} - C_i^*}, \quad \bar{C}_{i2} = \frac{C_{i2} - C_i^*}{C_i^{**} - C_i^*}. \quad (16)$$

Концентрації  $C_i^*$  і  $C_i^{**}$  підбиралися таким образом, чтобы охарактеризовать изменение данной компоненты биомассы при регулярном метаболизме.

Введем также характерный линейный размер  $L$ . Тогда дифференциальные уравнения (1) – (4) запишутся в виде:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau_{St}} f_{a1} St = \Delta^* \theta_1 + q_{T1}^*, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \bar{C}_{i1}}{\partial \tau_{St}} f_{d_{i1}} St = \Delta^* \bar{C}_{i1} + q_{i1}^*, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau_{St}} f_{a2} St = \Delta^* \theta_2, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \bar{C}_{i2}}{\partial \tau_{St}} f_{d_{i2}} St = \Delta^* \bar{C}_{i2}, \quad (20)$$

а условие (14) запишется в виде

$$d_{i1}^* \left. \frac{\partial \bar{C}_{i1}}{\partial n^*} \right|_{\Gamma} - d_{i2}^* \left. \frac{\partial \bar{C}_{i2}}{\partial n^*} \right|_{\Gamma} = \chi_i \frac{\partial n^*}{\partial \tau_{St}}, \quad (21)$$

где  $n^* = \frac{n}{L}$ ,  $d_{i1}^* = \frac{d_{i1}}{d}$ ,  $d_{i2}^* = \frac{d_{i2}}{d}$ .

Определяющий процесс диффузии, параметрами которого являются  $d, C_i^*, C_i^{**}$ , выбирался таким образом, чтобы обеспечить как малость числа Стефана, так и малость соответствующих коэффициентов при производных по времени в левых частях уравнений (17) – (20),  $\tau_{St}$  – безразмерное степенное время, которое имеет вид:

$$\tau_{St} = \frac{d(C_i^{**} - C_i^*) \cdot \tau}{\sigma L^2}, \quad (22)$$

$$q_{T1}^* = \frac{q_{T1} L^2}{a_1}, \quad q_{i1}^* = \frac{q_{i1} L^2}{d_{i1}}, \quad (23)$$

$$f_{a1} = \frac{d}{a_1}, \quad f_{a2} = \frac{d}{a_2}, \quad f_{d_{i1}} = \frac{d}{d_{i1}}, \quad f_{d_{i2}} = \frac{d}{d_{i2}}. \quad (24)$$

В качестве числа Стефана будем рассматривать

$$St = \frac{\tau_{St}}{Fo_d}, \quad (25)$$

где  $Fo_d = \frac{\tau \cdot d}{L^2}$ . Значком «\*» в операторе Лапласа обозначено дифференцирование

по безразмерным координатам:

$$X^* = \frac{x}{L}, Y^* = \frac{y}{L}, Z^* = \frac{z}{L}. \tag{26}$$

Обезразмеренные аналоги граничных и начальных условий имеют вид:

$$\theta_1|_{\Gamma_1} = \theta_{1e}, \quad \theta_2|_{\Gamma_2} = \theta_{2e}, \tag{27}$$

$$\bar{C}_{i1}|_{\Gamma_1} = \bar{C}_{i1e}, \quad \bar{C}_{i2}|_{\Gamma_2} = \bar{C}_{i2e}, \tag{28}$$

$$\theta_1(0) = \theta_{10}, \quad \theta_2(0) = \theta_{20}. \tag{29}$$

$$\bar{C}_{i1}(0) = \bar{C}_{i10}, \quad \bar{C}_{i2}(0) = \bar{C}_{i20}. \tag{30}$$

В дальнейшем знаки, указывающие на обезразмеривание, будем опускать.

Применим метод малого параметра согласно [13; 14], тогда температуры  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , и концентрации  $\bar{C}_{i1}$  и  $\bar{C}_{i2}$  будем искать в виде рядов:

$$\theta_1 = \theta_1^0 + \sum_{k=1}^{\infty} St^k \theta_1^k = \theta_1^0 + St^1 \theta_1^1 + St^2 \theta_1^2 + \dots + St^n \theta_1^n + \dots, \tag{31}$$

$$\theta_2 = \theta_2^0 + \sum_{k=1}^{\infty} St^k \theta_2^k = \theta_2^0 + St^1 \theta_2^1 + St^2 \theta_2^2 + \dots + St^n \theta_2^n + \dots,$$

$$\bar{C}_{i1} = \bar{C}_{i1}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} St^k \bar{C}_{i1}^k = \bar{C}_{i1}^0 + St^1 \bar{C}_{i1}^1 + St^2 \bar{C}_{i1}^2 + \dots + St^n \bar{C}_{i1}^n + \dots, \tag{32}$$

$$\bar{C}_{i2} = \bar{C}_{i2}^0 + \sum_{k=1}^{\infty} St^k \bar{C}_{i2}^k = \bar{C}_{i2}^0 + St^1 \bar{C}_{i2}^1 + St^2 \bar{C}_{i2}^2 + \dots + St^n \bar{C}_{i2}^n + \dots$$

Подставив разложения (31) и (32) в уравнения (17) – (20) и приравнявая члены при одинаковых степенях  $St$ , получаем последовательность эллиптических краевых задач:

$$\Delta \theta_1^0 = -q_{T1}, \tag{33}$$

$$\Delta \bar{C}_{i1}^0 = -q_{i1}, \dots, i = \overline{1, N}, \tag{34}$$

$$\Delta \theta_2^0 = 0, \tag{35}$$

$$\Delta \bar{C}_{i2}^0 = 0, \dots, i = \overline{1, N}, \tag{36}$$

при этом в первом приближении получим:

$$\Delta \theta_1^1 = f_{a1} \frac{\partial \theta_1^0}{\partial \tau}, \tag{37}$$

$$\Delta \bar{C}_{i1}^1 = f_{d1} \frac{\partial \bar{C}_{i1}^0}{\partial \tau}, \dots, i = \overline{1, N}, \tag{38}$$

$$\Delta \theta_2^1 = f_{a2} \frac{\partial \theta_2^0}{\partial \tau}, \tag{39}$$

$$\Delta \bar{C}_{i2}^1 = f_{d2} \frac{\partial \bar{C}_{i2}^0}{\partial \tau}, \dots, i = \overline{1, N}, \tag{40}$$

с соответствующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \theta_1|_{\Gamma_1} &= \theta_{1e}, & \bar{C}_{i1}|_{\Gamma_1} &= \bar{C}_{i1e}, & \theta_2|_{\Gamma_2} &= \theta_{2e}, & \bar{C}_{i2}|_{\Gamma_2} &= \bar{C}_{i2e}, \\ \theta_1^1|_{\Gamma_1} &= 0, & \bar{C}_{i1}^1|_{\Gamma_1} &= 0, & \theta_2^1|_{\Gamma_2} &= 0, & \bar{C}_{i2}^1|_{\Gamma_2} &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Рассмотрим отдельно условие продвижение границы роста и ее начальное положение

$$d_{i1} \frac{\partial \bar{C}_{i1}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - d_{i2} \frac{\partial \bar{C}_{i2}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \chi_i V, \quad (42)$$

где  $V = \frac{\partial n}{\partial \tau_{St}}$ . Подставив (32) в выражение (42) и приравнявая члены при одинаковых степенях  $St$ , получим

$$d_{i1} \frac{\partial \bar{C}_{i1}^0}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - d_{i2} \frac{\partial \bar{C}_{i2}^0}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \chi_i V^0, \quad (43)$$

где  $V^0 = \chi \omega (C_i^0)$ ,

$$d_{i1} \frac{\partial \bar{C}_{i1}^1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - d_{i2} \frac{\partial \bar{C}_{i2}^1}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \chi_i V^1, \quad (44)$$

где  $V^1 = \chi \omega (C_i^0 + St \cdot C_i^1) - \chi \omega (C_i^0)$ ,

$$d_{i1} \frac{\partial \bar{C}_{i1}^k}{\partial n} \Big|_{\Gamma} - d_{i2} \frac{\partial \bar{C}_{i2}^k}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \chi_i V^k. \quad (45)$$

Зададим начальное положение границы в виде

$$\Gamma(\tau = 0) = \Gamma_0, \quad (46)$$

где  $\Gamma_0$  – известная кривая.

Чтобы проиллюстрировать предложенный подход, рассмотрим нулевое приближение для плоского случая.

Осуществим в системе (33) – (36) переход к интегральному аналогу [15; 16], в результате получим:

$$\begin{aligned} W(X_0) \theta_1^0(X_0) &= \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma} \phi_0(X, X_0) \frac{\partial \theta_1^0}{\partial n} ds - \\ &- \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma} \theta_1^0 \frac{\partial \phi_0(X, X_0)}{\partial n} ds + \int_{D_1} \phi_0(X, X_0) q_{T_1} dx dy, \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} W(X_0) \bar{C}_{i1}^0(X_0) &= \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma} \phi_0(X, X_0) \frac{\partial \bar{C}_{i1}^0}{\partial n} ds - \\ &- \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma} \bar{C}_{i1}^0 \frac{\partial \phi_0(X, X_0)}{\partial n} ds + \int_{D_1} \phi_0(X, X_0) q_{i1} dx dy, \end{aligned} \quad (48)$$

$$W(X_0)\theta_2^0(X_0) = \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma} \phi_0(X, X_0) \frac{\partial \theta_2^0}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma} \theta_2^0 \frac{\partial \phi_0(X, X_0)}{\partial n} ds, \quad (49)$$

$$W(X_0)\bar{c}_{i2}^0(X_0) = \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma} \phi_0(X, X_0) \frac{\partial \bar{c}_{i2}^0}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma} \bar{c}_{i2}^0 \frac{\partial \phi_0(X, X_0)}{\partial n} ds. \quad (50)$$

где  $W(X_0)$  – локальный коэффициент формы кривой

$$W(X_0) = \begin{cases} 1, X_0 \in D_1, \\ \frac{1}{2}, X_0 \in \Gamma, \\ 0, X_0 \notin D_1, X_0 \notin \Gamma, \end{cases} \quad (51)$$

$\phi_0$  – фундаментальное решение уравнения Лапласа в плоском случае

$$\phi(X, X_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}. \quad (52)$$

Система (47) – (50) сравнительно легко решается традиционным методом граничных элементов [15; 16]. Особенностью решения задачи в данном случае является граничное условие на границе  $\Gamma$ , то есть, границе роста. Если соответствующие потоки на  $\Gamma$  разрываются (поверхностный рост), то значение разрыва берется с предыдущего шага по времени, что соответствует запаздыванию в процессах роста. Что касается источников членов, которые входят в уравнения (47), (48), то во всех следующих расчетах будем считать метаболизм внутри ткани стационарным и постоянным в пространстве, то есть источники будем считать постоянными. Откуда

$$\int_{D_1} \phi_0(X, X_0) q dx dy = q \int_{D_1} \text{div grad } \phi_1 dx dy = q \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} ds, \quad (53)$$

где

$$\Delta \phi_1 = \phi_0, \quad (54)$$

то есть

$$\phi_1 = -\frac{r^2}{8\pi} (\ln r - 1). \quad (55)$$

Применим для численного решения полученных граничных интегральных уравнений метод граничных элементов, для чего поделим кривую, которая ограничивает область решения на части, таким образом, чтобы на каждой из них были заданы  $\theta$  или  $\frac{\partial \theta}{\partial n}$  и  $C$  или  $\frac{\partial C}{\partial n}$ . Положим  $\theta$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial n}$ ,  $C$  и  $\frac{\partial C}{\partial n}$  на этих участках постоянными. Вынося их из-под знака интеграла, и записывая (47) – (50) для каждого участка кривой, получаем систему  $N$  уравнений, которая является дискретным аналогом (47) – (50) и решается любым методом решения систем линейных алгебраических уравнений.

Анализ полученных результатов. Скорость роста биологического объекта зависит не только от характера роста, но и от граничных условий. Если на внешней границе окружающей среды заданы концентрации питательного вещества, то по мере приближения границы растущей области к внешней границе окружающей среды возрастает концентрация питательного вещества на границе биологической

структури, и скорость роста, соответственно, возрастает. С другой стороны, если на внешней границе задан поток питательного вещества, то по мере роста увеличивается потребление питательного вещества выросшей биологической структурой, и концентрация питательного вещества на границе уменьшается, то есть, соответственно уменьшается и скорость роста.

На рис. 1, 2 показаны численные решения задач роста в нулевом приближении для простых колоний одноклеточных организмов. Хорошо видно, что рост биологической структуры направлен в сторону наибольшей концентрации питательного вещества.

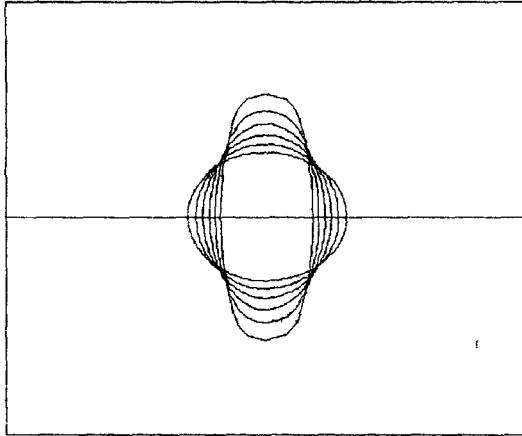


Рис. 1. Рост биологической структуры, изначально круглой, если питательные вещества подаются сверху и снизу

Таблица 1

Масса биологической структуры, рост которой показан на рис. 1.

Моменты времени	Масса биологической структуры
0	0,28378030
1	0,28792960
2	0,29541710
3	0,30700770
4	0,32328381
5	0,34431560
6	0,37013320
7	0,40161840

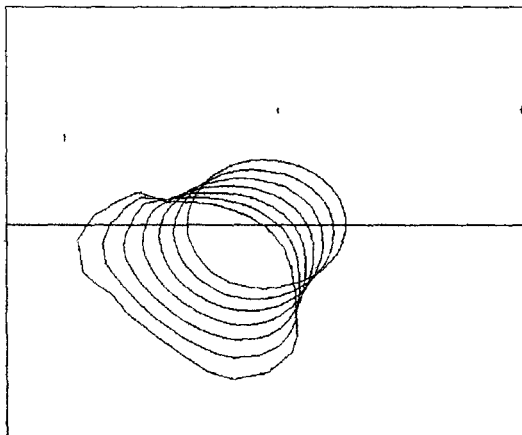


Рис. 2. Рост биологической структуры, изначально круглой, питательные вещества подаются слева и снизу

Масса биологической структуры, рост которой показан на рис. 2

Моменты времени	Масса биологической структуры
0	0,28751980
1	0,30294060
2	0,32969960
3	0,36981910
4	0,42709790
5	0,50863440
6	0,63095590

Неустойчивость границ биологических объектов достаточно часто наблюдается в биологии. Зачастую неустойчивость роста связана с негативными явлениями эволюции биологической структуры, например, возникновением и ростом опухолей. Рассмотрим вопрос о механизме неустойчивости роста биологической структуры в рамках модели поверхностного роста. Разумеется, здесь и далее под неустойчивостью процесса роста будем понимать не общеизвестную неустойчивость, связанную с возникновением катастроф, а просто явление увеличения скорости роста по мере процесса роста, не доводя рассмотрение до момента возникновения катастрофы, даже если таковая возможна, поскольку это нетипично для роста биологических структур.

В плоском случае подобная неустойчивость имеет место при задании на внешних границах окружающей среды постоянной концентрации питательного вещества.

В целом же, причиной неустойчивости роста с биологической точки зрения является увеличение скорости роста по мере приближения к источнику питательных веществ

На рис.3, 4 показан неустойчивый рост биологической структуры ускоренного роста с деградацией ткани.

В заключение хотелось бы отметить, что для многокомпонентных систем характер роста может оказаться намного сложнее, и это может как усилить, так и ослабить неустойчивость, но эти вопросы выходят далеко за рамки интересов настоящей работы.

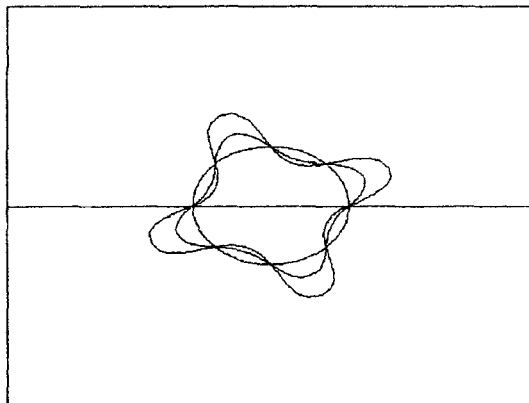
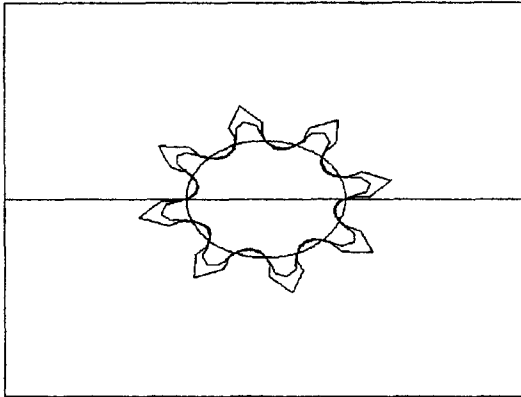
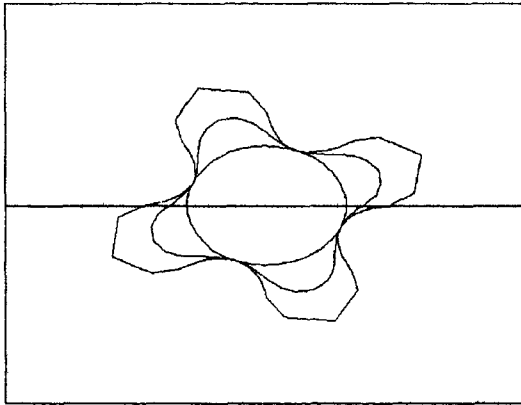


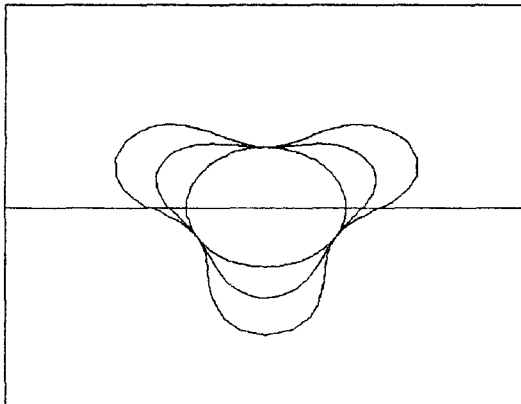
Рис. 3. Неустойчивая эволюция биологической структуры, изначально была (четыре зоны ускоренного роста)



**Рис. 4. Неустойчивая эволюция биологической структуры, изначально круглой (восемь зон ускоренного роста)**



**Рис. 5. Неустойчивая эволюция биологической структуры, изначально круглой (четыре зоны ускоренного роста) без деградации биологической ткани**



**Рис. 6. Неустойчивая эволюция биологической структуры, изначально круглой (три зоны ускоренного роста) без деградации биологической ткани**

**Выводы.** Основным результатом работы следует считать разработку усовершенствованной асимптотической по времени математической модели процесса роста биологической структуры и разработанный алгоритм для численного расчета процессов роста.



Безусловным достоинством предложенной модели является возможность рассчитывать медленные по времени процессы роста биологической структуры. Достоинством предложенного алгоритма является использование метода граничных элементов в областях с подвижными границами, что обеспечивает высокую точность расчета. Оба указанных достоинства обусловили высокую эффективность данного подхода, который проиллюстрирован несколькими примерами численных расчетов.

Основным недостатком работы является то, при построении модели не учитывалась генетика, особенности и индивидуальные свойства структур биологических объектов.

Полученные результаты процесса роста биологических структур имеют большое значение в развитии теоретической биологии и биотехнологий.

Перспективы дальнейших исследований в данной области совершенно очевидны: с одной стороны, это совершенствование моделей роста биологических структур с учетом применения более сложных условий роста; с другой стороны, это применение полученных математических и численных моделей в биологических и сельскохозяйственных науках.

### Библиографические ссылки

1. Биохимия злокачественного роста : Сборник. – М., 1965. – 350 с.
2. Теоретическая и математическая биология : Сб. науч. трудов. – М., 1968. – 448 с.
3. Бейли Н. Математика в биологии и медицине / Н. Бейли. – М., 1970. – 326 с.
4. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях / Дж. Марри. – М., 1983. – 398 с.
5. Рубин А.Б. Биофизика : в 2 томах. Т.1. Теоретическая биофизика / А.Б. Рубин. – М., 2004. – 448 с.
6. Рубин А.Б. Биофизика. В 2 томах. Т.2. Биофизика клеточных процессов / А.Б. Рубин. – М., 2004. – 469 с.
7. Рубин А.Б. Кинетика биологических процессов / А.Б. Рубин, Н.Ф. Пытьева, Г.Ю. Ризниченко. – М., 1987. – 304 с.
8. Friedman A. Free boundary problems in science and technology / A. Friedman // Notices of Amer. Math. Society. – 2000. – V. 47, № 8. – P. 854 – 861.
9. Гленсдорф П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуации / П. Гленсдорф, И. Пригожин. – М., 1973. – 420 с.
10. Евдокимов Д.В. Математические модели процессов теплообмена в ходе метаболизма биологических структур / Д.В. Евдокимов, А.А. Кочубей, Т.Э. Смоленская // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д., 2005. – С. 100–115.
11. Андросова М.О. Применение асимптотического анализа для расчета поверхностного роста биологической структуры / М.О. Андросова, Д.В. Евдокимов, Н.В. Поляков и др. // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Д., 2007. – С. 50–58.
12. Рубинштейн Д.И. Проблема Стефана / Д.И. Рубинштейн. – Рига, 1967. – 412 с.
13. Митропольский Ю.А. Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных / Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеев. – К., 1968. – 255 с.
14. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н. Моисеев. – М., 1981. – 400 с.
15. Бенерджи П. Метод граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М., 1984. – 494 с.
16. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел. – М., 1987. – 524 с.

УДК 539.3

Д.В. Терещенко, В.В. Лобода

*Дніпропетровський національний університет імені О. Гончара***ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ИДЕНТИФИКАЦИИ ТРЕЩИНЫ  
НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ МАТЕРИАЛОВ**

Розглянуто задачу визначення наявності та місця розташування тріщини на границі поділу двох ізотропних однорідних матеріалів. Розроблено підхід, заснований на збудженні конструкції за допомогою динамічно прикладеної зосередженої сили і співставленні інтегральних характеристик поздовжніх деформацій для еталонного і досліджуваного зразків. Вказано можливий варіант знаходження розміру тріщини.

*Ключові слова* тріщина, поздовжні деформації, ідентифікація, еталонний і досліджуваний зразки

Рассмотрена задача определения наличия и местоположения трещины на границе раздела двух изотропных однородных материалов. Выработан подход, основанный на возмущении конструкции с помощью динамически приложенной сосредоточенной силы и сопоставлении интегральных характеристик продольных деформаций для эталонного и исследуемого образцов. Указан возможный вариант нахождения размера трещины.

*Ключевые слова* трещина, продольные деформации, идентификация, эталонный и исследуемый образцы

The problem of definition of presence and crack site on the interface of two isotropic homogeneous materials is considered. The approach is based on indignation of a construction by means of dynamically applied concentrated force and comparison of integral characteristics of the longitudinal strains for reference and investigated samples. The possible variant of definition of the size of a crack is considered as well.

*Key words* crack, longitudinal strains, identification, reference and investigated samples

**Введение.** Разработка эффективных, надежных и достаточно дешевых методов диагностики технического состояния сложных механических систем – одна из важных проблем современного машиностроения. Особое место среди таких методов занимают методы неразрушающего контроля. Они основываются на наблюдении, регистрации и анализе результатов взаимодействия физических полей или веществ с объектом контроля, причем характер этого взаимодействия зависит от самого объекта [1]. Универсального метода неразрушающего контроля не существует, то есть, каждый отдельно взятый метод решает ограниченный круг задач технического контроля.

Часто дефекты возникают на границе соединения различных материалов, поэтому задача дифракции упругих волн на конечной трещине, образованной на плоской границе раздела двух упругих материалов – является важной для изучения физико-механических эффектов, по которым можно идентифицировать трещину.

Эту задачу детально исследовали, используя различные численные и аналитические методы, большинство из которых основывались на методе интегральных уравнений. Чаще всего рассматривались случаи, когда трещина располагалась в однородной среде при различных длинах зондирующих волн [2 – 4]. Проанализировані [5 – 7] рішення задач дифракції сдвигової SH-волни на тріщині, розположеній на плоскій границі розділа двох ізотропних однорідних матеріалів. В [8] отримано розподілення дифрагированного поля перемещений в зоні излучения для широкого частотного діапазона SH-волни, розсіяної кінцевою тріщиною на границі розділа матеріалів, при різних кутах зондирования, пропонується спосіб

нахождения размеров трещины, который базируется на изучении минимумов модуля поля перемещений в окрестности критичных углов.

**Постановка задачи.** Рассмотрим двумерную задачу для шарнирно-опертой балки длиной  $L$  (рис. 1). Балка состоит из двух однородных изотропных прямоугольников с константами Ляме  $\lambda_1, \mu_1$  и  $\lambda_2, \mu_2$  и толщинами слоев  $d_1, d_2$ , соответственно. Слои соединены вдоль общего прямолинейного отрезка  $\Gamma$ . На границе соединения имеется трещина, длиной  $2c$ , положение и длина которой неизвестны. Требуется определить наличие, местоположение и размеры указанной трещины.

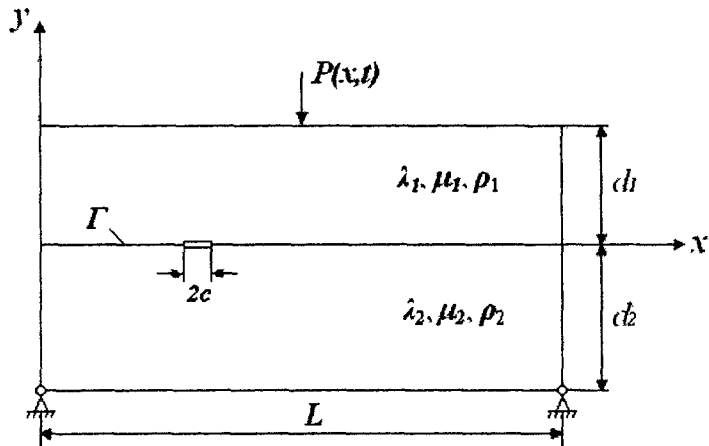


Рис.1. Схема к постановке задачи

Для определения этих характеристик к верхней грани балки приложим поперечную ударную сосредоточенную нагрузку  $P(x,t)$ . Эта нагрузка вызывает в теле упругие продольные и поперечные волны. На отрезке  $\Gamma$  полагается полное сцепление материалов, то есть, имеет место непрерывность перемещений и напряжений. Считается, что берега трещины деформируются без взаимного контакта.

Будем находить волновое возмущение на нижней грани балки. Составляя далее полученные результаты с аналогичными результатами для эталонного тела (этой же биматериальной балки, но без трещины), можно сделать вывод о местонахождении трещины и ее размере.

В математическом плане решение данной задачи для каждой подобласти сводится к решению волновых уравнений [9]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\Phi(x, y, t), \psi(x, y, t)$  – динамические потенциалы, которые связаны с вектором перемещений  $U$  следующим образом

$$U = \text{grad } \Phi + \text{rot } \psi,$$

$c_1, c_2$  – скорость распространения продольной и поперечной волны, соответственно, которые определяются как

$$c_1 = \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}, \quad c_2 = \left( \frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2},$$

где  $\lambda, \mu$  – постоянные Ляме;  $\rho$  – плотность материала.

Граничные условия имеют вид:

$$u_x(0, -d_2, t) = 0, \quad u_y(0, -d_2, t) = 0, \quad u_x(L, -d_2, t) = 0, \quad u_y(L, -d_2, t) = 0,$$

$$\sigma_{xx}(x, d_1, t) = -P(x, t) = -p(t) \cdot \delta(x - x^*),$$

$$\text{где } \delta - \text{дельта функция Дирака; } p(t) = \begin{cases} p \cdot t / t_1, & 0 \leq t \leq t_1 \\ p \cdot (-t / t_1 + t_2), & t_1 < t \leq t_2 \\ 0, & t > t_2 \end{cases};$$

$p, t_1, t_2$  – некоторые постоянные, определяющие характер динамического нагружения.

Касательное напряжение на верхней грани, а также нормальные и касательные напряжения на оставшихся участках границы равны 0.

Условия на линии раздела материалов имеют вид:

– граничные условия на поверхности трещины:

$$\tau_{xy}(x, \pm 0, t) = 0, \quad \sigma_{xx}(x, \pm 0, t) = 0;$$

– условия сопряжения на плоской границе раздела на поверхности трещины:

$$u_x(x, +0, t) - u_x(x, -0, t) = 0, \quad u_y(x, +0, t) - u_y(x, -0, t) = 0,$$

$$\tau_{xy}(x, +0, t) - \tau_{xy}(x, -0, t) = 0, \quad \sigma_{xx}(x, +0, t) - \sigma_{xx}(x, -0, t) = 0.$$

Потенциалы  $\Phi$  и  $\psi$  в случае плоской деформации связаны с перемещениями и напряжениями следующими соотношениями:

$$u_x = \partial\Phi / \partial x + \partial\psi / \partial y, \quad u_y = \partial\Phi / \partial y - \partial\psi / \partial x,$$

$$\sigma_{xx} = 2\mu \left( \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \right) + \frac{\lambda}{c_1^2} \ddot{\Phi}, \quad \sigma_{xy} = \mu \left( 2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right).$$

**Метод решения.** Данная математическая модель была реализована в пакете конечно-элементного моделирования. Рассмотрим использование метода конечных элементов на примере первого из волновых уравнений (1)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \frac{1}{c_j^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0.$$

В некоторый фиксированный момент времени производные от функции  $\Phi$  по времени могут рассматриваться как заданные функции координат [10]. Для этого момента времени задача аналогична задаче статики.

После конечно-элементной дискретизации этого уравнения для пространственных переменных, при том, что функция  $\Phi$  определена для каждого элемента в обычной форме

$$\Phi = [N_i, N_j, \dots] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \vdots \end{Bmatrix} = [N] \{\Phi\}^e,$$

где  $N_i, N_j, \dots$  – функции формы,  $\Phi_i, \Phi_j, \dots$  – узловые параметры [11], получаем обычную форму определяющего уравнения

$$[H]\{\Phi\} + \{F\} = 0 . \quad (2)$$

Вклад каждого элемента в приведенные выше матрицы жесткости  $[H]$  и сил  $\{F\}$  определяется соотношениями:

$$H_{ij} = \sum h_{ij}^e , \quad (3)$$

$$h_{ij}^e = \int_{S^e} \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right\} dx dy , \quad (4)$$

$$\{F\} = \sum \{F\}^e ,$$

$$\{F\}^e = \left( \int_{S^e} [N]^T \frac{1}{c^2} [N] dS \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\Phi\}^e .$$

Записывая (2) в окончательной форме определяющих уравнений, получаем следующее матричное дифференциальное уравнение

$$[H]\{\Phi\} + [G] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\Phi\} = 0 ,$$

в котором все матрицы составляются по стандартному правилу для каждого элемента согласно соотношениям (3), (4) и

$$g_{ij}^e = \frac{1}{c^2} \int_{S^e} N_i N_j dS .$$

Граничные условия задаются в каждый момент времени. Аналогично применяется метод конечных элементов для второго волнового уравнения (1).

В ходе решения задачи выработан алгоритм нахождения местоположения трещины. Алгоритм имеет итерационный характер и заключается в следующем.

Длина балки  $[a_j; b_j]$  делится пополам точкой приложения сосредоточенной силы  $x^* = (a_1 + b_1) / 2$ . Затем вычисляются интегральные характеристики продольных деформаций слева ( $S_{1k}$ ) и справа ( $S_{2k}$ ) от приложенной сосредоточенной силы:

$$S_{1k} = \int_{a_k}^{x^*} \left| e_{xx}(x) - e_{xx}^*(x) \right| dx ,$$

$$S_{2k} = \int_{x^*}^{b_k} \left| e_{xx}(x) - e_{xx}^*(x) \right| dx .$$

Здесь  $k$  – номер итерации;  $e_{xx}(x)$  – распределение продольных деформаций на нижней грани балки без трещины;  $e_{xx}^*(x)$  – это же распределение, но для балки с трещиной. Интегральная характеристика вычисляется в некоторый момент времени  $t^*$ , за которое упругая волна от верхней грани балки доходит до нижней

$$t^* \geq (d_1 + d_2) / c_1 .$$

Для последующего анализа выбирается отрезок  $[a_2; b_2]$  – та половина  $[a_1; b_1]$ , для которой интегральная характеристика продольных деформаций оказалась больше.

Далее процесс продолжается, промежуток  $[a_2; b_2]$  делится пополам точкой приложения сосредоточенной силы –  $x^* = (a_2 + b_2) / 2$  и так далее.

Процесс нахождения местоположения трещины заканчивается, когда  $|b_k - a_k| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – некоторая малая величина или когда  $S_{1k} = S_{2k}$

Таким образом, в конце процесса точка приложения силы окажется строго над серединой трещины. А значит, местоположение трещины будет установлено

**Результаты численного анализа.** Приняв следующие значения параметров.

$L=1\text{ м}$ ,  $d_1=0\text{ м}$ ,  $d_2=0\text{ 15 м}$ ,  $2c=0\text{ 05 м}$ ,  $\lambda_1=7\text{ 4442 } 10^{10}\text{ Н/м}^2$ ,  $\mu_1=8\text{ 0645 } 10^{10}\text{ Н/м}^2$ ,  $\lambda_2=3\text{ 1426 } 10^{10}\text{ Н/м}^2$ ,  $\mu_2=5\text{ 9859 } 10^9$ ,  $\rho_1=7850\text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2=11340\text{ кг/м}^3$ ,  $p=500\text{ Н}$ ,  $t_1=2\text{ } 10^{-5}\text{ с}$ ,  $t_2=4\text{ } 10^{-5}\text{ с}$ , рассмотрим пример нахождения местоположения трещины. Трещина находится на расстоянии  $0\text{ 2 м}$  от левого края балки.

На рис. 2 показано распределение продольных деформаций на нижней грани балки по длине балки в момент времени  $t^* = 2\text{ 4 } 10^{-4}\text{ с}$  для первой итерации при  $x^* = 0\text{ 5 м}$

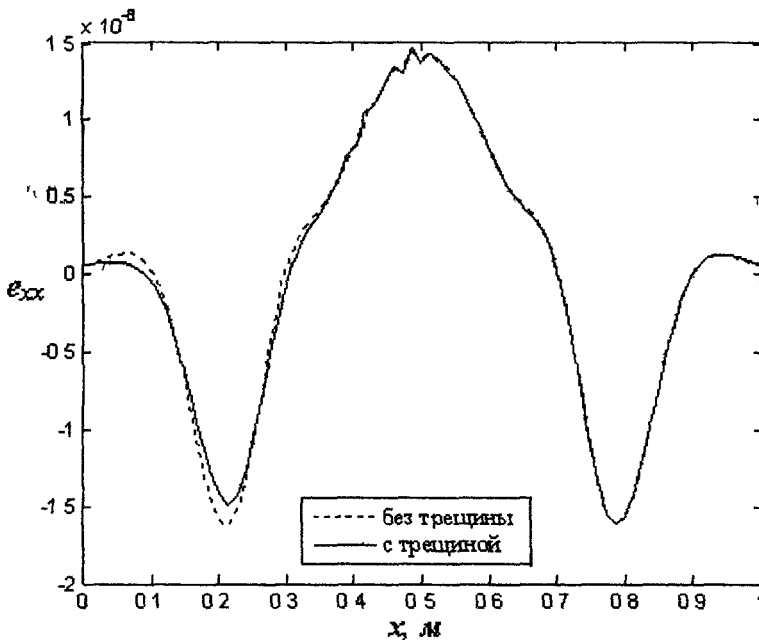


Рис. 2 Распределение продольных деформаций для первой итерации

На рис. 3,4 показано распределение продольных деформаций – для второй итерации при  $x^* = 0\text{ 25 м}$  и десятой итераций при  $x^* = 0\text{ 2002 м}$  метода соответственно в момент времени  $t^* = 1\text{ 4 } 10^{-4}\text{ с}$

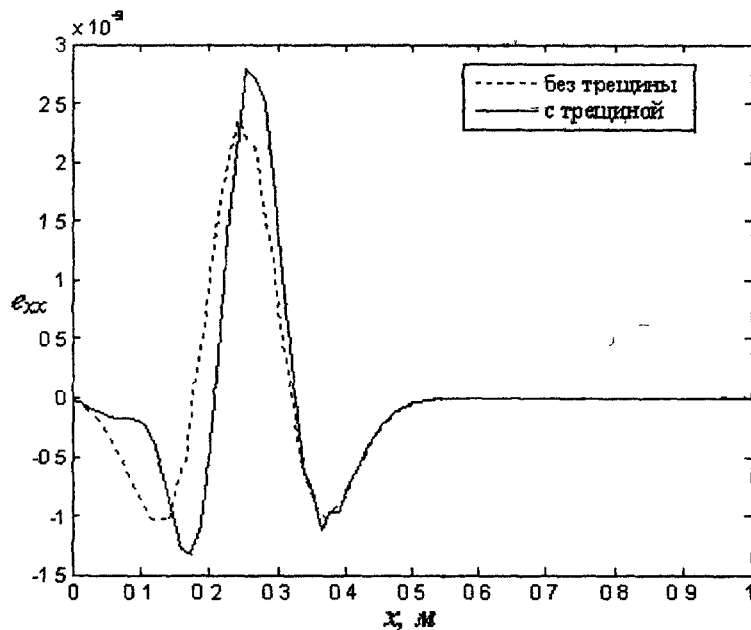


Рис. 3. Распределение продольных деформаций для второй итерации

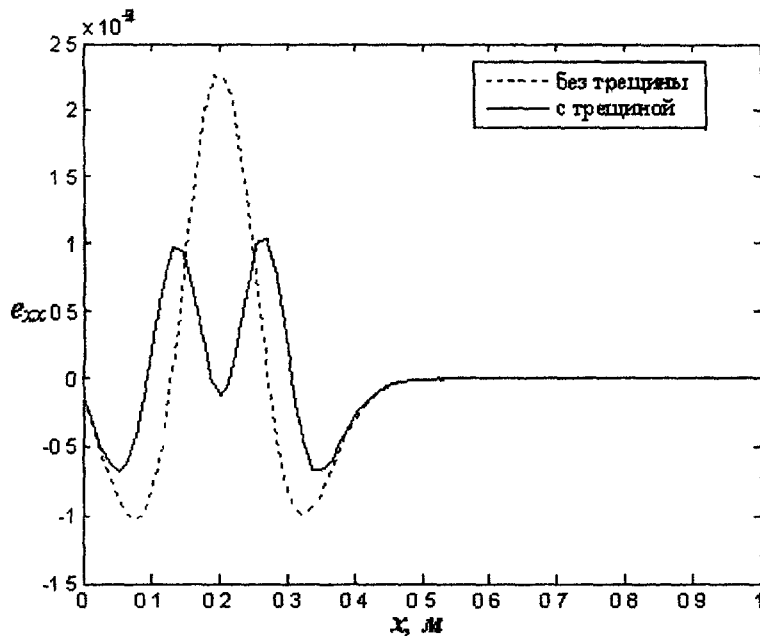


Рис. 4. Распределение продольных деформаций для десятой итерации

В табл. 1 приведены значения  $S_{1k}$  и  $S_{2k}$  для десяти итераций процесса.

Таким образом, местоположение трещины установлено. Аналогичные расчеты были проведены для различных длин трещин – 1 см, 2 см, 4 см, 10 см.

Значення інтегральних характеристик

k	$S_{1k}$	$S_{2k}$
1	2.5596e-010	2.7652e-011
2	1.3501e-010	5.0166e-011
3	2.5975e-011	6.1019e-011
4	5.4748e-011	1.0126e-010
5	6.5954e-011	2.6051e-011
6	3.5970e-011	3.3796e-011
7	1.7563e-011	1.8274e-011
8	9.1359e-012	9.1420e-012
9	4.5995e-012	4.5772e-012
10	2.2997e-012	2.2967e-012

Після знаходження местоположення тріщини виникає питання про її розмір. На рис. 5 представлена простейша схема знаходження розміру тріщини.

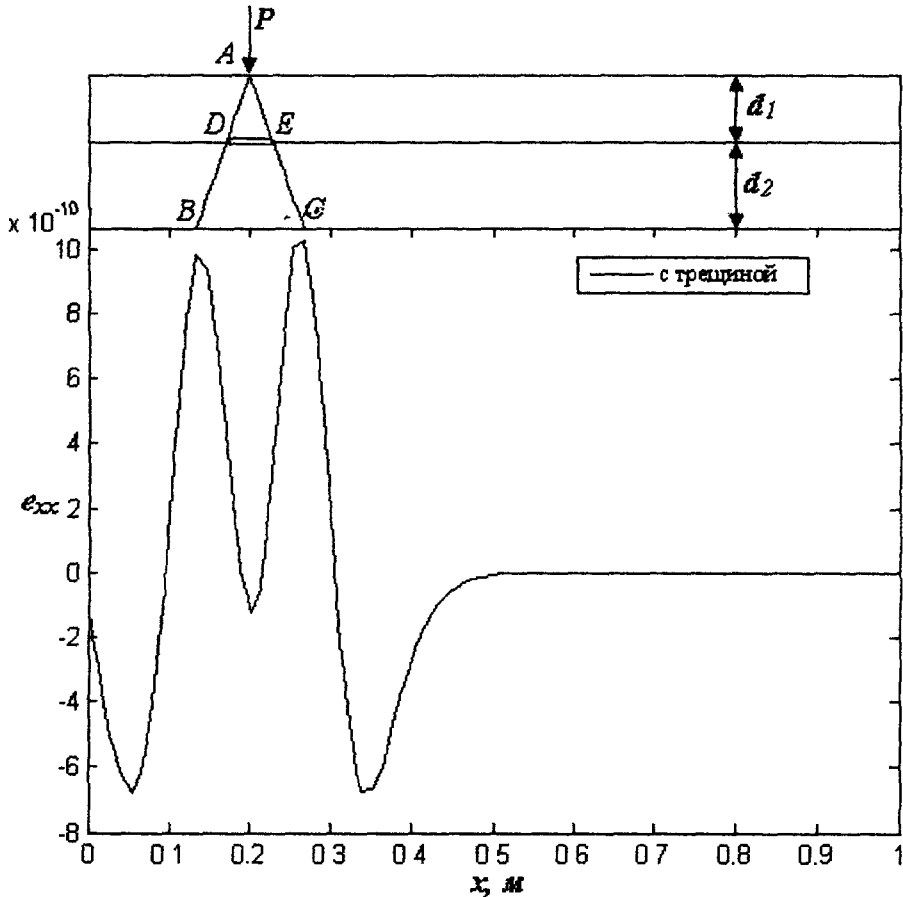


Рис. 5. Схема знаходження розміру тріщини

На рис. 5: DE – довжина тріщини; BC – відстань між двома піками в розподіленні продольних деформацій на нижній грані балки з тріщиною для останньої ітерації процесу знаходження местоположення тріщини (рис. 4), BC = 0.12 м.



Таким образом, находим размер трещины

$$DE = BC \cdot d_1/d_2 = 0.048 \text{ m}$$

при действительном размере в 0.05 м. Аналогично удалось оценить длину трещины, если действительная длина трещины была больше 0.02 м.

**Выводы.** Таким образом, в работе представлен итерационный метод идентификации трещины на границе раздела двух однородных изотропных материалов. Приведены примеры его реализации. Показан возможный вариант нахождения размера трещины на конкретном примере.

### Библиографические ссылки

1. Каневский И. Н. Неразрушающие методы контроля: учеб. пособие / И. Н. Каневский, Е. Н. Сальникова. – Владивосток, 2007. – 420 с.
2. Фильштинский Л. А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде / Л. А. Фильштинский // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1991. – №4. – С. 119 – 127.
3. Mal A. K. Interaction of elastic waves with a Griffith crack / A. K. Mal // Int. J. Eng. Sci. 1970. – 8. – P. 763 – 776.
4. Партон В. З. Динамическая механика разрушения / В. З. Партон, В. Г. Борисовский. – М., 1985. – 264 с.
5. Takei M. Diffraction of transient horizontal shear waves by a finite crack at the interface of two bonded dissimilar elastic solids / M. Takei, Y. Shindo, A. Atsumi // Eng. Fract. Mech. – 1982. – 16, №6. – P. 799 – 807.
6. Loeber J. F. Transmission of antiplane shear waves past an interface crack in dissimilar media / J. F. Loeber, G. C. Sih // Eng. Fract. Mech. – 1973. – 5. – P. 699 – 725.
7. Palaiya R. M. Interaction of antiplane shear waves by rigid strip lying at the interface of two dissimilar elastic half-spaces / R. M. Palaiya, P. Majumdar // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. – 1981. – 61, №2. – P. 120 – 122.
8. Куриляк Д. Б. Аналіз поля плоскої SH-хвилі, розсіяної скінченною тріщиною на межі поділу матеріалів / Д. Б. Куриляк, З. Т. Назарчук, М. В. Войтко // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2006. – № 6. – С. 5–16.
9. Новацкий В. К. Теория упругости / В. Новацкий. – М., 1975. – 720 с.
10. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. 1985. – 436 с.
11. Норри Д. Введение в метод конечных элементов ; пер. с англ. / Д. Норри, Ж. де Фриз – М., 1981. – 464 с.

Надійшла до редколегії 08.11 10

УДК 539.3

Н.Н. Дьяченко, Е.В. Шашкова

Запорожский национальный университет

## КОНТАКТ В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОГО ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ПАРАБОЛОИДНОГО ШТАМПА И ШЕРОХОВАТОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ЗАКОНОМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ШЕРОХОВАТОСТИ

Інтегральні рівняння, що моделюють задачу контакту штампа у формі кругового параболоїда з шорстким пружним півпростором при експоненційному законі деформування шорсткості в

умовах часткового проковзування, розв'язані за допомогою методів послідовних наближень, редуццій, а також методу регуляризації. Визначено вплив коефіцієнтів шорсткості і тертя, значення тангенціальної сили та висоти її прикладення на контактні характеристики: функції нормального тиску, дотичних напруг, занурення штампа, кут нахилу штампа, розміри областей проковзування та зчеплення. Продемонстровано переваги експоненційного закону деформування шорсткості над степеневим законом для значних зовнішніх сил та зв'язок між ними для незначних сил.

*Ключові слова* контактна задача, штамп, шорсткість, закон деформування шорсткості, тертя, часткове проковзування, область проковзування, область зчеплення

Интегральные уравнения, моделирующие задачу контакта штампа в форме кругового параболоида с шероховатым полупространством при экспоненциальном законе деформирования шероховатости в условиях частичного проскальзывания, решены при помощи методов последовательных приближений, редукции, а также метода регуляризации. Определено влияние коэффициентов шероховатости и трения, значения тангенциальной силы и высоты ее приложения на контактные характеристики: функции нормального давления, касательных напряжений, углубление штампа, угол наклона штампа, размеры областей проскальзывания и сцепления. Продемонстрированы преимущества экспоненциального закона деформирования шероховатости над степеневым законом для значительных сил и связь между ними для незначительных сил.

*Ключевые слова* контактная задача, штамп, шероховатость, закон деформирования шероховатости, трение, частичное проскальзывание, область проскальзывания, область сцепления

The problem of contact of a punch in the form of a circular paraboloid with rough half-space at exponential law of a roughness deformation in the conditions of partial slippage is modeled by the integral equations, these equations are solved by means of iteration method, reductions method and also a method of regularization. The influence of coefficient of a roughness and friction, value of tangential force and height of its application on contact characteristics, functions of normal pressure, tangential stress, punch deepening, an inclination of a punch, the sizes of slippage zone and cohesion zone is established. It is shown advantages exponentially over the power law of roughness deformation for great forces and interdependence between them for slight forces.

*Key words* a contact task, a punch, a roughness, the law of roughness deformation, a friction, partial slippage, slippage zone, cohesion zone

**Введення.** Рассмотрим пространственную контактную задачу с частичным проскальзыванием, возникающим вследствие того, что тангенциальная нагрузка, приложенная к штампу меньше, чем предельная нагрузка, способная вызвать полное скольжение в области контакта. При этом будем учитывать шероховатость полупространства, а штамп будем считать абсолютно гладким телом. Анализ распределения напряжений в условиях частичного проскальзывания имеет большое значение при расчетах на прочность, для описания зон возможных разрушений конструкций. Специфика такого рода задач связана с необходимостью определения не только функций нормальных и тангенциальных напряжений, но и размеров и форм областей сцепления и проскальзывания. Контактная задача в условиях частичного проскальзывания, но без учета шероховатости, в плоской постановке изучена в [4]. Обзор решенных контактных задач с частичным проскальзыванием для тел различной формы, не учитывающих шероховатость, сделан в [12].

Учет шероховатости тел влияет на характер их контактного взаимодействия, что впервые обосновал И.Я. Штаерман [11]. Локальные поверхностные смещения микровыступов шероховатости могут зависеть от нормального давления по линейному, степенному или экспоненциальному законам. Первые два закона целесообразно применять для малых нормальных нагрузок, а экспоненциальный – для больших. Последнее подтверждено экспериментально для ряда полимеров и резин [1; 9] и связано с тем, что с увеличением давления смятия микровыступов шероховатости в случае экспоненциального закона не увеличиваются неограниченно, как в

случае степенного закона, а приближаются к фиксированному значению, зависящему от максимальной высоты микровыступов шероховатости.

Контактные задачи с учетом шероховатости для штампов различной формы при различных законах деформирования шероховатости изучены в [2 – 4; 7; 10; 11], с учетом как шероховатости так и скольжения с трением – в [6; 10].

В данной работе использован подход, основанный на разложении интеграла уравнения по функциям Лежандра, методе последовательных приближений и методе редукции, который предложен С.Ф. Шишкановой и применен в [3; 7; 10]. Этот подход позволяет получить приближенное аналитическое решение данной задачи

**Целью данной работы является** решение задачи контакта параболического штампа с упругим шероховатым полупространством при экспоненциальном законе деформирования шероховатости в условиях частичного проскальзывания. Необходимо определить влияние коэффициентов шероховатости и трения, величины тангенциальной силы на контактные характеристики, в том числе, определить форму и размеры областей сцепления и проскальзывания. Такая задача решается впервые.

**Постановка задачи.** Точку первоначального контакта шероховатого полупространства и штампа обозначим через  $O$ , плоскость, ограничивающую шероховатое полупространство примем за плоскость  $Oxy$ , ось  $Oz$  направим внутрь полу-

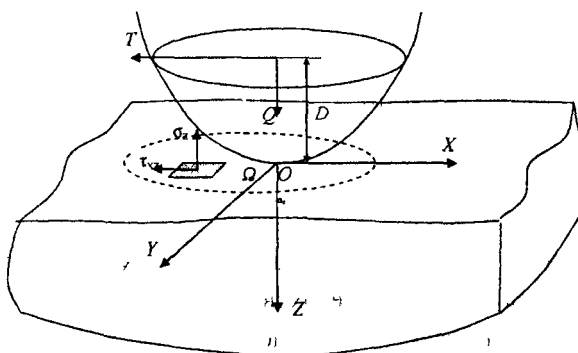


Рис 1. Схема контактного взаимодействия

пространства (рис. 1). Предположим, что параболический штамп с уравнением поверхности  $z = f(x, y)$ , где

$$f(x, y) = -A(x^2 + y^2)$$

$$A = A_1 \frac{1}{cm}, \quad A_1 = const \text{ находится}$$

под действием вертикальной силы  $Q$ , направленной вдоль оси  $Oz$ , горизонтальной силы  $T$ , приложенной на высоте  $D$  от поверхности полупростран-

ства и направленной параллельно оси абсцисс. Вследствие воздействия на штамп тангенциальной силы давление под ним будет распределено неравномерно, что приводит к возникновению дополнительного момента  $M_y$  относительно оси  $Oy$ . Условие равновесия моментов имеет вид

$$M_y + |T|D = 0. \tag{1}$$

Результатом воздействия нормальной силы является поступательное перемещение штампа параллельно оси  $Oz$  на глубину  $\delta$ , а тангенциальной – поворот вокруг оси ординат:  $\gamma_x = 0$ ,  $\gamma_y = \gamma$  – проекции вектора поворота. Поэтому нормальные составляющие перемещения точек штампа примут вид

$$w_1(x, y) = \delta - \gamma x + f(x, y). \tag{2}$$

Условия контакта штампа с упругим полупространством внутри области контакта  $\Omega$  выражаются соотношениями (аналогично [4, 184]):

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial y}, \tag{3}$$

где  $w(x, y)$  – перемещение упругого шероховатого полупространства вдоль оси  $Oz$ .

Так как взаимодействующие тела находятся в условиях частичного проскальзывания, то  $|T| \leq \mu Q$ , где  $\mu$  – коэффициент трения. Область скольжения обозначим  $\Omega_1$ , а сцепления  $\Omega_2$ , тогда  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ . В области скольжения  $\Omega_1$  выполнен закон трения Амонтона и направление касательных напряжений  $q(x, y) = \tau_{xz}(x, y)$  противоположно направлению проскальзывания и связано с нормальными давлениями штампа соотношением  $|q(x, y)| = -\mu p(x, y) \operatorname{sgn} s(x, y)$ , где  $s(x, y) = u(x, y) - \delta_x$ ,  $u(x, y)$  – перемещение упругого шероховатого полупространства вдоль оси  $Ox$ ,  $\delta_x$  – относительное смещение в направлении оси  $Ox$  фиксированных точек тел, расположенных на некотором удалении от области контакта. В области сцепления  $\Omega_2$  относительное проскальзывание равно нулю, то есть  $u(x, y) = \delta_x$ , и выполняется неравенство  $|q(x, y)| \leq \mu p(x, y)$  (аналогично [4]).

Контактное давление  $p(x, y)$  и касательное напряжение  $q(x, y)$  удовлетворяют следующим уравнениям равновесия сил и моментов

$$Q = \iint_{\Omega} p(x', y') dx' dy', \quad (4)$$

$$T = \iint_{\Omega} q(x', y') dx' dy', \quad (5)$$

$$M_y = \iint_{\Omega} x' p(x', y') dx' dy'. \quad (6)$$

С учетом (1) уравнение (6) переписывается в виде

$$-|T|D = \iint_{\Omega} x' p(x', y') dx' dy'. \quad (7)$$

Из (2), (3) и [4] следует, что функция распределения нормальных давлений  $p(x, y)$  под штампом, контактирующим с упругим шероховатым полупространством, будет удовлетворять следующему интегральному уравнению

$$W_1(x, y) + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{p(x', y')}{r} dx' dy' = \delta - \gamma x - A(x^2 + y^2), \quad (8)$$

где  $E$  – модуль упругости, а  $\nu$  – коэффициент Пуассона материала полупространства,  $r = r(x, x', y, y') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ . Первое слагаемое в левой части (8) характеризует зависимость локальных смещений микронеровностей шероховатости от давления, которое может осуществляться по степенному [2; 4; 9] (в частности, линейному) закону  $W_1'(x, y) = B[p(x, y)]^K$  или по экспоненциальному [1; 9] –  $W_1''(x, y) = h \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha p(x, y)}{E}\right) \right]$ , где  $B$ ,  $K$  и  $h, \alpha$  – показатели шероховатости соответствующих законов. При  $K = 1$  и небольших нагрузках, когда  $\alpha p(x, y) / E$  мало, выполняется условие  $W_1' \approx W_2''$ , причем  $B = h\beta / E$ . Будем изучать случай экспоненциального закона.

Кроме того, функция нормального давления удовлетворяет граничному условию: вне области  $\Omega$ , а также на ее границе  $\Gamma$  она обращается в нуль

$$p(x, y) = 0, \text{ если } (x, y) \in \Gamma. \quad (9)$$

Касательные напряжения  $q(x, y)$  под штампом удовлетворяют уравнениям (аналогично [4]):

$$\begin{aligned} \frac{1-\nu^2}{\pi E} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \iint_{\Omega} \frac{q(x', y')}{r} dx' dy' &= -\frac{\partial s(x, y)}{\partial x}, \\ \frac{1-\nu^2}{\pi E} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \iint_{\Omega} \frac{q(x', y')}{r} dx' dy' &= -\frac{\partial s(x, y)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (10)$$

Представим функцию касательных напряжений  $q(x, y)$  в области контакта в виде (аналогично [4]):

$$q(x, y) = \begin{cases} \mu p(x, y) - q^*(x, y), & (x, y) \in \Omega_2, \\ \mu p(x, y), & (x, y) \in \Omega_1, \end{cases} \quad (11)$$

тогда с учетом (3), а также того факта, что при  $(x, y) \in \Omega_2$  проскальзывание равно нулю, система уравнений (5) превратится в одно уравнение вида

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega_2} \frac{q^*(x', y')}{r} dx' dy' = \delta_x + \mu \left( \delta - \gamma x - A(x^2 + y^2) - h \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\alpha p(x, y)}{E}\right) \right] \right). \quad (12)$$

Кроме того, в точках границы  $\Gamma_2$  области  $\Omega_2$  выполнено

$$q^*(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_2. \quad (13)$$

С учетом условий равновесия сил (4), (5) и представления (11) получим уравнение

$$\mu Q - T = \iint_{\Omega_2} q^*(x', y') dx' dy'. \quad (14)$$

**Метод решения.** Нормальные давления. Обозначим  $\beta = 1$  см. Введем безразмерные величины: функцию безразмерного нормального давления  $p_1(x, y) = cp(x, y)$ , где  $c = (1 - \nu^2) / (\pi E)$ , коэффициенты шероховатости  $h_1 = h / \beta$ ;  $\alpha_1 = \alpha \pi / (1 - \nu^2)$  и осадку штампа  $\delta_1 = \delta / \beta$ . Уравнение (8) перепишем в операторном виде

$$h_1 \left[ 1 - \exp(-\alpha_1 p_1(x, y)) \right] + (Lp_1)(x, y) = \frac{\delta_1}{2\pi} - \frac{\gamma x}{2\pi\beta} - \frac{A}{2\pi\beta} (x^2 + y^2), \quad (15)$$

где  $(Lp_1)(x, y) = \frac{1}{2\pi\beta} \iint_{\Omega} \frac{p_1(x', y')}{r} dx' dy'$  – оператор, отображающий пространство непрерывных на  $\Omega$  функций  $C(\Omega)$  с нормой  $\|p_1\| = \max_{(x, y) \in \Omega} |p_1(x, y)|$  в себя. Обозначим  $Q_1 = Qc$ ,  $T_1 = |T|c$ . При этом уравнения (4), (7), (9) примут вид

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x' p_1(x', y') dx' dy' + DT_1 &= 0, \quad Q_1 = \iint_{\Omega} p_1(x', y') dx' dy', \\ p_1(x, y) \Big|_{(x, y) \in \Gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Если бы на штамп воздействовала сила  $Q$ , параллельная оси  $Oz$ , а точка пересечения линии действия этой силы с плоскостью  $Oxy$  имела бы координаты

$(x_0, 0)$ , то условие равновесия моментов имело бы вид:  $x_0 Q = \iint_{\Omega} x' p(x', y') dx' dy'$

В таком случае, как показано в [7], площадкой контакта  $\Omega$  являлся бы круг с центром в точке  $(x_0, 0)$  некоторого радиуса  $a$ , а значение  $y$  выражалось бы соотношением  $y = -2Ax_0$ . Поэтому, сравнивая приведенное условие равновесия моментов с (7), вводим обозначение:  $x_0 = -DT_1/Q_1$ . Это позволяет в правой части уравнения

(15) выделить полный квадрат. После замены  $x^* = x - x_0$ ,  $y^* = y$  область  $\Omega$  переходит в круг  $\Omega^*$  с центром в начале координат. Обозначив  $p_1^*(x^*, y^*) = p_1(x^* + x_0, y)$ , заметим, что

$$r = r(x, x', y, y') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \sqrt{(x^* - x^{**})^2 + (y^* - y^{**})^2} = r(x^*, x^{**}, y^*, y^{**})$$

приходим к системе уравнений

$$\frac{h_1}{2\pi} \left[ 1 - \exp(-\alpha_1 p_1^*(x, y)) \right] + \frac{1}{2\pi\beta} \iint_{\Omega^*} \frac{p_1^*(x^{**}, y^{**})}{r} dx^{**} dy^{**} = g_1(x^*, y^*),$$

$$g_1(x^*, y^*) = \frac{\delta_1}{2\pi} + \frac{A(x_0)^2}{2\pi\beta} - \frac{A}{2\pi\beta} \left( (x^*)^2 + (y^*)^2 \right),$$

$$\iint_{\Omega^*} x^{**} p_1^*(x^{**}, y^{**}) dx^{**} dy^{**} = 0, \quad Q_1 = \iint_{\Omega^*} p_1^*(x^{**}, y^{**}) dx^{**} dy^{**},$$

$$p_1^*(x^*, y^*) \Big|_{(x^*, y^*) \in \Gamma^*} = 0 \quad (\Gamma^* - \text{граница } \Omega^*).$$

Полученная система моделирует осесимметричную задачу о вдавлении параболического штампа с уравнением  $z = -\frac{A}{\beta} \left( (x^*)^2 + (y^*)^2 \right)$  в шероховатое полупространство вертикальной силой  $Q_1$  на глубину  $\delta_1^* = \delta_1 + A(x_0)^2/\beta$ . Вследствие этого переходим к полярной системе координат  $x^* = \rho \cos \theta$ ,  $y^* = \rho \sin \theta$ , получив эквивалентную систему вида

$$\frac{h_1^*}{2\pi} \left[ 1 - \exp(-\alpha_1 p_1^*(x, y)) \right] + \frac{1}{2\pi a} \iint_{\Omega^*} \frac{p_1^*(\rho')}{r(\rho', \rho, \theta', \theta)} \rho' d\rho' d\theta' = \frac{\delta_1^*}{2\pi} - \frac{Aa}{2\pi} \left( \frac{\rho}{a} \right)^2, \quad (16)$$

$$p_1^*(a) = 0, \quad Q_1 = \iint_{\Omega^*} p_1^*(\rho') \rho' d\rho' d\theta',$$

где  $h_1^* = \frac{h_1 \beta}{a}$ ,  $r(\rho, \rho', \theta, \theta') = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')} = r$ . Чтоб искомая функция удовлетворяла граничному условию  $p_1^*(a) = 0$ , подставим это условие в (16) и вычтем полученное уравнение из (16), придем к операторному уравнению

$$\frac{h_1^*}{2\pi} \left[ 1 - \exp(-\alpha_1 p_1^*(\rho)) \right] + [(L^* - H)p_1^*](\rho) = \frac{Aa}{2\pi} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \right], \quad (17)$$

где  $[L^* f](\rho) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{\Omega} \frac{f(\rho')}{r(\rho', \rho, \theta', \theta)} \rho' d\rho' d\theta'$ ,  $Hf = [L^* f](a)$  – оператор и

функционал, действующие на пространстве  $C[0, a]$  непрерывных на  $[0, a]$  функций

Для решения последней системы применяется подход, предложенный С Ф Шишкановой. Вследствие того, что функция  $\frac{1}{r(\rho', \rho, \theta', \theta)}$  является произво-

дящей функцией многочленов Лежандра, интеграл  $\iint_{\Omega} \frac{f(\rho')}{r(\rho', \rho, \theta', \theta)} \rho' d\rho' d\theta'$  можно разложить в абсолютно сходящийся на  $[0, a]$  ряд [5]:

$$\iint_{\Omega} \frac{f(\rho')}{r(\rho', \rho, \theta', \theta)} \rho' d\rho' d\theta' = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 U_{2n}(\rho),$$

$$U_{2n}(\rho) = \int_0^{\rho} \left( \frac{\rho'}{\rho} \right)^{2n-1} f(\rho') d\rho' + \int_{\rho}^a \left( \frac{\rho'}{\rho'} \right)^{2n} f(\rho') d\rho',$$

откуда получим

$$(H - L^*)(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{1 - (\rho/a)^{2n}}{1 - 2n} = 1 - \frac{2}{\pi} E(\rho/a),$$

$$(H - L^*) [1 - (\rho/a)^{2j}] = \sum_{i=1}^{\infty} b_{j,i} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{a} \right)^{2i} \right], \tag{18}$$

где  $b_{j,i} = \left[ \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \right]^2 \left( \frac{1}{1-2i} - \frac{1}{2j-2i+1} \right)$  ( $i \in \mathbb{N}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ),  $E(k)$  – полный эллиптический интеграл второго рода с модулем  $k$ . Последние соотношения, кроме прочего, позволяют провести оценку норм операторов  $H - L^*$  и  $mI - (L^* - H)$ , где  $m = 1 - \frac{h_1^*}{2\pi}$ , а  $I: C[0, a] \rightarrow C[0, a]$  – тождественный оператор вида  $I(f) = f$ , то из (18) получим

$$\|H - L^*\| \leq 1 - \frac{2}{\pi},$$

$$\|mI - (L^* - H)\| \leq \max \left\{ m, \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \right\} \text{ при } h_1^* \in (0, 2\pi).$$

Если коэффициент шероховатости  $h_1^*$  ограничен снизу некоторой функцией, зависящей от другого коэффициента  $\alpha_1$ , то коэффициент  $h_1^*$  условимся называть большим, в противном случае – малым

Рассмотрим вначале случай большого коэффициента  $h_1^*$ . Введем замену, аналогичную [4]:

$$\psi(\rho) = -\left[1 - \exp(-\alpha_1 p_1^*(\rho))\right] + \frac{Aa}{h_1^*} \left[1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right],$$

тогда  $p_1^*(\rho) = -\frac{1}{\alpha_1} \ln \left[ \psi(\rho) + 1 - \frac{Aa}{h_1^*} \left[1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right] \right]$ , а уравнение (17) примет вид

$$\psi(\rho) = (G\psi)(\rho), \quad (G\psi)(\rho) = \frac{2\pi}{h_1^* \alpha_1} (H - L^*) \ln \left[ \psi(\rho) + 1 - \frac{Aa}{h_1^*} \left[1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right] \right]. \quad (19)$$

Это уравнение Гаммерштейна. В классе непрерывных на  $[0, a]$  функций выполнено

$$\|G\psi_1 - G\psi_2\| \leq \frac{2\pi}{h_1^* \alpha_1} \cdot \exp \frac{\alpha_1 Q_1}{\pi a^2} \cdot \|H - L^*\| \cdot \|\psi_1 - \psi_2\| = \frac{2\pi - 4}{\alpha_1 h_1^*} \exp \frac{\alpha_1 Q_1}{\pi a^2} \cdot \|\psi_1 - \psi_2\|.$$

Из последней оценки и принципа сжимающих отображений следует, что уравнение Гаммерштейна (19) имеет единственное решение в классе непрерывных на  $[0, a]$  функций, которое можно найти методом последовательных приближений, если

$$h_1^* > \frac{2\pi - 4}{\alpha_1} \exp \frac{\alpha_1 Q_1}{\pi a^2}. \quad (20)$$

При фиксированном значении силы это условие выполняется лишь для коэффициентов  $h_1^*$ , ограниченных снизу величиной, зависящей от  $\alpha_1$ , то есть для больших коэффициентов  $h_1^*$ .

Опишем метод решения системы (19) в этом случае. Представим неизвестную функцию в виде

$$\psi(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \left[ \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2i} - 1 \right].$$

Подставим этот ряд в уравнение (19). Функции, содержащиеся в (19), разложим в степенные ряды, получим:

$$p_1^*(\rho) = -1/\alpha_1 \ln \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2j} \right] = 1/\alpha_1 \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2j} \right];$$

$$\xi_1 = \gamma_1 + Aa/h_1^*; \quad \xi_j = \gamma_j, \quad j = 2, 3, 4, \dots; \quad \xi_0 = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i; \quad \beta_0 = \sigma_0 = \ln \xi_0;$$

$$\beta_j = \xi_j / \xi_0;$$

$$p_j = (-1)^j / j; \quad a_{j,m} = \sum_{i=1}^j a_{j-i, m-i+1} \beta_i; \quad a_{j,j} = \beta_j \quad (m = 1, \dots, j, \quad j \in \mathbb{N});$$

$$\sigma_j = \sum_{m=j}^{\infty} p_{j-m+1} a_{j,m} \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Подставим разложения  $\psi(\rho)$ ,  $p_1^*(\rho)$  и (18) в уравнение (19) и в уравнение равновесия сил, придем к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\gamma_i = \frac{2\pi}{\alpha_1 h_1^*} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j b_{j,i} \quad (i \in \mathbb{N}),$$

$$a = \left[ \frac{Q_1}{2\pi} \right]^{1/2} \left[ -\frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i \frac{1}{2i+2} \right]^{-1/2}.$$



Эту бесконечную систему можно решать приближенно, заменяя ее конечной [8], то есть методом редукции, при условии (20). Действительно, рассмотрим отображения  $P_N : C[0, a] \rightarrow R_N[0, a]$ , где  $R_N[0, a]$  – множество полиномов  $N$ -ой степени, определенных на  $[0, a]$ . Результат действия этого отображения на  $f$  обозначим  $\overline{f_N}$  (то есть  $\overline{f_N} = R_N f$ ). Приближенное уравнение [8]  $\overline{\psi_N} = \overline{G_N \psi_N}$  при достаточно больших  $N$  допускает единственное решение  $\overline{\psi_N}^*$  и имеет место сходимость последовательности приближенных решений к точному  $\psi^*$ , т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \psi^* - \overline{\psi_N}^* \right\| = 0.$$

Подставляя найденную функцию  $p_1^*(\rho)$  в уравнение (16), найдем  $\delta_1^*$

$$\delta_1^* = -\frac{2\pi}{\alpha_1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_j b_{j,i} + aA.$$

Теперь рассмотрим случай малых коэффициентов шероховатости  $h_1^*$ . После замены

$$m = 1 - \frac{h_1^*}{2\pi}; \quad \psi(\rho) = -\left[ 1 - \exp(-\alpha_1 p_1^*(\rho)) \right] + \frac{Aa}{2\pi} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \right],$$

уравнение (17) переписывается в виде

$$\psi(\rho) = (G_1 \psi)(\rho). \quad (21)$$

$$(G_1 \psi)(\rho) = m \left[ \psi(\rho) - \frac{Aa}{2\pi} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \right] \right] - \frac{1}{\alpha_1} (L^* - H) \ln \left[ 1 + \psi(\rho) - \frac{Aa}{2\pi} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 \right] \right].$$

На классе непрерывных на отрезке  $[0, a]$  функций отображение  $G_1 \psi$  является сжимающим при ограничениях

$$\left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) \frac{1}{\alpha_1} \exp \frac{\alpha_1 Q_1}{\pi a^2} < 1, \quad 0 < h_1^* < 2\pi. \quad (22)$$

При этих ограничениях на указанном классе функций уравнение (21) имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений. Условия (22) соответствуют случаю малых коэффициентов шероховатости  $h_1^*$ .

В этом случае представим неизвестную функцию из уравнения (21) в виде, аналогичном случаю больших коэффициентов  $h_1^*$ :  $\psi(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \left[ (\rho/a)^{2i} - 1 \right]$ . Аналогично случаю больших  $h_1^*$  получим бесконечную систему нелинейных уравнений

$$\gamma_1 = m\gamma_1 + mA \frac{a}{2\pi} - \frac{1}{\alpha_1} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j b_{j,1}, \quad \gamma_i = m\gamma_i - \frac{1}{\alpha_1} \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j b_{j,i} \quad (i=2,3,4,\dots),$$

$$a = \left[ \frac{Q_1}{2\pi} \right]^{1/2} \left[ -\frac{1}{\alpha_1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sigma_i}{2i+2} \right]^{-1/2}$$

в тех же обозначениях коэффициентов, как и выше, кроме  $\xi_1 = \gamma_1 + Aa/(2\pi)$ . Систему можно решать методом редукции при ограничениях (22).

Искомые функция безразмерного нормального давления и углубление при-  
мут соответственно вид

$$p_1(x, y) = \frac{1}{\alpha_1} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j \left( 1 - \frac{(x-x_0)^2 + y^2}{a^2} \right)^j, \quad \delta = \delta_1^* a - A(x_0)^2.$$

Введем обозначения:  $\Delta_j = -\frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{\sigma_j}{Aa}$ ,  $\Xi_j = \xi_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ), тогда

$$p_1^*(\rho) = Aa \sum_{j=0}^{\infty} \Delta_j \left( \frac{\rho}{a} \right)^{2j}, \quad 1 - \exp(-\alpha_1 p_1^*(\rho)) = - \sum_{j=0}^{\infty} \Xi_j \left( \frac{\rho}{a} \right)^{2j}.$$

Из результатов работ [3; 7] следует, что графиком функции  $p_1(x, y)$  является поверхность вращения, линиями уровня которой являются окружности с центрами в точке  $(x_0, 0)$ .

*Касательные напряжения* В уравнении (12) вместо  $\gamma$  подставим значение  $\gamma = -2Ax_0$ , найденное выше. Аналогично случаю нормальных давлений в (12) и (14) введем замены  $x^* = x - x_0$ ,  $y^* = y$ , что приведет к новой области  $\Omega_2^*$  с границей  $\Gamma_2^*$ . Положим  $q_1^*(x^*, y^*) = cq^*(x^* + x_0, y^*)$ ,  $p_1^*(x^*, y^*) = p_1(x^* + x_0, y)$ ,

$\delta_2 = \frac{\delta_x}{\beta} + \mu \left[ \delta_1 + \frac{A}{\beta} (x_0)^2 \right]$ , получим систему

$$\frac{1}{\beta} \iint_{\Omega_2^*} \frac{q_1^*(x^{**}, y^{**})}{r} dx^{**} dy^{**} = \delta_2 - \mu g_2(x^*, y^*), \quad (23)$$

$$g_2(x^*, y^*) = \frac{A}{\beta} \left( (x^*)^2 + (y^*)^2 \right) + h_1^* \left[ 1 - \exp(-\alpha_1 p(x^*, y^*)) \right],$$

$$q^*(x^*, y^*) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_2^*,$$

$$\mu Q_1 - T_1 = \iint_{\Omega_2^*} q_1^*(x^{**}, y^{**}) dx^{**} dy^{**}. \quad (24)$$

Эта система моделирует осесимметричную контактную задачу о вдавливании в полупространство центральной силой  $\mu Q_1 - T_1$  на глубину  $\delta_2$  штампа с уравнением поверхности вращения  $z = -\mu g_2(x^*, y^*)$ , линиями уровня которой являются окружности с центрами в точке  $(0, 0)$ . Поэтому областью  $\Omega_2^*$  будет круг неизвестного радиуса  $a_2$ . Вследствие этого перейдем к полярной системе координат. Для получения приближенного решения  $\bar{q}_1^*(\rho)$  преобразованного интегрального уравнения первого рода применим метод регуляризации: введем малый параметр  $\mu \ll 1$  и решим интегральное уравнение второго рода

$$\mu \bar{q}_1^*(\rho) + \frac{1}{a_2} \iint_{\Omega_2^*} \frac{\bar{q}_1^*(\rho')}{r} \rho' d\rho' d\theta' = \frac{\delta_2 \beta}{a_2} - \mu \left( \frac{A}{a_2} \rho^2 + h_1^* \frac{a}{a_2} [1 - \exp(-\alpha_1 p(\rho))] \right) \quad (25)$$

с учетом уравнения

$$\mu Q_1 - T_1 = \iint_{\Omega_2} \bar{q}_1^*(\rho') \rho' d\rho' d\theta'. \quad (26)$$

Чтобы искомая функция удовлетворяла граничному условию  $\bar{q}_1^*(a_2) = 0$ , подставим это условие в (25) и вычтем полученное уравнение из (25), придем к операторному уравнению

$$\frac{u}{2\pi} \bar{q}_1^*(\rho) + [(L_2 - H_2)\bar{q}_1^*](\rho) = g_3(\rho), \quad (27)$$

$$g_3(\rho) = \frac{\mu A a_2}{2\pi} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{a_2}\right)^2 \right] - \frac{\mu h_1^*}{2\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \Xi_i \left(\frac{a_2}{a}\right)^{2i-1} \left[ 1 - \left(\frac{\rho}{a_2}\right)^{2i} \right],$$

где  $[L_2 f](\rho) = \frac{1}{2\pi a_2} \iint_{\Omega_2} \frac{f(\rho')}{r(\rho', \rho, \theta', \theta)} \rho' d\rho' d\theta'$ ,  $H_2 f = [L_2 f](a_2)$  – оператор и функционал, действующие на пространстве  $C[0, a_2]$  непрерывных на  $[0, a_2]$  функций.

Аналогично случаю нормальных давлений получаем при  $u \in (0, 2\pi)$  оценку  $\|\varepsilon I - (L_2 - H_2)\| \leq \max \left\{ \varepsilon, \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \right\}$ , где  $\varepsilon = 1 - \frac{u}{2\pi}$ , а после применения принципа сжимающих отображений [8] приходим к выводу о существовании и единственности решения уравнения (27) при всех  $u \in (0, 2\pi)$ , в частности, при  $u \ll 1$ . Искомую

функцию представим рядом  $\bar{q}_1^*(x, y) = \mu A a_2 \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k \left(\frac{\rho}{a_2}\right)^k$ . Подставив это разложение в уравнения (27) и (26), получим систему для определения коэффициентов этого ряда и радиуса  $a_2$  области сцепления  $\Omega_2$

$$\begin{cases} \zeta_n = \varepsilon \zeta_n + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k b_{kn} + \theta_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ a_2 = \sqrt[3]{\frac{\mu Q_1 - T_1}{2\pi A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta_k}{2k+2}}} \end{cases}$$

где  $\theta_1 = \frac{1}{2\pi} (\Delta_1 h_1^* - 1)$ ,  $\theta_n = \frac{h_1^* \Delta_n}{2\pi} \left(\frac{a_2}{a}\right)^{2n-2}$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$ . К выписанной системе применяем метод последовательных приближений и метод редукции. Эта система является нелинейной относительно  $a_2$ . Убеждаемся в возможности применения метода редукции путем численного эксперимента. Относительное смещение  $\delta_x$  находим из (25)

$$\delta_x = \mu A (a_2)^2 \left( 1 - 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \sum_{n=0}^{\infty} b_{kn} + h_1^* \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k \left(\frac{a_2}{a}\right)^{2k-2} \right) - \mu \delta - \mu A (x_0)^2.$$

**Анализ результатов численных исследований.** Расчеты проводились для  $A_1 = 1$ , а в методе регуляризации выбрано  $u = 0,0001$ . Как подчеркивалось ранее, площадкой контакта является круг  $\Omega$  с центром в точке  $(x_0, 0)$  радиуса  $a$ , где  $x_0 = -DT_1/Q_1$ , областью сцепления – круг  $\Omega_2$  с центром в той же точке радиуса  $a_2$ , поэтому областью проскальзывания  $\Omega_1$  является кольцо  $\Omega \setminus \Omega_2$ . Поскольку  $\gamma = -2Ax_0$  зависит только от смещения  $x_0$ , то (при фиксированном значении силы  $Q_1$ ) угол наклона штампа увеличивается с ростом тангенциальной силы  $T_1$  или высоты  $D$  приложения этой силы и не изменяется при варьировании прочих исходных данных.

Рис. 2 – 4 показывают, что наибольшие значения касательных напряжений достигаются в точках, лежащих на границе области сцепления, а наибольшее значение нормального давления достигается в центре площадки контакта.

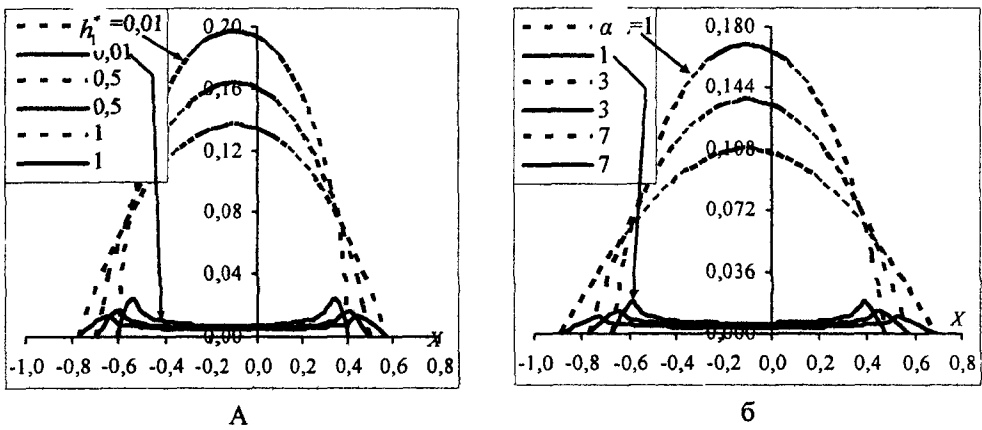


Рис. 2. Функции нормальных давлений  $p_1(x, 0)$  (штриховые линии) и функции касательных напряжений  $q_1(x, 0)$  (сплошные линии) при  $T_1 = 0,1Q_1$ ,  $D = 1$  см,  $\mu = 0,3$ : для а – при различных значениях коэффициента шероховатости  $h_1^*$ , при  $\alpha_1 = 3$ , б – при различных значениях коэффициента шероховатости  $\alpha_1$ , для  $h_1^* = 1$

Как видно из табл. 1, высота приложения тангенциальной силы  $D$  влияет на смещение  $x_0$  штампа вдоль  $Ox$ , а поэтому на смещение области контакта, смещение функции нормального давления и касательного напряжения вдоль этой оси, но не влияет на их числовые значения, также как не влияет на размеры площадок сцепления и проскальзывания, на значение  $\delta_x$  относительного смещения штампа вдоль оси  $Ox$ . С ростом расстояния  $D$  осадка штампа  $\delta$  уменьшается вплоть до поднятия вершины параболидного штампа над поверхностью полупространства.

Уменьшение коэффициентов шероховатости  $h_1^*$  и  $\alpha_1$  приводит к уменьшению осадки штампа  $\delta$  и относительного смещения  $\delta_x$  вдоль оси  $Ox$ , уменьшению размеров областей проскальзывания и сцепления, увеличению наибольшего нормального давления, увеличению наибольшего касательного напряжения и значения касательного напряжения в центре площадки контакта (см. рис. 2 и табл. 1).

Таблица 1

Значения контактных характеристик для различных исходных данных

$\mu$	$Q_1, [см^2]$	$T_1, [см^2]$	Коэффициенты шероховатости			$D, [см]$	$x_0, [см]$	$a, [см]$	$a_2, [см]$	$\delta, [см]$	$\delta_x, [см]$	$\gamma$			
			$h_1^*$	$h_1$	$\alpha_1$										
0,3	0,1	$0,1Q_1$	1	0,6704	3	0	0	0,6704	0,5408	0,6188	0,6691	0			
						0,5	-0,05	0,6704	0,5408	0,6163	0,6691	0,1			
						3	-0,3	0,6704	0,5408	0,5288	0,6691	0,6			
						5	-0,5	0,6704	0,5408	0,3688	0,6691	1			
						7	-0,7	0,6704	0,5408	0,1288	0,6691	1,4			
			8	-0,8	0,6704	0,5408	-0,0212	0,6691	1,6						
						0,5	0,2987		-0,9	0,5974	0,4884	-0,2622	0,5942	1,8	
						1	0,6704	3	9	-0,9	0,6704	0,5408	-0,1912	0,6691	1,8
						2	1,5670		-0,9	0,7835	0,6271	-0,0516	0,8060	1,8	
						3	2,6169		-0,9	0,8723	0,6966	0,0806	0,9346	1,8	
0,3	0,1	$0,1Q_1$	1	0,5747	1	-0,1	0,5747	0,4762	0,5197	0,5677	0,2				
					3	-0,1	0,6704	0,5408	0,6088	0,6691	0,2				
					5	-0,1	0,7370	0,5866	0,6866	0,7507	0,2				
					7	-0,1	0,7894	0,6223	0,7559	0,8221	0,2				
0,3	0,1	$0,1Q_1$	1	0,0050	3	1	-0,1	0,4973	0,4314	0,4724	0,4879	0,2			
							-0,1	0,5427	0,4535	0,4964	0,5401	0,2			
							-0,1	0,5805	0,4770	0,5238	0,5777	0,2			
							-0,1	0,6134	0,4994	0,5519	0,6100	0,2			
							-0,1	0,6431	0,5207	0,5803	0,6401	0,2			
							-0,1	0,6704	0,5408	0,6088	0,6691	0,2			
0,3	0,1	$0,1Q_1$	1	0,6704	3	0	0	0,6704	0,6705	0,6188	0,6187	0			
						-0,05	0,6704	0,5974	0,6163	0,6520	0,1				
						-0,1	0,6704	0,5408	0,6088	0,6691	0,2				
						-0,2	0,6704	0,4143	0,5788	0,6952	0,4				
0,3	0,1	$0,1Q_1$	1	0,6704	3	1	-0,1	0,6704	0,5408	0,6088	0,6691	0,2			
-0,1						0,6704	0,4821	0,6088	0,6828	0,2					
0,3	0,2	$0,1Q_1$	1	0,3002	3	1	-0,1	0,3002	0,2435	0,1128	0,1318	0,2			
							-0,1	0,6704	0,5408	0,6088	0,6691	0,2			
							-0,1	0,8395	0,6754	0,9649	1,0580	0,2			
							-0,1	0,9568	0,7684	1,2610	1,3830	0,2			
							-0,1	1,0500	0,8416	1,5230	1,6720	0,2			

С уменьшением значения тангенциальной силы увеличивается размер области сцепления при неизменном размере площадки контакта, а, следовательно, уменьшается область проскальзывания и относительное смещение  $\delta_x$ , осадка штампа  $\delta$  увеличивается, при этом функция нормального давления не изменяется, а функция касательных напряжений во всех точках области сцепления уменьшает свои значения (см. рис. 3, табл. 1). При нулевой тангенциальной силе область сцепления совпадает с площадкой контакта, а касательные напряжения отсутствуют. При увеличении коэффициента трения увеличивается размер области сцепления при неизменном размере площадки контакта, поэтому уменьшается область проскальзывания, при этом, осадка штампа  $\delta$  остается неизменной, а относительное смещение  $\delta_x$  увеличивается, функция нормальных давлений не изменяется, а функция касательных напряжений изменяется так, как показано на рис. 3, увели-

чивая наибольшее значение и значение в центре площадки контакта (см. рис. 4 и табл. 1).

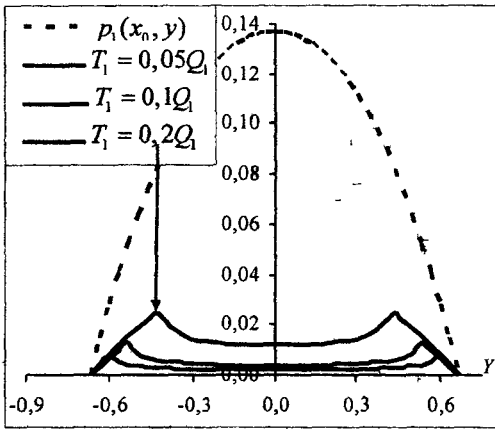


Рис. 3. Функция нормальных давлений  $p_1(x_0, y)$  (штриховая линия) и функции касательных напряжений  $q_1(x_0, y)$  (сплошные линии) для различных значений тангенциальной силы  $T_1$ , при  $D = 1 \text{ см}, \mu = 0,3, h_1^* = 1, \alpha_1 = 3$

перемещения полупространства. Это говорит о том, что при экспоненциальном законе деформирования микронеровностей шероховатости с увеличением силы углубления штампа в упругое полупространство увеличиваются в основном за счет именно этих составляющих и все в меньшей степени за счет смятия микронеровностей.

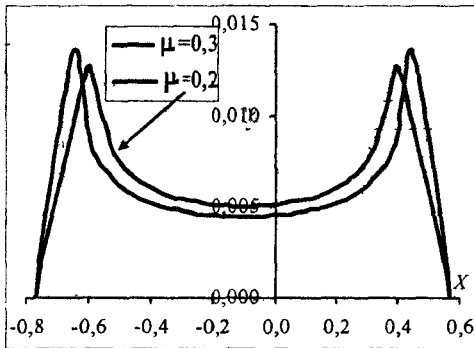


Рис. 4. Функция касательных напряжений  $q_1(x, 0)$  при различных значениях коэффициента трения  $\mu$ , при  $T_1 = 0,1Q_1, D = 1 \text{ см}, h_1^* = 1, \alpha_1 = 3$

На рис. 5 изображены графики углублений штампа в упругое полупространство с шероховатостью, полученные с учетом экспоненциального (сплошные линии) и степенного законов (штриховые линии). При этом в случае экспоненциального закона  $h_1^* = 1, \alpha_1 = 3$ , в случае степенного —  $K = 1, B_1 = \alpha_1 h_1^* = 3$ . Из графиков видно, что эти линии при малых  $Q_1$  касаются. При больших  $Q_1$  график углублений по экспоненциальному закону приближается к линии А, значение ординат которой равно  $h + ca_0^2$ , где  $a_0 = \sqrt[3]{3\pi Q_1 / (8c)}$ . Второе слагаемое этого значения характеризует упругие

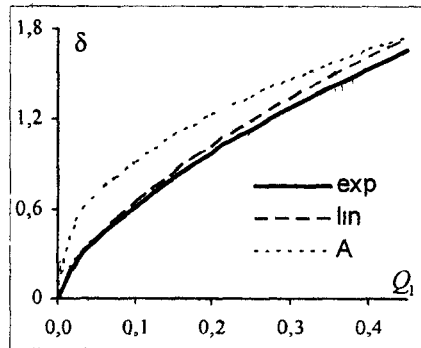


Рис. 5. Зависимость углубления от силы, действующей на штамп

Представляет интерес для дальнейшего изучения нерешенная задача контакта в условиях частичного проскальзывания упругого шероховатого полупространства со штампом другой геометрической формы.

## Библиографические ссылки

1. **Бартенев Г.М.** Трение и износ полимеров / Г.М. Бартенев, В.В. Лаврентьев – М., 1972 – 240 с.
2. **Галин Л.А.** Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Л.А. Галин – М., 1980 – 302 с.
3. **Гоман О.Г.** Задачі про штампи при різних законах деформування шерсткості / О.Г. Гоман, С.Ф. Шишканова, Н.М. Д'яченко // Вісник Херсон. держ. техн. ун-ту. – 2003 – №3(19) – С.98–101.
4. **Горячева И.Г.** Механика фрикционного взаимодействия / И.Г. Горячева. – М., 2001 – 478 с.
5. **Дубошин Г.Н.** Теория притяжения / Г.Н. Дубошин. – М. Физматгиз, 1961. – 288 с.
6. **Дьяченко Н.Н.** Задача о скольжении с трением параболического штампа по границе упругого шероховатого полупространства / Н.Н. Дьяченко, Е.В. Шашкова // Вісник Запор. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2008. – №1. – С. 66–75.
7. **Дьяченко Н.Н.** Решение задачи о вдавлении смещенной силой параболического штампа в упругое шероховатое полупространство / Н.Н. Дьяченко // Вісник Запор. нац. ун-ту Фіз.-мат. науки. – 2006. – №1. – С. 16–25.
8. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М., 1984. – 752с.
9. **Крагельский И.В.** Основы расчётов на трение и износ / И.В. Крагельский, М.Н. Добычин, В.С. Комбалов. – М., 1977. – 576 с.
10. **Шишканова А.А.** О решении контактной задачи с учетом трения и шероховатости для штампа в форме двусвязного квадрата в плане / А.А. Шишканова // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2004. – Вип. 1. – С. 95–102.
11. **Штаерман И.Я.** Контактная задача теории упругости / И.Я. Штаерман. + М. – Л., 1949. – 270 с.
12. **Hills D. A.** Origins of partial slip in fretting – a revive of known and potential solution./ D. A. Hills, G. Sosa // Proc. Roy. Soc. London A. – 1974. – V. 33. – P. 101–113.

Надійшла до редколеги 20 06 10

УДК 539.3

Н.М. Антоненко, І.Г. Величко  
Запорізький національний університет

### МОДЕЛЮВАННЯ ВІДКРИТОЇ ТРИЩИНИ МІЖ ШАРОМ ТА АБСОЛЮТНО ЖОРСТКОЮ ПІВПЛОЩИНОЮ

Розглядається плоска деформація пружного шару, зчепленого з абсолютно жорсткою півплощиною по всій межі спільної границі, за виключенням відрізка. Моделюється відкрита тріщина, яка заповнена пружною речовиною, під дією зосередженого нормального навантаження. Будуються інтегральні рівняння для різних випадків контактів берегів тріщини. Наводяться результати чисельного розв'язання отриманих гіперсингулярних рівнянь.

*Ключові слова* тріщина, тріщина з пружною речовиною, пружний шар, зчеплений з жорсткою півплощиною

Рассматривается плоская деформация упругого слоя, сцепленного с абсолютно жесткой полуплоскостью по всей линии плоской границы, за исключением отрезка. Моделируется открытая трещина, заполненная упругой средой под действием сосредоточенной нормальной на-

грузки. Строятся интегральные уравнения для различных случаев контакта берегов трещины. Приводятся результаты численного решения полученных гиперсингулярных уравнений.

*Ключевые слова:* трещина, трещина с упругим веществом, упругий слой, сцепленный с жесткой полуплоскостью.

The two-dimensional deformation of the elastic layer, coupled with absolutely rigid half-plane along the line of common border, with exception of interval, was considered. The open crack filled with elastic substance under action of normal pointed force is modeled. The integral equation for various cases of contact on the crack borders is developed. Results of obtained numerical solutions of hypersingular equations are presented.

*Key words:* open crack, crack filled with elastic substance, elastic layer linked with rigid half-plane.

**Постановка задачі та огляд публікацій.** Механічні напруження, які виникають у тілі під дією зовнішніх навантажень, можуть призвести до порушення структури матеріалу, утворення нових і росту наявних тріщин, а в результаті – до локального або повного руйнування конструкції та її елементів. Тому вивчення розподілу напружень у точках тіла поблизу тріщини має важливе значення в розрахунках на міцність і довговічність елементів конструкцій з тріщинами.

Основи теорії тріщин закладені в роботах Вестергарда, Снеддона, Баренблатта і Ірвіна. Результати теорії тріщин викладені в багатьох працях, серед яких зазначимо роботи М.І. Мухелішвілі [5] та Г. П. Черпанова [9]. Сучасний огляд теорії тріщин можна знайти в монографії О.М. Гузя [3]. Для розв'язання задач теорії тріщин в основному використовують методи, які опираються на застосування ТФКЗ, опис яких можна знайти, наприклад, в [2; 5; 7].

У даній статті пропонується спосіб визначення напружено-деформованого стану (НДС) тіла поблизу тріщини, оснований на використанні методу інтегральних перетворень Фур'є. Запропонований підхід дозволяє розповсюдити отриманий розв'язок на випадок багат шарових основ. Подібна задача про визначення НДС вільної тріщини на межі розподілу пружного півпростору та шару розглянута В.М. Александровим та Д.А. Пожарским в [1].

У запропонованій моделі тріщини вважатимемо, що вертикальні переміщення точок верхнього берега тріщини пропорційні нормальним напруженням зі змінним коефіцієнтом пропорційності. Запропонований підхід до моделювання тріщин дозволяє визначати НДС поблизу вільної тріщини і тріщини з наповнювачем.

Розглянемо пружний невагомий шар постійної товщини, який лежить на абсолютно жорсткій півплощині. Деформація шару плоска. Матеріал шару вважатимемо невагомим, однорідним і ізотропним. Уведемо декартову систему координат з початком на верхній межі шару. Вісь  $x$  спрямуємо вправо вздовж верхньої межі, вісь  $z$  спрямуємо перпендикулярно  $x$  у глибо шару. Тобто, область, зайнята шаром, буде характеризуватися нерівностями  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq z \leq h$  (рис. 1).

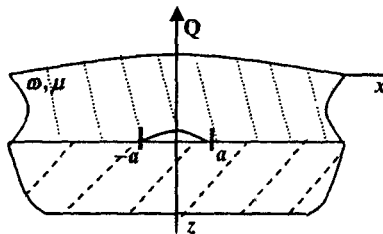


Рис. 1. Схема до постановки задачі



На нижній межі шару для  $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$  шар зчеплений з півплощиною, а при  $x \in (-a, a)$  маємо або вільну тріщину або тріщину заповнену пружною речовиною. Під дією зосередженого навантаження величиною  $Q$ , направлено перпендикулярно межі шару, тріщина розкривається.

Межові умови на верхній межі шару мають вигляд:

$$\sigma_z(x, 0) = Q\delta(x), \quad \tau_{xz}(x, 0) = 0, \quad (1)$$

де  $\delta(x)$  – дельта-функція Дірака.

Вважатимемо, що горизонтальні переміщення точок верхнього берега тріщини настільки малі, що ними можна знехтувати і, з урахуванням цього, межові умови на нижній межі шару мають вигляд

$$u(x, h) = 0, \quad (2)$$

$$w(x, h) = \begin{cases} A(x), & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases} \quad (3)$$

де  $A(x) = (a^2 - x^2)^\eta f(x)$ .

Тут  $f(x)$  – функція класу  $C_{[-a, a]}^2$ ,  $\eta > 0$  – параметр, який визначає особливість поведінки функції  $w(x, h)$  поблизу вершин тріщини.

Для визначеності задачі необхідно знати напруження в точках верхнього берега тріщини. У рамках запропонованої моделі вважатимемо, що

$$\sigma_z(x, h) = y_\eta(x) f(x), \quad |x| < a. \quad (4)$$

Функція  $(a^2 - x^2)^\eta / y_\eta(x)$  – змінний коефіцієнт пропорційності між переміщеннями та напруженнями. Зазначимо, що особливість поведінки нормального напруження  $\sigma_z(x, h)$  поблизу вершини тріщини залежить від функції  $y_\eta(x)$ . Оскільки вона обирається неоднозначно, то її вибір визначає математичну модель задачі, тому її пропонується обирати таким чином, щоб отримані розв'язки співпадали з експериментальними, або, при відсутності таких, відповідали фізичному сенсу. При підході до неї із середини тріщини. Наприклад, для випадку вільної тріщини матимемо, що  $y_\eta(x) \equiv 0$ ,  $|x| < a$ . Для інших випадків функція  $y_\eta(x)$  буде визначатися у процесі розв'язання задачі.

**Зв'язок між напруженнями та переміщеннями точок верхнього берега тріщини.** Задачу будемо розв'язувати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi. \quad (5)$$

Як показано у [8], трансформанти напружень і переміщень точок шару можна представити у вигляді лінійної комбінації допоміжних функцій  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ :

$$p\bar{w}(\xi, z) = \frac{1}{2\mu} \left[ \left( (2-\omega)shpz - \omega pzchpz \right) \alpha + 2(-\omega pzshpz + chpz) \beta + \right. \\ \left. + 2 \left( (1-\omega)shpz - \omega pzchpz \right) \gamma - \omega pzshpz \delta \right], \quad (6)$$

$$-i\xi\bar{u}(\xi, z) = \frac{1}{2\mu} \left[ \omega pzshpz \alpha + 2 \left( (1-\omega)shpz + \omega pzchpz \right) \beta + \right. \\ \left. + 2 \left( \omega pzshpz + chpz \right) \gamma + \left( (2-\omega)shpz + \omega pzchpz \right) \delta \right], \quad (7)$$

$$-\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{xz}(\xi, z) = \left( -(1-\omega)shpz + \omega pzchpz \right) \alpha + 2\omega pzshpz \beta + 2\omega (shpz + \\ + pzchpz) \gamma + (chpz + \omega pzshpz) \delta, \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_z(\xi, z) = (chpz - \omega pzshpz) \alpha + 2\omega (shpz - pzchpz) \beta - 2\omega pzshpz \gamma - \left( (1- \\ -\omega)shpz + \omega pzchpz \right) \delta \quad (9)$$

Тут  $\alpha = \bar{\sigma}_z(\xi, 0)$ ,  $\beta = \mu p\bar{w}(\xi, 0)$ ,  $\gamma = -i\xi\bar{u}(\xi, 0)$ ,  $\delta = -\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{xz}(\xi, 0)$ . (10)

Застосуємо пряме перетворення Фур'є (5) до співвідношень (2), (3):

$$\begin{cases} \bar{u}(\xi, h) = 0, \\ \bar{w}(\xi, h) = \int_{-a}^a A(x) e^{i\xi x} dx = M(\xi) \end{cases} \quad (11)$$

Дві з чотирьох допоміжних функцій  $\alpha$  і  $\delta$  можна знайти з межових умов (1) на верхній межі шару

$$\alpha = \overline{Q\delta(x)} = Q, \quad \delta = 0. \quad (12)$$

Підставимо до лівих частин співвідношень (11) вирази для трансформант переміщень (6), (7) та (12). Отримаємо систему відносно функцій  $\beta$  і  $\gamma$ , розв'язок якої має вигляд

$$\beta = \frac{2\mu p(p_1\omega S + C)M(\xi) + (p_1\omega + (\omega - 2)SC)Q}{2(1 + \omega^2 p_1^2 + \omega(2 - \omega)S^2)}, \quad (13)$$

$$\gamma = \frac{2\mu p((\omega - 1)S - \omega p_1 C)M(\xi) + (-p_1^2\omega^2 + (\omega^2 - 3\omega + 2)S^2)Q}{2(1 + \omega^2 p_1^2 + \omega(2 - \omega)S^2)}. \quad (14)$$

Тут  $p_1 = ph$ ,  $S = sh(p_1)$ ,  $C = ch(p_1)$ .

Нормальне напруження на нижній межі шару можна знайти із співвідношення

$$\sigma_z(x, h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\sigma}_z(\xi, h) e^{-i\xi x} d\xi, \quad (15)$$

З урахуванням (12), (13) і (14) перепишемо (15) у наступному вигляді

$$\sigma_z(x, h) = G(x) + g(x). \quad (16)$$

Тут

$$G(x) = \frac{\mu\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(-p_1 + SC) M(\xi)}{1 + \omega^2 p_1^2 + \tilde{\omega} S^2} e^{-i\xi x} d\xi, \quad \tilde{\omega} = \omega(2 - \tilde{\omega}),$$

$$g(x) = \frac{Q}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega p_1 S + C}{1 + \omega^2 p_1^2 + \tilde{\omega} S^2} \cos(px) dp. \quad (17)$$

Перетворимо доданок  $G(x)$ . Замінімо  $M(\xi)$  його інтегральним представленням (11) та змінимо порядок інтегрування

$$G(x) = \frac{\mu\omega}{\pi} \int_{-a}^a A(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(-p_1 + SC)}{1 + \omega^2 p_1^2 + \tilde{\omega} S^2} e^{i\xi(t-x)} d\xi \right] dt. \quad (18)$$

Оскільки при  $p = |\xi| \rightarrow \infty$  вираз

$$L(p) = \frac{p(-p_1 + SC)}{1 + \omega^2 p_1^2 + \omega(2 - \omega) S^2} - \frac{p}{\tilde{\omega}} = -\frac{\tilde{\omega} p(2p_1 + e^{-2p_1}) + p(2 - \tilde{\omega} + 2\omega^2 p_1^2)}{2\tilde{\omega}(1 + \omega^2 p_1^2 + \tilde{\omega} S^2)} \rightarrow 0,$$

то зручно ввести позначення

$$R_1(t-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(p) e^{-i\xi(x-t)} d\xi = 2 \int_0^{+\infty} L(p) \cos p(t-x) dp,$$

$$R_2(t-x) = \int_0^{+\infty} p \cos p(t-x) dp, \quad T = -\frac{2\mu}{\pi(2-\omega)},$$

після чого (18) набуде вигляду

$$G(x) = T \int_{-a}^a A(t) [R_1(t-x) - R_2(t-x)] dt. \quad (19)$$

Інтеграл  $R_2(t-x)$  розбігається, і його будемо розуміти в наступному сенсі

$$R_2(t-x) = \int_0^{+\infty} p \cos p(t-x) dp = \lim_{q \rightarrow 0+0} \int_0^{+\infty} p \cos p(t-x) e^{-q p} dp =$$

$$= \lim_{q \rightarrow 0+0} \frac{q^2 - (t-x)^2}{(q^2 + (t-x)^2)^2} = -\frac{1}{(t-x)^2}$$

Оскільки інтеграл  $\int_{-a}^a \frac{A(t)}{(t-x)^2} dt$  при  $x=t$  має неінтегровану особливість, то скористаємось формальною рівністю

$$\int_{-a}^a \frac{A(t)}{(t-x)^2} dt = - \int_{-a}^a A(t) d\left(\frac{1}{t-x}\right) = -\frac{A(t)}{t-x} \Big|_{-a}^a + \int_{-a}^a \frac{d(A(t))}{t-x} = \int_{-a}^a \frac{A'(t) dt}{t-x}.$$

Математичне обґрунтування такої регуляризації наведено, наприклад, в [4]. Використано той факт, що береги тріщини змикаються, і, отже,  $A(\pm a) = 0$ .

Таким чином, маємо такий зв'язок між нормальними напруженнями в точках верхнього берега тріщини  $\sigma_z(x, h)$  та нормальними переміщеннями  $A(x)$  точок верхнього берега тріщини

$$\sigma_z(x, h) = T \left[ \int_{-a}^a A(t) R_1(t-x) dt + \int_{-a}^a \frac{A'(t)}{t-x} dt \right] + g(x). \quad (20)$$

Дослідження особливостей поведінки напружень поблизу вершини тріщини. З урахуванням (3) співвідношення (20) приведемо до вигляду:

$$\sigma_z(x, h) = T \left[ \int_{-a}^a (a^2 - t^2)^\eta f(t) R_1(t-x) dt + \int_{-a}^a \frac{[(a^2 - t^2)^\eta f(t)]'}{t-x} dt \right] + g(x). \quad (21)$$

З'ясуємо, як поводить себе нормальне напруження  $\sigma_z(x, h)$  при  $x \rightarrow a-0$  та при  $x \rightarrow a+0$ . Оскільки функції  $f(x)$ ,  $R_1(t-x)$  і  $g(x)$  – обмежені, то поведінка нормального напруження залежатиме лише від поведінки функції

$$N_f(x) = \int_{-a}^a \frac{[(a^2 - t^2)^\eta f(t)]'}{t-x} dt.$$

Форма відкритої тріщини в околі її вершини при  $\eta = \frac{1}{2}$ ,  $\eta = 1$  і  $\eta = \frac{3}{2}$  відповідатиме випадкам зображеним на рис. 2, а, б і в, відповідно.

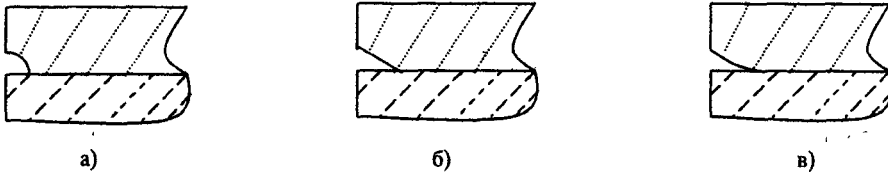


Рис. 2. Форма тріщини в околі її вершини

Оцінимо поведінку функції  $N_f(x)$  для трьох випадків значень параметра  $\eta$ .

При  $\eta = \frac{1}{2}$  в околі вершини берег тріщини перпендикулярний лінії тріщини, і ми маємо так звану «каверну» [3]

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{[\sqrt{a^2 - t^2} f(t)]'}{t-x} dt &= - \int_{-a}^a \frac{t f(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t-x)} + \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} f'(t) dt}{t-x} = \\ &= - \int_{-a}^a \frac{[t f(t) - t f(x) + t f(x)] dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t-x)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \int_{-a}^a \frac{\left[ \sqrt{a^2 - t^2} f'(t) - \sqrt{a^2 - t^2} f'(x) + \sqrt{a^2 - t^2} f'(x) \right] dt}{t - x} = \\ & = - \int_{-a}^a \frac{f'(\xi) t dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} - f(x) \int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} - x f(x) \int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)} + \\ & + \int_{-a}^a f''(\xi) \sqrt{a^2 - t^2} dt + f'(x) \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} dt}{t - x}. \end{aligned}$$

Оскільки  $f'(\xi)$ ,  $f''(\xi)$  – обмежені функції та

$$\int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2 - t^2} dt}{t - x} = \begin{cases} -\pi x, & |x| < a, \\ \pi \left[ \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{|x|} - x \right], & |x| > a, \end{cases}$$

$$\int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x)} = \begin{cases} 0, & |x| < a, \\ -\frac{\pi x}{|x|\sqrt{x^2 - a^2}}, & |x| > a, \end{cases}$$

то отримаємо наступні асимптотичні формули:

$$N_f(x) = O(1) \Rightarrow \sigma_z(x, h) = O(1), \text{ при } x \rightarrow a - 0.$$

$$N_f(x) = \frac{\pi f(a) \sqrt{2a}}{2\sqrt{r}} + O(1) \Rightarrow \sigma_z(x, h) = -\frac{\mu f(a) \sqrt{2a}}{(2 - \omega)\sqrt{r}} + O(1), \text{ } r = x - a,$$

при  $x \rightarrow a + 0$ .

Аналогічно отримано асимптотичні формули для  $\eta = 1$  (берег тріщини нахилений під кутом до лінії тріщини) і  $\eta = \frac{3}{2}$  (береги тріщини плавно змикаються).

При  $\eta = 1$ :

$$\sigma_z(x, h) = O(1) - 2af(a) T \ln r, \text{ } r = a - x, \text{ при } x \rightarrow a - 0.$$

$$\sigma_z(x, h) = O(1) - 2af(a) T \ln r, \text{ } r = x - a, \text{ при } x \rightarrow a + 0.$$

При  $\eta = \frac{3}{2}$ :

$$\sigma_z(x, h) = O(1), \text{ при } x \rightarrow a - 0,$$

$$\sigma_z(x, h) = O(1), \text{ при } x \rightarrow a + 0.$$

На основі асимптотичних формул можна прийти до висновку, що поведінка нормальних напружень при підході до вершини тріщини з внутрішнього та зовнішнього боків для випадків  $\eta = \frac{1}{2}$  і  $\eta = \frac{3}{2}$  узгоджуються з результатами, наведеними в [5]. У випадку вільної тріщини напруження  $\sigma_z$  на верхньому березі тріщини нульові, отже, при цьому випадок, зображений на рис. 2, б, неможливий.

На основі асимптотичних оцінок при  $x \rightarrow a + 0$  можна отримати формули для обчислення коефіцієнтів концентрації напружень (КІН):

$$k_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_z(r, 0)' = -\frac{2\mu \sqrt{a\pi} f(a)}{(2 - \omega)}, \text{ при } \eta = \frac{1}{2},$$

$$k_1 = 0, \text{ при } \eta = 1 \text{ і при } \eta = \frac{3}{2}.$$

**Випадок вільної тріщини.** Із співвідношення (21) отримуємо інтегродиференціальне рівняння відносно невідомої функції  $f(x)$

$$T \left[ \int_{-a}^a (a^2 - t^2)^\eta f(t) R_1(t-x) dt + \int_{-a}^a \frac{\left[ (a^2 - t^2)^\eta f(t) \right]'}{t-x} dt \right] = -g(x) \quad (22)$$

Невідому функцію шукатимемо у вигляді

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \rho_i S_{2i}(x), \quad (23)$$

де  $S_{2i}(x)$  – поліноми, які обираються залежно від значення параметра  $\eta$

Використавши спектральні співвідношення [6], можна показати, що функції

$$F_i(x) = \int_{-a}^a \frac{\left[ S_{2i}(x) (a^2 - t^2)^\eta \right]'}{t-x} dt \quad (24)$$

є лінійними комбінаціями поліномів Чебишова другого роду при  $\eta = \frac{1}{2}$  або першого роду при  $\eta = \frac{3}{2}$ .

З врахуванням формул (23) та (24) перепишемо співвідношення (22) у наступному вигляді

$$T \sum_{i=0}^n \rho_i \left[ \int_{-a}^a S_{2i}(x) (a^2 - t^2)^\eta R_1(t-x) dt + F_i(x) \right] = -g(x). \quad (25)$$

Невідомі величини  $\rho_i$  у цьому рівнянні можна визначити, розкладаючи ліву та праву частини в лінійну комбінацію поліномів Чебишова та прирівнюючи коефіцієнти при однакових поліномах Чебишова.

**Випадок тріщини з наповнювачем.** Для випадку моделі тріщини з наповнювачем  $\sigma_z(x, h) \neq 0$ , при  $|x| < a$ . Як зазначено вище, в рамках запропонованої моделі вважаємо, що вертикальні переміщення точок верхнього берега тріщини пропорційні нормальним напруженням, зі змінним коефіцієнтом пропорційності. Інтегральне рівняння для визначення функції  $f(x)$  має вигляд

$$y_\eta(x) f(x) = T \left[ \int_{-a}^a (a^2 - t^2)^\eta f(t) R_1(t-x) dt + \int_{-a}^a \frac{\left[ (a^2 - t^2)^\eta f(t) \right]'}{t-x} dt \right] + g(x).$$

Із асимптотичних формул випливає, що для випадку  $\eta = \frac{1}{2}$  функція  $y_\eta(x)$  обмежена при  $x \rightarrow \pm a$ , тому вважатимемо  $y_\eta(x) = -c = const$ , тобто

$$\sigma_z(x, h) = -cf(x), |x| < a. \tag{26}$$

При  $\eta = 1$  напруження мають логарифмічну особливість і вважатимемо, що  $y_\eta(x) = -c \ln(a^2 - x^2)$ , тобто

$$\sigma_z(x, h) = -c \ln(a^2 - x^2) f(x), |x| < a. \tag{27}$$

Підставимо співвідношення (26) і (27) в (21), отримаємо:

при  $\eta = \frac{1}{2}$  і  $\eta = \frac{3}{2}$

$$f(x) = \kappa \left[ \int_{-a}^a (a^2 - t^2)^\eta f(t) R_1(t-x) dt + \int_{-a}^a \frac{\left[ (a^2 - t^2)^\eta f(t) \right]'}{t-x} dt \right] - bg(x), \tag{28}$$

при  $\eta = 1$

$$\ln(a^2 - x^2) f(x) = \kappa \left[ \int_{-a}^a (a^2 - t^2) f(t) R_1(t-x) dt + \int_{-a}^a \frac{\left[ (a^2 - t^2) f(t) \right]'}{t-x} dt \right] - bg(x), \tag{29}$$

де  $\kappa = \frac{2\mu b}{\pi(2-\omega)}$ ,  $b = \frac{1}{c}$ .

Метод розв'язання – аналогічний тому, який використовувався у випадку вільної тріщини. Аналоги співвідношень (25) при цьому мають вигляд:

$$\sum_{i=0}^n \rho_i \left[ S_{2i}(x) - \kappa \int_{-a}^a S_{2i}(x) (a^2 - t^2)^\eta R_1(t-x) dt - \kappa F_i(x) \right] = -bg(x), \tag{30}$$

при  $\eta = \frac{1}{2}$  і  $\eta = \frac{3}{2}$ ,

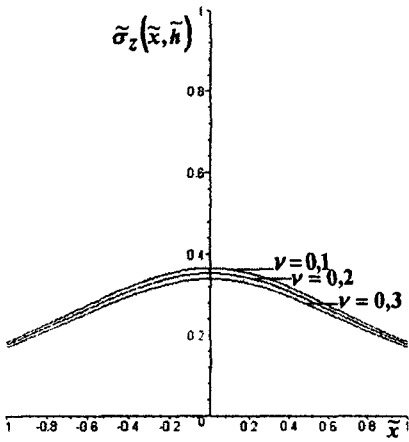
$$\sum_{i=0}^n \rho_i \left[ \ln(a^2 - x^2) S_{2i}(x) - \kappa \int_{-a}^a S_{2i}(x) (a^2 - t^2) R_1(t-x) dt - \kappa F_i(x) \right] = -bg(x), \tag{31}$$

при  $\eta = 1$ .

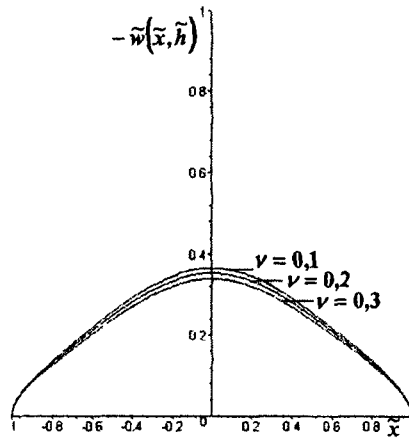
**Чисельні приклади.** Розглянемо тріщину з пружним наповнювачем, яка знаходиться на межі розподілу пружного шару та абсолютно жорсткого півпростору (рис. 1). Довжина тріщини  $2a$ . Шар знаходиться під дією нормального зосередженого навантаження величини  $Q$ .

Для числових розрахунків введено безрозмірні величини  $\tilde{h} = h/a$ ,  $\tilde{x} = x/a$ ,  $\tilde{\mu} = \mu a/Q$ ,  $\tilde{b} = bQ/a$ ,  $\tilde{\sigma}_z(\tilde{x}, \tilde{h}) = \sigma_z(x, h)a/Q$ ,  $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{h}) = w(x, h)/a$ . Нижче наведено графіки нормальних напружень  $\tilde{\sigma}_z(\tilde{x}, \tilde{h})$  (рис. 3, а, б, в, г) і вертикальних переміщень  $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{h})$  (рис. 4, а, б, в, г) точок верхнього берега тріщини при

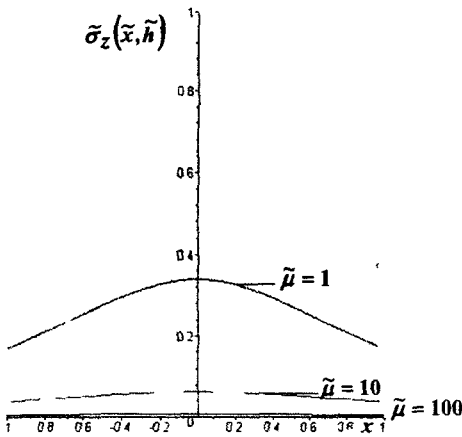
$$\eta = \frac{1}{2}.$$



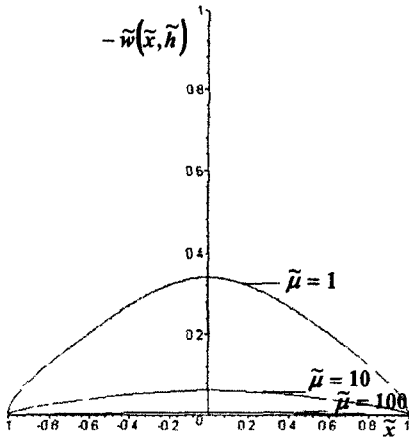
а)



а)

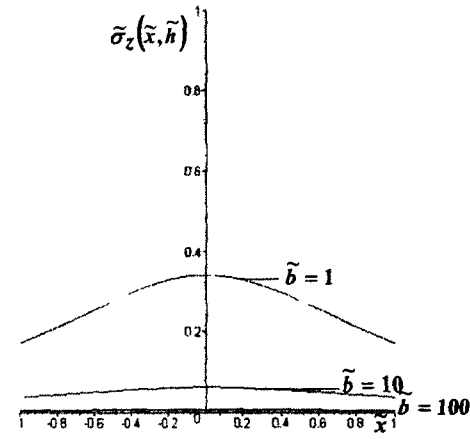


б)

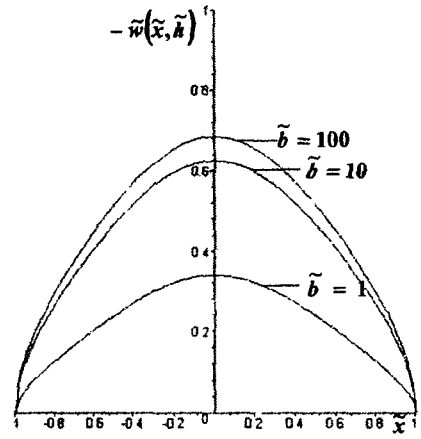


б)

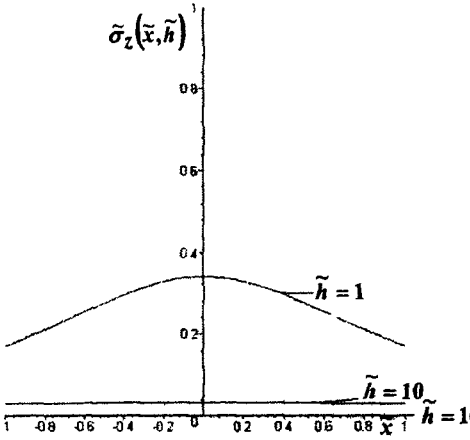




в)

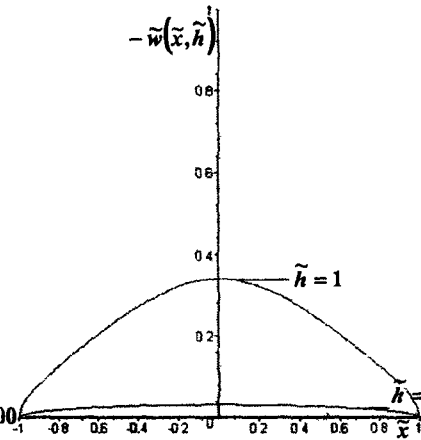


в)



г)

Рис. 3. Нормальні напруження



г)

Рис. 4. Вертикальні переміщення

Аналіз графіків показує, що зі збільшенням коефіцієнта Пуассона  $\nu$ , модуля зсуву  $\tilde{\mu}$  та товщини шару  $\tilde{h}$  спостерігається зменшення нормальних напружень  $\tilde{\sigma}_z(\tilde{x}, \tilde{h})$  та вертикальних переміщень  $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{h})$  точок верхнього берега тріщини, при збільшенні коефіцієнта пружності  $\tilde{b}$  нормальні напруження  $\tilde{\sigma}_z(\tilde{x}, \tilde{h})$  в точках верхнього берега тріщини зменшуються, а вертикальні переміщення  $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{h})$  збільшуються. Отримані результати не суперечать фізичному сенсу.

**Висновок.** У статті пропонується спосіб визначення НДС шару поблизу тріщини нормального відриву, яка знаходиться на межі пружного шару та абсолютно жорсткої півплощини. Для розв'язку задачі використано метод інтегральних перетворень Фур'є. Задача зводиться до розв'язання гіперсингулярного інтегрального рівняння. В рамках запропонованої моделі отримано результати, які узгоджуються з отриманими іншими авторами.

## Бібліографічні посилання

1. Александров В. М. К задаче о трещине на границе раздела упругой полосы и полуплоскости / В. М. Александров, Д. А. Пожарский // Механика твердого тела. – 2001. – №1. – С. 86–93.
2. Астафьев В. И. Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова. – Самара, 2004. – 562 с.
3. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках / А. Н. Гузь. (Неклассические проблемы механики разрушения : в 4-х т., 5-ти кн. [Под общ. ред. А. Н. Гузя]; т. 4, кн. 2). – К., 1993. – 238 с.
4. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн) / И. К. Лифанов. – М., 1995. – 520 с.
5. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М., 1966. – 708 с.
6. Попов Г. Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания / Г. Я. Попов. – К.: О., 1982. – 168 с.
7. Саврук М.П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. – К., 1989. – 248 с.
8. Ткаченко І.Г. Двомірна мішана задача термопружності для багаточислової основи / І.Г. Ткаченко // Прикладні пробл. механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 70–78.
9. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М., 1974. – 640 с.

Надійшла до редколеги 11.06.10

УДК 517.91

В. А. Остапенко

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

### КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ В КАНАТАХ ПОДЪЕМНЫХ МЕХАНИЗМОВ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ КАНАТА О БАРАБАН

Розглянуто основні варіанти постановки крайових задач математичної фізики про рух пружних хвиль у канатах змінної довжини стосовно до механізмів, які здійснюють піднімання або опускання вантажів з їхньою допомогою. Ураховано тертя каната по поверхні барабана, а також можливість прослизання каната по барабану, тому рівняння стану каната виявляються різними на барабані та по-за його межами. Крайові умови в задачах точно враховують зміну границь області інтегрування рівнянь стану, а також характер взаємодії каната з вантажем. Передбачено можливість намотування каната з дозвуковими, звуковими, надзвуковими і довільними швидкостями.

*Ключові слова:* механіка тіл змінної довжини, пружні хвилі в канатах, тертя каната з барабаном, намотування з повільною швидкістю.

Рассмотрены основные варианты постановки краевых задач математической физики о движении упругих волн в канатах переменной длины применительно к механизмам, осуществляющим подъем или опускание грузов с помощью канатов. Учтено трение каната о поверхность барабана, а также возможность проскальзывания каната по барабану, поэтому уравнения состояния оказываются разными на барабане и за пределами. Краевые условия в этих задачах точно учитывают смену границ области интегрирования уравнений состояния, а также характер взаимодействия каната с грузом. Предусмотрена возможность наматывания каната с дозвуковыми, звуковыми, сверхзвуковыми и произвольными скоростями.

*Ключевые слова* механика тел переменной длины, упругие волны в канатах, трение каната с барабаном, наматывание с произвольной скоростью.

The basic variants on statement of initial-boundary value problems of mathematical physics about movement of elastic waves in ropes of variable length with respect to the devices which are carrying out rise or lowering of cargoes with the help of ropes are considered. Friction of a rope on a surface of a drum, and also an opportunity of frictional sliding a rope on a drum is taken into account therefore the state equations of a rope appear different on a drum and behind its limits. Boundary conditions in these problems precisely take into account change of integration area borders of the state equations, and also character of interaction of a rope with a cargo. The opportunity of winding of a rope with subsonic, sound, supersonic and arbitrary speeds is stipulated.

*Key words.* mechanics of variable length bodies, elastic waves in ropes, friction of a rope with a drum, winding with arbitrary speed

**Введение.** Исследование динамического поля напряжений в канатах подъемных устройств, таких как лифты и шахтные подъемники, представляет важную для практического применения задачу. Поэтому, изучению проблемы вычисления динамических напряжений, возникающих в канатах, посвящено большое количество работ. Оказалось, что без учета изменения длины, по существу, не удастся получить модель системы, состоящей из каната и барабана, достаточно адекватную натурной. Кроме того, стало ясно, что неизбежно возникающие в канатах разрывы напряжений можно исследовать лишь с помощью построения решения в виде распространяющихся волн. Такое исследование проведено в [1 – 5] в предположении, что сила трения каната о барабан настолько велика, что его проскальзывание по барабану не может происходить. При таком предположении задача была сведена к решению волнового уравнения в области с переменными границами. Благодаря разработанному методу построения волн, отражаемых от подвижной границы, было получено точное решение такой задачи, представляющее собой совокупность распространяющихся волн.

Если коэффициент трения каната о барабан не слишком велик, происходит проскальзывание каната по барабану [6]. В этом случае упругие перемещения в той части каната, которая намотана на барабан, описываются телеграфным уравнением, в то время как перемещения в висящей части описываются волновым уравнением. Поэтому, в данном случае возникает система с переменной структурой и подвижными границами. Точная формулировка и последующее решение такой проблемы представляют несомненный интерес.

**Математическая модель.** В создаваемой здесь математической модели канат рассматривается как гибкая нить. Пусть канат, подвешенный вертикально и имеющий общую длину  $L$ , в начальный момент времени  $t = 0$  начинает наматываться на барабан. К концу его подвешен груз массы  $m$ , то есть вес груза  $G = mg$ , где  $g$  – ускорение силы тяжести. Начало координат оси  $x$  находится в точке прикрепления конца каната к барабану до начала движения и в течение всего периода движения каната и барабана является неподвижным. Ось  $x$  на барабане проходит вдоль оси каната, вне барабана также проходит по оси каната, но направлена вертикально вниз. При  $t = 0$  часть каната длиной  $l_0$  намотана на барабан. В этот же момент времени канат начинает наматываться на барабан с угловой скоростью  $\omega(t)$  и угловым ускорением  $\varepsilon(t)$ , то есть

$$\omega(t) = \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + \omega(0) . \quad (1)$$

Если  $r$  – радиус оси каната на барабане, то линейное перемещение каната будет осуществляться со скоростью

$$V(t) = \omega(t)r = r \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + r\omega(0) . \quad (2)$$

При отсутствиі проскальзывания каната по барабану все его точки, если канат рассматривать как абсолютно жесткое тело, будут получать перемещение

$$v(t) = r \int_0^t \int_0^s \varepsilon(\tau) d\tau ds + r\omega(0)t + v(0) . \quad (3)$$

Таким образом, положение  $U(x,t)$  любой точки каната, имевшей до начала движения координату  $x$ , будет определяться выражением

$$U(x,t) = x + u(x,t) - v(t) , \quad (4)$$

где  $u(x,t)$  – упругие перемещения точек каната.

Рассмотрим состояние динамического равновесия вырезанного из вертикальной части каната его отрезка, заключенного между координатами  $x$  и  $x + dx$ . Со стороны оставшейся части каната на него действуют растягивающие усилия  $P(x,t)$  и  $P(x+dx,t)$ . Кроме того, канат является весомым, то есть к нему приложена массовая сила  $q(x,t) = g$ , направленная вдоль оси  $x$  (рис. 1).

Растягивающие усилия в канате определяются следующим образом:

$$P(x,t) = \sigma(x,t)S; \quad P(x + dx,t) = \sigma(x + dx,t)S ,$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения каната, а напряжение  $\sigma(x,t)$  вычисляется с помощью закона Гука

$$\sigma(x,t) = E\varepsilon(x,t) .$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга,  $\varepsilon(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$  – относительная деформация каната.

Поэтому

$$P(x,t) = ES \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}; \quad P(x + dx,t) = ES \frac{\partial u(x + dx,t)}{\partial x} . \quad (5)$$

Равнодействующая сил, приложенных к вырезанному отрезку каната, равна

$$R = P(x + dx,t) - P(x,t) + \rho_1 dx q(x,t) .$$

Здесь  $\rho_1$  – линейная плотность каната. Заметим, что линейная плотность каната связана с его объемной плотностью  $\rho$  соотношением  $\rho_1 = \rho S$ . Следовательно, по второму закону Ньютона

$$R = \rho_1 dx \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} .$$

Подставляя сюда значение  $R$  и учитывая равенства (5), получим

$$ES \left( \frac{\partial u(x + dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + g \rho_1 dx = \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} \rho_1 dx$$

Применив к последнему равенству теорему о среднем

$$\frac{\partial u(x + dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(x + \theta dx,t)}{\partial x^2} dx ,$$

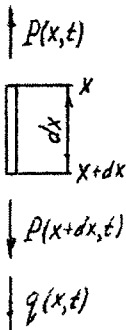


Рис.1. Схема нагружения элемента каната

где  $0 < \theta < 1$ , и перейдя к пределу при  $dx \rightarrow 0$ , после введения обозначения

$$a^2 = \frac{E}{\rho}$$

приведем это равенство к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{g}{a^2} \quad (6)$$

Из равенства (4) следует

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \varepsilon(t)r. \quad (7)$$

Подставив эти значения в равенство (6), получим уравнение для упругих перемещений в вертикальной части каната

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{q(x,t)}{a^2} - \frac{\varepsilon(t)r}{a^2} \quad (8)$$

Учтя ранее введенное значение массовой силы  $q(x,t)$ , уравнение (8) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{g + \varepsilon(t)r}{a^2} \quad (9)$$

Учтя равенства (7), уравнение (6) можно также записать в виде

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{g}{a^2}. \quad (10)$$

На части каната, намотанной на барабан, вес каната уравновешивается реакцией наружной поверхности барабана. Поэтому вдоль оси  $x$  вес каната не действует.

Канат рассматривается как гибкая нить, намотанная на барабан радиуса  $r$ . Вследствие наличия растягивающего канат усилия  $P(x,t)$  возникает давление каната на барабан. Давление на единицу длины каната, обозначим через  $p(x,t)$ . В свою очередь, наличие давления каната на барабан вызывает появление силы трения каната о барабан при попытке проскальзывания каната по барабану. Направление силы трения будет противоположным направлению проскальзывания каната по барабану. Такое проскальзывание обусловлено упругими перемещениями в канате.

Ось  $x$  направим вдоль каната в сторону поднимаемого канатом груза. Положительное направление упругих перемещений в канате, обозначаемых  $u(x,t)$ , будем полагать совпадающим с положительным направлением оси  $x$ . Следует учесть также, что канат движется вместе с барабаном, поэтому перемещения точек каната относительно барабана будут определяться только упругими перемещениями  $u(x,t)$ . Тогда отнесенная к единице длины каната сила трения  $f(x,t)$  будет иметь направле-

ние, противоположное  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$  и определяться выражением

$$f(x,t) = -\beta p(x,t) \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right), \quad (11)$$

где  $\beta$  – коэффициент трения каната о барабан.

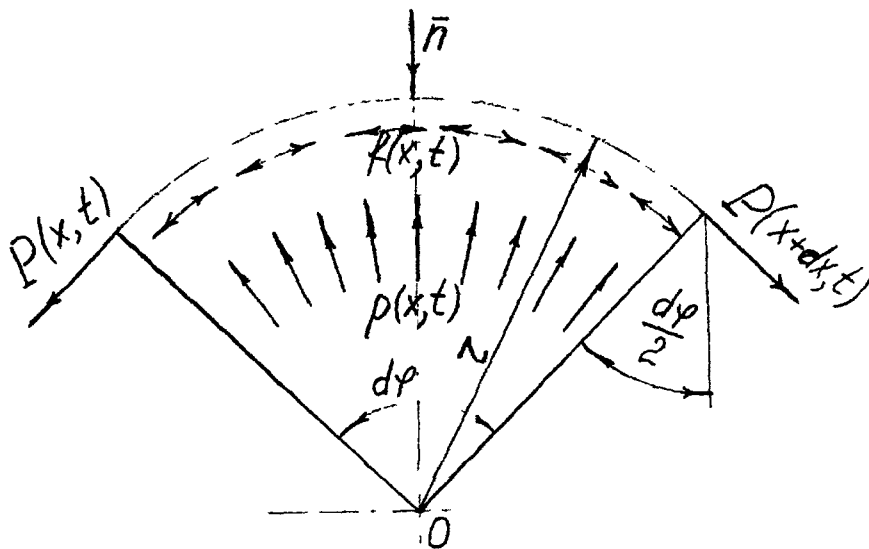


Рис. 2. Схема действия сил на барабане

Рассмотрим элемент барабана с канатом, заключенный между углом  $d\varphi$  (рис 2). Учитывая, что канат рассматривается как гибкая нить, то есть его выпрямление не приводит к появлению дополнительных усилий, для выпрямленного каната по второму закону Ньютона для сил, действующих на этом участке, получим равенство

$$P(x + dx) + f(x, t)dx - P(x, t) = \rho S \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} dx \quad (12)$$

Следует учесть, что  $x = r \varphi$ ;  $dx = r d\varphi$ . Относительное удлинение каната при упругих деформациях по-прежнему определяется равенством  $\varepsilon = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ , а усилия в канате – равенствами (5). Поэтому, применив к равенству (12) теорему о среднем и переходя к пределу при  $dx \rightarrow 0$ , получим

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{ES} f(x, t), \quad (13)$$

Выразим также линейную силу трения  $f(x, t)$  через упругие перемещения. Заметим, прежде всего, что путем проектирования на направление  $\bar{n}$  (рис 2) удастся выразить линейное давление  $p(x, t)$  через усилие  $P(x, t)$ :

$$p(x, t)dx = P(x + dx, t) \sin \frac{d\varphi}{2} + P(x, t) \sin \frac{d\varphi}{2} \quad (14)$$

Учтя, что по теореме о среднем

$$P(x + dx, t) - P(x, t) = P(x + \theta dx) dx,$$

где  $0 < \theta < 1$ , а также тот факт, что  $dx = r d\varphi$ , получим отсюда

$$p(x, t) = \frac{1}{r} [P_x(x + \theta \Delta x, t) r d\varphi + 2P(x, t)] \frac{\sin \frac{d\varphi}{2}}{d\varphi}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при  $d\varphi \rightarrow 0$ , получим

$$p(x, t) = \frac{P(x, t)}{r} \tag{15}$$

С учетом (5) получим

$$p(x, t) = \frac{ES}{r} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \tag{16}$$

поэтому формула (11) примет вид

$$f(x, t) = -\frac{\beta ES}{r} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right) \tag{17}$$

Подставив это значение  $f(x, t)$  в уравнение (13), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\beta}{r} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right) \tag{18}$$

Наконец, применив к (18) второе равенство (7), получим уравнение, описывающее упругие перемещения в канате, наматываемом на барабан

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(t)r}{a^2} = \frac{\beta}{r} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right) \tag{19}$$

Уравнение (19) удобно рассматривать в стандартном виде телеграфного уравнения, в данном случае нелинейного

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\beta}{r} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right) = -\frac{\varepsilon(t)r}{a^2} \tag{20}$$

Таким образом, в висящей части каната упругие перемещения определяются как решение волнового уравнения (9) или (10), а в части каната, навитой на барабан – как решения нелинейного телеграфного уравнения (20).

**Краевые условия.** Возможны несколько вариантов постановки краевых задач для рассматриваемой системы. Мы полагаем, что основными из них являются три следующих варианта: перед началом движения груз висит на канате; перед началом движения груз покоится на опоре, но канат выбран; перед началом движения груз покоится на опоре, а канат провисает. Этим не исчерпываются все возможные варианты начальных состояний системы, однако мы предполагаем, что остальные варианты постановки краевых задач могут быть получены как комбинация этих трех основных вариантов.

Для любого из этих вариантов будем полагать, что система разгоняется из некоторого начального состояния, определяемого начальными условиями

$$U(x, 0) = \varphi(x) \quad , \quad U_t(x, 0) = \psi(x) \quad (21)$$

Верхний конец каната, имеющий при  $t = 0$  координату  $x = 0$ , прикреплен к барабану, поэтому его перемещение при  $t > 0$  будет определяться выражением

$$U(0, t) = -v(t) \quad (22)$$

Во всех вариантах будет предполагаться, что система разгоняется из начального состояния равновесия и покоя, то есть, что  $v(0) = 0$ ;  $\omega(0) = 0$ .

**Вариант 1. Груз висит на канате.** До начала намотки каната на барабан, то есть при  $t < 0$ , груз уже был подвешен к канату и в канате установились статические перемещения  $u_s(x)$  и напряжения  $\sigma_s(x)$ . В этом варианте к нижнему концу каната, имеющему при  $t = 0$  координату  $x = L$ , приложены три силы. Во-первых, это вес концевого груза  $G = m g$ . Во-вторых, сила инерции груза, возникающая при разгоне или торможении барабана. Если рассматривать канат как абсолютно твердое тело и полагать, что угловое ускорение вращения барабана  $\varepsilon(t)$  направлено в сторону намотки каната, то линейное ускорение груза (а также и каната)  $b(t) = \varepsilon(t) r$  и направлено вертикально вверх. Таким образом, инерционная составляющая в тяговом усилии каната, связанная с ускорением барабана, равна

$$F_b(t) = m b(t)$$

и направлена как и  $b(t)$  вверх. Если канат разрезать в нижнем его сечении, то для сохранения равновесия к его нижнему концу нужно приложить усилие  $F_b(t)$ , направленное вниз.

В третьих, на нижнем конце каната действует сила инерции груза, возникающая вследствие упругих перемещений каната в точке его соединения с грузом. Так как положительное направление упругих перемещений принято совпадающим с положительным направлением оси  $x$ , ускорение  $u_{tt}$  будет также направлено вдоль оси  $x$  вниз. А поскольку  $b(t)$  и  $u_{tt}$  имеют разные направления, сила инерции груза, возникающая вследствие упругих перемещений в канате, будет равна

$$F_u(x, t) = -m u_{tt}(x, t) .$$

Таким образом, равнодействующая сил, приложенных к концу каната, с учетом его движения равна

$$G + F_b + F_u = m(g + \varepsilon(t)r - u_{tt}(L - v(t), t))$$

Эта равнодействующая уравновешивается натяжением каната

$$P(x, t) = ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$$

Поэтому в точке  $x = L - v(t)$  справедливо равенство

$$P(L - v(t), t) = G + F_b + F_u \quad ,$$

откуда следует краевое условие на нижнем конце каната

$$u_x(L - v(t), t) = \frac{m}{ES} (g + \varepsilon(t)r - u_{tt}(L - v(t), t)) \quad (23)$$

При постановке краевой задачи следует учесть, что точка начального контакта каната с барабаном, в неподвижной системе координат  $Ox$  не перемещается и имеет постоянную координату  $x = l_0$ . При  $t > 0$  область, занимаемая канатом, определяется интервалом  $-v(t) < x < L - v(t)$ . Таким образом, оказывается, что краевая задача об упругих перемещениях в канате, поднимающем груз и наматываемом на барабан, ставится следующим образом. В области  $-v(t) < x < L - v(t)$ ,  $t > 0$  найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию  $u(x, t)$ , такую, которая при  $-v(t)$



$x < l_0$  удовлетворяет уравнению (20), а при  $l_0 < x < L - v(t)$  – уравнению (9), а также крайевым и начальным условиям (21), (22) и (23). Кроме того, в точке  $x = l_0$  должны выполняться условия непрерывности упругих перемещений и деформаций:

$$v(l_0, t) = w(l_0, t); \quad v_x(l_0, t) = w_x(l_0, t). \quad (24)$$

В левой части равенства (24) находится решение краевой задачи на интервале  $-v(t) < x < l_0$ , а в правой части – на интервале  $l_0 < x < L - v(t)$ . Иными словами, решение задачи представляется в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} w(x, t), & l_0 < x < L - v(t); \\ v(x, t), & -v(t) < x < l_0. \end{cases} \quad (25)$$

Начальные условия (21) представляют собой статические перемещения и скорости точек каната и в этом варианте получают следующие значения. На интервале  $l_0 < x < L - v(t)$  на канат в его поперечном сечении, имеющем координату  $x$ , действуют вес груза  $G$  и вес  $\rho_l(L - x)g$  части каната, расположенной ниже сечения  $x$ . Сумма этих сил будет уравновешиваться натяжением каната, которое определяется по формуле (5). Поэтому справедливо равенство

$$ESu_x(x) = G + \rho_l(L - x)g$$

Интегрируя это равенство по  $x$  в пределах от  $l_0$  до  $x$ , получим

$$u(x) = \frac{G(x - l_0)}{ES} - \frac{\rho_l(L - x)^2 g}{2ES} + \frac{\rho_l(L - l_0)^2 g}{2ES} + u(l_0) \quad (26)$$

Из (26) следует, что

$$u_x(l_0) = \frac{1}{ES}(G + \rho_l(L - l_0)g) \quad (27)$$

В статическом состоянии вес груза и вес каната направлены вниз. Поэтому сила трения каната о барабан направлена в противоположную сторону, то есть вверх. А это значит, что в уравнении (20) сомножитель  $\text{sign}\left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right)$  следует принимать равным единице. Стационарную часть упругих перемещений будем представлять в виде

$$u_s(x) = \begin{cases} w_s(x), & l_0 < x < L, \\ v_s(x), & 0 < x < l_0 \end{cases} \quad (28)$$

Здесь  $w_s(x)$  – стационарные упругие перемещения на интервале  $l_0 < x < L$ , представленные формулой (26). Стационарные упругие перемещения  $v_s(x)$  на интервале  $0 < x < l_0$  оказываются решением следующей краевой задачи. В области  $0 < x < l_0$  найти решение уравнения (20), удовлетворяющее крайнему условию (22) при  $t = 0$ , а также условию непрерывности деформаций в точке  $x = l_0$ :

$$v_x(l_0) = u_x(l_0) = \frac{1}{ES}(G + \rho_l(L - l_0)g). \quad (29)$$

Так как функция  $v_s(x)$  не зависит от  $t$ , уравнение (20) для такой функции превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 v_s(x)}{dx^2} - \frac{\beta}{r} \frac{dv_s(x)}{dx} = 0 \quad (30)$$

Из уравнения (30) следует

$$\frac{dv_s(x)}{dx} = C e^{\frac{\beta}{r} x}. \quad (31)$$

Отсюда и краевого условия (29) получаем

$$C = \frac{1}{ES} e^{-\frac{\beta l_0}{r}} (G + \rho l(L-l_0)g).$$

Поэтому

$$\frac{dv_s(x)}{dx} = \frac{1}{ES} e^{\frac{\beta}{r}(x-l_0)} (G + \rho l(L-l_0)g)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$v_s(x) = \frac{G + \rho l(L-l_0)g}{ES} \frac{r}{\beta} e^{\frac{\beta}{r}(x-l_0)} + C_1$$

Отсюда и краевого условия (22) при  $t = 0$ , с учетом того, что  $v(0) = 0$ , следует

$$v_s(x) = \frac{G + \rho l(L-l_0)g}{ES} \frac{r}{\beta} \left[ e^{\frac{\beta}{r}(x-l_0)} - e^{-\frac{\beta l_0}{r}} \right] \quad (32)$$

Из (32) следует

$$v_s(l_0) = \frac{G + \rho l(L-l_0)g}{ES} \frac{r}{\beta} \left[ 1 - e^{-\frac{\beta l_0}{r}} \right] \quad (33)$$

Из условия непрерывности перемещений (40) при  $t = 0$  следует

$$u(l_0) = v_s(l_0)$$

Поэтому с учетом последнего равенства и равенства (33) функция (26) окончательно принимает вид

$$w_s(x) = \frac{G(x-l_0)}{ES} - \frac{\rho l(L-x)^2 g}{2ES} + \frac{\rho l(L-l_0)^2 g}{2ES} + \frac{G + \rho l(L-l_0)g}{ES} \frac{r}{\beta} \left[ 1 - e^{-\frac{\beta l_0}{r}} \right] \quad (34)$$

Таким образом, если в начальный момент времени груз висит на канате, то в нем уже созданы начальные перемещения  $u_s(x)$ , определяемые формулой (28), где  $w_s(x)$  вычисляется по формуле (34), а  $v_s(x)$  – по формуле (32). А так как начальная скорость всех точек каната принята равной нулю, начальные условия в краевой задаче для первого варианта имеют следующий вид:

$$u(x, 0) = u_s(x), \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (35)$$

**Вариант 2. Груз покоится на опоре.** До начала намотки каната на барабан, то есть при  $t < 0$ , груз покоился на опоре и его вес на канат не передавался. В то же время канат был выбран, и при включении барабана груз сразу повисал на канате. В этом случае изменятся только начальные условия задачи. Так как вес груза до начала движения на канат не действовал, в формулах (32) и (34), определяющих функции  $v_s(x)$  и  $w_s(x)$  следует принять  $G = 0$ , то есть записать эти формулы в виде

$$v_s(l_0) = \frac{\rho l(L-l_0)g}{ES} \frac{r}{\beta} \left[ 1 - e^{-\frac{\beta l_0}{r}} \right],$$

$$w_s(x) = -\frac{\rho l(L-x)^2 g}{2ES} + \frac{\rho l(L-l_0)^2 g}{2ES} + \frac{\rho l(L-l_0)g}{ES} \frac{r}{\beta} \left[ 1 - e^{-\frac{\beta l_0}{r}} \right] \quad (36)$$

Поэтому, краевая задача об упругих перемещениях во втором варианте ставится следующим образом. В области  $-\nu(t) < x < L - \nu(t)$ ,  $t > 0$  найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию  $u(x, t)$ , такую, которая при  $-\nu(t) < x < l_0$

удовлетворяет уравнению (20), а при  $l_0 < x < L - v(t)$  – уравнению (9), а также краевым и начальным условиям (22), (23) и (35). Кроме того, в точке  $x = l_0$  должны выполняться условия непрерывности упругих перемещений и деформаций (24). В начальных условиях (35) функция  $u_3(x)$  должна вычисляться по формуле (28), а компоненты в правой части этой формулы – по формуле (36).

**Вариант 3. До начала движения канат провисал.** До начала намотки каната на барабан, то есть при  $t < 0$ , груз покоился на опоре и его вес на канат не передавался. Кроме того, канат провисал, то есть имел общую длину не  $L_1$ , а  $L_2$ , имея избыток длины  $\Delta L = L_1 - L$ . Вполне оправдано предположить, что вес избыточной части каната опирался на груз, поэтому решение задачи о статических перемещениях в канате под действием собственного веса по-прежнему имеет вид (36). После включения барабана сначала выбирается этот избыток длины и только потом груз повисает на канате и начинает движение.

Следовательно, начальные условия в третьем варианте не будут отличаться от начальных условий для второго варианта. Останется неизменным и краевое условие (22). В то же время, в краевом условии (23) необходимо учесть тот факт, что движение груза начнется с запаздыванием. Интервал времени  $t_1$ , в течение которого такое запаздывание произойдет, определится как наименьший положительный корень уравнения

$$v(t) = \Delta L. \quad (37)$$

Поэтому краевое условие на нижнем конце каната в этом случае будет иметь вид:

$$ux(L - v(t), t) = \frac{m}{ES} (g + \varepsilon(t)r - u_{tt}(L - v(t), t))H(t - t_1), \quad (38)$$

где  $H(t)$  – функция Хевисайда. Краевое условие (38) записано в предположении, что при  $t < t_1$  нижний конец каната свободен.

Таким образом, краевая задача об упругих перемещениях в третьем варианте ставится следующим образом. В области  $-v(t) < x < L - v(t)$ ,  $t > 0$  найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию  $u(x, t)$ , такую, которая при  $-v(t) < x < l_0$  удовлетворяет уравнению (20), а при  $l_0 < x < L - v(t)$  – уравнению (9), а также краевым и начальным условиям (22), (38) и (35). Кроме того, в точке  $x = l_0$  должны выполняться условия непрерывности упругих перемещений и деформаций (24). В начальных условиях (35) функция  $u_3(x)$  должна вычисляться по формуле (28), а компоненты в правой части этой формулы – по формуле (36).

Уже из особенностей постановки задачи варианта 3 следует, что в ее решении будут возникать дополнительные разрывы.

С точки зрения разработки методов решения всех трех вариантов краевых задач, следует различать возможные скорости движения подвижного конца. Эти методы претерпевают существенную модификацию в зависимости от того, с какой скоростью движется подвижный конец: дозвуковой, звуковой или сверхзвуковой [1–3]. Однако если краевая задача для всех этих трех диапазонов изменения скорости подвижного конца решена, становится возможным построение решения для каждого из рассмотренных вариантов постановки краевых задач для случая движения подвижного конца с произвольной скоростью [1–3].

**Выводы.** Решение поставленных выше краевых задач позволяет построить более корректную концепцию о распространении упругих волн и распределении динамического поля напряжений в канатах переменной длины и с учетом трения каната о барабан. Оказывается, что процессы отражения волн от подвижного и неподвижного концов существенно отличаются друг от друга. Вследствие этого возникающие из-за присутствия в краевых условиях функций Хевисайда скачки на-

пряжений распространяются вдоль каната с подвижными границами иначе, чем в канате неизменной длины.

### Библиографические ссылки

1. Остапенко В.А. Первая краевая задача для области с подвижной границей / В.А. Остапенко // Диф. уравн. и их прилож. в физике. – Днепропетровск, 1989. – С. 4–14.
2. Остапенко В.А. Вторая краевая задача для области с подвижной границей / В.А. Остапенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика. – 1997. – Вип.1. – С. 3–21.
3. Остапенко В.А. Третья краевая задача для области с подвижной границей / В.А. Остапенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Математика. – 1996. – Вип.2. – С. 4–23.
4. Ostapenko V.A. Dynamic field of displacements in rods of variable length / V.A. Ostapenko // Proceedings of 8<sup>th</sup> International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz, Poland, – 2005. – P. 316–323.
5. Остапенко В.А. Краевая задача для стержня переменной длины, возмущаемого с подвижного верхнего конца / В.А. Остапенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2006. – №2/1. – С. 182–198.
6. Горошко О.А. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины / О.А. Горошко, Г.Н. Савин. – К., 1971. – 224 с.

Надійшла до редколегії 25 02 11

УДК 621.311.245:534.322.3

Г.И. Сокол, Т.В. Тузниченко

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ВОЗДУШНЫХ ПОЛОСТЯХ БАШНИ ВЕТРОАГРЕГАТОВ С УЧЁТОМ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ

Отримані рівняння, які описують амплітуду звукового тиску другої гармоніки та її зміну при розповсюдженні у повітряних об'ємах секцій башти вітроустановки. Записані аналітичні вирази, які дозволяють знайти координату  $x_{max}$  на продольній вісі поперечного перетину секцій конічної форми, де друга гармоніка звукового тиску досягає свого максимуму.

*Ключові слова* хвильові процеси, нелінійні ефекти, координата максимуму другої гармоніки, повітряні об'єми секцій вежі, конічна форма, горизонтально вісьова вітроустановка.

Получены уравнения, описывающие амплитуду звукового давления второй гармоникки и ее изменение при распространении в воздушных полостях секций башни ветроустановки. Записаны аналитические выражения, позволяющие определить координату  $x_{max}$  поперечного сечения секций конической формы, где вторая гармоника звукового давления достигает своего максимума.

*Ключевые слова:* волновые процессы, нелинейные эффекты, координата максимума второй гармоникки, воздушные полости секций башни, коническая форма, горизонтально осевая ветроустановка.

Equations describing the amplitude of the sound pressure of the second harmonic and its change during the propagation in air cavities of the tower windmill sections are recieved. The analytical expressions to determine the coordinate of the cross-sectional  $x_{max}$  conical sections are written, where the second harmonic of the sound pressure reaches its maximum.

*Key words* wave processes, nonlinear effects, the coordinate of the second-harmonic maximum, air spaces of the tower sections, conical shape, horizontal axis wind turbine

**Введение.** Развивающиеся новые способы получения энергии с использованием ветровых потоков считаются экологически чистыми [1; 2; 3]. Но уже на стадии эскизного проектирования ветроэнергетической установки (ВЭУ), решается проблема обеспечения низких уровней интенсивности шумов и обеспечение защиты окружающей среды от шумового загрязнения. Анализ шума ВЭУ предполагает теоретические исследования на основе моделей процесса генерирования и экспериментальные исследования с измерением характеристик. Он необходим для разработки мероприятий, направленных на снижение уровня звукового давления (УЗД) до требуемого по санитарным нормам Украины [4]. Нормы являются обязательными для организаций, которые заняты проектированием, производством и эксплуатацией устройств, являющихся источником производственного шума, инфра- и ультразвука, передающиеся через атмосферу, и влияющие на человека в процессе его трудовой деятельности.

В таком ракурсе актуальность проблемы снижения шумов от ВЭУ не вызывает сомнений, так как необходимо исключить вредное влияние шумов на людей на прилегающих территориях, в жилых постройках, а также на живых обитателей природы. Особенно важно решить проблему снижения УЗД шумов на инфразвуковых частотах.

**Постановка задачи.** Рассмотрим башню ВЭУ типа 250С и 500С с точки зрения акустики. Она представляет собой три полых конических секции. Верхняя ее секция, на которой установлена головка с механизмами, имеет диаметры 2200 мм и 1691 мм, длину 15285 мм. Средняя секция имеет диаметры 2200 мм и 2600 мм, длину 8855 мм. Нижняя секция выполнена длиной 8860 мм и имеет диаметры 2600 мм и 3200 мм. Секции башни ВЭУ имеют форму конических труб, приближенных к цилиндру.

Возбудителем акустических колебаний в верхней секции башни является шум от механизмов, работающих в головке ВЭУ. В средней и в нижней секциях акустические колебания возбуждаются шумами, передающимися из предыдущей секции.

Рассмотрим вариант линейной акустики, когда соблюдается критерий, согласно которому при распространении акустической волны величина числа Маха акустическое ( $M_{ак}$ ) значительно меньше 0,01 [5].

Аналитическая зависимость, описывающая падение амплитуды звукового давления  $p$ , любой гармоники, распространяющейся вдоль оси секции конической формы башни ветроустановки, определяется также, как в теории, описывающей распространение звука в рупорах [6]. Поэтому в случае линейного приближения изменение амплитуды звукового давления  $p_i$  имеет вид

$$p_i = p_{mi} \frac{x_0}{x+x_0}, \quad (1)$$

где  $p_{mi}$  – амплитуды в горле;  $x$  – координата вдоль оси  $0-0$  конической секции башни;  $x_0$  – координата, определяющая положение начального сечения усеченного конуса секции башни от вершины конуса (положение горла). Расположение оси башни и координаты сечений представлены на рис. 1.

В случае линейного приближения для первой  $p_1$  и второй  $p_2$  гармоник имеем выражения

$$p_1 = p_{m1} \frac{x_0}{x+x_0}, \quad p_2 = p_{m2} \frac{x_0}{x+x_0}. \quad (2)$$

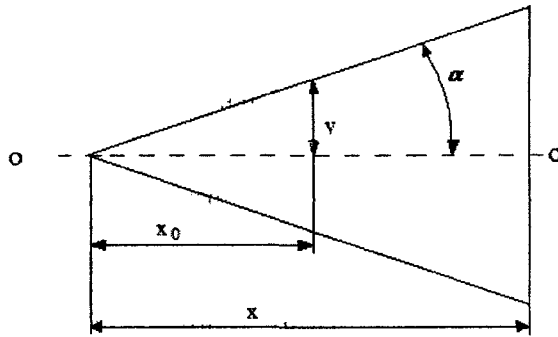


Рис. 1. Секция башни конической формы

На рис. 2 представлены кривые изменения звукового давления  $p$  внутри трубы переменного сечения для случаев, когда сравниваются расчетные значения и полученные при экспериментальных исследованиях путем измерений.

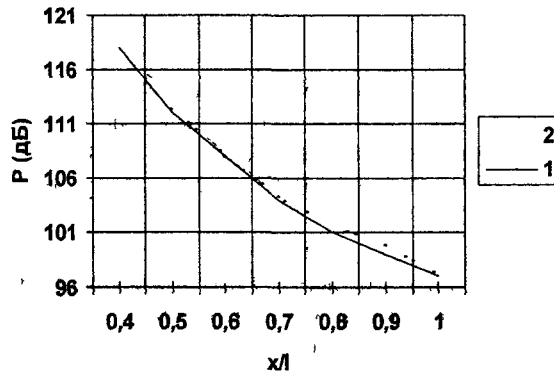


Рис. 2. Изменение амплитуды звукового давления первой гармоники  $p_1$  при ее малом начальном значении в горле рупора  $p_{m1}$  ( $Max \ll 0,01$ ):  
 кривая 1 – расчетные данные;  
 кривая 2 – экспериментальные;  $l$  – длина рупора

Линейный случай позволил ранее [7] рассчитать также частоту резонансных колебаний инфразвуковых и звуковых волн в приближении, когда секции башни представляют собой конуса конечной длины.

В случае, если в верхнем сечении воздушной полости секций башни возбуждается волна большой амплитуды, то акустический процесс распространения звука меняет свой характер. Он является уже нелинейным. Теперь необходимо учитывать возникновение и распространение звука в виде высших гармоник.

Целью настоящей работы является создание методики учета нелинейных эффектов при распространении акустических волн в воздушных полостях секций башни ветроэнергетических установок.

### 1. Методика расчета нелинейных эффектов в воздушных полостях секций башни ветроэнергетической установки.

1.1. Условия проявления нелинейных эффектов при реализации плоской волны конечной амплитуды. Интенсивные звуковые волны качественно отличаются от малоамплитудных возмущений, описываемых в приближении линейной

акустики [5]. При розпространенні інтенсивної волни, происходит поступенне изменение форми волни вследствие разницы в скоростях движения различных участков ее профиля. Точки, отвечающие большему сжатию, движутся быстрее, в результате чего крутизна фронтов сжатия растет. Эволюцию формы волни можно рассматривать как изменение ее спектрального состава: увеличение крутизны фронтов соответствует нарастанию высокочастотных гармоник. Процессу нелинейного увеличения крутизны фронтов противодействуют диссипация энергии волни и дисперсия скорости ее распространения.

Влияние диссипативных эффектов, вязкости и теплопроводности, приводит к сглаживанию профиля волни, уменьшению градиентов скорости и температуры, более быстрому затуханию высокочастотных компонентов спектра волни. К размытию крутизны фронтов приводит и влияние дисперсии звука вследствие «разбегания» различных гармоник, движущихся с разными скоростями. Поэтому распространение интенсивного акустического возмущения определяется конкуренцией нелинейности, диссипации и дисперсии. Относительную роль этих факторов выясняют, исследуя уравнение Корте Вега – де Вриза – Бюргерса [5]. Анализ его решения для случая плоской волни, распространяющейся в неограниченном пространстве, показывает, что нелинейность порождает вторую гармонику. При отсутствии дисперсии амплитуда второй гармоники сначала растет, достигая максимума на расстоянии

$$x_{\max} = \ln 2 / (2\delta\omega^2), \quad (3)$$

(здесь  $\delta$  – коэффициент диссипации,  $\omega$  – круговая частота), а затем экспоненциально затухает. Эволюция профиля нелинейной плоской волни, приводящая к появлению максимума, представлена на рис. 3 [5]. На рис. 3 обозначено  $\xi$  – колебательная скорость.

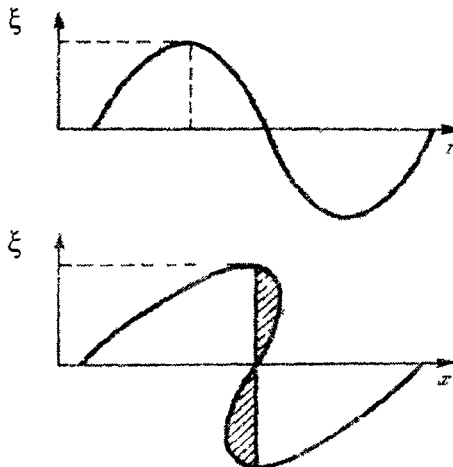


Рис. 3. Изменение профиля волни конечной амплитуды в процессе распространения

**1.2. Нелинейные колебания в воздушных полостях секций башни при распространении волни конечной амплитуды.** Рассмотрим распространение звука внутри секций башни в нелинейном приближении. Нелинейность характеризуется перекачкой энергии первой гармоники в высшие, причём 90 % всей энергии перекачивается во вторую гармонику. Разработаем методику расчета амплитуды

второй гармонике при распространении шумов с высоким УЗД в воздушных полосках секций башни.

Основанием для модели волноводного распространения второй гармонике в секциях башни следующее: при числе оборотов вала мультипликатора 1500 об/мин, частота генерируемого звука равна 238 Гц. Частота второй гармонике – 476 Гц, длина волны – 0,7 м. На длине секций башни 15285 мм, 8855 мм и 8860 мм укладывается более десяти длин волн второй гармонике.

Рассмотрим процесс изменения амплитуды звукового давления во второй гармонике  $p_2$  вдоль оси конической секции не только за счет изменения осевого сечения ( $p_{2лин}$ ), но и за счет проявления нелинейных эффектов ( $p_{2нелин}$ ). Интенсивные звуковые волны качественно отличаются от малоамплитудных возмущений линейной акустики тем, что часть энергии волны основного тона перекачивается в гармоники высших порядков. Амплитуда второй гармонике по мере пробега волны изменяется по закону [8]

$$p_2 = C \cdot p_1^2 \cdot x, \quad (4)$$

$$C = \frac{1}{4} \frac{\gamma + 1}{\gamma \cdot P_0} \cdot \frac{\omega}{c_0}, \quad (5)$$

где  $C$  – параметр;  $\gamma$  – отношение теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме;  $P_0$  – атмосферное давление;  $c_0$  – скорость звука в среде.

Для определения передаточной функции скорости звукового давления во второй гармонике необходимо продифференцировать (4) по  $x$ . Тогда имеем

$$\frac{dp_2}{dx} = C \cdot p_1^2. \quad (6)$$

Приведем сведения из теории плоской волны конечной амплитуды [9]. Уравнения движения, неразрывности и состояния в переменных Эйлера

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \xi \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$p = p(\rho),$$

где  $\rho = \rho_0 + \Delta\rho(x, t)$  – полная локальная плотность среды.

В общем случае уравнение состояния является нелинейным и может быть представлено в виде бесконечного ряда Тейлора по степеням  $\Delta\rho$

$$p = P - P_0 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} \Delta\rho + \frac{1}{2!} \cdot \left( \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=\rho_0} \cdot \Delta\rho^2 + \frac{1}{3!} \cdot \left( \frac{\partial^3 p}{\partial \rho^3} \right)_{\rho=\rho_0} \cdot \Delta\rho^3 + \dots$$

Оценка нелинейных членов в уравнениях при синусоидальном возмущении

$$\left| \xi \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{max} \equiv b = \frac{\omega \cdot \xi_{max}^2}{c_0}; \quad \left| \frac{\partial \xi}{\partial t} \right| \equiv a = \omega \cdot \xi_{max}; \quad \left| \frac{b}{a} \right| = \frac{\xi_{max}}{c_0};$$

$$\left| \xi \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{max} \equiv b' = \frac{\omega \cdot \xi_{max} \cdot \rho_{max}}{c_0}; \quad \left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right| = a' = \omega \cdot \rho_{max}; \quad \frac{b'}{a'} = \frac{\xi_{max}}{c_0}.$$



Отношение нелинейного члена к линейному составляет величину, значение которой равно акустическому числу Маха ( $M_{ak}$ )

$$M_{ak} = \frac{\dot{\xi}_{max}}{c_0} = \frac{P_{max}}{P_0},$$

где  $c_0$  – «локальная» или «местная» скорость звука, характеризующая процесс распространения волны конечной амплитуды

$$c = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^{0,5}.$$

Связь между скоростью звука  $c$  и локальной скоростью звука  $c_0$

$$c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \dot{\xi}.$$

Для адиабатических процессов, когда в качестве уравнения состояния может служить уравнение Пуассона [9], вводится понятие нелинейного параметра среды  $\varepsilon_0$ , который равен

$$\varepsilon_0 = (\gamma + 1) / 2.$$

Уравнение прямой плоской волны конечной амплитуды приобретает вид [9]

$$\dot{\xi}(x, t) = \dot{\xi}_{max} \cdot \sin \omega \cdot \left[ t - \frac{x}{(c_0 + \varepsilon_0 \cdot \dot{\xi})} \right].$$

Спектр волны определяется рядом Фурье для пилообразной функции

$$\dot{\xi}(x, t) = \frac{2}{\pi} \cdot \dot{\xi}'_{max} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot \sin m(\omega t - kx),$$

где  $m$  – номер гармоники;  $\dot{\xi}'_{max}$  – амплитуда пилообразной волны, то есть пиковое значение колебательной скорости, которое в идеальной картине соответствует значению амплитуды синусоидальной волны  $\dot{\xi}_{max}$  у источника. Спектральный состав пилообразной волны представляется в виде ряда Фурье [9].

$$\dot{\xi}(x, t) = \dot{\xi}_{max} \left[ 0,88 \cdot \sin(\omega t - kx) + 0,35 \cdot \sin 2 \cdot (\omega t - kx) + \right. \\ \left. + 0,2 \cdot \sin 3 \cdot (\omega t - kx) + 0,14 \cdot \sin 4 \cdot (\omega t - kx) + \dots \right],$$

где  $\dot{\xi}_{max}$  – амплитуда колебательной скорости первой гармоники у источника.

Между амплитудой пилообразной волны  $\dot{\xi}_{max}$  и амплитудой её первой гармоники ( $m=1$ ) имеет место соотношение

$$\dot{\xi}_{max1} = 0,88 \cdot \dot{\xi}'_{max},$$

а между амплитудой второй гармоники ( $m=2$ ) и амплитудой пилообразной волны связь записывается в виде:

$$\dot{\xi}_{max2} = 0,35 \cdot \dot{\xi}'_{max}.$$

**1.3. Методика исследований второй гармоники в воздушных полостях секций башни как в волноводах конической формы.** Согласно методике, предложенной В.В. Фурдеевым в [8] для распространения звука с учетом нелинейных

ефектов в рупорах, определим  $p_2$  для случая распространения волны конечной амплитуды в воздушных полостях секций конической формы в башне ветроагрегата.

Учтем изменение амплитуды звукового давления  $p_i$  в любой гармонике в воздушных полостях секций конической формы в случае линейного приближения, тогда передаточная функция скорости изменения звукового давления есть производная по  $x$  от выражения (1) Запишем

$$\frac{dp_i}{dx} = -p_{m_i} \frac{x_0}{(x+x_0)^2} = -p_i \frac{1}{(x+x_0)}, \text{ где } i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Передаточная функция скорости изменения амплитуды звукового давления во второй гармонике по мере пробега волны вдоль оси конической секции с учетом нелинейных эффектов (4) изменяется как

$$\frac{dp_2}{dx} = C p_{m1}^2 \frac{x_0^2}{(x+x_0)^2}. \quad (8)$$

Запись суммарного изменения амплитуды второй гармонике вдоль оси трубы конической формы с учетом линейного и нелинейного членов (7) и (8) приводит к неоднородному линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dp_2}{dx} + \frac{1}{(x+x_0)} p_2 = C p_{m1}^2 \frac{x_0^2}{(x+x_0)^2} \quad (9)$$

Решив его [10], найдем аналитическую зависимость, описывающую изменение амплитуды второй гармонике при распространении ее вдоль конической секции с учетом нелинейной добавки:

$$p_{2\text{кон}} = \frac{C p_{m1}^2 \ln(x+x_0) x_0^2}{x+x_0} + \frac{D}{x+x_0} \quad (10)$$

Неизвестную произвольную постоянную  $D$  находим, подчиняя решение (10) уравнения (9) граничному условию:

$$p_{2\text{кон}} = 0, \text{ при } x = 0. \quad (11)$$

Легко проверить, что решение уравнения (9), удовлетворяющее граничному условию (11), имеет вид

$$p_{2\text{кон}} = C p_{m1}^2 \frac{x_0^2}{(x+x_0)} \ln\left(\frac{x+x_0}{x_0}\right), \quad (12)$$

**2. Определение координаты  $x_{\text{max}}$  положения максимумов вторых гармоник для трех секций башни ВЭУ.** Для определения расстояния  $x_{\text{max}}$  от горла до точки, в которой вторая гармоника звукового давления достигает своего максимального значения, воспользуемся необходимым условием экстремума [10]. А затем найдем  $x_{\text{max}}$  для секции конической формы. Производная от функции звукового давления амплитуды второй гармонике, представленной формулой (12), имеет вид

$$\frac{dp_2}{dx} = \frac{C p_{m1}^2 x_0^2 \left[ 1 - \ln \left( \frac{x}{x_0} + 1 \right) \right]}{(x + x_0)^2}$$

Приравняем ее к нулю. Тогда для определения  $x_{max}$  имеем уравнение

$$1 - \ln \left( \frac{x}{x_0} + 1 \right) = 0$$

Отсюда

$$x_{max} = x_0 (e - 1) = (y_0 / \text{tg} \alpha) (e - 1) = 1,7 (y_0 / \text{tg} \alpha),$$

поскольку  $x_0 = y_0 / \text{tg} \alpha$ . Фактически  $y_0$  – это радиус сечения горла конической секции. Легко видеть, что чем больше угол раствора конуса секции, тем ближе к горлу возникает максимум второй гармоники.

**3. Результаты расчетов.** На рисунке 4 представлены результаты расчетов изменения амплитуд вторых гармоник в воздушных полостях трех секций башни.

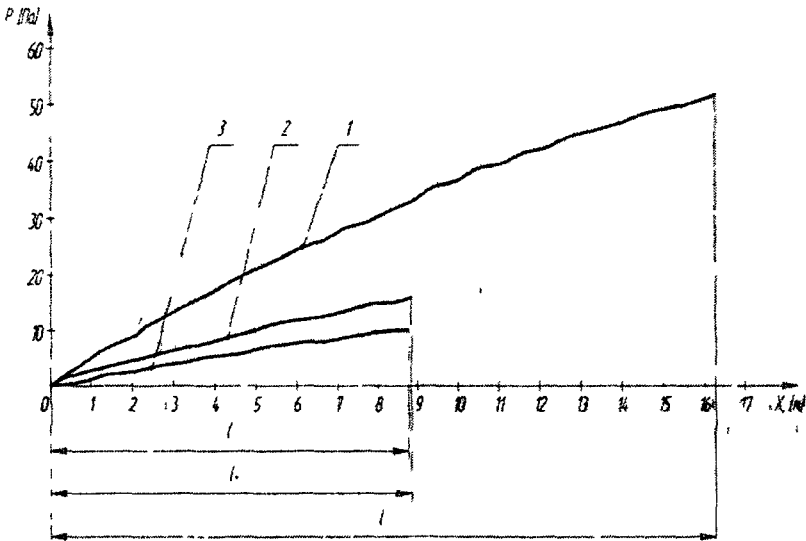


Рис. 4. Изменения амплитуд вторых гармоник в воздушных полостях трех секций башни: 1 – нижняя, 2 – средняя, 3 – верхняя

Из рис. 4 видно, что в секциях конической формы вторая гармоника, приближаясь к устью, падает очень незначительно. Получено, что амплитуда второй гармоники существенно возрастает от узкого к широкому сечению секций, увеличиваясь на 20 дБ. Это требует проведения мероприятий по гашению второй гармоники. Ввиду того, что угол раствора конусов секций в данном случае мал, то есть форма секций почти цилиндрическая, максимум находится на значительном расстоянии от горла секции и выражен неярко.

**Выводы.** Для случая секций башни ветроэнергетической установки конической формы как волноводов получено уравнение, описывающее амплитуду звукового давления второй гармоники, проявляющуюся при генерировании шумом механизмов головки волны конечной амплитуды, и найдено его решение.

Получено аналитическое выражение, позволяющее определить координату  $x_{max}$  поперечного сечения секций конической формы, где вторая гармоника звукового давления достигает своего максимума. Из анализа математического соотношения между координатой, где располагается максимум звукового давления второй гармоники, радиусом сечения узкой части секции и углом раствора конуса сделан вывод, что максимум второй гармоники располагается тем ближе к горлу секции, чем больше угол раствора конуса.

Разработана методика расчета величины звукового давления в воздушных полостях секций башни с учетом нелинейных эффектов. Методика позволяет выявить сечение секции, где необходимо установить гасители звука.

### Библиографические ссылки

1. Відновлювальна енергетика XXI століття. // Матер. 10-ї ювілейної міжнар. наук.-практ. конф. 14–18 вересня 2009 року, пансіонат «Енергетик». СМТ Миколаївка, АР Крим, Україна. – Крим, 2009. – 300 с.
2. 3rd EAST EUROPEAN Conference on WIND ENGINEERING «3rd EECWE'2002»: program. // Conf.: Ukraine, Kyiv, 21 – 25 May, 2002. – Kyiv, 2002.
3. Безручко, К.В. Автономные наземные энергетические установки на возобновляемых источниках энергии : учеб. пособие / К.В. Безручко, С.В. Губин. – Х., 2007. – 310 с.
4. Санітарні норми виробничого шуму, ультразвук та інфразвук ДСН 3.3 6. 037 – 99 // Головне санітарно епідеміологічне управління. – К., 1999. – 79 с.
5. Наугольных К.А. Нелинейные волновые процессы в акустике / К.А. Наугольных, Л.А. Островский. – М., 1990. – 237 с.
6. Морз Ф. Колебания и звук / Ф. Морз. – М., 1948. – 660 с.
7. Сокол Г.И. Резонансные явления в башне ветроэнергетической установки ВЕУ-250 / Г.И. Сокол, Е.В. Пасечный // 4-та міжнар. молод. наук.-практ. конф. «Людина і космос»: Дніпропетровськ, 5–7 червня 2002. – Д., 2002. – С. 472.
8. Фурдуев В.В. Электроакустика / В.В. Фурдуев. – М., 1948. – 256 с.
9. Шутилов В.А. Основы физики ультразвука : учеб. пособие / В.А. Шутилов. – Л., 1980. – 280 с.
10. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М., 1986. – 554 с.

Надійшла до редакції 30.06.10.

УДК 532.516

А.С. Самедов

Национальная Академия Авиации Азербайджана

## РАСЧЕТНЫЕ МЕТОДЫ ТЕПЛОВОЙ ЗАЩИТЫ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ ГАЗОТУРБИННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Приведены результаты исследований по разработке эффективных расчетных методов газодинамики и теплообмена в турбинах авиационных двигателей. Для постановки и решения задач применен прямой подход с использованием как интегральных, так и дифференциальных методов, доведенных до численной реализации. Граничные условия теплообмена определены из решения соответствующих интегральных уравнений и эмпирических соотношений. Достоверность разработанных методик подтверждена расчетно-экспериментальными

**исследованиями теплогидравлических характеристик соплового аппарата первой степени газовой турбины.**

*Ключевые слова: авиационные турбины, методы газодинамического и теплового расчета, численное моделирование.*

Наведено результати досліджень щодо розробки ефективних розрахункових методів газодинаміки та теплообміну в турбінах авіаційних двигунів. Для постановки та розв'язування задач застосовано прямий підхід з використанням як інтегральних, так і диференціальних методів, доведених до чисельної реалізації. Граничні умови теплообміну визначені із розв'язку відповідних інтегральних рівнянь та емпіричних відношень. Достовірність розроблених методик підтверджується розрахунково-експериментальними дослідженнями теплогидравлічних характеристик соплового апарата першого ступеня газовой турбіни.

*Ключові слова: авіаційні турбіни, методи газодинамічного та теплового розрахунку, чисельне моделювання.*

Some results of investigations on development of effective gasdynamic and heattransfer calculation methods in aircraft engine turbines were considered. Straight approach with using as integral and so differential methods to performance and solution of the problem was applied and reduced to numerical realization. Heattransfer border conditions were determined from solutions of corresponding integral equations and empirical correlations. Reability of developed methods is confirmed by calculative-experimental researches of heathydraulic characteristics of a nozzle device of the first step of gasturbine.

*Key words: aircraft turbines, methods of gasdynamic and heattransfer calculations, numerical simulation.*

**Введение.** Одним из основных направлений повышения к.п.д. силовых установок летательных аппаратов является увеличение параметров рабочего процесса и, в первую очередь, температуры и давления газа в турбинах авиационных двигателей. Долговечность элементов проточной части при этом определяются газодинамической и тепловой эффективностью высоконагруженных узлов – сопловых и рабочих лопаток газовой турбины (ГТ), надежность которых оказывает непосредственное влияние на надежность и ресурс двигателя в целом и на безопасность полетов.

Наряду с успехами по разработке и внедрению современных и перспективных технологий изготовления лопаток ГТ, освоение высоких температур в авиационных газовых турбинных двигателях за счет усовершенствования систем охлаждения является приоритетным направлением исследований по тепловой защите элементов турбин. Однако с повышением температур газа требования к точности конечных результатов возрастают, что в свою очередь требует разработки и применения достаточно эффективных математических моделей и численных методов [2; 5; 7–9;15; 16].

Здесь разработана новая математическая модель расчета температурного поля конвективно охлаждаемых лопаток газовых турбин, теоретическое обоснование которой доказано соответствующими теоремами [7–9; 12–14; 17–19]. Для этого были исследованы дискретные операторы, логарифмический потенциал двойного и простого слоя, построены сходящиеся квадратурные процессы и оценены их систематические погрешности в терминах модулей непрерывности А. Зигмунда. На основе теории потенциального течения задача обтекания турбинной решетки сведена к граничному интегральному уравнению (ГИУ) Фредгольма II рода с особенностью. Получены ГИУ для составляющих комплексного потенциала течения – потенциала скорости и функции тока, отличающиеся от существующих ГИУ эффективностью при численной

реализации. Для решения уравнений разработаны соответствующие алгоритмы и компьютерные программы на объектно-ориентированном языке Delphi 5 [6; 10; 11].

В отличие от потенциального, теплопроводное вязкое турбулентное течение газа в межлопаточном канале турбины исследовано на основе решения уравнений Навье-Стокса [1; 10; 11; 15]. Для замыкания системы дифференциальных уравнений в качестве моделей турбулентности использованы двухпараметрическая  $k - \varepsilon$  модель турбулентности и однопараметрическая модель Спаларта-Аллмараса. Системы уравнений решены в среде программных комплексов Fluent и ANSYS с использованием средств геометрического моделирования – программы SolidWorks и сеточного генератора Gambit [20–24].

Расчеты выполнены для охлаждаемой сопловой лопатки первой ступени газовой турбины высокого давления. Результаты проведенных расчетных исследований удовлетворительно согласовываются с существующими представлениями о распределении поля скоростей и температур по обводу лопаток газовых турбин.

**Расчет температурных полей лопаток газовых турбин методом граничных интегральных уравнений.** Дифференциальное уравнение теплопроводности, описывающее в общем случае нестационарный процесс распространения теплоты в многомерной области (уравнение Фурье-Кирхгофа) имеет вид [4; 5; 7–9; 17–19]:

$$\frac{\partial(\rho c_v T)}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{ grad } T) + q_v, \quad (1)$$

где  $\rho$ ,  $c_v$  и  $\lambda$  – соответственно плотность, теплоемкость и теплопроводность материала;  $q_v$  – внутренний источник или сток тепла;  $T$  – искомая температура. В двумерной постановке, предполагая постоянство физических свойств и отсутствие внутренних источников (стоков) теплоты, температурное поле при стационарных условиях будет зависеть только от формы тела и от распределения температуры на контуре (границах) тела [4; 7; 8; 15; 16]. В этом случае уравнение (1) будет иметь вид:

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Для определения конкретных температурных полей в элементах газовых турбин чаще задаются граничные условия третьего рода, характеризующие теплообмен между телом и окружающей средой на основе гипотезы Ньютона-Римана [4; 7; 8; 15; 16]:

$$\alpha_0(T_0 - T_{\gamma_0}) = \lambda \frac{\partial T_{\gamma_0}}{\partial n}, \quad (3)$$

$$-\lambda \frac{\partial T_{\gamma_i}}{\partial n} = \alpha_i(T_{\gamma_i} - T_i). \quad (4)$$

Здесь:  $T_0$  – температура среды  $T_i$  при  $i = 0$ , где  $i = \overline{0, M}$  – количество контуров (температура газа, омывающего лопатку);  $T_i$  – то же самое при  $i = \overline{1, M}$  (температура охладителя);  $T_{\gamma_0}$  и  $T_{\gamma_i}$  – температура на контуре  $T_{\gamma_i}$  при  $i = 0$

(наружный контур лопатки) и  $i = \overline{1, M}$  (контур охлаждающих каналов);  $\alpha_0$  и  $\alpha_i$  – коэффициенты теплоотдачи от газа к поверхности лопатки (при  $i=0$ ) и от лопатки к охлаждающему воздуху (при  $i = \overline{1, M}$ );  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала лопатки;  $n$  – внешняя нормаль на контуре исследуемой области.

Краевая задача (2) – (4) решается с применением метода граничных интегральных уравнений (МГИУ) (или метод теории потенциала – МТП), хорошо зарекомендовавшего себя при рассмотрении многосвязных областей сложной конфигурации и обладающего рядом преимуществ [3; 4; 7–9; 12–15].

Рассмотрим применение МГИУ для решения задачи (2) – (4) в первой постановке [3; 4; 7; 8; 15; 16].

Функция  $T = T(x, y)$ , непрерывная со своими производными до второго порядка, удовлетворяющая уравнению Лапласа в рассматриваемой области, включая ее контур  $\gamma = \bigcup_{i=0}^M \gamma_i$ , является гармонической. Следствием интегральной формулы Грина для исследуемой гармонической функции  $T = T(x, y)$  является соотношение:

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \left[ T_{\gamma} \frac{\partial(\ln R)}{\partial n} - \ln R \left( \frac{\partial T_{\gamma}}{\partial n} \right) \right] ds, \quad (5)$$

где  $R$  – переменное при интегрировании расстояние между точкой  $K(x, y)$  и «бегущей» по контуру точкой  $k$ ;  $T_{\gamma}$  – температура на контуре  $\gamma$ . Значение температуры в некоторой  $k$ -й точке, лежащей на границе, получается как предельное при приближении точки  $K(x, y)$  к границе

$$T = T_k = \frac{1}{2\pi} \left[ \oint_{\gamma} T_{\gamma} \frac{\partial(\ln R_k)}{\partial n} ds - \oint_{\gamma} \frac{\partial T_{\gamma k}}{\partial n} \ln R_k ds \right]. \quad (6)$$

С учетом введенных граничных условий (3) – (4) и после приведения подобных членов соотношение (6) можно представить в виде линейного алгебраического уравнения, вычисляемого для точки  $k$ :

$$\phi_{k1} T_{\gamma_{01}} + \phi_{k2} T_{\gamma_{02}} + \dots + \phi_{kn} T_{\gamma_{0n}} - \phi_{k\gamma_0} T_0 - \phi_{k\gamma_i} T_i - 2\pi T_k = 0, \quad (7)$$

где  $n$  – количество участков разбиения наружного контура лопатки  $\ell_{\gamma_0}$  ( $\ell_{\gamma_i}$  при  $i=0$ ) на малые отрезки  $\Delta S_0$  ( $\Delta S_i$  при  $i=0$ );  $m$  – количество участков разбиения наружных контуров всех охлаждающих каналов  $\ell_{\gamma_i}$  ( $i = \overline{1, M}$ ) на малые отрезки  $\Delta S_i$ .

Заметим, что неизвестными в уравнении (7) кроме искомого истинного значения  $T_k$  в точке  $k$  являются также, средние на отрезках разбиения контуров  $\Delta S_0$  и  $\Delta S_i$  температуры  $T_{\gamma_{01}}, T_{\gamma_{02}}, \dots, T_{\gamma_{0n}}, \dots, T_{\gamma_{im}}$  (общим числом  $n + m$ ).

Из соотношения (7) получим искомую температуру для любой точки, пользуясь формулой (5):

$$T(x, y) = \frac{1}{2\pi} [\phi_{k1} T_{\gamma_{01}} + \phi_{k2} T_{\gamma_{02}} + \dots + \phi_{kn} T_{\gamma_{0n}} + \dots + \phi_{km} T_{\gamma_{1m}} - \phi_{k\gamma_0} T_{cp_0} - \phi_{k\gamma_1} T_{cp_1}]. \quad (8)$$

В представленном довольно оригинальном виде решение краевой задачи (2) – (4) по расчету температурного поля конвективно охлаждаемой лопатки ГТ впервые дано О.И. Голубевой [3] и развито в работах Л.М. Зысиной-Моложен [4].

В работах [3; 4] дискретизация контуров  $\gamma_i (i = \overline{0, M})$  производилась большим количеством дискретных точек и интегралы, входящие в уравнения в виде логарифмических потенциалов, рассчитывались приближенно, путем замены следующими соотношениями:

$$\int_{\Delta S_{\gamma_i}} \frac{\partial(\ln R_k)}{\partial n} ds \approx \frac{\partial(\ln R_k)}{\partial n} \Delta S_{\gamma_i}, \quad (9)$$

$$\int_{\Delta S_{\gamma_i}} \ln R_k ds \approx \ln R_k \Delta S_{\gamma_i}, \quad (10)$$

где  $\Delta S_{\gamma_i} \in L = \bigcup_{i=0}^M l_i$ ;  $l_i = \int_{\gamma_i} ds$ .

В отличие от [3; 4] предлагается новый подход к применению метода граничных интегральных уравнений. Полагаем, что распределение температуры  $T = T(x, y)$  можно отыскивать в следующем виде:

$$T(x, y) = \int_{\Gamma} \rho \ln R^{-1} ds, \quad (11)$$

где  $\Gamma = \bigcup_{i=0}^M \gamma_i$  – простые гладкие жордановы замкнутые кривые;  $M$  – количество

охлаждающих каналов;  $\rho = \bigcup_{i=0}^M \rho_i$  – плотность логарифмического потенциала,

равномерно распределенного по  $\gamma_i$ ;  $s = \bigcup_{i=0}^M s_i$  – дуговая координата точки  $(x_i, y_i)$ .

При этом кривые  $\Gamma = \bigcup_{i=0}^M \gamma_i$  положительно ориентированы и заданы в

параметрическом виде:  $x = x(s)$ ;  $y = y(s)$ ;  $s \in [0, L]$ ;  $L = \int_{\Gamma} ds$ .

Используя метод теории потенциала и выражение (11), задачу (2) – (4) приведем к следующей системе граничных интегральных уравнений:

$$\rho(s) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} (\rho(s) - \rho(\xi)) \frac{\partial}{\partial n} \ln R(s, \xi) d\xi = \frac{\alpha_i}{2\pi\lambda} (T - \int_{\Gamma} \rho(s) \ln R^{-1} ds), \quad (12)$$

где  $R(s, \xi) = ((x(s) - x(\xi))^2 + (y(s) - y(\xi))^2)^{1/2}$

Для вычисления сингулярных интегральных операторов, входящих в (12), исследованы дискретные операторы логарифмического потенциала простого и



двойного слоя, показана их связь и получены оценки в терминах модулей непрерывности (оценки типа оценок А. Зигмунда).

**Интегральные методы расчета распределения скоростей вокруг профиля лопатки.** Точность вычисления температурных полей охлаждаемых деталей в большинстве зависит от достоверности закладываемых в расчет граничных условий теплообмена.

Весьма важная роль в исследовании и совершенствовании лопаточных аппаратов турбомашин принадлежит методам аэродинамического расчета потока в решетках, которые предшествуют оценке газодинамической эффективности и изучению тепловых процессов в них. Для расчета скорости газового потока по обводу профиля лопатки использованы методы прямых задач гидродинамики решеток, основанные на численной реализации интегральных уравнений с особенностью [1; 6; 10–14]. Задача сводится к рассмотрению обтекания прямой плоской решетки двумерным установившимся безвихревым (потенциальным) потоком несжимаемой жидкости в плоскости действительных координат (рис. 1). Получены граничные интегральные уравнения для составляющих комплексного потенциала течения  $W(z)$  – потенциала скорости  $\phi$  и функции тока  $\psi$ , отличающиеся от существующих эффективностью при численной реализации [1; 6; 10; 11]:

$$W(z) = \phi(z) + i\psi(z);$$

$$\phi(x_k, y_k) = V_\infty (x_k \cos \alpha_\infty + y_k \sin \alpha_\infty) \pm \frac{1}{2\pi} \Gamma \theta_B \mp \frac{1}{2\pi} \oint_{S^+} \phi(S) d\theta;$$

$$\psi = V_\infty (y \cos \alpha_\infty - x \sin \alpha_\infty) - \frac{1}{2\pi} \oint_{S^+} \bar{V}(z)_k \ln \sqrt{sh^2 \frac{\pi}{t} (x - x_k) + sin^2 \frac{\pi}{t} (y - y_k)} dz_k,$$

где  $V_\infty$  – средневекторная скорость набегающего потока;  $\alpha_\infty$  – угол между вектором  $\bar{V}_\infty$  и осью решетки профилей;  $t$  – шаг решетки;  $\Gamma$  – циркуляция скорости;  $\theta_B$  – угол, соответствующий выходной кромке профиля.

Распределение потенциала скорости  $\phi$  по контуру получено из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\phi_j \pm \sum_{i=1}^n \phi_i (\theta_{j,i+1} - \theta_{j,i-1}) \approx V_\infty (x_{kj} \cos \alpha_\infty + y_{kj} \sin \alpha_\infty) \pm \frac{1}{2\pi} \Gamma \theta_{j,B},$$

где  $i = 2n - 1$ ,  $j = 2n$ ,  $n$  – количество участков. Значения скорости газового потока определены путем дифференцирования потенциала скорости по контуру  $s$  профиля лопатки, то есть  $V(s) = d\phi/ds$ .

Распределение скорости по обводу профиля получено также из решения интегрального уравнение для функции тока  $\psi$ , приведенного к следующему алгебраическому виду:

$$\psi \approx \psi_\infty \mp \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n V_i \ln \left\{ \sqrt{sh^2 \left[ \frac{2\pi}{t} (x - x_k) \right] - sin^2 \left[ \frac{2\pi}{t} (y - y_k) \right]} \right\} \Delta s_i,$$

где  $\psi_\infty = V_\infty (y \cos \alpha_\infty - x \sin \alpha_\infty)$ .

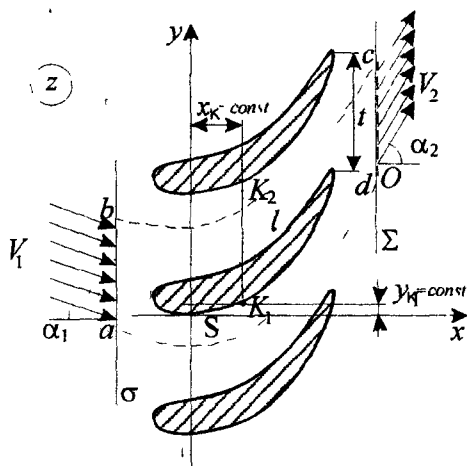


Рис. 1. Схема к постановке задачи

Для решения задач разработаны соответствующие алгоритмы и компьютерные программы на объектно-ориентированном языке Delphi 5 [6; 10; 11].

**Дифференциальные методы расчета поля скоростей в проточной части двигателя.**

В реальной газовой турбине лопаточный аппарат представляет собой кольцевую гидродинамическую решетку, в которой имеет место трехмерное нестационарное неизотермическое течение вязкой сжимаемой жидкости, теоретическое исследование которого связано с

решением полной системы дифференциальных уравнений, описывающих это течение [1; 10; 11; 20; 22].

Система уравнений турбулентного течения вязкого теплопроводного газа состоит из следующих соотношений:

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_i)}{\partial x_j} = 0; \quad (13)$$

уравнение сохранения импульсов:

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_i V_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu_{\Sigma} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \right) + F_i + W_i; \quad (14)$$

уравнение энергии:

$$\frac{\partial(\rho c_p T^*)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_j c_p T^*)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \lambda \frac{\partial T^*}{\partial x_j} \right) + W^V + E^k + Q_V + \Phi + \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (15)$$

где  $\rho$  – плотность рабочего тела;  $V_i$  – компоненты скорости;  $t$  – время;  $p$  – давление;  $\mu_{\Sigma}$  – суммарная вязкость;  $F_i$  – компоненты внешней массовой силы;  $W_i$  – потери на внутреннее трение;  $c_p$  – удельная теплоемкость;  $T^*$  – температура торможения;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $\kappa$  – показатель адиабаты;  $W^V$  – работа вязких сил;  $Q_V$  – объемный источник теплоты;  $\Phi$  – выработка вязкой теплоты;  $E^k$  – кинетическая энергия; индексы  $i=1,2,3$  и  $j=1,2,3$  обозначают проекции по трем координатным осям  $x, y, z$ .

При рассмотрении ламинарных течений суммарная вязкость  $\mu_{\Sigma}$  представляет собой простую динамическую вязкость  $\mu$ , а для турбулентных течений величина  $\mu_{\Sigma}$  определяется различными моделями турбулентности, о которых речь пойдет ниже.

В свою очередь, имеем:  
потери на внутреннее трение:

$$W_t = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right);$$

статическая температура:

$$T = T^* - \frac{V^2}{2c_p};$$

работа вязких сил в тензорной форме:

$$W^V = V_j \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \right];$$

выработка вязкой теплоты в тензорной форме:

$$\Phi = \mu \left( \frac{\partial V_j}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial V_j}{\partial x_k};$$

кинетическая энергия:

$$E^k = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} |V^2| \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2} |V^2| \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2} |V^2| \right) \right];$$

Для плотности газа используется уравнение идеального газа в форме:

$$\rho = \frac{p}{\frac{R}{M_V} T},$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $M_V$  – молекулярный вес.

Для определения динамической вязкости используется уравнение Сазерленда [20; 22]:

$$\mu = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + S}{T + S},$$

где  $\mu_0$  и  $T_0$  – исходные значения величин: для воздуха  $\mu_0 = 1.716 \times 10^{-5} \text{ кг / м} \cdot \text{сек}$  и  $T_0 = 273 \text{ K}$ ;  $S = 110.56 \text{ K}$  – эффективная температура, называемая константой Сазерленда.

Удельная теплоемкость  $c_p$  и число адиабаты  $\kappa$  определяется из табличных данных.

Для случая турбулентного режима течения скорость выражается суммой основной (осредненной) и пульсационной составляющих, так как турбулентность означает пульсирование мгновенной скорости в каждой точке течения жидкости, т.е.:

$$V_x = \overline{V_x} + V'_x, \tag{16}$$

где  $\overline{V_x}$  – компонент скорости по оси  $x$ ;  $V'_x$  – компонент пульсаций скорости по оси  $x$ .

Если такие выражения используются для мгновенной скорости в системе уравнений Навье-Стокса, то они могут быть осреднены, учитывая, что компонент пульсаций скорости, осредненный по времени, равен нулю и среднее по времени значение мгновенной скорости есть среднее значение самой скорости. Временной интервал для интегрирования выбирается произвольно, но так, чтобы быть достаточно продолжительным для получения достоверных результатов и достаточно коротким для сокращения влияния переходных эффектов на интегрирование:

$$\frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} V_x' dt = 0; \quad \frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} V_x dt = \overline{V_x}.$$

После подстановки выражения (16) в уравнение движения (14), осреднение по времени добавляет дополнительные члены:

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial V_k}{\partial x_k} \right),$$

где  $\tau_{ij}$  – напряжения Рейнольдса, которые связаны с динамической турбулентной вязкостью следующим выражением:

$$\tau_{ij} = -\overline{\rho V_i V_j'} = \mu_T \frac{\partial V_i}{\partial x_j}.$$

Особенностью формы записи системы уравнений (13) – (15) является то, что из уравнения энергии можно выделить соотношение

$$q_i = \mu_\Sigma \frac{\partial (c_p T)}{\partial x_i},$$

при помощи которого можно рассчитать компоненты вектора суммарного потока тепла  $q$ , где суммарная вязкость  $\mu_\Sigma = \mu + \mu_t$ . Это дает возможность использования данной модели при решении задач теплообмена между движущимся газом и элементами проточной части двигателя в сопряженной постановке с привлечением условий сопряжения - граничных условий IV рода. Однако в таком виде система уравнений не является замкнутой, так как входящий в нее коэффициент турбулентной вязкости  $\mu_t$  априори неизвестен. Поэтому задача моделирования турбулентного течения вязкого теплопроводного газа в межлопаточном канале газовой турбины переходит к определению турбулентной вязкости  $\mu_t$ .

**Расчет турбулентного пограничного слоя.** Для определения турбулентной вязкости  $\mu_t$  с целью замыкания системы уравнений Навье-Стокса использованы двухпараметрическая  $k - \varepsilon$  модель турбулентности [21] и модель Спаларта-Аллмараса [23].

Стандартная  $k - \varepsilon$  модель турбулентности базируется на уравнении переноса, записанном для кинетической энергии турбулентности ( $k$ ) и скорости диссипации турбулентной энергии ( $\varepsilon$ ) [20–22]:

$$\frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho k V_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k;$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\varepsilon V_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon.$$

В этих формулах величина  $G_k$  представляет собой производство кинетической энергии турбулентности, характеризующуюся градиентом скорости:

$$G_k = -\rho \overline{V_i' V_j'} \frac{\partial V_j}{\partial x_i}.$$

Используя гипотезу Буссинеска,  $G_k$  можно представить в виде

$$G_k = \mu_t S^2,$$

где  $S$  является модулем тензора напряжений:

$$S \equiv \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}.$$

Турбулентная вязкость рассчитывается как

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

Генерация турбулентности вдоль потока

$$G_b = \beta g_i \frac{\mu_t}{Pr_t} \frac{\partial T}{\partial x_i},$$

где  $Pr_t$  – турбулентное число Прандтля;  $g_i$  – составляющая вектора силы гравитации. Коэффициент термического расширения равен

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p.$$

$$\text{Для идеального газа } G_b = -g_i \frac{\mu_t}{\rho Pr_t} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}.$$

При высоких значениях числа Маха турбулентная сжимаемость учитывается при помощи так называемого коэффициента развитой диссипации  $Y_M$ , входящей в уравнение кинетической энергии турбулентности  $k$ :

$$Y_M = 2\rho\varepsilon M_t^2,$$

где  $M_t$  – турбулентное число Маха, рассчитываемое по формуле  $M_t = \sqrt{k/a^2}$ ;  $a = \sqrt{\kappa RT}$  – скорость звука в данной среде. Модельными константами являются [20; 22]:  $C_{1\varepsilon} = 1.44$ ,  $C_{2\varepsilon} = 1.92$ ,  $C_\mu = 0.09$ ,  $\sigma_k = 1.0$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ .

Модель Спаларта-Аллмараса относится к новому классу однопараметрических моделей, описывает поведение эффективной вязкости во всей пристеночной области, включая вязкий подслой, и дает удовлетворительные результаты для пограничного слоя с отрицательным градиентом давления [10; 11; 20; 22; 23].

В используемой версии модели Спаларта-Аллмараса дифференциальное уравнение турбулентного переноса формулируется в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \tilde{v} V_i) = G_v + \frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\mu + \rho \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right\} + c_{b2} \rho \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} \right)^2 \right] - Y_v + S_{\tilde{v}}.$$

Модельною змінною є величина  $\tilde{v}$ , яка ідентична турбулентній кінематическій в'язкості і зв'язана з  $\nu$  соотношением  $\nu = \tilde{v} \cdot f_{\nu 1}$  (або  $\mu_t = \rho \cdot \tilde{v} \cdot f_{\nu 1}$ ), виключаючи пристіночні зони. Функція в'язкостного затухання  $f_{\nu 1}$  визначається при допомозі формул:

$$f_{\nu 1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu 1}^3} \text{ и } \chi = \tilde{v}/\nu.$$

Турбулентна продуктивність  $G_v$  моделюється наступним образом:

$$G_v = c_{b1} \rho \tilde{S} \tilde{v},$$

где  $\tilde{S} \equiv S + \frac{\tilde{v}}{\gamma^2 d^2} f_{\nu 2}$  и  $f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}}$ ;  $c_{b1}$  и  $\gamma$  – модельні константи;  $d$  – відстань до стінки;  $S$  – скалярне значення тензора деформацій.

В запропонованій версії моделі Спаларта-Аллмараса визначення значення тензора деформацій  $S$  ґрунтується на визначенні величини пульсацій завихреності:

$$S = \sqrt{2\Omega_y \Omega_y},$$

где  $\Omega_y$  – середнє значення тензора пульсацій завихреності, розраховується при допомозі рівняння:

$$\Omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right).$$

Виразення для явлення турбулентного руйнування  $Y_v$  моделюється наступним соотношением:

$$Y_v = c_{w1} \rho f_w \left( \frac{\tilde{v}}{d} \right)^2,$$

где  $f_w = g \left( \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{1/6}$ ;  $g = r + c_{w2} (r^6 - r)$ ;  $r \equiv \tilde{v} / (\tilde{S} \gamma^2 d^2)$ , приче при  $r > 10$  величина  $f_w(r)$  полагается постійною і рівною  $f_w(r=10)$ .

Модельні константи мають наступні значення [20; 22]:  $c_{b1} = 0.1355$ ,  $c_{b2} = 0.622$ ,  $\sigma_{\tilde{v}} = 2/3$ ,  $c_{\nu 1} = 7.1$ ,  $c_{\nu 2} = 5.0$ ,  $c_{w1} = c_{b1} / \gamma^2 + (1 + c_{b2}) / \sigma_{\tilde{v}}$ ,  $c_{w2} = 0.3$ ,  $c_{w3} = 2.0$ ,  $\gamma = 0.4187$ .

**Визначення граничних умов теплообіа.** Розраховані данні розподілення швидкості по обводу являються існуючими для визначення зовнішніх умов теплообіа.

Для розрахов локальних значення  $\alpha_r$  в качестве основи прийнято метод ЦКТИ, розрахований Л.М. Зысиной-Моложен, в котором используется

интегральное соотношение энергии для теплового пограничного слоя, записанное в переменных А.А. Дородницына, позволяющих в единообразной форме представить решения для ламинарного, переходного и турбулентного пограничных слоев [4; 15; 16]. Для внесения поправок в базовое значение  $\alpha_{\Gamma}$  использованы подтвержденные расчетно-экспериментальным путем рекомендации ЦКТИ и ХПИ [4; 5; 15; 16].

При определении внутренних граничных условий теплообмена используется взаимосвязь внутренних геометрических и гидродинамических моделей с тепловыми, характеризующими температурное поле тела лопатки. Комплекс параметров, объединяющий в себе теплогидравлические и геометрические характеристики системы охлаждения, имеет вид [2; 5; 15; 16]:

$$\alpha_B \cdot F_B = f(\alpha_{\Gamma}, Q_{\Gamma}, T_{\Gamma L}, T_{B L}, \lambda_B, \mu_B, \lambda_L).$$

При этом, по сути выполняется оптимизационная задача с предварительным заданием допустимых по условиям прочности температур стенок с газовой  $T_{\Gamma L}$  и воздушной  $T_{B L}$  сторон с учетом ее предельной неравномерности.

Задача внутренней гидродинамики системы охлаждения рассмотрена на примере лопатки со вставным перфорированным дефлектором.

Поиск оптимальной конструкции системы охлаждения тонкостенной дефлекторной лопатки с поперечным течением воздуха осуществляется путем предварительного выявления перегретых участков. Местные коэффициенты теплоотдачи охладителя  $\alpha_B$  определяются при известном распределении потока в охлаждающих каналах. С этой целью строится эквивалентная гидравлическая схема (ЭГС), при составлении которой весь тракт течения охладителя в системе охлаждения делится на множество взаимосвязанных участков - типовых элементов (каналов). Течение охладителя в разветвленных сетях описывается 1-м законом Кирхгофа [5,15,16]:

$$f_i = \sum_{j=1}^m G_{ij} = \sum_{j=1}^m \text{sign}(\Delta p_{ij}) k_{ij} \sqrt{\Delta p_{ij}}; \quad i = 1, 2, 3 \dots n, \quad (17)$$

где  $G_{ij}$  - расход охладителя на ветке  $i-j$ ;  $m$  - количество веток, присоединенных к  $i$ -му узлу;  $n$  - число внутренних узлов гидравлической сети;  $\Delta p_{ij}$  - перепад полного давления охладителя на ветке  $i-j$ . В этой формуле коэффициент гидравлической проводимости ветки  $(i-j)$  определяется следующим образом [5; 15]:

$$k_{ij} = \sqrt{2 f_{ij}^2 \cdot p_{ij} / \xi_{ij}}, \quad (18)$$

где  $f_{ij}$ ,  $p_{ij}$ ,  $\xi_{ij}$  - соответственно, средняя площадь поперечного сечения канала  $(i-j)$ , плотность потока охладителя на данном участке и суммарный коэффициент гидравлического сопротивления ветви.

Система нелинейных алгебраических уравнений (17) решается методом Зейделя с ускорением по следующей формуле [5]:

$$P_i^{k+1} = P_i^k - f_i^k / (\partial f / \partial P)^k,$$

где  $k$  – номер итерации;  $p_i^k$  – давление охладителя в  $i$ -м участке гидравлической сети. Коэффициенты гидравлического сопротивления  $\xi_{ij}$ , входящие в (18) можно определить по эмпирическим соотношениям, имеющимся, например в [5; 15].

Значение  $\alpha_B$  в области входной кромки лопатки с внутренним сегментным оребрением, обдуваемой воздухом одним рядом круглых струй через отверстия в носике дефлектора, рассчитывается зависимостью [5; 15; 16]:

$$Nu = C Re^{0.98} Pr^{0.43} / (L / b_{equ}),$$

$b_{equ} = \pi d_0^2 / 2t_0$  – ширина эквивалентной по площади щели;  $d_0, t_0$  – диаметр и шаг отверстий в носовой части дефлектора. Критерий  $Re$  в данной формуле определяется по скорости струи на выходе через отверстия дефлектора, в качестве характерного размера принимается длина внутреннего обвода входной кромки  $L$ .

На участках струйного обдува поверхностей, кроме зоны входной кромки можно воспользоваться эмпирической зависимостью [5; 15; 16]:

$$Nu = 0.018 \left( 0.36\bar{\delta}^2 - 0.34\bar{\delta} + 0.56 - 0.1\bar{h} \right) \bar{S}_x \cdot (G_c f_k / G_k f_c)^k \cdot Re^{0.8}, \quad (19)$$

где  $\bar{\delta} = \delta/d$  – относительная толщина дефлектора;  $\bar{h} = h/d$  – относительная высота канала между дефлектором и стенкой лопатки;  $\bar{S} = S/d$  – относительный шаг системы струй;  $d$  – диаметр перфорации;  $k = 0.25 + 0.5\bar{h}$ . Критерий  $Re$  в формуле (19) определяется по гидравлическому диаметру поперечного канала  $L = 0.75 - 0.45\bar{\delta}$  и скорости потока охладителя за зоной перфорации дефлектора.

При расчетах в каждом итерационном процессе производится проверка пропускной способности тракта охлаждения по полному давлению на выходе, подсчитанному соответственно, через потери полного давления и приведенную скорость истечения воздуха из лопатки с учетом его подогрева.

Таким образом, обеспечение необходимого значения коэффициента теплоотдачи  $\alpha_B$  производится путем варьирования комплексом геометрических параметров схемы охлаждения и режимных параметров охладителя [5; 15].

**Результаты.** Для верификации представленных методик использованы

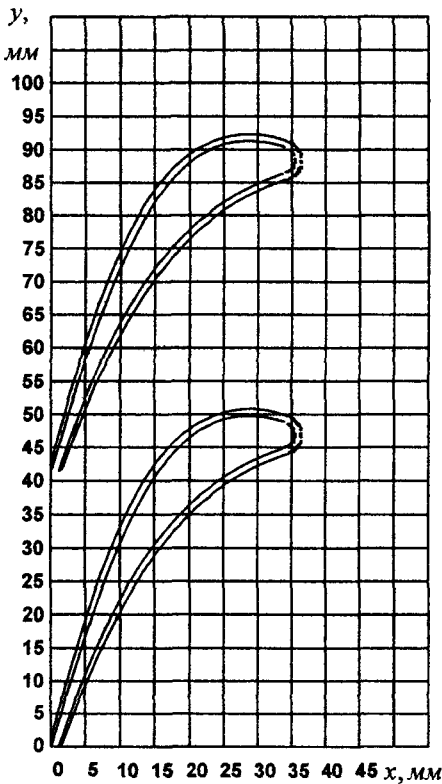


Рис. 2. Решетка профилей сопловой охлаждаемой лопатки



результаты расчета облопаточенного сегмента соплового аппарата первой ступени турбины высокого давления [8; 9]. Расчеты обтекания решетки турбулентным потоком вязкого теплопроводного газа проводились с параметрами, соответствующими натурной установке. Сопловая решетка тестового эксперимента была спрофилирована аналитически с помощью степенных полиномов на околосзвуковую скорость (рис. 2).

Профиль лопатки имеет хорду  $b = 60 \text{ мм}$ ; шаг решетки  $t = 41.5 \text{ мм}$ , ширину горлового сечения  $a_2 = 11.26 \text{ мм}$ ; толщину выходной кромки  $d_2 = 1.8 \text{ мм}$ ; угол отгиба выходной кромки  $\delta = 12^\circ 48'$ . При вычислительных экспериментах были использованы следующие режимные параметры газового потока: скорость на входе в решетку  $V_1 = 156 \text{ м/с}$ , на выходе из решетки  $V_2 = 562 \text{ м/с}$ ; угол выхода  $\alpha_2 = 16^\circ 6'$ ; температура и давление газа: на входе в ступень  $T_2^* = 1193 \text{ К}$ ,  $p_2^* = 1.2095 \text{ МПа}$ , на выходе из ступени  $T_{21} = 1005 \text{ К}$ ,  $p_{21} = 0.75 \text{ МПа}$ ; относительная скорость газа на выходе из решетки  $\lambda_{\text{ад}} = 0.891$ ; физические свойства газа: показатель адиабаты  $\kappa_2 = 1.35$ , газовая постоянная  $R_2 = 288 \text{ Дж/кгК}$ .

На рис. 3 представлены графики расчетного распределения скорости газового потока по обводу профиля лопатки. Для случая потенциального обтекания результаты ( $\blacklozenge$ ) получены из решения граничных интегральных уравнений при помощи программы, составленной на объектно-ориентированном языке Delphi [6; 10; 11]. Решение полной системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса для вязкого теплопроводного газа с использованием двухпараметрической  $k - \varepsilon$  модели турбулентности ( $\blacksquare$ ) выполнено в среде комплекса ANSYS [20].

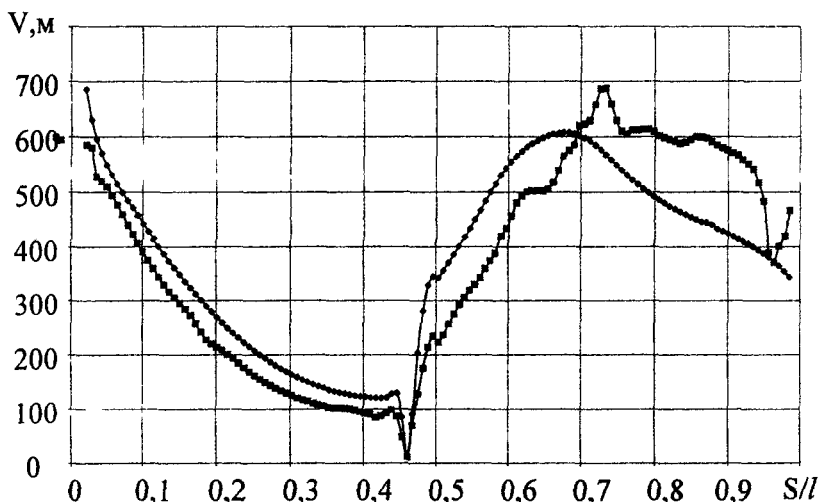


Рис. 3. Графики расчетного распределения скорости газового потока по обводу профиля лопатки газовой турбины:

- $\blacklozenge$  – методом граничных интегральных уравнений при потенциальном обтекании;
- $\blacksquare$  – решением полной системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса для вязкого теплопроводного газа;  $V$  – скорость газа, м/с;
- $S/l$  – относительная координата профиля

Расчетная область и граничные условия для решения системы дифференциальных уравнений заданы в табл. 1.

На рис.4. изображено разбиение расчетной области на конечные элементы с помощью сеточного генератора Gambit [22]. Применена комбинированная сетка с общим числом ячеек 64200 со сгущением вдоль обвода контура профиля.

Структура двумерного течения вязкого теплопроводного газа с применением  $k - \epsilon$  модели турбулентности представлена на рис. 5 и рис. 6. Расчеты выполнены для числа  $Re = 1.68 \cdot 10^6$  на выходе из решетки, при степени турбулентности набегающего потока  $Tu_1 = 0.01$ . При тех же условиях получено расчетное распределение поля скоростей из решения системы уравнений Навье-Стокса с применением модели турбулентности Спаларта-Аллмараса в среде решателя Fluent [22; 23], которое представлено на рис. 7. Ввиду малой степени турбулентности набегающего потока и монотонно изменяющейся кривизны профиля, обтекание с применением модели турбулентности Спаларта-Аллмараса получилось безотрывное, на спинке профиля пограничный слой утолщен, за выходной кромкой формируется характерный аэродинамический след.

Таблица 1

Расчетная область двумерного течения вязкого газа в турбинной решетке

Нумерация границ расчетной области	Участки, исходные данные и граничные условия	
1	Входной участок: $V = 156 \text{ м/с}$ ; $p^* = 1.2095 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ; $T^* = 1193 \text{ К}$ ; $Tu = 0.01$	
2,3,6,7	Условные боковые стороны фронтов решетки - проницаемые границы: $ \vec{v}  \neq 0$	
4	Вогнутая сторона соседнего профиля - непроницаемая граница: $ \vec{v}  = 0$	
5	Выпуклая сторона соседнего профиля - непроницаемая граница: $ \vec{v}  = 0$	
8	Выходной участок: $p^* = 0.75 \cdot 10^6 \text{ Па}$ , $T^* = 1142 \text{ К}$	
9	Расчетный профиль - непроницаемая граница: $ \vec{v}  = 0$	

На рис. 8 и рис. 9 представлены результаты распределения температурного поля в расчетной области с использованием, соответственно, моделей турбулентности  $k - \epsilon$  и Спаларта-Аллмараса.

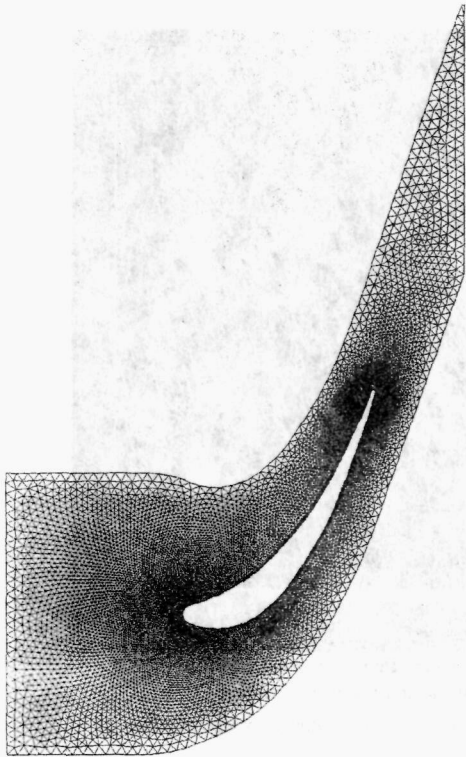


Рис. 4. Разбиение расчетной области на конечные элементы

Полученные результаты подтверждают достоверность представленных методик и применимость их при исследованиях динамики рабочего тела в авиационных двигателях.

**Выводы.** Сравнительный анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что, вычисления хорошо воспроизводят структуру течения, а также локальные характеристики распределения скоростей. Вместе с тем на стороне разрежения лопатки наблюдается достаточно существенное различие между результатами расчета, так как применение для определения турбулентной вязкости стандартной  $k - \epsilon$  модели приводит к завышению расчетных значений потерь полного давления, что характеризуется распределением скоростей в расчетной области. Это обстоятельство доказывает свойство  $k - \epsilon$  модели генерировать повышенный уровень турбулентной вязкости на конфузторных участках течения [15; 24]. Следовательно, из двух использованных моделей турбулентности лучшие результаты дает модель Спаларта-Аллмараса.

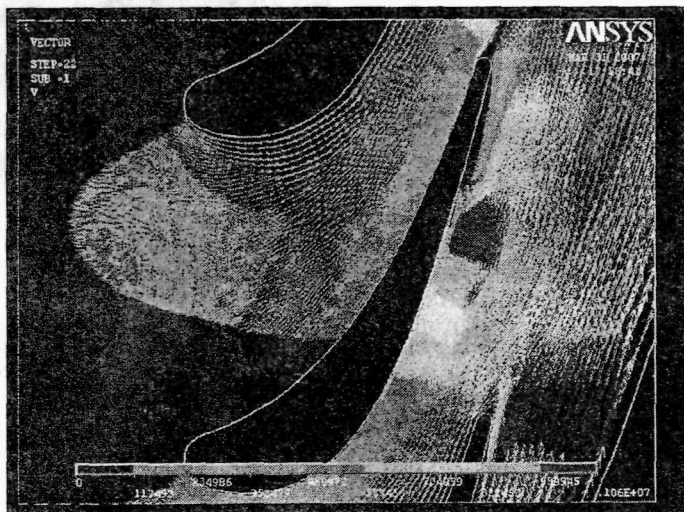


Рис.5. Структура двумерного течения вязкого теплопроводного газа с применением  $k - \epsilon$  модели турбулентности

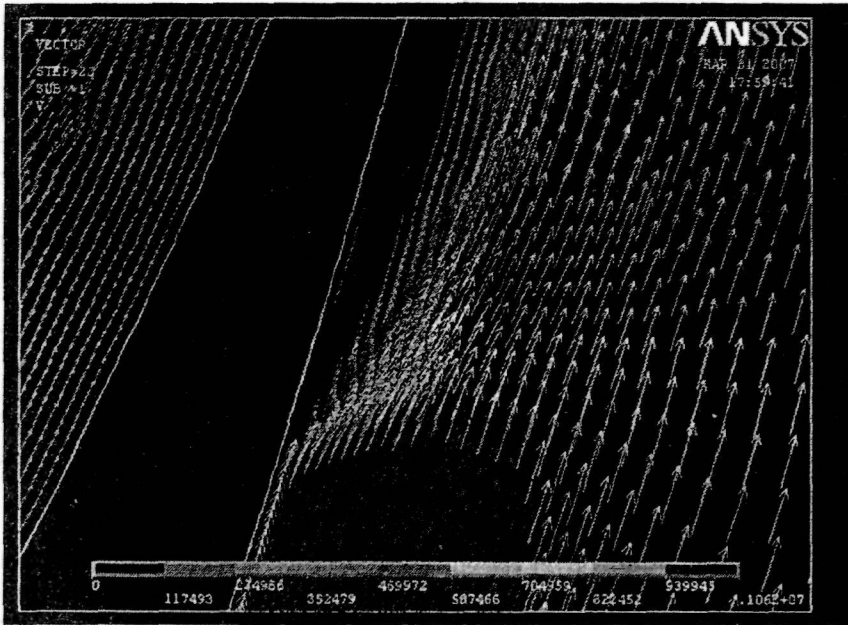


Рис. 6. Зона підвищеної турбулентності, образована при розрахунок обтекания профіля лопатки турбіни вязким теплопроводним газом с применением  $k - \epsilon$  модели турбулентности.

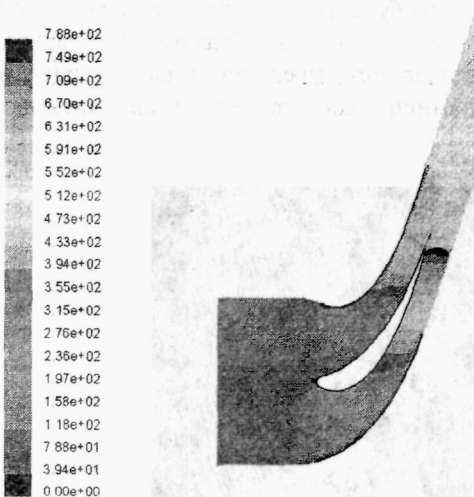


Рис. 7. Результаты распределения поля скоростей ( $m/s$ ) в расчетной области с применением модели Спаларта-Аллмараса в среде программного комплекса Fluent

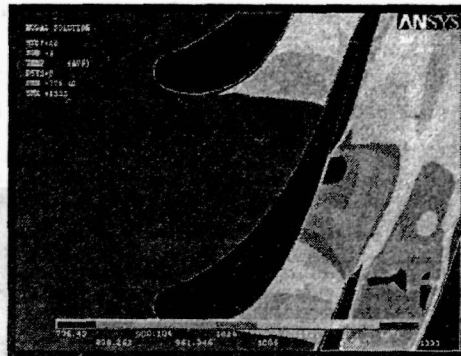


Рис. 8. Результаты распределения температурного поля в расчетной области ( $K$ ) с использованием программы ANSYS

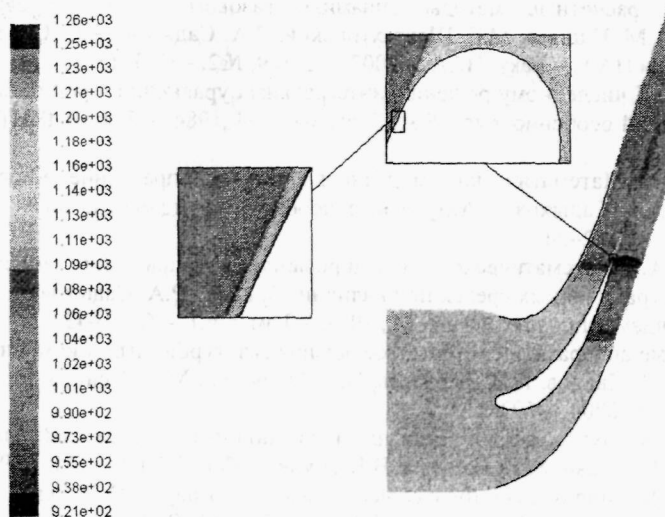


Рис. 9. Результаты распределения температурного поля в расчетной области (в К) с использованием программы Fluent

### Библиографические ссылки

1. Газовая динамика. Механика жидкости и газа / В.С. Бекнев, В.М. Епифанов, А.И. Леонтьев, М.И. Осипов и др. [под общей ред. А.И.Леонтьева]. – М., 1997. – 671 с.
2. Тепловая защита лопаток турбин / Б.М. Галицейский, В.Д. Совершенный, В.Ф. Формалев, М.С. Черный. – М., 1996. – 356 с.
3. Голубева О.И. К определению температурного поля лопаток газовых турбин / О.И. Голубева // Труды ЦИАМ. – 1947. – №129. – 16 с.
4. Зысина-Моложен Л.М. Теплообмен в турбомашинах / Л.М. Зысина-Моложен, Л.В. Зысин, М.П. Поляк. – Л., 1974. – 336 с.
5. Копелев С.З. Конструкция и расчет систем охлаждения ГТД / С.З. Копелев, А.Ф. Слитенко. [под ред. Слитенко А.Ф.]. – Харьков, 1994. – 240 с.
6. Численное решение интегральных уравнений обтекания плоских решеток газовых турбин / А.М. Пашаев, Д.Д. Аскеров, Р.А. Садыхов, А.С. Самедов // Всеукр. науч.-техн. журнал «Двигатели внутреннего сгорания». – 2005. – С. 12–19.
7. Методы расчета тепловой защиты лопаток газовых турбин / А.М. Пашаев, Р.А. Садыхов, Д.Д. Аскеров, А.С. Самедов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. – 2007. – Вып. 68, №3. – С. 102–116.
8. Численное моделирование температурных полей в элементах авиационных газовых турбин / А.М. Пашаев, Р.А. Садыхов, А.С. Самедов, Д. Ардил // Науч. вестник МГТУ Гражданской Авиации. Серия: Эксплуатация воздушного транспорта и ремонт авиационной техники. Безопасность полетов. – 2005. – №85 (3). – С. 109–120.
9. Пашаев А.М. Современные технологии и методы тепловой защиты элементов высокотемпературных авиационных газотурбинных двигателей / А.М. Пашаев, Р.А. Садыхов, А.С. Самедов // Сборник науч. тр. НАА, посвященной 70 летнему Юбилею академика А.М. Пашаева. – Баку, НАА. – 2004. – № 1. – С. 22–67.
10. Численное моделирование динамики рабочего тела в проточных частях авиационных газотурбинных двигателей / А.М. Пашаев, М.Г. Шахтактинский, Р.А. Садыхов, А.С. Самедов и др. // Сборник науч. тр. НАА. – Баку, НАА. – 2007. – №1. – С. 3–28.

11. Эффективные расчетные методы динамики газового потока в авиационных двигателях / А.М. Пашаев, М.Г. Шахтактинский, Р.А. Садыхов, А.С. Самедов и др. // Ученые записки НАА. – Баку, НАА. – 2007. – Том 9, №2. – С. 3–13.
12. Садыхов Р.А. К численному решению интегральных уравнений Фредгольма II рода с логарифмической особенностью / Р.А. Садыхов. – М., 1984. – Деп. ВИНТИ №6601–84. – 19 с.
13. Садыхов Р.А. Математическое моделирование и управление многосвязными системами / Р.А. Садыхов // Актуальные проблемы фундаментальных наук. – М., 1991. – Том 1. – С. 12–24.
14. Садыхов Р.А. Математическое моделирование и управление многосвязными системами в ограниченных средах при наличии сбросов / Р.А. Садыхов // Актуальные проблемы фундаментальных наук. – М., 1994. – Том 2, ч.1. – С. 31–43.
15. Теплообменные аппараты и системы охлаждения газотурбинных и комбинированных установок / В.Л. Иванов, А.И. Леонтьев, Э.А. Манушин, М.И. Осипов. [под ред. А.И. Леонтьева]. – М., 2004. – 592 с.
16. Теплоотдача в охлаждаемых деталях газотурбинных двигателей летательных аппаратов / В.И. Локай, М.Н. Бодунов, В.В. Жуйков, Ф.В. Щукин. – М., 1995. – 216 с.
17. Pashayev A. Modeling of gas turbine cooled blades / A. Pashayev, D. Askerov, R. Sadiqov, A. Samedov and others // Proceedings of 8<sup>th</sup> Biennial ASME Conference on Engineering Systems Design and Analysis (ESDA 2006). – Torino, Italy. – July 4–7, 2006.
18. Pashayev A. Numerical Methods of Protection of Gas Turbine Blades From Influence of High Temperature / A. Pashayev, R. Sadiqov, A. Samadov, R. Mammadov // Proceeding of 44<sup>th</sup> AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit. – Hartford, CT. AIAA 2008-5166, American Institute of Aeronautics and Astronautics. – 21–23 July, 2008.
19. Pashayev A. Protecting Gas Turbine Blades from the Influence of High Temperatures / A. Pashayev, E. Schnack, R. Sadiqov, A. Samadov // Proceeding of International Symposium on advanced in Applied Mechanics and Modern Information Technology. – Baku, 2011 (ISAAM&MIT11). – P. 271–278.
20. Imgrund M.C. ANSYS® Verification Manual. – Swanson Analysis Systems, Inc. 1992.
21. Launder B.E. The Numerical Computation of Turbulent Flows / B.E. Launder, D.B. Spalding // Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1974. – Vol 3. – P. 269–289.
22. Fluent. Fluent Inc., Centerra Resource Park, Cavendish Court, Lebanon, NH 03766, USA. – 2001.
23. Spalart P. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows / P. Spalart, S. Allmaras. // Technical Report AIAA-92-0439, American Institute of Aeronautics and Astronautics. – 1992.
24. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD / D.C. Wilcox D.C. // DCW Industries Inc., La Canada, California, ISBN: 0-963-6051-0-0. – 1998.

*Надійшла до редколегії 27 10 11*

## ЗМІСТ

Вячеслав Михайлович Ковтуненко – выдающийся ученый и конструктор ракетно-космической техники (к 90-летию со дня рождения)	3
Давидсон Вениамин Евгеньевич (к 90-летию со дня рождения)	8
<b>Котельникова А.С., Никишов В.И., Олексюк В.В., Сребнюк С.М.</b> Распространение и взаимодействие уединенных волн с береговыми склонами	10
<b>Перехрест В.І.</b> Закон планетарних відстаней у вихровій теорії планетарних систем	21
<b>Перехрест В.І., Осипчук М.М.</b> Про закон ізохронності обертання у планетарних вихорах і планетарних системах	33
<b>Кравец Е. В.</b> Структура вихреобразования при обтекании вязким несжимаемым потоком прямоугольных призм, расположенных тандемом над экраном с открытым межторцевым пространством	43
<b>Егоров Е.В., Лычагин Н.Н.</b> Расчет распространения загрязнения примесей в атмосфере городского лабиринта	53
<b>Катан В.А.</b> Математическое моделирование ударного взаимодействия несжимаемой жидкости и твердого тела, плавающего на ее поверхности	63
<b>Абрамовский Е.Р., Варшавская И.Г., Кукушкин В.И.</b> Аэродинамические и энергетические характеристики ступенчатой лопасти горизонтально-осевого ветродвигателя	69
<b>Кирия Р.В.</b> Истечение сыпучей среды из бункера с различным расположением выпускного отверстия	74
<b>Черников Д.О.</b> Генерация волн подвижками донной поверхности	87
<b>Гоман О.Г., Тихая Е.А.</b> Об одном подходе к решению задачи Коши–Пуассона для слоя жидкости конечной глубины	91
<b>Козлова Е.В., Козлова О.В.</b> О некоторых особенностях граничных интегральных уравнений в задачах гидродинамики	98
<b>Кныш Л.И., Давыдов В.И.</b> Методика расчёта облученности трубчатого приемника тепла в составе солнечной энергетической системы с параболическим цилиндрическим концентратором	105
<b>Елисеев В.И., Рузова Т.А., Толстопят А.П., Флеер Л.А., Шевченко А.Ф., Шевченко С.А.</b> Динамика поверхности жидкости при подаче газового потока через вертикальную заглубленную фурму	112
<b>Елисеев В.И., Давидсон В.В.</b> Ионнообмен в дисперсионных средах, находящихся в поле переменного напряжения	119
<b>Шевчук В. А.</b> Расчет температурных напряжений в телах с тонкими многослойными покрытиями	129
<b>Гинкул С.И., Подобед Ю.В.</b> Разработка режимов нагрева металла при переменной массе заготовок в методической печи	140
<b>Евдокимов Д.В., Поляков Н.В., Сербиченко Д.Н.</b> Численное моделирование роста биологических структур	145
<b>Терещенко Д.В., Лобода В.В.</b> Итерационный метод идентификации трещины на границе раздела двух материалов	158
<b>Дьяченко Н.Н., Шашкова Е.В.</b> Контакт в условиях частичного проскальзывания параболического штампа и шероховатого полупространства с экспоненциальным законом деформирования шероховатости	165
<b>Антоненко Н.М., Величко І.Г.</b> Моделивання відкритої тріщини між шаром та абсолютно жорсткою півплощиною	179
<b>Остапенко В. А.</b> Краевые задачи об упругих перемещениях в канатах подъемных механизмов с учетом трения каната о барабан	190
<b>Сокол Г.И., Тузниченко Т.В.</b> Волновые процессы в воздушных полостях башни ветроагрегатов с учётом нелинейных эффектов	200
<b>Самедов А.С.</b> Расчетные методы тепловой защиты элементов авиационных газотурбинных двигателей	208