

531/534
Д.54



ISSN 9125 0912

ВІСНИК

Дніпропетровського університету

№ 5

Т. 18

2010

Серія: МЕХАНІКА

Випуск 14, том 2

ВІСНИК



Дніпропетровського університету

Науковий журнал

№ 5

Том 18

2010

РЕДАКЦІЙНА РАДА:

акад. Академії наук ВО України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Поляков** (*голова редакційної ради*); акад. Академії наук ВО України, д-р техн. наук, проф. **М. М. Дронь** (*заст. голови*), д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. О. Кочубей**; д-р хім. наук, проф. **В. Ф. Варгалюк**; чл.-кор. АПН України, д-р філос. наук, проф. **П. І. Гнатенко**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Г. Гоман**; д-р філол. наук, проф. **В. Д. Демченко**; д-р техн. наук, проф. **А. П. Дзюба**; д-р пед. наук, проф. **Л. І. Зеленська**; чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. П. Моторний**; чл.-кор. АПН України, д-р психол. наук, проф. **Е. Л. Носенко**; д-р філос. наук, проф. **В. О. Панфілов**; д-р біол. наук, проф. **О. Є. Пахомов**; д-р іст. наук, проф. **С. І. Світленко**; акад. Академії наук ВО України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Скалозуб**; д-р філол. наук, проф. **Т. С. Пристайко**; чл.-кор. НАН України, д-р біол. наук, проф. **А. П. Травлєєв**; д-р техн. наук, проф. **Ю. Д. Шептун**.

Серія: МЕХАНІКА

Випуск 14, том 2

Дніпропетровськ
Видавництво
Дніпропетровського
національного університету

Представлены новые результаты исследований в области механики деформируемого твердого тела, динамики и прочности конструкций. Большое внимание уделено вопросам прикладного характера, связанным с теоретическим и экспериментальным обоснованием технологических и проектных решений в современном машиностроении. Эффективность разработанных алгоритмов и методов расчета показана на примерах решения конкретных задач.

Для научных работников, инженеров, аспирантов и студентов старших курсов.

Наведені нові результати досліджень у галузі механіки деформівного твердого тіла, динаміки і міцності конструкцій. Велика увага приділяється питанням прикладного характеру, пов'язаним із теоретичним і експериментальним обґрунтуванням технологічних та проектних рішень у сучасному машинобудуванні. Ефективність розроблених алгоритмів і методів розрахунку показана на прикладах розв'язування конкретних задач.

Для науковців, інженерів, аспірантів та студентів старших курсів.

*Друкується за рішенням вченої ради
Дніпропетровського національного університету
згідно з затвердженим планом видань на 2010 р.*

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

д-р. техн. наук, проф. **А.П. Дзюба** (відп. редактор), д-р фіз.-мат. наук, проф. **В.В. Лобода** (заст. відп. редактора), канд. фіз.-мат. наук, доц. **О.О. Бобильов** (відп. секретар), д-р фіз.-мат. наук, проф. **О.Г. Гоман**, чл.-кор. НАН України, д-р техн. наук, проф. **В.С. Гудромович**, д-р техн. наук, проф. **М.М. Дронь**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О.О. Кочубей**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В.І. Кузьменко**, д-р техн. наук проф. **Н.І. Ободан**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **А.В. Павленко**, д-р техн. наук, проф. **Є.С. Переверзєв**, д-р техн. наук, проф. **О.В. Пилипенко**, академік АН ВО України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **М.В. Поляков**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **О.А. Приходько**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **С.О. Смірнов**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю.А. Черняков**, д-р фіз.-мат. наук, проф. **М.Ю. Швайко**

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. **П.О. Стеблянко**
д-р техн. наук, проф. **В.П. Пошивалов**

© Дніпропетровський національний
університет імені Олеся Гончара, 2010
© Видавництво Дніпропетровського
національного університету, оформлення, 2010

УДК 539.3

В. Г. Боборыкин

Учебно-тренировочный центр Крымской электроэнергетической системы

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ ГРИНА К ИЗГИБУ ПРОИЗВОЛЬНО ОЧЕРЧЕННОЙ ГИБКОЙ ПЛАСТИНЫ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Розглядається геометрично нелінійний згин тонкої пружної ізотропної пластини довільної конфігурації з неоднорідними змішаними граничними умовами, причому сегменти з різними умовами 7-ми основних типів розташовані на границі пластини довільно. Задача формулюється за переміщеннями у вигляді композиції двох взаємозв'язаних граничних задач з лінійними диференціальними операторами в лівих частинах основних рівнянь. Для пошуку рішення пропонується будувати ітераційну послідовність, на кожному кроці якої використовуються інтегральні представлення функцій і матриць Грина для рівняння Софі Жермен і двовірної неоднорідної системи Ламе в довільно обкреслених областях зі змішаними неоднорідними граничними умовами.

Ключові слова: геометрично нелінійний згин пластини, змішані граничні умови, функції Грина

Рассматривается геометрически нелинейный изгиб тонкой упругой изотропной пластины произвольной конфигурации с неоднородными смешанными граничными условиями, причем участки с различными условиями 7-ми основных типов расположены на границе пластины произвольно. Задача формулируется по перемещениям в виде композиции двух взаимосвязанных граничных задач с линейными дифференциальными операторами в левых частях основных уравнений. Для поиска решения предлагается строить итерационную последовательность, на каждом шаге которой используются интегральные представления функций и матриц Грина для уравнения Софи Жермен и двумерной неоднородной системы Ламе в произвольно очерченных областях со смешанными неоднородными граничными условиями.

Ключевые слова: геометрически нелинейный изгиб пластини, смешанные граничные условия, функции Грина

The geometrically nonlinear bending of an arbitrary bounded thin elastic isotropic plate with the non-homogeneous mixed boundary conditions is considered, and regions with various conditions of 7 basic types are located arbitrarily on the boundary. The problem is considered in the displacement formulation in the form of a composition of two inter-co-related boundary value problems with linear differential operators in the left-hand-side of the governing equations. To find the solution, the iterative algorithm is offered, where integral representations of Green's functions and matrices for Sophie Germain equation and 2-D non-homogeneous Lamé system in regions of irregular shape with the mixed non-homogeneous boundary conditions are used on every step of the iterative sequence.

Key words: geometrically nonlinear bending of the plate, mixed boundary conditions, Green's functions

Введение. Решение граничных задач о геометрически нелинейном изгибе упругих пластин и пологих оболочек разыскивается, как правило, путем построения последовательности приближений, на каждом шаге которой решаются две линейные задачи: для уравнения Софи Жермен и для неоднородной двумерной системы Ламе [2; 3; 6; 10 и др.]. Приближенное численное решение этих линейных задач может быть получено с помощью МКР, МКЭ, МГЭ и др. методов.

Проблема значительно упрощается в случае, когда известны функции и матрицы Грина для упомянутых линейных задач, поскольку решение последних получается простым интегрированием по двумерной области и контуру срединной плоскости пластини. К сожалению, использование мощного аппарата функций и матриц Грина в задачах геометрически нелинейного изгиба ограничивается обычно пластинами (пологими оболочками) канонической формы с простейшими граничными условиями [10 и др.]. Связано это с тем, что для областей произвольной конфигурации с произвольными смешанными граничными условиями найти аналитическое или приближенно-аналитическое выражение для функции (матрицы) Грина, увы, невозможно.

В настоящей работе предлагается использовать, следуя рекомендациям [8; 9], интегральные представления функций и матриц Грина для уравнения Софи Жермен и неоднородной системы Ламе в произвольно очерченных областях со смешанными неоднородными граничными условиями. Путем дифференцирования ядер под знаком интеграла получены удобные для ПЭВМ-вычислений формулы для построения итерационной последовательности. Предлагаемый подход сгодится для отыскания приближенного численного решения задач об изгибе гибких пластин и пологих оболочек (жестких и гибких) произвольной конфигурации с произвольно расположенными на границе участками, на которых заданы неоднородные граничные условия любого из семи основных типов [4] в любом сочетании.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкую упругую изотропную пластину, срединная плоскость которой занимает в прямоугольной декартовой системе координат xoy конечную область Ω . При изгибе пластины будем учитывать геометрическую нелинейность, удерживая в соотношениях Коши члены второго порядка:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (1)$$

где ε_x , ε_y , γ_{xy} – деформации; w – поперечный прогиб; u_x , u_y – тангенциальные смещения точек срединной плоскости.

Такие пластины, как известно, называют гибкими. Выпишем дифференциальное уравнение [7] изогнутой срединной плоскости гибкой пластины, находящейся под действием поперечной нагрузки q и тангенциальных усилий N_x , N_y , N_{xy}

$$\Delta \Delta w(x, y) = \frac{1}{D} \left(q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (2)$$

где $D = \frac{E d^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластины; d , E , $\mu = const$ – соответственно

толщина, модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала пластины.

Геометрические уравнения Коши (1) и закон Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E d} (N_x - \mu N_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E d} (N_y - \mu N_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E d} N_{xy}, \quad (3)$$

позволяют выразить тангенциальные усилия N_x , N_y , N_{xy} через перемещения w и

$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ 2N_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{N}[w; \mathbf{u}] = E_1 d \cdot \left(\Theta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \Theta w \times \Xi w \right), \quad (4)$$

где $E_1 = \frac{E}{1-\mu^2}$, $\Xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$, $\Theta = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \mu \frac{\partial}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ (1-\mu) \frac{\partial}{\partial y} & (1-\mu) \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$.

Предполагая, что нагрузка q направлена перпендикулярно к срединной плоскости пластины, а в плоскости xoy действуют массовые силы $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$, запишем уравнения равновесия элемента срединной плоскости:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = 0. \quad (5)$$

Соотношения (2), (4) и (5) приводят к системе дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций прогибов $w(x, y)$ и тангенциальных смещений $\mathbf{u}(x, y)$:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Delta w(x, y) &= \frac{1}{D} \left(q(x, y) + Q[w(x, y); \mathbf{u}(x, y)] \right) \\ - \mathbf{L} \mathbf{u}(x, y) &= \frac{1}{E_1 d} \mathbf{p}(x, y) + \mathbf{P}[w(x, y)] \end{aligned} \right\} (x, y) \in \Omega, \quad (6)$$

где

$$Q[w; \mathbf{u}] = \mathbf{K} w \times \mathbf{N}[w; \mathbf{u}], \quad \mathbf{P}[w] = \mathbf{L} w \times \Xi w, \quad (7)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при $\mathbf{p}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ система уравнений (6) дает классическую [2] формулировку в перемещениях задачи об изгибе гибкой пластины под действием поперечной нагрузки интенсивности $q(x, y)$.

Пусть область Ω очерчена произвольной несамопересекающейся гладкой границей $\Gamma: \{x = \xi(s), y = \eta(s); 0 \leq s \leq S\}$, где s – длина дуги, $\xi(0) = \xi(S)$, $\eta(0) = \eta(S)$. Обозначим единичный касательный вектор и внутреннюю нормаль к границе Γ соответственно

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} \xi'(s) \\ \eta'(s) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\eta'(s) \\ \xi'(s) \end{pmatrix}.$$

Обозначим также перемещения граничной точки $(\xi(s), \eta(s)) \in \Gamma$ в плоскости xoy в направлениях $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{v} соответственно $u_\tau(s)$ и $u_v(s)$, а проекции на $\boldsymbol{\tau}$ и \mathbf{v} вектора интенсивности тангенциальной граничной нагрузки соответственно $N_\tau(s)$ и $N_v(s)$.

Закон Гука (3) и геометрические уравнения Коши (1) приводят к соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E_1 d} N_\tau(s) &= -\frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u_v}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \frac{\partial u_\tau}{\partial \mathbf{v}} + \left(\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\tau}} \cdot \frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}} \right)_\Gamma \right) \\ \frac{1}{E_1 d} N_v(s) &= -\mu \frac{\partial u_\tau}{\partial \boldsymbol{\tau}} - \frac{\partial u_v}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right)_\Gamma^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}} \right)_\Gamma^2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Изгибающий момент M и обобщенная перерезывающая сила V на границе срединной плоскости пластины, как известно [7], выражаются через прогиб w с помощью формул:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{D} M(s) &= -\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \\ \frac{1}{D} V(s) &= \frac{\partial^3 w}{\partial v^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial v \partial \tau^2} + (1-\mu) \chi(s) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

где $\chi(s) = \xi'(s)\eta''(s) - \xi''(s)\eta'(s)$ – кривизна кривой Γ

Пусть на границе Γ заданы смешанные условия:

$$\left. \begin{aligned} V &= f_1(s), & M &= f_2(s), & N_\tau &= g_1(s), & N_\nu &= g_2(s) & \text{на } \Gamma_1 \\ V &= f_1(s), & M &= f_2(s), & E_1 d u_\tau &= g_1(s), & E_1 d \cdot u_\nu &= g_2(s) & \text{на } \Gamma_2 \\ Dw &= f_1(s), & M &= f_2(s), & N_\tau &= g_1(s), & N_\nu &= g_2(s) & \text{на } \Gamma_3 \\ Dw &= f_1(s), & M &= f_2(s), & N_\tau &= g_1(s), & E_1 d u_\nu &= g_2(s) & \text{на } \Gamma_4 \\ Dw &= f_1(s), & M &= f_2(s), & E_1 d \cdot u_\tau &= g_1(s), & E_1 d \cdot u_\nu &= g_2(s) & \text{на } \Gamma_5 \\ Dw &= f_1(s), & D \frac{\partial w}{\partial v} &= f_2(s), & N_\tau &= g_1(s), & N_\nu &= g_2(s) & \text{на } \Gamma_6 \\ Dw &= f_1(s), & D \frac{\partial w}{\partial v} &= f_2(s), & E_1 d \cdot u_\tau &= g_1(s), & E_1 d u_\nu &= g_2(s) & \text{на } \Gamma_7 \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

Здесь и далее $\bigcup_{k=1}^7 \Gamma_k = \Gamma$, расположение участков Γ_k на Γ произвольно, каждый участок Γ_k может состоять из нескольких сегментов;

$\mathbf{f}(s) = \begin{Bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{Bmatrix}$, $\mathbf{g}(s) = \begin{Bmatrix} g_1(s) \\ g_2(s) \end{Bmatrix}$ – интегрируемые на $[0, S]$ вектор-функции

Очевидно, что при $\mathbf{f}(s) \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ и $\mathbf{g}(s) \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ граничные условия (10) определяют [4]:

- свободный край на участке Γ_1 ;
- шарнирный, свободный в поперечном направлении, контур на участке Γ_2 ;
- подвижный шарнир на участке Γ_3 ,
- шарнирный, свободный в тангенциальном направлении, контур на участке Γ_4 ,
- неподвижный шарнир на участке Γ_5 ,
- скользящая заделка на участке Γ_6 ,
- жесткое защемление на участке Γ_7 .

Отметим, что постановка граничной задачи в виде (6), (10) позволяет легко строить тестовые примеры, поскольку и система уравнений (6), и граничные условия (10) являются неоднородными. Действительно, положив

$$w(x, y) = W(x, y), \quad \mathbf{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} U_1(x, y) \\ U_1(x, y) \end{Bmatrix},$$

где W — четырежды непрерывно дифференцируемая функция, а U_1 и U_2 — дважды непрерывно дифференцируемые функции, и подействовав на W , U_1 , U_2 соответствующими дифференциальными операторами из соотношений (4), (6) – (10), несложно найти аналитические выражения для функций q , p , f и g .

Формулировка задачи в виде двух взаимосвязанных задач. Обратим внимание на то, что левые части уравнений (6) содержат линейные дифференциальные операторы $\Delta\Delta$ и $-\mathbf{L}$. Поскольку известны [8; 9] интегральные представления функций и матриц Грина для линейных задач с уравнениями типа (6) и неоднородными смешанными граничными условиями (см. ниже), целесообразно записать исходную граничную задачу в виде следующей композиции двух взаимосвязанных граничных задач.

1-я граничная задача

Требуется найти функцию $w(x, y)$, которая удовлетворяет внутри области Ω уравнению

$$\Delta\Delta w(x, y) = \frac{1}{D} \left(q(x, y) + Q(x, y) \right), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (11)$$

где $Q(x, y) = Q[w(x, y), \mathbf{u}(x, y)]$,

а на границе Γ условиям

$$\begin{aligned} V &= f_1(s), & M &= f_2(s) & \text{на } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\ Dw &= f_1(s), & M &= f_2(s) & \text{на } \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, \\ Dw &= f_1(s), & D \frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}} &= f_2(s) & \text{на } \Gamma_6 \cup \Gamma_7. \end{aligned}$$

Перепишем эти граничные условия с учетом соотношений (9) в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \mathbf{v}^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial \mathbf{v} \partial \tau^2} + (1 - \mu) \chi(s) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{v}^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right) \right)_{\Gamma} &= \frac{1}{D} f_1(s), \quad s \in S_1 \cup S_2 \\ - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{v}^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right)_{\Gamma} &= \frac{1}{D} f_2(s), \quad s \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \\ w|_{\Gamma} &= \frac{1}{D} f_1(s), \quad s \in S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7 \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{v}}|_{\Gamma} &= \frac{1}{D} f_2(s), \quad s \in S_6 \cup S_7 \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

здесь и далее S_k — множество значений параметра s , отвечающих участку Γ_k границы Γ :

$$S_k = \{s : \Gamma_k\}, \quad k = 1, \dots, 7, \quad \bigcup_{k=1}^7 S_k = [0, S].$$

2-я граничная задача.

Требуется найти вектор-функцию $\mathbf{u}(x, y)$, которая удовлетворяет внутри области Ω уравнению

$$-\mathbf{L}\mathbf{u}(x, y) = \frac{1}{E_1 d} \mathbf{p}(x, y) + \mathbf{P}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (13)$$

где $\mathbf{P}(x, y) = \mathbf{P}[w(x, y)]$,

а на границе Γ условиям.

$$\begin{aligned} N_\tau &= g_1(s), & N_\nu &= g_2(s) & \text{на } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_6, \\ N_\tau &= g_1(s), & E_1 d \cdot u_\nu &= g_2(s) & \text{на } \Gamma_4, \\ E_1 d \cdot u_\tau &= g_1(s), & E_1 d \cdot u_\nu &= g_2(s) & \text{на } \Gamma_2 \cup \Gamma_5 \cup \Gamma_7. \end{aligned}$$

Перепишем эти граничные условия с учетом соотношений (8) в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial \tau} + \frac{\partial u_\tau}{\partial \nu} \right)_r &= \frac{1}{E_1 d} g_1(s) + \frac{1}{2} h_1(s), & s \in S_1 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_6 \\ -\left(\mu \frac{\partial u_\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial u_\nu}{\partial \nu} \right)_r &= \frac{1}{E_1 d} g_2(s) + \frac{1}{2} h_2(s), & s \in S_1 \cup S_3 \cup S_6 \\ u_\tau|_r &= \frac{1}{E_1 d} g_1(s) + \frac{1}{2} h_1(s), & s \in S_2 \cup S_5 \cup S_7 \\ u_\nu|_r &= \frac{1}{E_1 d} g_1(s) + \frac{1}{2} h_1(s), & s \in S_2 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_7 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} h_1(s) &= \begin{cases} (1-\mu) \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial w}{\partial \nu} \right)_r, & s \in S_1 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_6 \\ 0, & s \in S_2 \cup S_5 \cup S_7 \end{cases} \\ h_2(s) &= \begin{cases} \left(\mu \left(\frac{\partial w}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} \right)^2 \right)_r, & s \in S_1 \cup S_3 \cup S_6 \\ 0, & s \in S_2 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_7 \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, что 1-я граничная задача (11), (12) и 2-я граничная задача (13), (14) взаимосвязаны посредством функций $Q(x, y)$, $\mathbf{P}(x, y) = \begin{pmatrix} P_x(x, y) \\ P_y(x, y) \end{pmatrix}$ и $\mathbf{h}(s) = \begin{pmatrix} h_1(s) \\ h_2(s) \end{pmatrix}$.

Метод решения. Обозначим $t = \xi'(\bar{s})(x - \xi(\bar{s})) + \eta'(\bar{s})(y - \eta(\bar{s}))$, $n = -\eta'(\bar{s})(x - \xi(\bar{s})) + \xi'(\bar{s})(y - \eta(\bar{s}))$, $r = \sqrt{t^2 + n^2}$, $\varphi = \arctan \frac{t}{n}$.

Запишем решение 1-й граничной задачи (11), (12) в виде [8]:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \frac{1}{D} \iint_{\Omega} \bar{G}_w(x, y; \bar{x}, \bar{y}) \left(q(\bar{x}, \bar{y}) + Q(\bar{x}, \bar{y}) \right) d\bar{x} d\bar{y} + \\ &+ \frac{1}{D} \int_0^s \bar{G}_w(x, y; s) \mathbf{f}(s) ds, \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \bar{G}_w(x, y; \bar{x}, \bar{y}) &= G_w(x - \bar{x}, y - \bar{y}) - \int_0^s \mathbf{B}_w(x, y; \bar{s}) \mathbf{K}^*(\bar{s}; \bar{x}, \bar{y}) d\bar{s} \\ \bar{G}_w(x, y; s) &= \int_0^s \mathbf{B}_w(x, y; \bar{s}) \mathbf{A}^*(\bar{s}; s) d\bar{s} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$G_{\mu}(x, y) = \frac{1}{8\pi} (x^2 + y^2) \left(\ln \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \right), \quad (18)$$

$$\mathbf{B}_{\mu}(x, y; \bar{s}) = \left(B_1(x, y; \bar{s}); B_2(x, y; \bar{s}) \right) = \left(\frac{1}{2} r^2 (\ln r - 1); \frac{1}{1-\mu} \left(\frac{t^2 - n^2}{2} \left(\ln r - \frac{3}{2} \right) + t n \varphi \right) \right) \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix},$$

$$c_1 = 1 + \mu, \quad c_2 = -2,$$

$$\mathbf{K}^*(\bar{s}; \bar{x}, \bar{y}) = \begin{vmatrix} K_1^*(\bar{s}; \bar{x}, \bar{y}) \\ K_2^*(\bar{s}; \bar{x}, \bar{y}) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A}^*(\bar{s}; s) = \begin{vmatrix} \Lambda_{11}^*(\bar{s}; s) & \Lambda_{12}^*(\bar{s}; s) \\ \Lambda_{21}^*(\bar{s}; s) & \Lambda_{22}^*(\bar{s}; s) \end{vmatrix}.$$

Затем запишем решение 2-й граничной задачи (13), (14) в виде [9]:

$$\mathbf{u}(x, y) = \iint_{\Omega} \tilde{\mathbf{G}}_{\mu}(x, y; \bar{x}, \bar{y}) \left(\frac{1}{E_1 d} \mathbf{p}(\bar{x}, \bar{y}) + \mathbf{P}(\bar{x}, \bar{y}) \right) d\bar{x} d\bar{y} + \int_0^1 \tilde{\mathbf{G}}_{\mu}(x, y; s) \left(\frac{1}{E_1 d} \mathbf{g}(s) + \frac{1}{2} \mathbf{h}(s) \right) ds, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_{\mu}(x, y; \bar{x}, \bar{y}) &= \mathbf{G}_{\mu}(x - \bar{x}, y - \bar{y}) - \int_0^1 \mathbf{B}_{\mu}(x, y; \bar{s}) \mathbf{C}^*(\bar{s}; \bar{x}, \bar{y}) d\bar{s} \\ \tilde{\mathbf{G}}_{\mu}(x, y; s) &= \int_0^1 \mathbf{B}_{\mu}(x, y; \bar{s}) \mathbf{A}^*(\bar{s}; s) d\bar{s} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\mathbf{G}_{\mu}(x, y) = \frac{1 + \mu}{4\pi(1 - \mu)} \begin{vmatrix} \frac{x^2}{R^2} - \frac{3 - \mu}{1 + \mu} \ln R & \frac{xy}{R^2} \\ \frac{xy}{R^2} & \frac{y^2}{R^2} - \frac{3 - \mu}{1 + \mu} \ln R \end{vmatrix}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (21)$$

$$\mathbf{B}_{\mu}(x, y; \bar{s}) = \frac{1}{1 - \mu^2} \begin{vmatrix} \xi'(\bar{s}) & -\eta'(\bar{s}) \\ \eta'(\bar{s}) & \xi'(\bar{s}) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2\varphi t - (3 + \mu)(\ln r - 1)n & (1 - \mu)\varphi - (1 + \mu)\frac{tn}{r^2} \\ (1 - \mu)(\ln r - 1)t - 2\mu\varphi n & 2\ln r + (1 + \mu)\frac{t^2 - n^2}{2r^2} \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{C}^*(\bar{s}; \bar{x}, \bar{y}) = \begin{vmatrix} C_{11}^*(\bar{s}; \bar{x}, \bar{y}) & C_{12}^*(\bar{s}; \bar{x}, \bar{y}) \\ C_{21}^*(\bar{s}; \bar{x}, \bar{y}) & C_{22}^*(\bar{s}; \bar{x}, \bar{y}) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{A}^*(\bar{s}; s) = \begin{vmatrix} A_{11}^*(\bar{s}; s) & A_{12}^*(\bar{s}; s) \\ A_{21}^*(\bar{s}; s) & A_{22}^*(\bar{s}; s) \end{vmatrix}$$

Как известно [6], формулы (18) и (21) дают выражения для фундаментальных решений соответственно бигармонического уравнения и однородной двумерной системы Ламе. Методы построения функций $\mathbf{K}^*(\bar{s}; \bar{x}, \bar{y})$, $\mathbf{A}^*(\bar{s}; s)$, $\mathbf{C}^*(\bar{s}; \bar{x}, \bar{y})$ и $\mathbf{A}^*(\bar{s}; s)$ из правых частей соотношений (17) и (20) подробно описаны в [8 и 9]. Здесь заметим только, что структура

этих функций определяется конфигурацией контура Γ и расположением участков Γ_k , $k = 1 \dots 7$ на Γ . Перепишем формулы (16) и (19) в виде:

$$w(x, y) = w^{(0)}(x, y) + \frac{1}{D} \iint_{\Omega} \tilde{G}_n(x, y; \tilde{x}, \tilde{y}) Q(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}, \quad (22)$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}^{(0)}(x, y) + \iint_{\Omega} \tilde{G}_n(x, y; \tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{P}(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} + \frac{1}{2} \int_0^s \tilde{G}_n(x, y; s) \mathbf{h}(s) ds, \quad (23)$$

где

$$w^{(0)}(x, y) = \frac{1}{D} \iint_{\Omega} \tilde{G}_n(x, y; \tilde{x}, \tilde{y}) q(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} + \frac{1}{D} \int_0^s \tilde{G}_n(x, y; s) \mathbf{f}(s) ds, \quad (24)$$

$$\mathbf{u}^{(0)}(x, y) = \frac{1}{E_1 d} \iint_{\Omega} \tilde{G}_n(x, y; \tilde{x}, \tilde{y}) \mathbf{p}(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} + \frac{1}{E_1 d} \int_0^s \tilde{G}_n(x, y; s) \mathbf{g}(s) ds. \quad (25)$$

Отметим, что определяемая формулой (24) функция $w^{(0)}(x, y)$ есть решение задачи об изгибе жесткой пластины с граничными условиями (12) под действием поперечной нагрузки интенсивности $q(x, y)$ [8], а вектор-функция $\mathbf{u}^{(0)}(x, y)$ из формулы (25) является решением плоской задачи теории упругости в геометрически линейной постановке с граничными условиями (14) при наличии массовых сил интенсивности $\mathbf{p}(x, y)$ [9].

Очевидно, что формулы (22) и (23) дают решение граничной задачи (6), (10) при условии, что известны функции $Q(x, y)$, $\mathbf{P}(x, y)$ и $\mathbf{h}(s)$. Последние определим, как предел итерационной последовательности, построенной следующим образом. Положим для начального приближения $Q^{(0)}(x, y) \equiv 0$, $\mathbf{P}^{(0)}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{h}^{(0)}(s) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и, используя формулы (4), (7), (15), (22) и (23), построим последовательные приближения для $k = 0, 1, \dots$

$$\left. \begin{aligned} Q^{(k+1)}(x, y) &= (1 - \omega_i^1) Q^{(k)}(x, y) + \omega_i^1 \mathbf{K} w^{(k)}(x, y) \times \mathbf{N}^{(k)}(x, y) \\ \mathbf{P}^{(k+1)}(x, y) &= (1 - \omega_i^2) \mathbf{P}^{(k)}(x, y) + \omega_i^2 \mathbf{L} w^{(k)}(x, y) \times \Xi w^{(k)}(x, y) \\ \mathbf{h}^{(k+1)}(s) &= (1 - \omega_i^3) \mathbf{h}^{(k)}(s) + \omega_i^3 \mathbf{H}^{(k)}(s) \end{aligned} \right\}, \quad (26)$$

где

$$\mathbf{N}^{(k)}(x, y) = E_1 d \cdot \left(\Theta \mathbf{u}^{(k)}(x, y) + \frac{1}{2} \Theta w^{(k)}(x, y) \times \Xi w^{(k)}(x, y) \right), \quad \mathbf{H}^{(k)}(s) = \begin{pmatrix} H_1^{(k)}(s) \\ H_2^{(k)}(s) \end{pmatrix},$$

$$H_1^{(k)}(s) = \begin{cases} (1 - \mu) \left(\frac{\partial w^{(k)}(x, y)}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} \right) \left(\frac{\partial w^{(k)}(x, y)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} \right), & s \in S_1 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_6 \\ 0, & s \in S_2 \cup S_5 \cup S_7 \end{cases}$$

$$H_2^{(k)}(s) = \begin{cases} \mu \left(\frac{\partial w^{(k)}(x, y)}{\partial \tau} \Big|_{\Gamma} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(k)}(x, y)}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} \right)^2, & s \in S_1 \cup S_3 \cup S_6 \\ 0, & s \in S_2 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_7. \end{cases}$$

Вопросы сходимости итерационной последовательности (26) остаются в тех же рамках, что уже обозначены в существующей литературе [2; 3; 6; 10 и др.], поэтому здесь они обсуждаться не будут. Заметим лишь, что варьируя величины коэффициентов $0 < \omega_i' \leq 1$ в правых частях соотношений (26), можно влиять на скорость сходимости предлагаемой итерационной последовательности.

Подчеркнем, что формулы для вычисления моментов и перерезывающих сил в срединной плоскости пластины получаются путем дифференцирования ядер под знаком интеграла в правых частях соотношений (22) и (24). Эти формулы приведены в [8] и, как там показано на тестовом примере, обеспечивают весьма высокую точность приближенных решений даже вблизи границы или на границе.

Некоторые формулы для реализации метода. При численном решении задачи целесообразно аппроксимировать область Ω совокупностью элементарных прямоугольников, а границу Γ – множеством элементарных дуг окружностей. Тогда приближенное вычисление интегралов по области Ω (контуру Γ) сведется к интегрированию по каждому элементарному прямоугольнику (элементарной дуге окружности). Из формул (22) – (25), (17) и (20) следует, что для построения итерационной последовательности (26) неплохо было бы знать, чему равны производные $\Xi, \Theta, K, L, \partial/\partial \tau, \partial/\partial \nu$ от функций G_w, B_w, G_w, B_w . Все эти производные несложно вычислить аналитически. Так, для ядер двойных интегралов по области Ω имеем:

$$\Xi G_w(x-\tilde{x}, y-\tilde{y}) = \frac{1}{4\pi} \begin{vmatrix} \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\Phi}_2 \end{vmatrix};$$

$$\Theta G_w(x-\tilde{x}, y-\tilde{y}) = \frac{1}{4\pi} \begin{vmatrix} \tilde{\Phi}_1 & \mu \tilde{\Phi}_2 \\ \mu \tilde{\Phi}_1 & \tilde{\Phi}_2 \\ (1-\mu) \tilde{\Phi}_2 & (1-\mu) \tilde{\Phi}_1 \end{vmatrix};$$

$$K G_w(x-\tilde{x}, y-\tilde{y}) = \frac{1}{4\pi} \left(\ln \tilde{r} + \tilde{\Psi}_1; \quad \ln \tilde{r} - \tilde{\Psi}_1; \quad \tilde{\Psi}_2 \right);$$

$$L G_w(x-\tilde{x}, y-\tilde{y}) = \frac{1+\mu}{8\pi} \begin{vmatrix} \frac{3-\mu}{1+\mu} \ln \tilde{r} + \tilde{\Psi}_1 & \tilde{\Psi}_2 \\ \tilde{\Psi}_2 & \frac{3-\mu}{1+\mu} \ln \tilde{r} - \tilde{\Psi}_1 \end{vmatrix};$$

$$\Theta G_{\mu}(x-\tilde{x}, y-\tilde{y}) = \frac{-1-\mu}{2\pi} \begin{vmatrix} (1+c_0)\frac{\tilde{X}}{\tilde{r}^2} - \frac{\tilde{X}\tilde{Y}^2}{\tilde{r}^4} & \frac{\tilde{X}^2\tilde{Y}}{\tilde{r}^4} - c_0\frac{\tilde{Y}}{\tilde{r}^2} \\ \frac{\tilde{X}\tilde{Y}^2}{\tilde{r}^4} - c_0\frac{\tilde{X}}{\tilde{r}^2} & (1+c_0)\frac{\tilde{Y}}{\tilde{r}^2} - \frac{\tilde{X}^2\tilde{Y}}{\tilde{r}^4} \\ 2c_0\frac{\tilde{Y}}{\tilde{r}^2} + \frac{2\tilde{X}^2\tilde{Y}}{\tilde{r}^4} & 2c_0\frac{\tilde{X}}{\tilde{r}^2} + \frac{2\tilde{X}\tilde{Y}^2}{\tilde{r}^4} \end{vmatrix};$$

где $c_0 = \frac{1-\mu}{2(1+\mu)}$, $\tilde{r}^2 = \tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2$, $\tilde{X} = x - \tilde{x}$, $\tilde{Y} = y - \tilde{y}$,

$$\tilde{\Phi}_1 = \tilde{X}(\ln \tilde{r} - 0.5), \quad \tilde{\Phi}_2 = \tilde{Y}(\ln \tilde{r} - 0.5), \quad \tilde{\Psi}_1 = \frac{\tilde{X}^2 - \tilde{Y}^2}{2\tilde{r}^2}, \quad \tilde{\Psi}_2 = \frac{\tilde{X}\tilde{Y}}{\tilde{r}^2}.$$

Отметим, что:

- ядра $\Xi G_{\mu}(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})$ и $\Theta G_{\mu}(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})$ непрерывны;
- ядра $\mathbf{K} G_{\mu}(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})$ и $\mathbf{L} G_{\mu}(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})$ непрерывны при $(x, y) \neq (\tilde{x}, \tilde{y})$, а в точках $(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ обладают логарифмическими особенностями;
- ядро $\Theta G_{\mu}(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})$ непрерывно при $(x, y) \neq (\tilde{x}, \tilde{y})$, а в точках $(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ имеет особенности типа $1/\tilde{r}$.

Интегралы с упомянутыми особенностями по элементарному прямоугольнику легко вычисляются аналитически [1]. Поэтому приближенное вычисление двойных интегралов по области Ω от ядер $\Xi G_{\mu}(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})$, $\Theta G_{\mu}(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})$, $\mathbf{K} G_{\mu}(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})$, $\mathbf{L} G_{\mu}(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})$ и $\Theta G_{\mu}(x-\tilde{x}, y-\tilde{y})$ обеспечит высокую точность при достаточном числе разбиения области Ω на элементарные прямоугольники.

Далее, ядра интегралов по границе Γ равны:

$$\Xi B_j(x, y; \tilde{s}) = \begin{vmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{vmatrix} + \frac{c_j}{1-\mu} \begin{vmatrix} \check{\Phi}_1 \\ \check{\Phi}_2 \end{vmatrix}, \quad j=1,2;$$

$$\Theta B_j(x, y; \tilde{s}) = \begin{vmatrix} \Phi_1 & \mu \Phi_2 \\ \mu \Phi_1 & \Phi_2 \\ (1-\mu)\Phi_2 & (1-\mu)\Phi_1 \end{vmatrix} + \frac{c_j}{1-\mu} \begin{vmatrix} \check{\Phi}_1 & \mu \check{\Phi}_2 \\ \mu \check{\Phi}_1 & \check{\Phi}_2 \\ (1-\mu)\check{\Phi}_2 & (1-\mu)\check{\Phi}_1 \end{vmatrix}, \quad j=1,2;$$

$$\mathbf{K} B_j(x, y; \tilde{s}) = (\ln r + \Psi_1; \ln r - \Psi_1; \Psi_2) + \frac{c_j}{1-\mu} (\check{\Psi}_1; -\check{\Psi}_1; \check{\Psi}_2), \quad j=1,2;$$

$$\mathbf{L} B_j(x, y; \tilde{s}) = \frac{1+\mu}{2} \begin{vmatrix} \frac{3-\mu}{1+\mu} \ln r + \Psi_1 & \Psi_2 \\ \Psi_2 & \frac{3-\mu}{1+\mu} \ln r - \Psi_1 \end{vmatrix} + \frac{c_j(1+\mu)}{2(1-\mu)} \begin{vmatrix} \check{\Psi}_1 & \check{\Psi}_2 \\ \check{\Psi}_2 & -\check{\Psi}_1 \end{vmatrix}, \quad j=1,2;$$

$$\Theta \mathbf{B}_n(x, y; \bar{s}) = \begin{pmatrix} \varphi - \Psi_2 + \check{\Psi}_2 & \frac{2nX^2}{r^4} \\ \varphi + \Psi_2 - \check{\Psi}_2 & \frac{2nY^2}{r^4} \\ 2\Psi_1 - 2\check{\Psi}_1 & \frac{4nXY}{r^4} \end{pmatrix};$$

где $r^2 = X^2 + Y^2$, $\varphi = \arctan \frac{t}{n}$, $X = x - \xi(\bar{s})$, $Y = y - \eta(\bar{s})$,

$$t = \xi'(\bar{s})X + \eta'(\bar{s})Y, \quad n = -\eta'(\bar{s})X + \xi'(\bar{s})Y,$$

$$\Phi_1 = X \left(\ln r - \frac{1}{2} \right), \quad \Phi_2 = Y \left(\ln r - \frac{1}{2} \right),$$

$$\check{\Phi}_1 = (\gamma_1 X + \gamma_2 Y) (\ln r - 1) - (\gamma_2 X - \gamma_1 Y) \varphi,$$

$$\check{\Phi}_2 = (\gamma_2 X - \gamma_1 Y) (\ln r - 1) + (\gamma_1 X + \gamma_2 Y) \varphi,$$

$$\Psi_1 = \frac{X^2 - Y^2}{2r^2}, \quad \Psi_2 = \frac{XY}{r^2}, \quad \check{\Psi}_1 = \gamma_1 \ln r - \gamma_2 \varphi, \quad \check{\Psi}_2 = \gamma_2 \ln r + \gamma_1 \varphi,$$

$$\gamma_1 = \xi'(\bar{s})^2 - \eta'(\bar{s})^2, \quad \gamma_2 = 2\xi'(\bar{s})\eta'(\bar{s}).$$

Подчеркнем, что:

- ядра $\Xi \mathbf{B}_n(x, y; \bar{s})$ и $\Theta \mathbf{B}_n(x, y; \bar{s})$ непрерывны;
- ядра $\mathbf{K} \mathbf{B}_n(x, y; \bar{s})$ и $\mathbf{L} \mathbf{B}_n(x, y; \bar{s})$ непрерывны при $(x, y) \neq (\xi(\bar{s}), \eta(\bar{s}))$, а в точках $(x, y) = (\xi(\bar{s}), \eta(\bar{s}))$ имеют логарифмические особенности и разрывы 1-го рода за счет функции $\arctan(t/n)$;
- ядро $\Theta \mathbf{B}_n(x, y; \bar{s})$ непрерывно при $(x, y) \neq (\xi(\bar{s}), \eta(\bar{s}))$, а в точках $(x, y) = (\xi(\bar{s}), \eta(\bar{s}))$ имеет логарифмические особенности, разрывы 1-го рода за счет функции $\arctan(t/n)$, а также характерные для потенциалов двойного слоя [5] скачки за счет функций $2nX^2/r^4$, $2nY^2/r^4$ и $4nXY/r^4$.

Интегралы с упомянутыми особенностями по элементарной дуге окружности, которая расположена вблизи «особой» точки $(x, y) = (\xi(\bar{s}), \eta(\bar{s}))$ (или включает ее), несложно вычислить аналитически или приближенно-аналитически [1]. Поэтому приближенное вычисление контурных интегралов от ядер $\Xi \mathbf{B}_n(x, y; \bar{s})$, $\Theta \mathbf{B}_n(x, y; \bar{s})$, $\mathbf{K} \mathbf{B}_n(x, y; \bar{s})$, $\mathbf{L} \mathbf{B}_n(x, y; \bar{s})$ и $\Theta \mathbf{B}_n(x, y; \bar{s})$ обеспечит высокую точность при достаточном числе разбиения границы Γ на элементарные дуги.

И, наконец, запишем выражения для производных $\frac{\partial}{\partial \tau}$, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ от функций G_n , \mathbf{B}_n на границе, которые необходимы для вычисления $\mathbf{H}^{(k)}(s)$ в правой части третьего из соотношений (26):

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G_n(\xi(s) - \bar{x}, \eta(s) - \bar{y}) = \frac{1}{4\pi} (\xi'(s)(\xi(s) - \bar{x}) + \eta'(s)(\eta(s) - \bar{y})) \left(\ln \bar{R} - \frac{1}{2} \right);$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} G_n(\xi(s) - \bar{x}, \eta(s) - \bar{y}) = \frac{1}{4\pi} (-\eta'(s)(\xi(s) - \bar{x}) + \xi'(s)(\eta(s) - \bar{y})) \left(\ln \bar{R} - \frac{1}{2} \right);$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} B_j(\xi(s), \eta(s); \bar{s}) = (\alpha T - \beta N) \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) +$$

$$+ \frac{c_j}{1 - \mu} ((\alpha T + \beta N)(\ln R - 1) - (\beta T - \alpha N)\Phi), \quad j = 1, 2;$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} B, (\xi(s), \eta(s); \bar{s}) = ((\beta T + \alpha N) \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) + \\ + \frac{c_j}{1-\mu} ((\beta T - \alpha N) (\ln R - 1) + (\alpha T + \beta N) \Phi), \quad j=1,2;$$

$$\text{где } \tilde{R}^2 = (\xi(s) - \bar{x})^2 + (\eta(s) - \bar{y})^2, \quad R^2 = T^2 + N^2, \quad \Phi = \arctan \frac{T}{N},$$

$$T = \xi'(\bar{s})(\xi(s) - \xi(\bar{s})) + \eta'(\bar{s})(\eta(s) - \eta(\bar{s})),$$

$$N = -\eta'(\bar{s})(\xi(s) - \xi(\bar{s})) + \xi'(\bar{s})(\eta(s) - \eta(\bar{s})),$$

$$\alpha = \xi'(s)\xi'(\bar{s}) + \eta'(s)\eta'(\bar{s}), \quad \beta = \xi'(s)\eta'(\bar{s}) - \eta'(s)\xi'(\bar{s}).$$

В силу того, что полученные производные непрерывны, приближенное вычисление интегралов $\int_0^s \tilde{\mathbf{G}}_{\mu}(x, y; s) \mathbf{h}(s) ds$ для правой части соотношения (23) не вызовет вычислительных затруднений.

Заключение. Предлагаемый здесь итерационный алгоритм поиска численного решения задачи об изгибе произвольно очерченной гибкой пластины со смешанными граничными условиями значительно экономичнее по числу операций ПЭВМ на каждом шаге итерации, чем итерационные алгоритмы, которые базируются на решении линейных задач с помощью МКЭ, МКР, МГЭ и др. на каждом шаге итерации. Как видно из приведенных выше формул, этот алгоритм довольно прост в компьютерной реализации, и в то же время позволяет рассчитывать на приемлемую точность приближенных численных решений, – как в перемещениях, так и в напряжениях.

Ясно, что такой же подход возможен также к задачам об изгибе пологих жестких и гибких оболочек с разнообразными смешанными граничными условиями.

Библиографические ссылки

1. Брычков Ю. А. Таблицы неопределенных интегралов / Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, А. П. Прудников. – М., 1986. – 192 с.
2. Григоренко Я. М. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ / Я. М. Григоренко, А. П. Мукоед. – К., 1983. – 283с.
3. Каюк Я. Ф. Об улучшении сходимости метода простых итераций в нелинейных задачах гибких пластин и пологих оболочек / Я. Ф. Каюк // ПМ, 1974 – Т 10. – №11. – С. 47 – 55
4. Курпа Л. В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек / Л. В. Курпа – Харьков, 2009. – 408 с.
5. Ловитт У. В. Линейные интегральные уравнения / У. В. Ловитт. – М., 1957. – 266 с.
6. Мельников Ю. А. О геометрически нелинейном изгибе пластин сложного очертания / Ю. А. Мельников, В. Л. Волошко // ПМ, 1988. – Т.24. – №7. – С. 83 – 89.
7. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М., 1963. – 636 с.
8. Boborykin V. G. Green's functions for Kirchhoff's plates of irregular shape. Eng. Anal. with Bound Elem., 2010. (Article in press).
9. Boborykin V. G. Green's matrices for the 2-D Lamé system in regions of irregular shape. Eng. Anal. with Bound. Elem., 2009. – V. 33. – № 10. – P. 1181 – 1192.
10. Melnikov Y. A. Green's function approach to the nonlinear bending of closely-spaced parallel plates / Y. A. Melnikov, A. A. Bobylyov, V. V. Shubenko. // Int. J. Solids Structures, 1995. – V. 32. – № 12. – P. 1771 – 1791.

УДК 539.3

А. А. Бобылёв (мл.)

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара***ЗАДАЧА О СЖАТИИ УПРУГОЙ ДВУХСЛОЙНОЙ ПОЛОСЫ
ЖЕСТКИМИ НАГРЕТЫМИ ВЫПУКЛЫМИ ШТАМПАМИ**

Розглядається задача про стискання пружної двохшарової полоси скінченних розмірів жорсткими нагрітими опуклими штампами. На поверхні можливого контакту штампів з половою та на ділянках контакту шарів задаються умови ідеального одностороннього механічного та неідеального теплового контактів. Отримано варіаційну постановку задачі. Запропоновано ітераційний алгоритм, на кожній ітерації якого розв'язуються незв'язані задачі теорії пружності та теплопровідності. Для дискретизації використано метод скінченних елементів.

Ключові слова: контактна задача, термопружність, варіаційний метод, неідеальний тепловий контакт, односторонній контакт, метод скінченних елементів.

Рассматривается задача о сжатии упругой двухслойной полосы конечных размеров жесткими нагретыми выпуклыми штампами. На поверхностях возможного контакта штампов с полосой и на площадках контакта слоев задаются условия идеального одностороннего механического контакта и неидеального теплового контакта. Получена вариационная формулировка задачи. Предложен итерационный алгоритм, на каждой итерации которого решаются несвязанные задачи теории упругости и теплопроводности. Для дискретизации задач использован метод конечных элементов.

Ключевые слова: контактная задача, термоупругость, вариационный метод, неидеальный тепловой контакт, односторонний контакт, метод конечных элементов.

The problem of compression of a finite two-layer elastic band by hard convex heated punches is considered. The conditions of ideal unilateral mechanical contact and imperfect thermal contact are used. The variational formulation of the problem is obtained. The iterative numerical algorithm is proposed. Unbounded elastic and thermal problems are solved at the each iteration. The finite element method is used for discretization of the problems.

Key words: contact problem, thermoelasticity, variational method, imperfect thermal contact, unilateral contact, finite element method.

Введение. Известно, что температурные деформации в ряде случаев могут существенно изменять картину напряженно-деформированного состояния даже при незначительном нагреве. На тепловой режим контактирующих тел значительное влияние оказывает так называемое термическое сопротивление контакта, обусловленное несовершенством механического соединения контактирующих поверхностей [3; 7; 8]. Особенно важен учет неидеального контакта в случае многослойных тел. Учитывая внедрение в практику проектирования конструкций и сооружений автоматизированных систем, актуальной проблемой является разработка методов компьютерного моделирования процессов контактного теплообмена.

В настоящей работе рассматривается плоская контактная задача термоупругости об определении напряженно-деформированного и температурного состояний двухслойной упругой полосы конечных размеров, сжимаемой жесткими нагретыми штампами. При постановке задачи предполагаются известными лишь предельно возможные области контакта полосы со штампами и слоев между собой, фактические площадки контакта определяются в процессе решения задачи. Тепловое взаимодействие полосы со штампами и слоев между собой описывается условиями неидеального теплового контакта. Предполагается, что коэффициент контактного теплообмена является функцией контактного давления и фактического зазора между слоями. Это приводит к связанности задач определения напряженно-деформированного и температурного состояний даже при использовании несвязанной системы уравнений термоупругости. Особый интерес вызывают условия, при которых вследствие нагрева изменяются размеры областей фактического контакта.

Целью работы является разработка вычислительного алгоритма и численное решение рассматриваемой задачи.

Постановка задачи. Рассмотрим двухслойную упругую полосу конечных размеров, слои которой занимают области Ω^1 и Ω^2 с кусочно-гладкими границами Γ^1 и Γ^2 с внешней нормалью \bar{n} . Заранее условимся, что везде, где это возможно, будем опускать индекс (номер тела). Под $T(x)$, $u_i(x)$, $\varepsilon_{ij}(x)$, $\sigma_{ij}(x)$ будем понимать соответственно температуру и компоненты вектора перемещений, тензоров деформации и напряжений в точке $x \in \Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$. Перемещения и деформации считаются малыми. В недеформированном состоянии напряжения в полосе отсутствуют, температура равна T_0 . Термоупругое состояние полосы описывается несвязанной системой уравнений термоупругой статики [7]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} [\varepsilon_{kl} - \beta_{kl}(T - T_0)]; \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (2)$$

где \bar{F} – плотность объемных сил; a_{ijkl} – компоненты тензора модулей упругости; β_{kl} – компоненты тензора коэффициентов температурного расширения; λ – коэффициент теплопроводности.

Части границ Γ^1 и Γ^2 , по которым возможен контакт упругой полосы с жесткими штампами, обозначим Γ_p^1 и Γ_p^2 соответственно, а части, по которым возможен контакт слоев полосы между собой – Γ_c^1 и Γ_c^2 соответственно. Фактические площадки контакта полосы со штампами и слоев между собой определяются в процессе решения задачи.

Форма и положение штампа описывается функцией $\Phi(x)$, значение которой в точке $x \in \Gamma_p$ равно расстоянию от этой точки до поверхности штампа, измеренному вдоль направления внешней нормали $\bar{n}(x)$ слоя Ω . Расстояние $\Phi(x)$ отсчитывается по отношению к недеформированному состоянию Ω . Механическое взаимодействие упругой полосы со штампами описывается линеаризованными условиями одностороннего контакта при отсутствии трения [4–6]:

$$u_n(x) \leq \Phi(x), \quad x \in \Gamma_p; \quad (3)$$

$$\sigma_n(x) \leq 0, \quad \sigma_t(x) = 0, \quad x \in \Gamma_p; \quad (4)$$

$$\sigma_n(x)[u_n(x) - \Phi(x)] = 0, \quad x \in \Gamma_p, \quad (5)$$

где $u_n = u_i n_i$; $\sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_i$; $\sigma_t = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i$.

Аналогично, механическое взаимодействие слоев упругой полосы между собой описывается соотношениями:

$$u_n^1(x^1) + u_n^2(x^2) \leq \Psi(x^1), \quad x^1 \in \Gamma_c^1, \quad x^2(x^1) \in \Gamma_c^2; \quad (6)$$

$$\sigma_n^1(x^1) = \sigma_n^2(x^2) \leq 0, \quad \sigma_t^1(x^1) = \sigma_t^2(x^2) = 0, \quad x^1 \in \Gamma_c^1, \quad x^2(x^1) \in \Gamma_c^2; \quad (7)$$

$$\sigma_n^1(x^1)[u_n^1(x^1) + u_n^2(x^2) - \Psi(x^1)] = 0, \quad x^1 \in \Gamma_c^1, \quad x^2(x^1) \in \Gamma_c^2, \quad (8)$$

где Ψ – начальный зазор между упругими слоями.

Тепловое взаимодействие упругой полосы со штампами и слоев между собой описывается условиями неидеального теплового контакта:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha_p (T - T_p), \quad x \in \Gamma_p; \quad (9)$$

$$\lambda^1 \frac{\partial T^1}{\partial n^1} = -\lambda^2 \frac{\partial T^2}{\partial n^2} = -\alpha_c (T^1 - T^2), \quad x^1 \in \Gamma_c^1, \quad x^2(x^1) \in \Gamma_c^2, \quad (10)$$

где α_p и α_c – коэффициенты контактного теплообмена, T_p – температура нагрева поверхности штампа.

Значение коэффициентов контактного теплообмена α_p и α_c зависит от большого числа факторов [9], так как теплота между соприкасающимися поверхностями в общем случае может передаваться теплопроводностью через места фактического контакта выступающих неровностей, теплопроводностью и конвекцией через среду, заполняющую свободное пространство между поверхностями, и излучением. В настоящей работе рассматривается случай, когда α_p и α_c являются функциями нормальных контактных напряжений σ_n и фактического зазора ψ между поверхностями полосы и штампа или между поверхностями упругих слоев:

$$\alpha(\sigma_n, \psi) = \begin{cases} f_1(\sigma_n), & \sigma_n \leq 0, \psi = 0; \\ f_2(\psi), & \sigma_n = 0, \psi \geq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Относительно функций $f_1(\sigma_n)$ и $f_2(\psi)$ предполагается, что они являются невозрастающими, причем $f_1(0) = f_2(0)$. Вследствие такого выбора коэффициента контактного теплообмена граничные условия (9), (10) связывают напряженно-деформированное и температурное состояния и рассматриваемая задача является связанной контактной задачей термоупругости.

На оставшейся части поверхности $\Gamma \setminus (\Gamma_p \cup \Gamma_c)$ заданы граничные условия классических типов [7]:

$$u_i(x) = g_i(x), \quad x \in \Gamma_u; \quad \sigma_{ij}(x)n_j(x) = P_i(x), \quad x \in \Gamma_\sigma; \quad (12)$$

$$\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus (\Gamma_p \cup \Gamma_c); \quad \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset;$$

$$T(x) = \varphi_1(x), \quad x \in \Gamma_t; \quad \lambda \frac{\partial T(x)}{\partial x_j} n_j(x) = \varphi_2(x), \quad x \in \Gamma_q; \quad (13)$$

$$\lambda \frac{\partial T(x)}{\partial x_j} n_j(x) = \tilde{\alpha}(T_\alpha - T), \quad x \in \Gamma_\alpha; \quad (14)$$

$$\Gamma_t \cup \Gamma_q \cup \Gamma_\alpha = \Gamma \setminus (\Gamma_p \cup \Gamma_c); \quad \Gamma_t \cap \Gamma_q = \emptyset; \quad \Gamma_t \cap \Gamma_\alpha = \emptyset; \quad \Gamma_q \cap \Gamma_\alpha = \emptyset,$$

где $\bar{g}_i(x)$ – перемещения на Γ_u , $\bar{P}_i(x)$ – поверхностные усилия на Γ_σ ; $\varphi_1(x)$ – температура на Γ_t ; $\varphi_2(x)$ – тепловой поток на Γ_q ; T_α – температура внешней среды на Γ_α ; $\tilde{\alpha}$ – коэффициент конвективного теплообмена на Γ_α .

Таким образом, задача состоит в определении функций $u_i(x)$, $\varepsilon_{ij}(x)$, $\sigma_{ij}(x)$

и $T(x)$, удовлетворяющих в области Ω системы уравнений (1), (2) с граничными условиями (3)–(10), (12)–(14). Необходимо также определить фактические площадки контакта полосы с жесткими штампами и площадки соприкосновения слоев.

Вариационная формулировка задачи. Введем прямые произведения пространств С. Л. Соболева $H_n(\Omega) = [W_2^1(\Omega_1)]^2 \otimes [W_2^1(\Omega_2)]^2$ функций перемещений $v(x) = (\bar{v}^1(x), \bar{v}^2(x))$ и $H_I(\Omega) = W_2^1(\Omega_1) \otimes W_2^1(\Omega_2)$ функций температур $\Theta(x) = (\Theta^1(x), \Theta^2(x))$. Выделим множество кинематически допустимых перемещений

$$V_n = \left\{ v(x) \in H_n(\Omega) : \bar{v}(x) = \bar{g}(x), \quad x \in \Gamma_n; \quad v_n(x) \leq 0, \quad x \in \Gamma_p; \right. \\ \left. v_n^1(x^1) + v_n^2(x^2) \leq \Psi(x^1), \quad x^1 \in \Gamma_c^1, \quad x^2(x^1) \in \Gamma_c^2 \right\}$$

и множество допустимых температур $V_I = \{ \Theta(x) \in H_I(\Omega) : \Theta = \varphi_I(x), \quad x \in \Gamma_I \}$.

Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$b(T, \Theta) = \sum_{m=1}^2 \int_{\Omega^m} \lambda \frac{\partial T^m}{\partial x_I} \frac{\partial \Theta^m}{\partial x_I} d\Omega^m;$$

$$K(T, \Theta) = \sum_{m=1}^2 \int_{\Gamma_\alpha^m} \tilde{\alpha} T^m \Theta^m d\Gamma_\alpha^m;$$

$$N(\Theta) = \sum_{m=1}^2 \left(\int_{\Gamma_\alpha^m} \tilde{\alpha} T_\alpha \Theta^m d\Gamma_\alpha^m + \int_{\Gamma_q^m} \varphi_2 \Theta^m d\Gamma_q^m \right);$$

$$a(u, v) = \sum_{m=1}^2 \int_{\Omega^m} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\bar{u}^m) \varepsilon_{kl}(\bar{v}^m) d\Omega^m; \quad M(T, v) = - \sum_{m=1}^2 \int_{\Omega^m} a_{ijkl} \beta_{ij} (T^m - T_0) \varepsilon_{kl}(\bar{v}^m) d\Omega^m;$$

$$L(v) = \sum_{m=1}^2 \int_{\Omega^m} F_i v_i^m d\Omega^m + \sum_{m=1}^2 \int_{\Gamma_\sigma^m} P_i v_i^m d\Gamma_\sigma^m.$$

Пусть (u, T) – решение рассматриваемой задачи в дифференциальной постановке (1). Тогда, используя результаты [2; 6], можно показать, что справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1. Решение задачи в дифференциальной постановке удовлетворяет системе, состоящей из вариационного уравнения

$$b(T, \Theta - T) + K(T, \Theta - T) = N(\Theta - T) - \sum_{m=1}^2 \int_{\Gamma_p^m} \alpha_p (T^m - T_p^m) (\Theta^m - T^m) d\Gamma_p^m - \\ - \int_{\Gamma_c^1} \alpha_c (T^1 - T^2) (\Theta^1 - \Theta^2 - (T^1 - T^2)) d\Gamma_c^1 = 0 \quad \forall \Theta, T \in V_I \tag{15}$$

и вариационного неравенства

$$a(u, v - u) + M(T, v - u) - L(v - u) \geq 0 \quad \forall v, u \in V_n. \tag{16}$$

Утверждение 2. Решение системы (15), (16), если оно существует и обладает вторыми производными (хотя бы обобщенными), удовлетворяет всем уравнениям и условиям задачи в дифференциальной постановке (1)–(10), (12)–(14).

Вычислительный алгоритм. При постановке задачи использовались несвязанные уравнения термоупругости (1), (2), однако рассматриваемая задача является связанной контактной задачей термоупругости, т. к. согласно (11), коэффициент контактного теплообмена зависит от контактного давления и фактического зазора между телом и основанием. Для решения задачи используется итерационный алгоритм, на каждом шаге которого решается несвязанная система, состоящая из вариационного уравнения

$$b(T_k, \Theta - T_k) + K(T_k, \Theta - T_k) + \sum_{m=1}^2 \int_{\Gamma_p^m} \alpha_p(\sigma_{k-1}^m, \psi_{k-1}^m)(T_k^m - T_p^m)(\Theta^m - T_k^m) d\Gamma_p^m + \int_{\Gamma_c^1} \alpha_c(\sigma_{k-1}^1, \tilde{\psi}_{k-1}^1)(T_k^1 - T_k^2)(\Theta^1 - \Theta^2 - (T_k^1 - T_k^2)) d\Gamma_c^1 - N(\Theta - T_k) = 0 \quad \forall \Theta, T_k \in V_T \tag{17}$$

и вариационного неравенства

$$a(u_k, v - u_k) + M(T_k, v - u_k) - L(v - u_k) \geq 0 \quad \forall v, u_k \in V_u, \tag{18}$$

где k – номер итерации; ψ_{k-1}^m – фактический зазор между жестким штампом и поверхностью Γ_p^m на $(k-1)$ -ой итерации; $\tilde{\psi}_{k-1}^1$ – фактический зазор между упругими слоями на $(k-1)$ -ой итерации.

Нетрудно видеть, что, если функциональная последовательность $\{u_k, T_k\}$ сходится, то предел этой последовательности (u, T) будет решением вариационной задачи (15), (16). В качестве начального приближения решения имеет смысл использовать $\alpha_p(0, 0)$.

При построении вычислительного алгоритма вместо вариационных задач (17), (18) использованы эквивалентные им экстремальные задачи [1].

Утверждение 3. Вариационное уравнение (17) эквивалентно задаче минимизации: найти поле температур $T \in V_T$ такое, что

$$J_I(T) = \inf_{\Theta \in V_T} \{J_I(\Theta)\}; \tag{19}$$

$$J_I(\Theta) = \frac{1}{2} b(\Theta, \Theta) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^2 \int_{\Gamma_p^m} \alpha_p(\sigma_{k-1}^m, \psi_{k-1}^m)(\Theta^m - T_p^m)^2 d\Gamma_p^m + \frac{1}{2} K(\Theta, \Theta) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c^1} \alpha_c(\sigma_{k-1}^1, \tilde{\psi}_{k-1}^1)(\Theta^1 - \Theta^2)^2 d\Gamma_c^1 - N(\Theta),$$

а вариационное уравнение (18) – задаче минимизации: найти поле перемещений $u \in V_u$ такое, что

$$J_u(u) = \inf_{v \in V_u} \{J_u(v)\}; \tag{20}$$

$$J_u(v) = \frac{1}{2} a(v, v) + M(T_k, v) - L(v).$$

Для дискретизации задач минимизации (19), (20) применялся метод конечных элементов [3]. Использовались треугольные конечные элементы первого порядка. Для численного решения полученных в результате дискретизации задач квадратичного программирования применялся метод сопряженных градиентов с масштабированием матриц жесткости и теплопроводности с целью ускорения сходимости. Критерием сходимости итерационного процесса считалось установление значений контактных напряжений и зазоров.

Численное решение задачи. В качестве примера ниже приведены результаты численного решения задачи для случая плоского деформированного состояния полосы, которая состоит из двух однородных изотропных упругих слоев, занимающих прямоугольные области:

$$\Omega_1 = \{ (x_1, x_2) \in R^2 : -L_1/2 \leq x_1 \leq L_1/2, 0 \leq x_2 \leq L_2/2 \},$$

$$\Omega_2 = \{ (x_1, x_2) \in R^2 : -L_1/2 \leq x_1 \leq L_1/2, L_2/2 \leq x_2 \leq L_2 \}.$$

По граням $x_2 = 0$ и $x_2 = L_2$ возможен контакт полосы с жесткими штампами. Температуру поверхности штампов, контактирующих с гранями $x_2 = L_2$ и $x_2 = 0$ будем обозначать T_p^1 и T_p^2 соответственно. Форма и положение штампов описывались функцией

$$\Phi(x) = \begin{cases} a_1 (x_1 - L_1/2)^2 + b_1, & x_2 = L_2 \\ a_2 (x_1 - L_1/2)^2 + b_2, & x_2 = 0 \end{cases}.$$

Для исключения смещений слоев полосы как жестких целых дополнительно задавалось условие $u_1 = 0$ при $x_1 = L_1/2$.

Значения физических и геометрических параметров при проведении расчетов принимались следующими: линейные размеры полосы $L_1 = 2,5$ м, $L_2 = 1$ м; модуль Юнга $E = 210$ ГПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; коэффициент линейного расширения $\alpha_l = 10^{-5}$; коэффициент теплопроводности $\lambda = 0,47$ Вт/(м·К); начальная температура $T_0 = 0$ °С, температура внешней среды $T_a = 0$ °С; коэффициент теплообмена с внешней средой $\tilde{\alpha} = 23$ Вт/(м²·К); параметры штампов $a_1 = 0,005L_2$, $b_1 = -0,001L_2$, $a_2 = -0,005L_2$, $b_2 = 0,001L_2$.

Значение коэффициентов контактного теплообмена α_p и α_c при неидеальном контакте определялось по формуле [9]

$$\alpha(\sigma_n, \psi) = \begin{cases} 3 \cdot 10^3 (1 + |\sigma_n|^{0.6} / 10^4), & \sigma_n \leq 0, \psi = 0; \\ 3 \cdot 10^3 (1 - \psi / 10^{-4}) * H(1 - \psi / 10^{-4}), & \sigma_n = 0, \psi \geq 0. \end{cases}$$

На рис. 1 изображено распределение контактных напряжений σ_{22} на гранях полосы $x_2 = 0$ и $x_2 = L_2$. Кривая 1 соответствует случаю сжатия двумя ненагретыми штампами ($T_p^1 = T_p^2 = 0$ °С, напряжения на обеих гранях совпадают); кривые 2 ($x_2 = L_2$) и 3 ($x_2 = 0$) – случаю сжатия штампами, температуры поверхностей которых равны $T_p^1 = 0$ °С и $T_p^2 = 10$ °С; кривые 4 ($x_2 = L_2$) и 5 ($x_2 = 0$) – случаю сжатия штампами, температуры поверхностей которых равны $T_p^1 = 0$ °С и $T_p^2 = 20$ °С.

На рис. 2 изображено распределение напряжений σ_{11} в вертикальном сечении $x_1 = 0$, а на рис. 3 – распределение напряжений σ_{22} на участке контакта слоев полосы $x_2 = L_2/2$. Кривые 1 на обоих рисунках соответствуют случаю сжатия двумя ненагретыми штампами ($T_p^1 = T_p^2 = 0$ °С); кривые 2 – случаю сжатия штампами, нагретыми до температур $T_p^1 = 0$ °С и $T_p^2 = 10$ °С; кривые 3 – случаю сжатия штампами, температуры поверхностей которых равны $T_p^1 = 0$ °С и $T_p^2 = 20$ °С.

На рис. 4 изображено распределение температур по сечению полосы для случая сжатия штампами, нагретыми до температур $T_p^1 = 0^\circ\text{C}$ и $T_p^2 = 20^\circ\text{C}$.

На рис. 5 и 6 изображено распределение соответственно напряжений σ_{11} и σ_{22} в сечении полосы для случая сжатия штампами, температуры поверхностей которых равны $T_p^1 = 0^\circ\text{C}$ и $T_p^2 = 20^\circ\text{C}$.

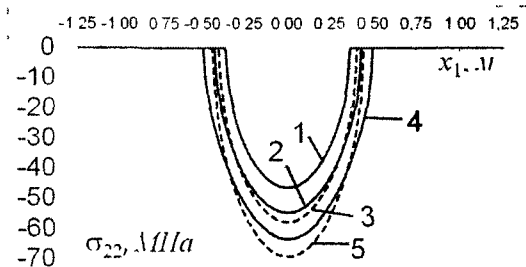


Рис. 1. Распределение контактных напряжений σ_{22} на участках контакта со штампами

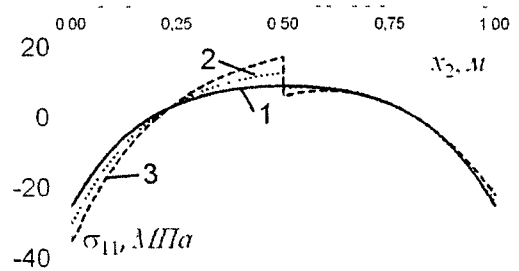


Рис. 2. Распределение напряжений σ_{11} в вертикальном сечении

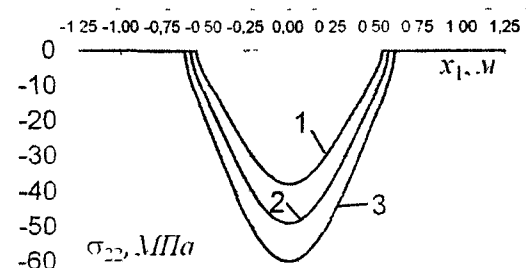


Рис. 3. Распределение контактных напряжений σ_{22} на участке контакта слоев

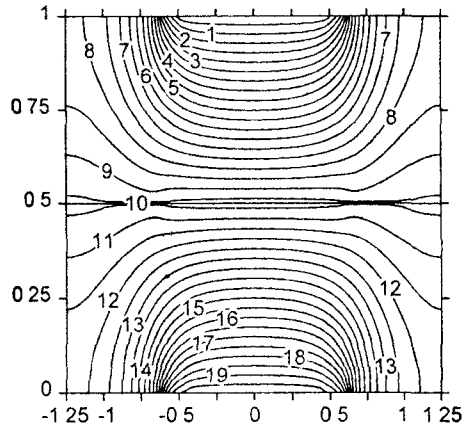


Рис. 4. Изолинии температуры

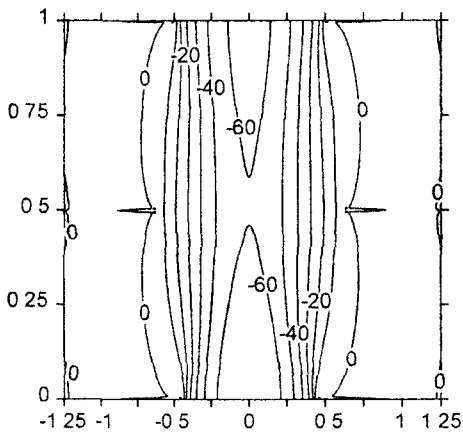


Рис. 5. Изолинии напряжений σ_{22}

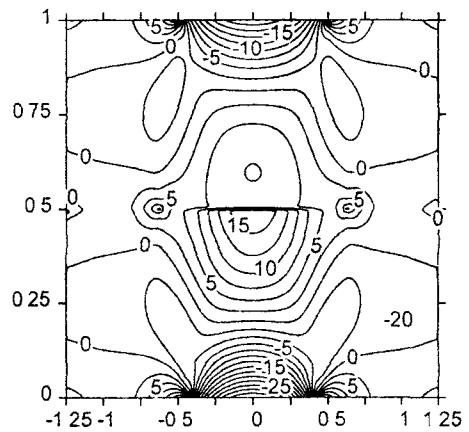


Рис. 6. Изолинии напряжений σ_{11}

Выводы. При постановке задачи о контактном взаимодействии двухслойной полосы конечных размеров с жесткими нагретыми выпуклыми штампами использовались несвязанные уравнения термоупругости и условия неидеального теплового контакта. Однако, рассматриваемая задача является связанной контактной задачей термоупругости, т. к. коэффициент контактного теплообмена зависит от контактного давления и фактического зазора между полосой и штампами.

На основе вариационной формулировки задачи разработан итерационный алгоритм, на каждом шаге которого решаются несвязанные задачи теории упругости и теплопроводности. Для дискретизации задач использован метод конечных элементов. Полученные численные результаты подтвердили вычислительную эффективность разработанного алгоритма.

Анализ полученных результатов показал, что температурные деформации оказывают существенное влияние на напряженно-деформированное состояние упругой полосы, а неидеальный термомеханический контакт – на температурное поле. Так, на рис. 4 видно, что за счет термического сопротивления контакта поле температур на участке контакта слоев испытывает разрыв. Следует так же отметить различия в значениях напряжений на участках контакта при сжатии разнонагретыми штампами. Под более нагретым штампом больше максимальные напряжения, однако площадка контакта – меньше, что объясняется большими температурными деформациями, которые возникают под более нагретым штампом.

Библиографические ссылки

1. **Гловински Р.** Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Трёмольер. – М., 1979. – 574 с.
2. **Дюво Г.** Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М., 1980. – 383 с.
3. **Зарубин В. С.** Инженерные методы решения задач теплопроводности / В. С. Зарубин. – М., 1983. – 328 с.
4. **Кравчук А. С.** К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров / А. С. Кравчук // Прикл. математика и механика. – 1977. – Т. 41. Вып. 2. С. 122-129.
5. **Механика контактных взаимодействий.** – М., 2001. – 672 с.
6. **Панагиотопулос П.** Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функционалы энергии / П. Панагиотопулос. – М., 1989. – 496 с.
7. **Подстригач А. С.** Обобщенная термомеханика / А. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – Киев, 1976. – 312 с.
8. **Шлыков Ю. П.** Контактное термическое сопротивление / Ю. П. Шлыков, Е. А. Ганин, С. Н. Царевский. – М., 1977. – 328 с.
9. **Шлыков Ю. П.** Контактный теплообмен / Ю. П. Шлыков, Е. А. Ганин. – М.–Л., 1963. – 247 с.

Надійшла до редколеги 01 11 10

УДК 539.3

О. І. Волошко, С.О. Смирнов

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ВПЛИВ РОЗПОДІЛУ НАПРУЖЕНЬ У ЗОНІ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ ТРІЩИНИ ТА ТОВЩИНИ ПРОШАРКУ НА ПАРАМЕТРИ РУЙНУВАННЯ

Розглядається тріщина в тонкому адгезійному ідеально пружно-пластичному прошарку, що з'єднує два однакових ізотропних пружних півпростори. Методом скінчених елементів визначено розподіл напружень на продовженні тріщини, довжина зони пластичності, розкриття тріщини та значення J -інтегралу. Для чисельно отриманого розподілу напружень побудовано аналітичні вирази для визначення довжини зони передруйнування, розкриття тріщини та J -інтеграл.

Ключові слова: розкриття тріщини, адгезійний прошарок, зона передруйнування, J -інтеграл

Рассматривается трещина в тонкой адгезионной идеально упругоэластической прослойке, соединяющая два одинаковые изотропные упругие полупространства. Методом конечных элементов определено распределение напряжений на продолжении трещины, длина зоны пластичности, раскрытие трещины и значение J -интеграла. Для численно полученного распределения напряжений построены аналитические выражения для определения длины зоны предразрушения, раскрытия трещины и J -интеграла.

Ключевые слова: раскрытие трещины, адгезионная прослойка, зона предразрушения, J -интеграл

A crack in a thin adhesive elastic-perfectly plastic layer between two identical isotropic elastic half-spaces is considered. Stress distribution at the crack continuation, the plastic zone length, the crack opening and the value of the J -integral are defined by means of the finite element method. Using the distribution of the stress, the equation for determination of the pre-fracture zone lengths, the closed expressions for the crack opening and for the J -integral are obtained analytically.

Key words: crack opening displacement, adhesive layer, pre-fracture zone, J -integral

Вступ. На практиці часто використовуються композитні матеріали. матриці яких з'єднуються клейовою сумішшю, яка називається адгезійним прошарком. Як правило, несуча здатність адгезійного прошарку набагато менша, ніж несуча здатність матеріалів матриць. Неврахування даного факту, може призвести до передчасного руйнування композита. Причиною цього, може бути виникнення та розвиток тріщини або на границі поділу матриці та прошарку, або у самому адгезійному прошарку.

Раніше, для тріщини в однорідному ізотропному матеріалі в [3; 8] було запропоновано, що на продовженні тріщини моделюються зони ослаблення зв'язків взаємодії берегів тріщини та прикладається постійне напруження, яке протидіє її розкриттю. Для міжфазних тріщин, що знаходяться між двома ізотропними матеріалами, була розвинена модель зон зчеплення (cohesive zone) [9; 14; 16]. Для міжфазних тріщин на їх продовженнях для ізотропних матеріалів досліджувалися зони передруйнування або пластичні смуги [1; 2]. Також аналізувалися зони передруйнування міжфазних тріщин для ортотропних матеріалів [7].

У [10; 13; 15; 17; 18] аналітично та чисельно визначалися параметри руйнування з врахуванням товщини клейового прошарку та пластичних деформацій біля вершини тріщини. В [12] запропоновано спосіб визначення розкриття тріщини та довжини зони передруйнування для тріщини в однорідному п'єзоелектричному матеріалі, при врахуванні розподілу нормальних напружень на продовженні тріщини в тонкому прошарку, який задавався згідно чисельного експерименту.

У даній статті запропонований аналітичний спосіб визначення параметрів руйнування для тріщини, яка знаходиться в тонкому адгезійному прошарку, що з'єднує два однакових ізотропних матеріали. При цьому, розподіл нормальних напружень на продовжені тріщини при використанні аналітичної моделі знаходиться чисельно за допомогою методу скінчених елементів.

Постановка задачі. Розглянемо плоску задачу для тріщини довжиною $2l_0$, що знаходиться в адгезійному прошарку товщиною h , що з'єднує два однакових пружних ізотропних півпростори. Півпростори навантажені рівномірно розподіленими на нескінченості нормальними напруженнями $\sigma_{yy} = \sigma^\infty$. Їх характеристики визначаються параметрами μ та κ , де $\kappa = 3 - 4\nu$ – для плоскої деформації, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – для плоского напруженого стану; а μ та ν – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона матеріалів (рис. 1). Матеріал прошарку приймаємо ідеально пружно-пластичним з границею текучості σ_f , модулем зсуву μ_h та коефіцієнтом Пуассона ν_h . Для конкретності, на рис. 1 тріщина розташована вздовж середньої лінії прошарку, хоча це не є принциповим.

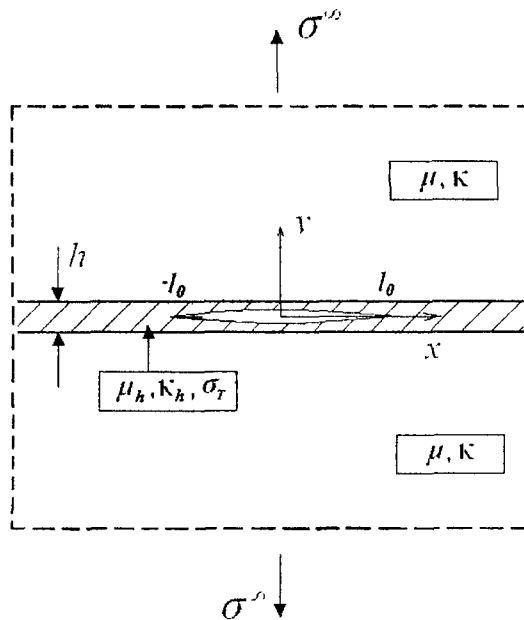


Рис. 1. Композит з тріщиною в адгезійному прошарку під дією нормального напруження

Моделювання адгезійного прошарку. Як правило, адгезійний прошарок є досить м'яким матеріалом порівняно з компонентами, які він з'єднує. Тому, можемо припустити, що спочатку саме в цьому прошарку на продовжені тріщини можуть виникати зони ослаблення зв'язків між частинками середовища (зони передруйнування) та розвиватися пластичні деформації. Використовуючи ідею моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла [3; 8], будемо вважати, що на відрізках $x \in (l_0, l)$, $y = 0$ виникають зони передруйнування. Вони моделюються продовженням тріщини, на берегах якої задається нормальне напруження $\sigma_{yy}^\pm = \sigma(x)$, що протидіє її розкриттю. Дана функція $\sigma(x)$ не є константою і вважається поки що невідомою довільною функцією, яку можливо визначити експериментально або чисельно.

Зазвичай, товщина прошарку набагато менша за довжину тріщини, тому можемо прийняти, що $h \rightarrow 0$. Тоді граничні умови на лінії $y = 0$ мають вигляд (рис. 2):

$$\sigma_{yy}(x, 0) = q(x) = \begin{cases} \sigma(x) & \text{для } l_0 \leq x \leq l \\ 0 & \text{для } |x| \leq l_0 \end{cases}, \quad (1)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \text{ для } x \leq l,$$

$$[u] = 0, [v] = 0, [\sigma_{yy}] = 0, [\tau_{xy}] = 0 \text{ для } |x| > l, \quad (2)$$

де квадратні дужки означають стрибок відповідної функції через вісь x . Граничні умови на нескінченності запишуться таким чином:

$$\sigma_{yy} \Big|_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} = \sigma^\infty, \tau_{xy} \Big|_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} = 0. \quad (3)$$

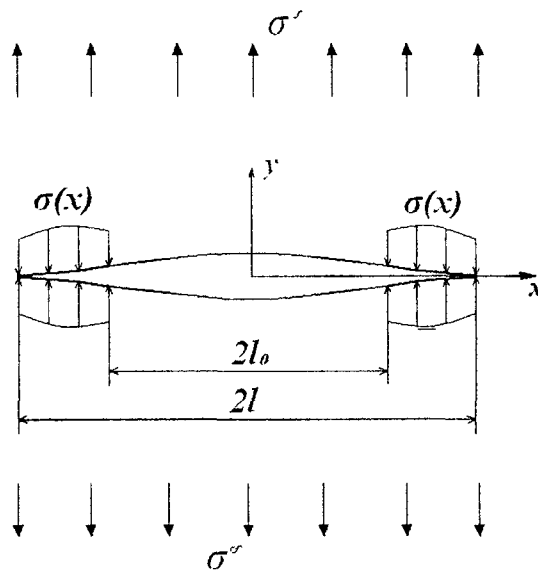


Рис. 2. Моделювання зон передруйнування продовженням тріщини

У зв'язку з лінійністю задачі, віднімемо від напруженого стану отриманої задачі однорідний напружений стан для тіла без тріщини. Таким чином, досягнемо відсутності напруження на нескінченності та отримаємо напружений стан, який визначається наступними граничними умовами на берегах тріщини:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = p(x) = q(x) - \sigma^\infty = \begin{cases} \sigma(x) - \sigma^\infty & \text{для } l_0 \leq |x| \leq l \\ -\sigma^\infty & \text{для } |x| \leq l_0 \end{cases}, \quad (4)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0, \text{ для } |x| \leq l.$$

Таким чином, одержуємо задачу лінійної механіки руйнування для тріщини $x \in (-l, l)$ в однорідному ізотропному матеріалі, на берегах якої діють напруження $\sigma_{yy}^\pm = p(x)$, що визначаються формулою (4). При цьому, положення точки l вважається невідомим і потребує знаходження.

Аналітичний розв'язок задачі. Запишемо співвідношення для напружень та похідних стрибків переміщень на лінії $y=0$ для ізотропного однорідного матеріалу, що знаходиться під дією лише нормального напруження, у наступному вигляді [11]:

$$\sigma_{yy}(x,0) = g \left\{ F^+(x) + F^-(x) \right\}, \quad (5)$$

$$i[v'(x,0)] = F^+(x) - F^-(x), \quad (6)$$

де $g = \frac{2\mu}{\kappa+1}$, а $F(z)$ являє собою кусково-аналітичну функцію, яка є аналітичною у всій площині за винятком області тріщини.

Використовуючи співвідношення (5), задовольняємо граничній умові (4). У результаті приходимо до задачі лінійного спряження

$$F^+(x) + F^-(x) = \frac{1}{g} p(x), \quad \text{для } x \in (-l, l) \quad (7)$$

з граничною умовою на нескінченності

$$F(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0. \quad (8)$$

Розв'язок задачі (7), згідно з [4], можна записати в такому виді

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i W(z)} \left[C_0 + C_1 z + \frac{1}{g} \int_{-l}^l \frac{p(t) W^+(t)}{t-z} dt \right], \quad (9)$$

де $W(z) = \sqrt{(z+l)(z-l)} = \sqrt{z^2 - l^2}$.

Задовольняючи граничній умові на нескінченності (8), визначаємо, що $C_0 = C_1 = 0$. Тоді вираз (9) прийме вигляд

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i g W(z)} \int_{-l}^l \frac{p(t) W^+(t)}{t-z} dt. \quad (10)$$

Враховуючи, що $F^+(x) = F^-(x) = F(x)$ для всіх значень x , крім $x \notin (-l, l)$, з рівняння (5) отримаємо наступне співвідношення для напружень на лінії поділу матеріалів

$$\sigma_{yy}(x,0) = \frac{1}{\pi i W(x)} \int_{-l}^l \frac{p(t) W^+(t)}{t-x} dt \quad \text{для } x \notin (-l, l). \quad (11)$$

Для подальшого інтегрування виразу (11) апроксимуємо функцію $\sigma(x)$ на проміжку $[l_0, l]$. Для цього графік функції представимо кусково-постійною функцією

$$\sigma(x) = \sigma_i \quad \text{для } x \in [c_{i-1}, c_i], \quad (12)$$

де $\sigma_i = \sigma(c_i - 0.5\Delta)$, $c_i = c_0 + i\Delta$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\Delta = \frac{l-l_0}{n}$, $c_0 = l_0$, $c_n = l$.

Дане представлення функції дозволить інтегрувати на кожному проміжку постійну функцію, а їх сума дає можливість отримати потрібне значення.

Обчисливши інтеграл у співвідношенні (11), отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x,0) = & \frac{1}{\pi\sqrt{x^2-l^2}} \left\{ -\pi\sigma^\infty \left(x - \sqrt{x^2-l^2} \right) + \sum_{i=1}^n \sigma_i \left[2x \left(\arcsin \frac{c_i}{l} - \arcsin \frac{c_{i-1}}{l} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{x^2-l^2} \left(\left[\arcsin \frac{l^2-xc_i}{l(x-c_i)} - \arcsin \frac{l^2+xc_i}{l(x+c_i)} \right] - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \left[\arcsin \frac{l^2-xc_{i-1}}{l(x-c_{i-1})} - \arcsin \frac{l^2+xc_{i-1}}{l(x+c_{i-1})} \right] \right] \right\}, \quad (x \geq l). \end{aligned} \quad (13)$$

Введемо коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у новій вершині тріщини для $x=l$ наступним чином

$$K_1 = \lim_{x \rightarrow l+0} 2\pi(x-l)\sigma_{yy}(x,0).$$

Підставляючи до останнього виразу формулу (13), отримаємо

$$K_1 = -\sigma^\infty \sqrt{\pi l} + \sum_{i=1}^n 2\sqrt{\frac{l}{\pi}} \sigma_i \left[\arcsin \frac{c_i}{l} - \arcsin \frac{c_{i-1}}{l} \right].$$

Згідно вибраної моделі, напруження у вершині $x = \pm l$ повинні бути обмеженими, тому будемо вимагати, щоб $K_1 = 0$. Таким чином, одержимо

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i \left[\arcsin \frac{c_{i-1}}{l} - \arcsin \frac{c_i}{l} \right] = -\frac{\pi\sigma^\infty}{2}. \quad (14)$$

Співвідношення (14) представляє собою рівняння для визначення довжини зони передруйнування тріщини $l-l_0$, яке, як правило, розв'язується чисельно.

Беручи до уваги (14), отримаємо остаточну формулу для визначення напружень для $x \geq l$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x,0) = & \sigma^\infty + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \sigma_i \left[\left(\arcsin \frac{l^2-xc_i}{l(x-c_i)} - \arcsin \frac{l^2+xc_i}{l(x+c_i)} \right) - \right. \\ & \left. - \left(\arcsin \frac{l^2-xc_{i-1}}{l(x-c_{i-1})} - \arcsin \frac{l^2+xc_{i-1}}{l(x+c_{i-1})} \right) \right], \quad (x \geq l). \end{aligned} \quad (15)$$

Тепер визначимо стрибок переміщень у початковій вершині тріщини $x=l_0$.

Для цього з (7) виразимо $F^-(x)$

$$F^-(x) = \frac{1}{g} p(x) - F^+(x), \quad x \in (-l, l).$$

Підставляючи останній вираз до (6), отримаємо

$$i[v'(x,0)] = 2F^+(x) - \frac{1}{g} p(x), \quad \text{для } x \leq l.$$

Використовуючи (10) та проводячи перетворення, даний вираз можемо записати у вигляді

$$i[v'(x,0)] = \frac{1}{2\pi g} \int_{-l}^l \frac{2p(t) \sqrt{l^2 - t^2}}{l^2 - x^2 (x-t)} dt - \frac{1}{g} p(x). \quad (16)$$

Інтегруючи співвідношення (16), одержимо

$$i[v(x,0)] = \frac{1}{2\pi g} \int_{-l}^x \int_{-l}^l \frac{2p(t) \sqrt{l^2 - t^2}}{\sqrt{l^2 - \xi^2} (\xi - t)} dt d\xi - \frac{1}{g} \int_{-l}^x p(\xi) d\xi.$$

Змінюючи порядок інтегрування та обчислюючи послідовно інтеграли, враховуючи лише уявну частину, можемо записати вираз для стрибка переміщень

$$[v(x,0)] = \frac{1}{2\pi g} \sum_{i=1}^n \sigma_i \{ (x - c_{i-1}) \Gamma(l, c_{i-1}, x) - (x + c_{i-1}) \Gamma(l, -c_{i-1}, x) - (x - c_i) \Gamma(l, c_i, x) + (x + c_i) \Gamma(l, -c_i, x) \}, \text{ для } |x| \leq l, \quad (17)$$

де $\Gamma(l, x, \xi) = \ln \frac{l^2 - x\xi - \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}{l^2 - x\xi + \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}.$

Застосовуючи (17), маємо, що розкриття тріщини у початковій вершині $x = l_0$, дорівнює

$$\delta = [v(l_0,0)] = \frac{1}{2\pi g} \sum_{i=1}^n \sigma_i \{ (l_0 - c_{i-1}) \Gamma(l, c_{i-1}, l_0) - (l_0 + c_{i-1}) \Gamma(l, -c_{i-1}, l_0) - (l_0 - c_i) \Gamma(l, c_i, l_0) + (l_0 + c_i) \Gamma(l, -c_i, l_0) \}. \quad (18)$$

Слід зауважити, що для $n=1$, $c_0 = l_0$, $c_1 = l$ та напружень на продовжені тріщини $l_0 \leq x_1 \leq l$, які представлені постійною функцією $\sigma(x) = \sigma_0$, результати для довжини зони передруйнування та стрибка нормального переміщення співпадут з результатами отриманими у [5].

Для визначення J-інтеграла візьмемо контур інтегрування вздовж границі пластичної зони [6] Тоді

$$J = - \int_{l_0}^l \left[\sigma_{yy}^+(x,0) \frac{\partial v^+}{\partial x}(x,0) - \sigma_{yy}^-(x,0) \frac{\partial v^-}{\partial x}(x,0) \right] dx.$$

Враховуючи, що $\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-$ та використовуючи формулу (12), отримаємо

$$J = \sum_{i=1}^n \sigma_i ([v(c_{i-1},0)] - [v(c_i,0)]) = \sum_{i=1}^n \sigma_i (\delta_{i-1} - \delta_i). \quad (19)$$

У подальшому, величини δ і J з виразів (18) та (19) будемо розглядати як основні параметри руйнування

Чисельний розв'язок. Розв'яжемо задачу чисельно в рамках початкової постановки. При цьому замінимо верхню та нижню півплощину на прямокутники скінчених розмірів $H_1 \times 2H_2$. Для аналізу використовуємо метод скінчених елементів (МСЕ) Кінцево-елементна сітка показана на рис. 3, а її фрагмент біля правої вершини тріщини та розбиття на скінчені елементи адгезійного прошарку в її околі показані на рис. 4. Зазначимо, що використовуються чотирикутні восьмивузлові скінченні елементи, а відношення характерного розміру мінімального елемента до довжини тріщини дорівнює $1/3000$.

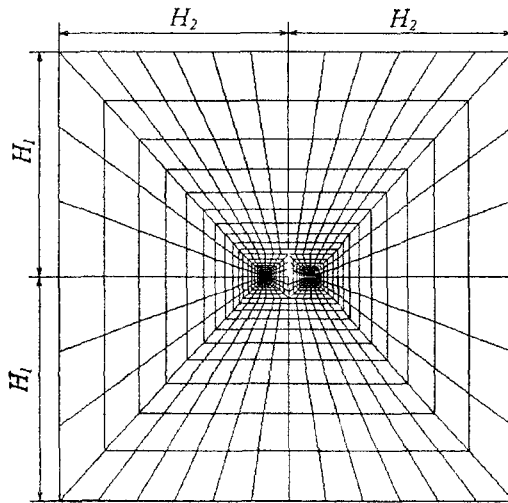


Рис. 3. Кінцево-елементна сітка композита

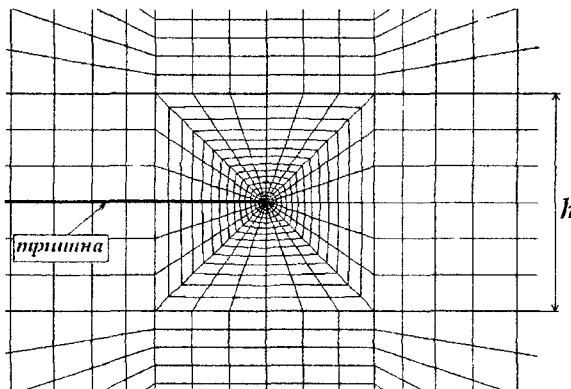


Рис. 4. Розбиття на скінчені елементи адгезійного прошарку біля правої вершини тріщини

При чисельному аналізі визначається розподіл нормальних напружень σ_{yy} на продовженні тріщини, довжина пластичної зони r_p , розкриття тріщини у початковій вершині тріщини та J-інтеграл. Матеріал адгезійного прошарку приймається ідеально пружно-пластичним з границею текучості σ_T , та який задовольняє умові текучості Мізеса

$$2\sigma_{eqv}^2 = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \leq 2\sigma_T^2 \quad (20)$$

Розкриття тріщини у початковій вершині в МСЕ обчислюємо за допомогою методу екстраполяції [6]. Для цього, вираховуються переміщення вузлів, які розташовані на березі тріщини. При цьому виключаються декілька вузлів біля самої вершини. Отримані значення переміщень для розвинутих пластичних деформацій знаходяться майже на одній прямій. Далі, проводячи екстраполяцію, знаходимо відповідне значення розкриття у вершині тріщини.

У методі скінчених елементів J-інтеграл обчислюється за формулою [6]

$$J = \int_G W dy - \int_G \left(t_x \frac{\partial u}{\partial x} + t_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) dS, \quad (21)$$

де G – довільний контур навколо вершини тріщини, n – одинична нормаль до контуру G (рис.6), W – густина енергії деформації, а коефіцієнти t_x , t_y визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} t_x &= \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y \\ t_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{aligned}$$

де n_x , n_y – напрямні косинуси.

Для визначення J-інтеграла інтегрування навколо вершини тріщини проводилося вздовж трьох контурів, які включають пластичну зону та перетинають межі поділу між прошарком та матрицями. Зазначимо, що різниця між отриманими значеннями J-інтегралу вздовж трьох контурів незначна та не перевищує 1%.

Результати та їх аналіз. Результати отримано для довжини тріщини $l_0=10$ мм та лінійних розмірів $H_1=H_2=100$ мм. Значення модуля зсуву та коефіцієнта Пуассона для матриць, що знаходяться в умовах плоскої деформації, приймалися рівними $\mu=1250$ МПа, $\nu=0.2$. Матеріал прошарку визначається константами: $\mu_h=225.56$ МПа, $\nu_h=0.33$, $\sigma_l=2$ МПа. Оскільки, поставлена задача симетрична, тому будемо аналізувати результати лише біля правої вершини тріщини.

Для аналізу напруженого стану в адгезійному прошарку, вводимо безрозмірний параметр

$$\bar{K} = K / (\sigma_T \sqrt{h}), \quad (22)$$

де $K = \sigma^\infty \cdot \pi l_0$ – коефіцієнт інтенсивності напружень для тріщини нормального відриву в однорідній пружній площині. Таким чином, варіюючи вхідні параметри у формулі (22) отримуємо відповідні значення \bar{K} .

Далі проведемо дослідження для двох випадків: перший, коли варіюється навантаження на нескінченності, а товщина прошарку залишається постійною, і другий, коли напруження вважається постійним, а змінюється товщина прошарку. Розрахунки для обох випадків проводяться в три етапи:

- 1) методом скінчених елементів визначається розподіл нормальних напружень на продовженні тріщини, довжина зони пластичності, розкриття тріщини та J-інтеграл;
- 2) знайдений розподіл напружень використовується для знаходження функції $\sigma(x)$ у формулі (4), і на основі цього проводиться чисельна реалізація аналітичного методу. Зокрема, обчислюються: довжина зони передруйнування, розкриття тріщини та J-інтеграл. Такий підхід будемо називати способом 2 і позначати s_2 ;

- 3) визначається довжина зони передруйнування, розкриття тріщини та J -інтеграл, при умові, що на продовженні тріщини задається постійне напруження. Цей підхід будемо називати способом 3 і позначати с3;

Розглянемо реалізацію кожного етапу більш детально.

Постійна товщина прошарку. Розглянемо випадок постійної товщини прошарку $h = 0.2$ мм, а варіюючи навантаження на нескінченості отримуємо відповідні значення параметра \bar{K} . Методом скінчених елементів досліджуємо поведінку напружень на продовженні тріщини для наступних значень \bar{K} : 20; 17; 15; 12; 10.03; 8.5; 7.0; 5.01. На рис. 5 представлено розподіли нормального напруження σ_x на продовженні тріщини для всіх значень \bar{K} . Зазначимо, що нормальні напруження нормовані до границі текучості σ_T , а відстань від вершини тріщини – товщиною прошарку h та позначається координатою $\xi = (x - l_0) / h$. Як видно з рис. 5, для всіх значень \bar{K} , окрім $\bar{K} = 5.01$, нормальне напруження біля вершини тріщини приймає значення близьке до $3\sigma_T$, а потім стрімко зростає до свого максимального значення – піка. Зокрема, для $\bar{K} = 20$ воно досягає значення $6.52\sigma_T$. Потім напруження σ_x спадають. Слід відзначити, що при збільшенні навантаження віддаляється пік нормального напруження від вершини тріщини.

Тепер, згідно формул (14), (18) та (19) аналітичного методу, обчислюємо довжини зон передруйнування, розкриття тріщини та значення J -інтеграла для розглянутих значень \bar{K} . Для цього, чисельно отримані розподіли нормального напруження σ_{xy} на продовженні тріщини апроксимуються кусково-постійною функцією (див. формули (12)) і, таким чином визначаються досі невідомі в цих формулах значення σ_1 .

Для порівняння отриманих результатів, розглянемо також випадок моделі с3, коли в зоні передруйнування діє постійне напруження, тобто $\sigma(x) = \sigma_0 = const$. Ця модель аналогічна моделі Леонова–Панасюка–Дагдейла, розробленої для випадку плоского напруженого стану. Але оскільки, в даному випадку має місце плоска деформація, то будемо приймати, що

$$\sigma_0 = \alpha\sigma_T,$$

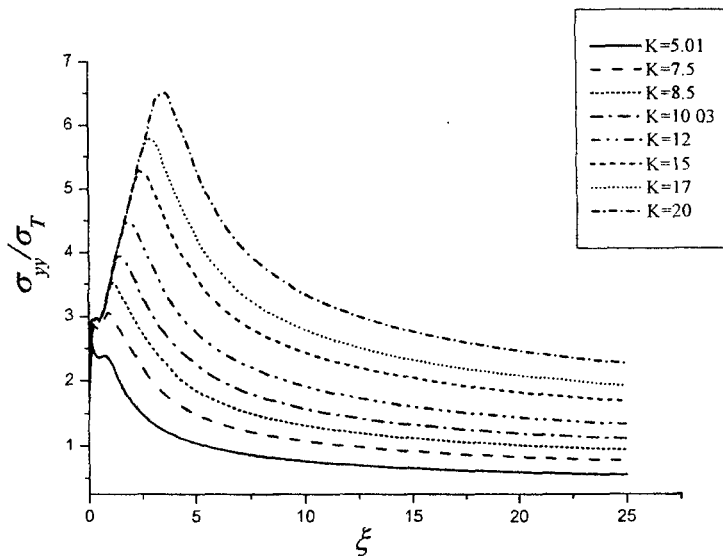


Рис. 5. Розподіл нормального напруження на продовжені тріщини залежно від навантаження

де σ_T – границі текучості адгезійного прошарку, а α – коефіцієнт, який враховує обмеження пластичних деформацій.

У [18] коефіцієнт α приймається рівним 1.134 та 2.0, відповідно для плоского напруженого стану та плоскої деформації. Згідно [6], можемо отримати, що для $\nu_h=0.33$ та умови текучості Мізеса коефіцієнт обмеження пластичних деформацій α слід вибрати рівним 3.0. У подальшому, під час дослідження приймається, що $\sigma_0 = 3\sigma_T$.

Таблиці 1 та 2 для різних значень параметра K приводять нормовані довжини зон передруйнування $(l-l_0)/h$ та значення J-інтегралу $J \cdot E / (\sigma_T^2 l_0)$, а рис. 6 – розкриття тріщини у початковій вершині δ/h .

Таблиця 1

Нормовані довжини зон передруйнування залежно від навантаження

K	$(l-l_0)/h$		
	MSE	c2	c3
5.01	1.15	6.75	1.10
7	2.15	12.80	2.22
8.5	3.40	15.50	3.35
10.03	5.00	17.25	4.75
12	8.00	16.75	7.00
15	15.50	16.75	11.75
17	24.00	18.75	15.95
20	55.00	20.50	24.55

Згідно з даними в табл. 1, для значень $\bar{K} \leq 10$ довжини зон пластичності отримані МСЕ незначно відрізняються від довжин зон передруйнування визначених за допомогою моделі с3. Водночас, коли істинні напруження на продовженні тріщини значно перевищують $3\sigma_T$, різниця між результатами двох методів стрімко зростає при збільшенні навантаження (для $\bar{K} > 10$). Також відзначимо, що довжина зони передруйнування у підході с2 слугує допоміжним фактором для визначення розкриття тріщини та J-інтеграла і не може ототожнюватися з довжиною зони пластичності, власне як і для моделі с3, коли напруження на продовженні тріщини значно перевищують $3\sigma_T$, тобто для $\bar{K} > 10$.

Стосовно розкриття тріщини (рис. 6), результати отримані за допомогою підходів с2 та с3 добре узгоджені між собою для $\bar{K} \leq 10$, а вже для $\bar{K} > 10$ різниця між значеннями δ/h збільшується. Застосовуючи метод екстраполяції, також обчислено розкриття тріщини за допомогою МСЕ. Можемо побачити (рис. 6), що аналітично знайдені значення розкриття тріщини (с2) мають подібну поведінку з результатами, які отримано чисельно, але відрізняються між собою на постійну величину.

Згідно табл. 2, значення J-інтеграла, які обчислені за допомогою МСЕ та аналітичними способами с2 і с3, добре узгоджені між собою і похибка між результатами не перевищує 5.4%. Слід відзначити, що в методі скінчених елементів розглядалися випадки, коли тріщина знаходиться як на верхній, так і на нижній межі поділу матеріалів між прошарком та матрицею. Різниця між отриманими значеннями J-інтеграла для обох випадків та результатами, коли тріщина розташована вздовж середньої лінії прошарку, не перевищує 1%. Таким чином, розташування тріщини у прошарку практично не впливає на значення J-інтегралу.

Таблиця 2

Нормовані значення J-інтегралу залежно від навантаження

\bar{K}	$J \cdot E / (\sigma_T^2 l_0)$				
	МСЕ	с2	%	с3	%
5.01	0.514	0.491	-4.4 %	0.486	-5.4 %
7	1.006	0.962	-4.4 %	0.955	-5.1 %
8.5	1.489	1.423	-4.4 %	1.419	-4.7 %
10.03	2.055	1.988	-3.3 %	1.990	-3.2 %
12	2.977	2.859	-4.0 %	2.889	-2.9 %
15	4.688	4.499	-4.0 %	4.638	-1.1 %
17	6.047	5.803	-4.0 %	6.091	0.7 %
20	8.407	8.083	-3.9 %	8.789	4.5 %

Розглядалися інші значення коефіцієнта обмеження пластичних деформацій α , а також ті, що рекомендуються в [18]. Похибка результатів для цих значень α досить велика порівняно з результатами для $\alpha = 3.0$. Аналізуючи результати для розкриття тріщини та довжини зони передруйнування, видно, що для випадків $\bar{K} > 10$, коли чисельно отримані напруження на продовженні тріщини значно перевищують $3\sigma_T$, не доцільно приймати $\alpha = 3.0$ та застосовувати модель с3. Тому виникає необхідність враховувати поведінку напружень на продовженні тріщини та застосовувати модель с2.

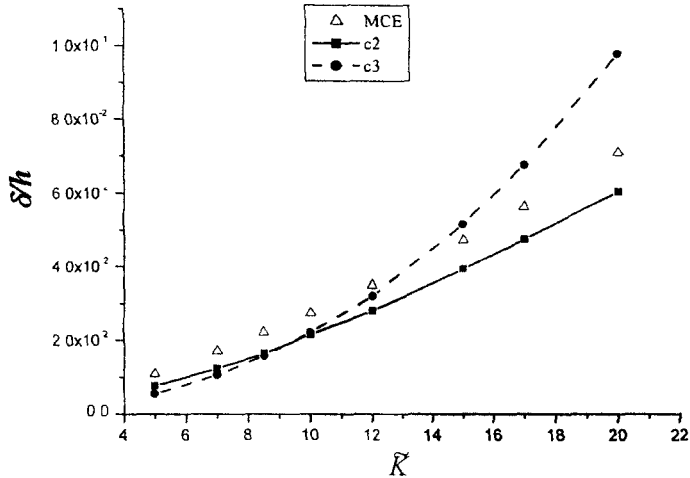


Рис. 6. Розкриття тріщини у початковій її вершині залежно від навантаження

Постійне навантаження Розглянемо випадок, коли на нескінченності діє постійне навантаження $\sigma^\infty = 3$ МПа, а товщина прошарку варіюється. Тим самим, можемо дослідити вплив товщини прошарку на значення основних параметрів руйнування.

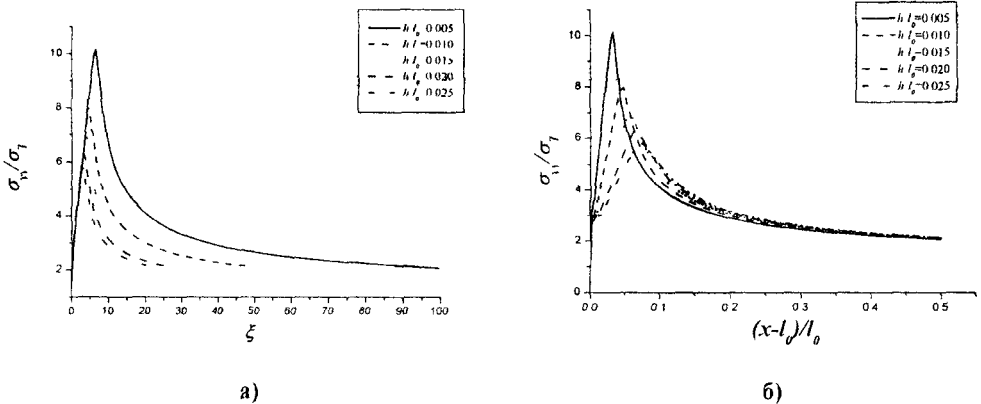


Рис. 7. Розподіл нормального напруження на продовженні тріщини для різних значень товщини прошарку: а) залежно від $\xi=(x-l_0)/h$; б) залежно від $(x-l_0)/l_0$

На рис. 7а) та рис. 7б) представлена поведінка нормального напруження σ_{yy} на продовженні тріщини при наступних значеннях безрозмірної товщини h/l_0 : 0.005, 0.010, 0.015, 0.020, 0.025. На рис. 7а) показані розподіли напружень як функції від $\xi = (x - l_0) / h$, а на рис. 7б) – графіки напружень у залежності від безрозмірної координати $(x - l_0) / l_0$. Видно, що при зменшенні товщини прошарку суттєво збільшується нормальне напруження на продовженні тріщини, і при $h/l_0 = 0.005$ воно досягає $10.14\sigma_1$. Слід відзначити (рис. 7б), що для всіх випадків товщини прошарку напруження на проміжку $(x - l_0) / l_0 \in [0, 0.2]$ значно переви-

щують значення $3\sigma_T$, а також те, що починаючи з $(x-l_0)/l_0 = 0.3$ напруження майже співпадають

Таблиця 3

Нормовані значення довжин зон передруйнування та довжин зон пластичності

h/l_0	$(l-l_0)/l_0$		$J \cdot E / (\sigma_T^2 l_0)$		
	MCE	c2	MCE	c2	%
0.005	0.71	0.15	7.126	6.934	-2.7%
0.010	0.74	0.25	7.249	7.010	-3.3%
0.015	0.75	0.32	7.322	7.071	-3.4%
0.020	0.77	0.38	7.406	7.119	-3.9%
0.025	0.78	0.43	7.461	7.163	-4.0%

Таблиця 3 приводить нормовані значення довжин зон передруйнування та довжин зон пластичності відповідно при визначенні аналітичним способом за методикою c2 та MCE, а також значення J-інтеграла. Оскільки, модель c3 не враховує товщини прошарку, тому для всіх розглянутих випадків маємо однакові значення довжини зони передруйнування $(l-l_0)/l_0 = 0.41$, розкриття тріщини $\delta/l_0 = 1.69 \cdot 10^{-3}$ та J-інтеграла $J \cdot E / (\sigma_T^2 l_0) = 7.625$. Аналізуючи в табл. 3 результати отримані MCE, відзначимо, що збільшення товщини прошарку веде до незначного збільшення довжини зони пластичності та J-інтегралу, та їх приріст дорівнює відповідно 9% та 5%. Значення J-інтеграла обчислені способом c2 добре узгоджені з чисельними даними і не перевищують 4%. Різниця між значенням J-інтегралу обчисленого за формулою моделі c3 та результати MCE збільшується при зменшенні товщини прошарку, і для $h/l_0 = 0.005$ досягає 7%.

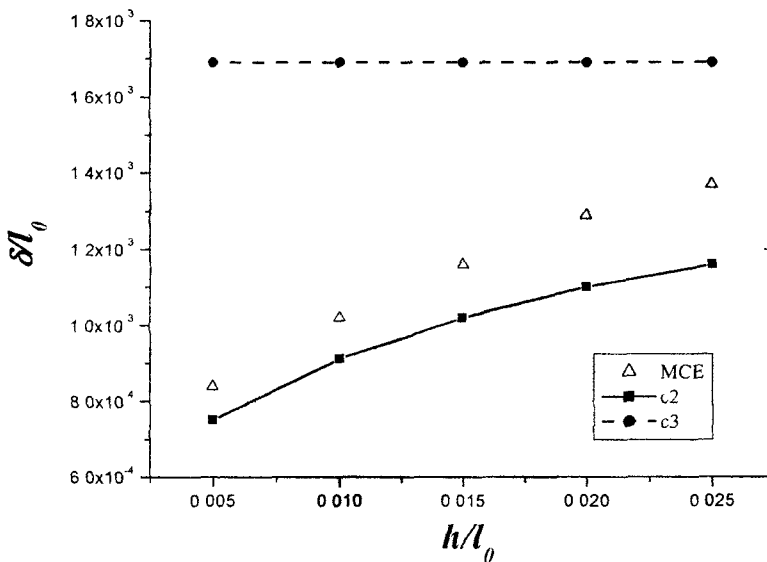


Рис. 8. Розкриття тріщини в початковій її вершині в залежності від товщини прошарку

На рис. 8 показана залежність розкриття тріщини від товщини прошарку h/l_0 . Як раніше зазначалося, що для моделі с3 розкриття тріщини при всіх значеннях h/l_0 залишається константою і дорівнює $\delta/l_0 = 1.69 \cdot 10^{-3}$. Згідно зі способом с2 розкриття тріщини зменшується на 35 % з $1.16 \cdot 10^{-3}$ до $7.5 \cdot 10^{-4}$ при зменшенні товщини прошарку. Чисельні значення розкриття тріщини мають подібну поведінку з результатами аналітичного розв'язку с2, і відрізняються майже на постійну величину.

Таким чином, врахування товщини прошарку та істинного розподілу напружень на продовжені тріщини веде до суттєвого зменшення розкриття тріщини. Зокрема, для випадку $h/l_0 = 0.005$ розкриття тріщини згідно аналітичного підходу с2 вдвічі менше від його значення, яке отримане за формулою моделі с3. Незважаючи на значну розбіжність у результатах розкриття тріщини між запропонованим аналітичним способом с2 та моделлю с3, зміна товщини прошарку менше впливає на значення J-інтеграла. Це пояснюється тим, що аналітичний підхід с2 враховує розподіл напружень на продовжені тріщини, і, таким чином, меншому значенню розкриття тріщини (рис. 8) відповідає більше значення нормального напружень (рис. 7), та навпаки.

Висновки. Проведено дослідження тріщини в тонкому ідеально пружно-пластичному прошарку, що з'єднує два однакових ізотропних пружних півпростори. Задача розв'язана з урахуванням товщини адгезійного прошарку методом скінчених елементів, визначено істинний розподіл напружень на продовжені тріщини та обчислена довжина зони пластичності, розкриття тріщини та J-інтеграл. Моделюючи зони передруйнування на продовжені тріщини чисельно визначеними розподілами напружень на її берегах, запропоновано аналітичний спосіб, який дозволяє отримати рівняння для визначення довжини зони передруйнування та вирази для розкриття тріщини і J-інтеграла. Зроблено порівняльний аналіз результатів отриманих аналітичним та чисельним способами з результатами моделі, в якій розподіл нормального напруження на продовжені тріщини задається постійною величиною, та досліджено вплив поведінки напруження в зоні передруйнування та товщини прошарку на основні параметри руйнування.

Бібліографічні посилання

1. **Бакиров В. Д.** Модель Леонова–Панасюка–Дагдейла для тріщини на границі соединення матеріалів / В. Д. Бакиров, Р. В. Гольдштейн // Прикладная математика и механика, 2004. – Т. 68, Вып. 1. – С. 170–179.
2. **Каминский А. А.** О модели Дагдейла для тріщини на границі раздела различных сред / А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, В. А. Колмакова // Прикладная механика, 1999. – Т. 35, №1. – С. 63–68.
3. **Леонов М. Я.** Развитие мельчайших тріщин в твердом теле / М. Я. Леонов, В. В. Панасюк // Прикладная механика, 1959. – Т. 5, № 4. – С. 391–401.
4. **Мухелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М., 1966. – 707 с.
5. **Панасюк В. В.** Предельное равновесие хрупких тел с тріщинами / В. В. Панасюк. – К., 1968. – 248 с.
6. **Сиратори М.** Вычислительная механика разрушения: Пер. с японск. / М. Сиратори, Т. Миеси, Х. Мацусита. – М., 1986. – 334 с.

7. **Шевельова А. С.** Про моделювання привершинних зон тріщини між двома анізотропними матеріалами / А. С. Шевельова // Фізико-хімічна механіка матеріалів, 2000. – №2. – С.33–40.
8. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits. // J.Mech. and Phys. Solids, 1960. – V. 8, №2. – P.100–104.
9. **Freed Y.** A new cohesive zone model for mixed mode interface fracture in biomaterial / Y. Freed, L. Banks–Sills // Eng. Fracture Mech., 2008. – V. 75. – P. 4583–4593.
10. **He M. E.** Interface cracking phenomena in constrained metal layers / M. E. He, A. G. Evans and J. W. Hutchinson // Acta mater, 1996. – V. 7. – P. 2963–2971.
11. **Herrmann K. P.** Interface crack with a contact zone in an isotropic bimaterial under thermomechanical loading / K.P. Herrmann, V.V. Loboda, I. V. Kharun // Theor. and Appl. Fract. Mech., 2004. – V. 42. – P. 335–348.
12. **Loboda V.** Analysis of pre-fracture zone for an electrically permeable crack in an interlayer between piezoelectric materials / V. Loboda, Y. Lapusta, A. Sheveleva // Int. J. Fract., 2006. – Vol. 142. – P. 307–313.
13. **Marannano G. V.** Crack growth analysis at adhesive–adherent interface in bonded joint under mixed mode I/II / G. V. Marannano, L. Mistretta, A. Cirello, S. Pasta, // Engng. Fract. Mech., 2008. – V. 75. – P. 5122–5133.
14. **Needleman A.** An analysis of tensile decohesion along an interface // J. Mech. Phys. Solids, 1990. – V. 38. – P. 289–324.
15. **Pickthall C.** Plasticity in constrained layers: model with point forces / C. Pickthall, C. Wang, L. R. F. Rose // Eng. Fract. Mech., 2002. – V. 69. – P. 647–658.
16. **Tvergaard V.** The influence of plasticity on mixed mode interface toughness / V. Tvergaard, J. W. Hutchinson // J. Mech. Phys. Solids, 1993. – V. 41. – P. 1119–1135.
17. **Varias A. G.** Ductile failure of a constrained metal foil / A. G. Varias, Z. Suo, C. F. Shih // J. Mech. Phys. Solids, 1991. – V. 39. – P. 963–986.
18. **Wang C. H.** Analysis of cracks in constrained layers // Int. J. Fract., 1997. – V. 83. – P. 1–17.

Надійшла до редколегії 04 06 10

УДК 539.3

А. С. Вьюн, С. А. Смирнов, В. В. Лобода

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

О РАЗВИТИИ δ_k -МОДЕЛИ НА СЛУЧАЙ ТРЕЩИНЫ В ИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Розглядається δ_k -модель для випадку нескінченної пластини з прямолінійною центральною тріщиною. Порівнюється точний аналітичний розв'язок цієї задачі з результатами скінчено-елементного розв'язку відповідної задачі. Установлена їх хороша узгодженість. Проводиться також чисельний аналіз указаної моделі для випадку пластини скінчених розмірів при різних співвідношеннях розмірів тріщини і пластини. Установлено, що при зменшенні відносного розміру пластини спостерігається збільшення розміру пластичної зони та величини розкриття тріщини у її початковій вершині.

Ключові слова: тріщина, δ_k -модель, пластична зона, чисельний розв'язок.

Рассматривается δ_k -модель для случая бесконечной пластины с прямолинейной центральной трещиной. Сравняется точное аналитическое решение этой задачи с результатами конечно-элементного решения соответствующей задачи. Устанавливается их хорошее соответствие. Проводится также численный анализ указанной модели для случая пластины конечных размеров при различных соотношениях размеров трещины и пластины. Получено, что при уменьшении относительного размера пластины наблюдается увеличение длины пластической зоны и величины раскрытия трещины в начальной вершине.

Ключевые слова: трещина, δ_k -модель, пластическая зона, численное решение.

δ_k -model for an infinite plate with a straight central crack is considered. It is compared the exact analytical solution of this problem with the results of finite element solutions of the proper task. It is sets a good match. A numerical analysis of the model for the case of a plate of finite dimensions at different ratios of crack and the plate is doing. It was found that the decreasing the relative size of the plate was lead to an increasing in the length of the plastic zone size and opening of crack in the initial peak.

Key word: crack, δ_k -model plastic zone, numerical solution.

Введение. Дефекты типа трещин в элементах конструкций являются основной причиной их разрушения. Поэтому исследование тел с трещинами имеет большое практическое значение. В настоящее время существует несколько моделей трещины, одной из которых является модель, предложенная в [1; 2] и получившая развитие в ряде последующих работ этих и других авторов.

На основе этой модели изучалось развитие полос пластичности в неограниченной пластинке с двумя [3] и периодическим рядом [4] коллинеарных трещин, с одной краевой трещиной [5] и двумя внешними полубесконечными трещинами [6], а также с крестообразной трещиной [7]. В связи с разработкой методов решения задач с разветвленными разрезами указанная модель применялась также для изучения вторичных (косых) полос пластичности [8, 9].

Следует отметить, что все вышеупомянутые результаты касаются трещин в телах, размеры которых намного больше, чем размер трещины. Что касается тел конечных размеров, в которых длина трещины соизмерима с размерами тела, то соответствующих исследований в рамках модели [1; 2] проведено недостаточно. Такой о рода анализ и является основной целью данной работы.

Рассмотрим вначале описание особенностей процесса деформирования тела с трещиной в соответствии с подходом, предложенным в [11].

В процессе деформирования твердого тела, ослабленного трещинами или другими дефектами такого типа, в некоторых его областях (например, вблизи острия трещины) возникают деформации, превосходящие предел упругости, то есть в теле возникают прослойки (области), в которых не выполняются условия закона Гука. В хрупких материалах такие области представляют собой малые объемы по сравнению с той частью тела, которая деформируется упруго. Учитывая это, будем рассматривать реальное твердое тело, деформируемое системой внешних сил, как сплошное упругое тело (материальный континуум), деформируемое упруго всюду, кроме некоторых прослоек материала, в которых напряжения превосходят предел упругости.

Такие «перенапряженные» прослойки можно мысленно удалить, образовав, таким образом, в теле некоторые трещины, к поверхности которых приложены напряжения, компенсирующие действие удаленного материала.

С точки зрения постановки и решения задачи теории упругости, берега трещины играют роль дополнительной границы тела. Если в реальном твердом теле присутствуют начальные трещины то в упругой модели твердого тела такие дефекты можно представить в виде разрезов, противоположные берега которых не взаимодействуют между собой. Такое представление трещины в виде разреза в упругой модели оправдано, поскольку характерный линейный размер реальной трещины всегда значительно больше максимального расстояния между ее берегами.

Рассмотрим хрупкое тело, ослабленное трещиной и подвергнутое растяжению системой внешних сил рис. 1.

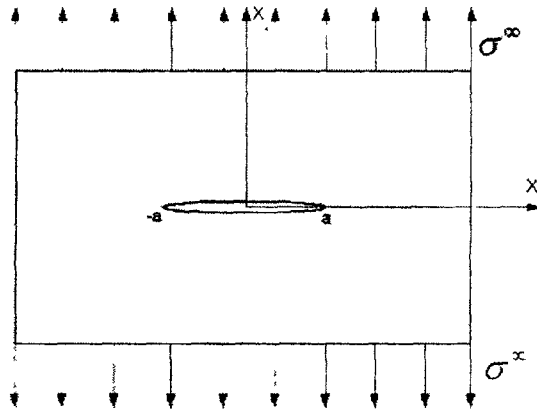


Рис. 1. Модель упругого тела с трещиной

Тогда, при сколь угодно малой, но не равной нулю, внешней нагрузке в окрестности вершины трещины возникают деформации, превосходящие предел упругости. Такие области будем рассматривать как мельчайшие трещины, то есть трещины, противоположные берега которых взаимодействуют между собой. Так как рассматриваемое тело хрупкое, то силы взаимодействия (притяжения между берегами мельчайших трещин) определяются интенсивностью межчастичных сил сцепления $g(r)$.

Введем следующую гипотезу. Для идеально хрупкого тела в рамках модели сплошной среды силы ослабленных межчастичных связей определяются так: если рассогнание между берегами трещины не превосходит некоторой величины δ_k

(постоянной для данного материала при заданных условиях), они равны постоянной величине σ_0 ; если же расстояние между берегами трещины больше δ_k , силы взаимодействия между ними равны нулю. Значения δ_k , γ и σ_0 связаны между собой равенством: $2\gamma = \sigma_0 \delta_k$. Величина σ_0 равна пределу хрупкой прочности для данного материала, а γ – Гриффитсова энергетическая сила.

Таким образом, расчетная модель реального хрупкого тела представляет собой сплошное упругое тело, которое характеризуется следующими свойствами:

1. Максимальные растягивающие напряжения, возникающие в таком теле, не превосходят величины σ_0 - предела хрупкой прочности материала;
2. Зависимость между напряжениями и деформациями выражается законом Гука, если растягивающие напряжения не достигают величины σ_0 ;
3. В теле образуются микротрещины (области ослабленных межчастичных связей), если максимальные растягивающие напряжения, вычисленные на основе линейной теории упругости, достигают величины σ_0 ;
4. Если расстояние между берегами микротрещины не превышает величины δ_k то противоположные берега таких микротрещин притягиваются с напряжением σ_0 , а если это расстояние больше δ_k то они не взаимодействуют между собой.

Основы δ_k - модели на примере задачи Гриффитса. Рассмотрим в рамках δ_k - модели хрупкого тела задачу о предельном равновесии бесконечной пластины, ослабленной изолированной прямолинейной трещиной длины $2a$ рис. 1.

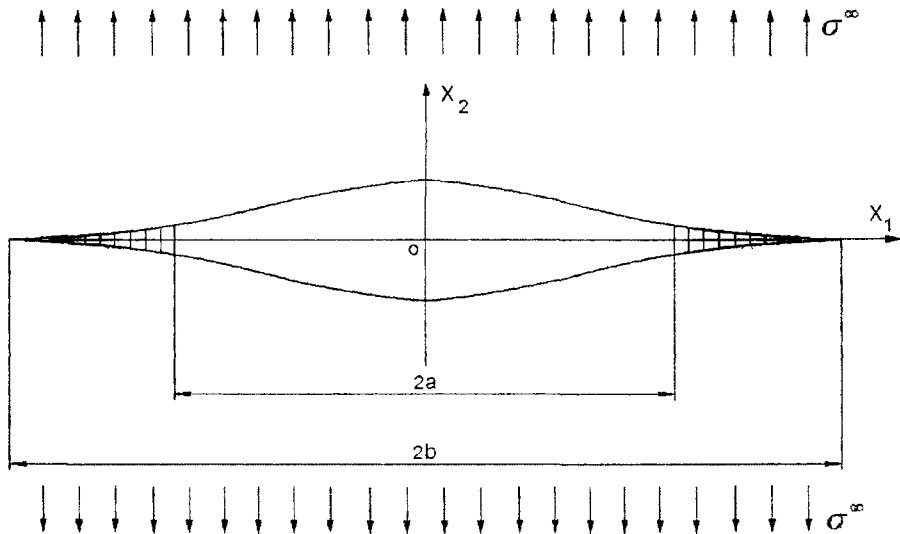


Рис. 2. δ_k - модель хрупкого тела

Пусть в бесконечно удаленных точках такой пластины приложены внешние растягивающие напряжения σ^∞ , направленные перпендикулярно к линии расположения трещины.

Отнесем рассматриваемую пластину к прямоугольной системе декартовых координат $x_1 0 x_2$. полагая, что трещина расположена вдоль оси x_1 на отрезке $|x_1| < a$ (рис. 1). Заметим, что как бы ни были малы напряжения σ^∞ , в окрестности концов реальной трещины напряжения $\sigma_{22}(x_1, 0)$, определены согласно линейной теории упругости, превышают предел хрупкой прочности материала, то есть в этой части тела возникают области ослабленных связей. На основе симметрии задачи и свойств δ_k - модели хрупкого тела эти области можно рассматривать как разрезы вдоль оси x_1 при $a \leq |x_1| \leq b$, противоположные берега которых притягиваются с напряжением σ_0 (рис. 2). Значение параметра b пока неизвестно.

Таким образом, задача о напряженно-деформированном состоянии в пластине с трещиной сводится к следующей задаче математической теории упругости. В упругой плоскости $x_1 0 x_2$ имеется разрез длиной $2b$. На поверхности этого разреза действуют напряжения:

$$\sigma_{21}(x_1, 0) = 0; \quad \sigma_{22}(x_1, 0) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x_1| \leq a; \\ \sigma_0, & \text{при } a \leq |x_1| \leq b; \end{cases}$$

а в бесконечно удаленных точках плоскости $\sigma_{22}(x_1, \infty) = \sigma^\infty$.

Аналитическое решение для случая бесконечной плоскости с трещиной. Итак, рассмотрим бесконечную плоскость с разрезом длины a вдоль оси x_1 и подвергнутой равномерному растяжению на бесконечности силой интенсивности σ^∞ по направлению оси x_2 . (рис. 1).

Такая задача называется задачей Гриффитса. Ее решение хорошо известно и выражается следующими формулами:

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = \frac{\sigma^\infty x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}, \quad \text{для } |x_1| > a, \quad (1)$$

$$2v(x) = v^+(x) - v^-(x) = 2\sigma^\infty \frac{1-\nu}{\mu} \sqrt{a^2 - x_1^2}. \quad (2)$$

Из формулы (1) следует, что $\sigma_{22}(x_1, 0)$ при $|x_1| \rightarrow a$ будет стремиться к бесконечности, причем коэффициент интенсивности нормального напряжения $K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi b}$. С целью устранения физически нереальной особенности напряжения применим для решения этой задачи δ_k - модель, основные характеристики которой обсуждались выше и показаны на рис. 3.

То есть предполагается, что трещина от каждой своей вершины удлинится на величину $(b - a)$ и на этих участках на ее берега действует нормальное напряжение σ_0 .

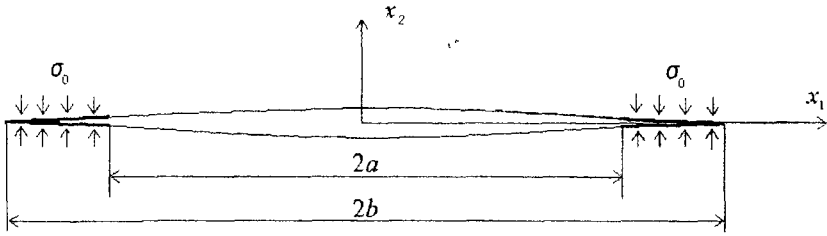


Рис. 3. Конфігурація і схема навантаження тріщини в відповідності з δ_k - моделлю

Таким образом, граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{12}(x_1, x_2) \Big|_{x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty} = 0, \quad \sigma_{22}(x_1, x_2) \Big|_{x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty} = \sigma^\infty, \quad \sigma_{22}(x_1, 0) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x_1| \leq a; \\ \sigma_0, & \text{при } a \leq |x_1| \leq b; \end{cases} \quad (3)$$

$$\sigma_{12}(x_1, 0) = 0, \quad -b < x_1 < b \quad (4)$$

При этом величина σ_0 обычно выбирается равной пределу текучести материала ($\sigma_0 = \sigma_l$).

Основные особенности этого решения полученного в рамках сформулированной модели имеют вид: [11]

- Раскрытие трещины в точке a выражается формулой

$$2\delta_2(\pm a, 0) = -8ac\sigma_0 \ln \left(\cos \frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_0} \right), \quad (5)$$

где c – постоянная, которая для плоского напряженного состояния равна $\frac{1}{\pi E}$, а для плоской деформации – $\frac{(1-\nu^2)}{\pi E}$

- Положение точки b вычисляется из уравнения

$$\cos \frac{\pi\sigma'}{2\sigma_0} = \frac{a}{b} \quad (6)$$

Если, например, положить $a = 2$ (м), $\sigma_{теор}^\infty = 2.45923906 \cdot 10^8$ (Па), $\sigma_0 = 6 \cdot 10^8$ (Па), $E = 2 \cdot 10^{11}$ (Па) то тогда из (5)–(6) будем иметь $\delta_2 = 0,00163020779$ (м), $b = 2,5$ (м)

Численное решение задачи для тела конечных размеров. Если тело имеет конечные размеры, то точное аналитическое решение ни в рамках модели Гриффитса, ни в рамках δ_k – модели получить невозможно. Поэтому решим теперь поставленную задачу методом конечных элементов.

Причем будем пока считать, что размер h этой пластины по осям x_1 и x_2 существенно превосходит размер трещины a . В силу симметрии задачи будем

рассматривать только 1/4 пластины. Разбиение указанной части области пластины на конечные элементы показано на рис 4.

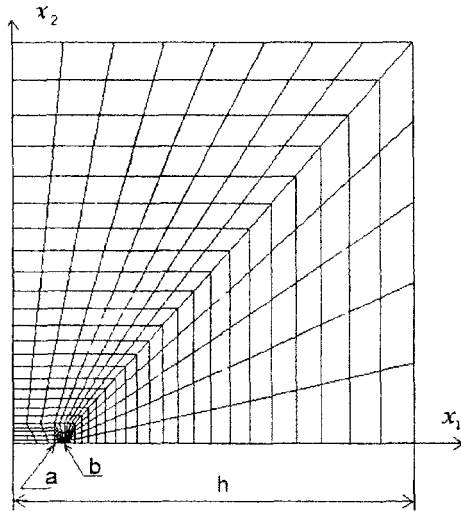


Рис. 4. Разбиение области на конечные элементы

Видно, что вблизи новой вершины трещины b сетка сгущается.

Задав значение $b = 2,5$ (м), $\sigma_0 = 6 \cdot 10^8$ (Па) будем искать σ^∞ и δ_2 при котором происходит:

- смена знака проекции на ось x_3 узловой реакции - RF_2 в точке b ,
- смена знака проекции на ось x_3 вектора перемещения - u_2 в ближайшей точке к точке b слева.

Раскрытие щели в этом случае имеет вид, показанный на рис 5

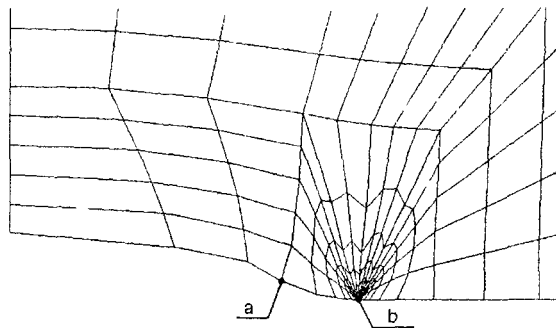


Рис. 5. Раскрытие щели

В табл. 1 приведены данные по отысканию точки b . Так σ^∞ (Па) – это задаваемое растягивающее усилие, u_2 (м) – перемещение в ближайшем узле к точке b слева, RF_2 (Н) – узловая реакция в точке b , δ_2 (м) перемещение точки a (первоначальной вершины трещины). Изменяя растягивающее усилие, следя за поведением RF_2 и u_2 , отыскиваем то σ^∞ , при котором происходит смена знака как u_2 так и RF_2 .

Таблиця 1

Результати расчетов по определению длины зоны ослабленных межчастичных связей

	$\sigma^\infty \cdot 10^8, Па$	$u_2 \cdot 10^{-6}, м$	$RF_2 \cdot 10^6, Н$	$\delta_2 \cdot 10^{-3}, м$
1	2,1870	-15,5000	2,1000	1,3605
2	2,2356	-12,5000	1,5500	1,4350
3	2,2842	-9,0000	0,9300	1,5100
4	2,3328	-5,7000	0,3600	1,5840
5	2,3814	-2,3800	0,2200	1,6620
6	2,4300	1,0100	-0,8000	1,7323
7	2,4786	4,4000	-1,8000	1,8080
8	2,5272	7,9000	-2,0000	1,8845

Как видно из табл. 1 при $\sigma^\infty = 2,43 \cdot 10^8$ (Па) имеет место смена знака как u_2 так и RF_2 . Сравнивая значение σ^∞ , полученное аналитически, $\sigma_{теор}^\infty = 2,4592 \cdot 10^8$ (Па) и численно $\sigma^\infty = 2,4300 \cdot 10^8$ (Па) можно сделать вывод, что погрешность численного метода крайне незначительна.

Рассмотрим теперь, как зависит величина зоны ослабленных межчастичных связей от размера области h . Соответствующие результаты приведены в таблице 2. В этой таблице для $a = 2$ (м), различных h и σ^∞ / σ_0 приведена величина зоны межчастичных связей, а также раскрытие трещины в ее первоначальной вершине. Кроме того, для случая, когда размер трещины существенно превышает ее длину, приведены значения $(b - a)_{теор}$, полученные по формуле (6).

Таблиця 2

Зависимость характеристик зоны ослабленных межчастичных связей от соотношения длины трещины и размера области

σ^∞ / σ_0	$h, м$	$\sigma_0 \cdot 10^8, Па$	$\sigma^\infty \cdot 10^8, Па$	$(b - a), м$	$\delta_2 \cdot 10^{-3}, м$	$(b - a)_{теор}, м$
1/2,5	20,0	6,0	2,4	0,500	1,680	0,471564
1/3	20,0	6,0	2,0	0,300	1,140	0,309047
1/5	20,0	6,0	1,2	0,100	0,400	0,102816
1/10	20,0	6,0	0,6	0,025	0,124	0,024905
1/2,5	10,0	6,0	2,4	0,550	1,860	
1/3	10,0	6,0	2,0	0,355	1,600	
1/5	10,0	6,0	1,2	0,110	0,440	
1/10	10,0	6,0	0,6	0,027	0,106	
1/2,5	4,0	6,0	2,4	1,00	3,700	
1/3	4,0	6,0	2,0	0,64	2,280	
1/5	4,0	6,0	1,2	0,18	0,716	
1/10	4,0	6,0	0,6	0,05	0,171	

Как видно из таблицы при $h = 20$ (м) значение между $(b-a)$ и $(b-a)_{теор}$ отличаются максимум на 2,8435 %. Например, при $\sigma^\infty = 1,2 \cdot 10^8$ (Па), $\sigma_0 = 6 \cdot 10^8$ (Па) мы видим, что $(b-a) = 0,1$ (м), а $(b-a)_{теор} = 0,1028$. Также видим, что при уменьшении σ^∞ уменьшается и $(b-a)$. При уменьшении размера области h наблюдается увеличение $(b-a)$ и δ_2 . Так, например, если $\sigma^\infty = 2 \cdot 10^8$ (Па) то при $h = 10$ (м) величина зоны ослабленных межчастичных связей будет равняться $(b-a) = 0,355$ (м), а при $h = 4$ (м) будем иметь $(b-a) = 0,64$ (м).

Выводы. Представлено аналитическое решение задачи для трещины в однородной изотропной плоскости под действием растягивающей нагрузки на бесконечности в рамках модели Гриффитса и δ_k -модели. Проведено сравнение результатов, полученных в рамках последней модели, с результатами конечно-элементного анализа конечной пластины, при условии, что ее размер существенно превосходит размер трещины. Получено хорошее совпадение результатов аналитического и численного расчетов.

Для трещины в пластине конечных размеров исследовано влияние ее длины на размер пластической зоны на продолжении трещины и на величину раскрытия трещины в ее первоначальной вершине. Для этого использован метод конечных элементов. Получено, что при уменьшении размера пластины и неизменной длине трещины наблюдается увеличение обоих указанных параметров.

Бibliографические ссылки

1. Леонов М. Я. Развитие мельчайших трещин в твердом теле / М. Я. Леонов, В. В. Панасюк // Прикладная механика, 1959. – Т.5. – № 4. – С. 391–401.
2. Dugdale D. S. Yielding of steel sheets containing slits / D. S. Dugdale // J.Mech. and Phys. Solids. 1960. – V.8, №2. – P.100–108.
3. Витвицкий П. М. Полосы скольжения при растяжении тонких пластин с прямолинейными разрезами / П. М. Витвицкий // Концентрация напряжений. – К., 1965. – Вып. 1. – С. 78–85.
4. Витвицкий П. М. Пружно-пластична рівновага пластинки з періодичною системою щілин / П. М. Витвицкий // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 6. – С. 524–527.
5. Панасюк В. В. Про пластичну деформацію і руйнування пластинки з крайовою тріщиною / В. В. Панасюк, П. М. Витвицкий, С. Й. Кутень // Там же. – 1975. – № 4. – С. 346–353.
6. Витвицкий П. М. Упругопластическая деформация и разрушение сосредоточенными силами пластинки с внешними щелями. / П. М. Витвицкий // Физ.-хим. Механика материалов. – 1973. – №3. – С. 65–74.
7. Панасюк В. В. О пластической деформации и разрушении пластинки, ослабленной равноплечей крестообразной трещиной / В. В. Панасюк, П. М. Витвицкий, С. И. Кутень // Пробл. Прочности. – 1979. – №5. – С. 3–6.
8. Панасюк В. В. Плоска пружно-пластична задача для тіл з тріщинами при локалізації пластичних деформацій в тонких шарах / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, І. В. Прокопчук, А. М. Данилович // Фіз-хім механіка матеріалів. – 1991. – №5. – С. 35–42.
9. Саврук М. П. Розвиток смуг пластичності біля довільно орієнтованої тріщини у напівскінченній тонкій пластині / М. П. Саврук, А. М. Данилович // Там же. – 1992. – №3. – С. 25–31.
10. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили // – М., 1966. – 708 с.
11. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами / В. В. Панасюк. – К., 1968. – 248 с.

УДК 539.3

В. Б. Говоруха

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ВРАХУВАННЯ СИНГУЛЯРНОСТІ ПРИ ЧИСЕЛЬНОМУ АНАЛІЗІ ТРІЩИНИ МІЖ ДВОМА П'ЄЗОКЕРАМІЧНИМИ МАТЕРІАЛАМИ

Розглянуто тріщину з зоною контакту, що знаходиться на межі поділу двох п'єзокерамічних тіл скінченного розміру. Для моделювання електромеханічних полів навколо вершини тріщини використано поєднання асимптотичного та скінченноелементного розв'язків. Знайдено коефіцієнти інтенсивності напружень і для окремого випадку тріщини, довжина якої мала порівняно з розміром тіла, проведено порівняльний аналіз із точним аналітичним розв'язком для нескінченної області.

Ключові слова: п'єзоелектрична кераміка, міжфазна тріщина, зона контакту, метод скінченних елементів

Рассмотрена трещина с зоной контакта, которая расположена на границе раздела двух пьезокерамических тел конечных размеров. Для моделирования электромеханических полей в окрестности вершины трещины используется объединение асимптотического и конечноэлементного решения. Записаны выражения для коэффициентов интенсивности напряжений и для случая трещины, длина которой мала по сравнению с размерами тела, проведен сравнительный анализ с точным аналитическим решением для бесконечной области.

Ключевые слова: пьезокерамика, межфазная трещина, зона контакта, метод конечных элементов

An interface crack with an artificial contact zone at the right-hand side crack tip between two dissimilar finite-sized piezoelectric materials is considered. To find the singular electromechanical field at the crack tip, an asymptotic solution is derived in connection with the conventional finite element method. The stress intensity factors at the singular points are obtained. As a particular case of this solution, the contact zone model (in Comninou's sense) is derived. For a particular case of a short crack with respect to the dimensions of the bimaterial compound, the numerical results are compared to the exact analytical solution, obtained for a piezoelectric bimaterial plane with an interface crack.

Key words: piezoelectric ceramics, interface crack, contact zone, finite element method.

Вступ. Унаслідок внутрішнього ефекту взаємозв'язку, який має місце між електричним полем і механічними деформаціями, п'єзокерамічні композитні матеріали нині широко використовуються в різних галузях машинобудування. Однак за своєю природою п'єзокераміка дуже крихка та схильна до появи в ній різноманітних мікрodefektів, зокрема міжфазних тріщин, які розташовані на межі поділу матеріалів, що в більшості випадків призводить до руйнування всього композиту. Тому прогнозування міцності та надійності конструктивних елементів приладів, виготовлених з п'єзокераміки, потребує дослідження й аналізу процесів руйнування цих матеріалів.

Відомо [6], що задачі про рівновагу пружних тіл із тріщинами, що розміщені на межі поділу двох різнорідних матеріалів, мають осцилюючі розв'язки. Ці розв'язки не можна вважати фізично коректними, оскільки спостерігається взаємне проникнення берегів тріщини поблизу її вершин. У [7] зазначені протиріччя усунуто шляхом введення малої зони контакту берегів тріщини поблизу її вершини. Аналітичні розв'язки для міжфазної тріщини відповідно до контактної моделі Комніноу було одержано в [4; 5]. У [3] запропоновано й аналітично обґрунтовано модель міжфазної тріщини зі штучною зоною контакту, а в роботі [9] одержано аналітичні залежності для визначення параметрів руйнування осциляційної моделі

та моделі Комніоу через коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) цієї моделі. У випадку п'єзокерамічних композитних матеріалів подібне дослідження міжфазної тріщини проведено в [1; 10].

Слід зазначити, що у процесі дослідження контактної моделі міжфазної тріщини здебільшого використовуються аналітичні методи, але значні математичні труднощі в отриманні аналітичних розв'язків, особливо для тіл скінчених розмірів, змусили широко використовувати чисельні методи, зокрема, метод скінчених елементів. У цій роботі запропоновано методику моделювання електромеханічних полів навколо вершини міжфазної тріщини зі штучною зоною контакту, яка поєднує аналітичний і скінченноелементний розв'язки. За допомогою цієї методики визначено основні параметри руйнування і виконано порівняльний аналіз із точним аналітичним розв'язком для випадку нескінченної області.

Постановка задачі. Вихідні співвідношення. У прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ розглянемо плоску деформацію нескінченно довгого за напрямом осі Ox_2 біматеріального п'єзокерамічного тіла, поперечний переріз якого має форму прямокутника зі сторонами h_1 та h_2 . Вважається, що вісь Ox_3 направлена вздовж силових ліній електричного поля попередньої поляризації, а на ділянці $b_1 < x_1 < b_2$, $x_3 = 0$ межі поділу матеріалів розміщено ненавантажену електропроникну тріщину, береги якої відкриті на ділянці $M = (b_1, a)$, а в околі $L = (a, b_2)$ правої вершини вступають у гладкий контакт. Положення точки a поки що довільно і буде визначено далі з додаткових умов. Частина U межі поділу матеріалів являє собою ділянки жорсткого зчеплення матеріалів. На зовнішніх гранях досліджуваного п'єзокерамічного тіла прикладене рівномірно розподілене механічне навантаження $\sigma_{33}^{(ext)}$ та $\sigma_{13}^{(ext)}$.

Взаємозв'язок, який існує між основними характеристиками електромеханічного поля, задається співвідношеннями [2]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\gamma_{kl} - e_{kij}E_k, \quad D_i = e_{ikl}\gamma_{kl} + \epsilon_{ik}E_k, \quad (1)$$

де σ_{ij} , γ_{ij} – напруження і деформації; D_i , E_i – електрична індукція і напруженість електричного поля; c_{ijkl} , e_{ikl} , ϵ_{ij} – модулі пружності, п'єзоелектричні та діелектричні сталі відповідно.

Рівняння рівноваги та електростатики мають вигляд [2]:

$$\sigma_{ij,i} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad (2)$$

де комою позначено диференціювання за відповідною координатою.

Граничні умови на межі поділу матеріалів такі:

$$\begin{aligned} \llbracket \sigma_{13} \rrbracket = 0, \quad \llbracket \sigma_{33} \rrbracket = 0, \quad \llbracket \varphi \rrbracket = 0, \quad \llbracket D_3 \rrbracket = 0, \quad x_1 \in U \cup M \cup L; \\ \llbracket u_1 \rrbracket = 0, \quad \llbracket u_3 \rrbracket = 0, \quad x_1 \in U; \\ \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{33} = 0, \quad x_1 \in M; \\ \sigma_{13} = 0, \quad \llbracket u_3 \rrbracket = 0, \quad x_1 \in L, \end{aligned} \quad (3)$$

де u_i , φ – переміщення та електричний потенціал. Символ $\llbracket \cdot \rrbracket$ тут і далі означає стрибок відповідної функції на межі поділу матеріалів.

Асимптотична поведінка розв'язку навколо вершини тріщини. З урахуванням степеневого характеру особливості навколо вершини тріщини, асимптотичну поведінку загального розв'язку (1), (2) можна подати у вигляді [8]

$$V_i = \sum_{k=1}^3 [A_{ik} q_k z_k^v + \bar{A}_{ik} s_k \bar{z}_k^v], \quad t_i = \sum_{k=1}^3 v [B_{ik} q_k z_k^{v-1} + \bar{B}_{ik} s_k \bar{z}_k^{v-1}], \quad (4)$$

де $\mathbf{V} = [u_1, u_3, \varphi]^T$, $\mathbf{t} = [\sigma_{13}, \sigma_{33}, D_3]^T$, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$, $\mathbf{s} = [s_1, s_2, s_3]^T$.

Тут \mathbf{A} , \mathbf{B} – відомі матриці розміру 3×3 , що визначаються характеристиками матеріалів; q_k , s_k – невідомі коефіцієнти, які слід визначити із заданих граничних умов на межі поділу матеріалів; $z_k = x_1 + p_k x_3$; p_k – комплексні числа, методику знаходження яких наведено у [8]. Допустимі значення степеня особливості v належать до проміжку $0 < \text{Re}(v) < 1$.

Задовольняючи за допомогою співвідношень (4) граничні умови (3) на ділянках L та U межі поділу матеріалів у малому околі точки b_2 , дістанемо систему матричних рівнянь

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^{(1)} \mathbf{Q}_b^{(1)} - \bar{\mathbf{Y}}^{(1)} \mathbf{S}_b^{(1)} &= \mathbf{Y}^{(2)} \mathbf{Q}_b^{(2)} - \bar{\mathbf{Y}}^{(2)} \mathbf{S}_b^{(2)}, \\ \mathbf{Q}_b^{(1)} + \mathbf{S}_b^{(1)} &= \mathbf{Q}_b^{(2)} + \mathbf{S}_b^{(2)}, \\ e^{i\pi v_b} \mathbf{Q}_b^{(1)} + e^{-i\pi v_b} \mathbf{S}_b^{(1)} &= e^{-i\pi v_b} \mathbf{Q}_b^{(2)} + e^{i\pi v_b} \mathbf{S}_b^{(2)}, \\ e^{i\pi v_b} \mathbf{R}_2 \mathbf{Q}_b^{(1)} + e^{-i\pi v_b} \mathbf{T}_2 \mathbf{S}_b^{(1)} &= e^{-i\pi v_b} \mathbf{R}_1 \mathbf{Q}_b^{(2)} + e^{i\pi v_b} \mathbf{T}_1 \mathbf{S}_b^{(2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

відносно невідомих матриць

$$\mathbf{Q}_b^{(j)} = \mathbf{B}^{(j)} \mathbf{q}_b^{(j)}, \quad \mathbf{S}_b^{(j)} = \bar{\mathbf{B}}^{(j)} \mathbf{s}_b^{(j)} \quad (j=1, 2),$$

$$\text{де } \mathbf{R}_j = \begin{bmatrix} j-1 & 0 & 0 \\ Y_{21}^{(j)} & Y_{22}^{(j)} & Y_{23}^{(j)} \\ Y_{31}^{(j)} & Y_{32}^{(j)} & Y_{33}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} j-1 & 0 & 0 \\ -\bar{Y}_{21}^{(j)} & -\bar{Y}_{22}^{(j)} & -\bar{Y}_{23}^{(j)} \\ -\bar{Y}_{31}^{(j)} & -\bar{Y}_{32}^{(j)} & -\bar{Y}_{33}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{(j)} = i\mathbf{A}^{(j)} (\mathbf{B}^{(j)})^{-1}.$$

Верхній індекс «1» відповідає верхній частині тіла, а індекс «2» – нижній.

Послідовно виключаючи $\mathbf{S}_b^{(1)}$, $\mathbf{Q}_b^{(2)}$, $\mathbf{S}_b^{(2)}$ із системи (5), дістанемо

$$\left[\mathbf{H} + e^{i2\pi v_b} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{W}_b \right] \mathbf{Q}_b^{(1)} = 0,$$

$$\text{де } \mathbf{H} = \mathbf{Y}^{(1)} + \bar{\mathbf{Y}}^{(2)}, \quad \mathbf{W}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ненульовий розв'язок цієї системи існує тільки за рівності нулеві визначника матриці коефіцієнтів

$$\left| \mathbf{H} + e^{i2\pi v_b} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{W}_b \right| = 0.$$

Останнє рівняння на проміжку $0 < \text{Re}(v_b) < 1$ має лише єдиний корінь $v_b = 1/2$, що підтверджує існування кореневої особливості в околі точки b_2 при використанні контактної моделі міжфазної тріщини.

Розглянемо далі асимптотичний розподіл електромеханічних полів навколо точки a .

Вводячи нові матриці

$$Q_a^{(j)} = B^{(j)} q_a^{(j)}, \quad S_a^{(j)} = \bar{B}^{(j)} s_a^{(j)}$$

і задовольняючи за допомогою співвідношень (4) граничні умови (3) на ділянках M та L межі поділу матеріалів у малому околі точки a , дістанемо:

$$\begin{aligned} Q_a^{(1)} + S_a^{(1)} &= Q_a^{(2)} + S_a^{(2)}, \\ R_2 Q_a^{(1)} + T_2 S_a^{(1)} &= R_1 Q_a^{(2)} + T_1 S_a^{(2)}, \\ e^{i\pi v_a} Q_a^{(1)} + e^{-i\pi v_a} S_a^{(1)} &= e^{-i\pi v_a} Q_a^{(2)} + e^{i\pi v_a} S_a^{(2)}, \\ e^{i\pi v_a} K_2 Q_a^{(1)} + e^{-i\pi v_a} P_2 S_a^{(1)} &= e^{-i\pi v_a} K_1 Q_a^{(2)} + e^{i\pi v_a} P_1 S_a^{(2)}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{де } K_j = \begin{bmatrix} j-1 & 0 & 0 \\ 0 & j-1 & 0 \\ Y_{31}^{(j)} & Y_{32}^{(j)} & Y_{33}^{(j)} \end{bmatrix}, \quad P_j = \begin{bmatrix} j-1 & 0 & 0 \\ 0 & j-1 & 0 \\ -\bar{Y}_{31}^{(j)} & -\bar{Y}_{32}^{(j)} & -\bar{Y}_{33}^{(j)} \end{bmatrix}.$$

Виключаючи послідовно $S_a^{(1)}$, $Q_a^{(2)}$, $S_a^{(2)}$ у системі (6) і виконавши ряд елементарних перетворень, дістанемо

$$\left[L_1 + e^{i2\pi v_a} L_2 \right] Q_a^{(1)} = 0,$$

$$\text{де } L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -H_{21} & H_{22} - 2H_{23}H_{32}/H_{33} & -H_{23} \\ -H_{31} & -H_{32} & -H_{33} \end{bmatrix}.$$

Аналіз цієї системи показує, що лише значення $v_a = 1/2$ з інтервалу $0 < \text{Re}(v_a) < 1$ забезпечує існування її ненульового розв'язку. Це вказує на наявність кореневої особливості в околі точки a .

Основні компоненти електромеханічного поля навколо точок b_2 та a подамо у вигляді

$$V_i^{(j)}(r, \theta) = \begin{cases} C_b \sqrt{r} \Phi_{bi}^{(j)}(\theta), & r \rightarrow b_2, \\ C_a \sqrt{r} \Phi_{ai}^{(j)}(\theta), & r \rightarrow a, \end{cases} \quad t_i^{(j)}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r}} C_b \Psi_{bi}^{(j)}(\theta), & r \rightarrow b_2, \\ \frac{1}{\sqrt{r}} C_a \Psi_{ai}^{(j)}(\theta), & r \rightarrow a, \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{де } \begin{Bmatrix} \Phi_{bi}^{(j)}(\theta) \\ \Phi_{ai}^{(j)}(\theta) \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \left[A_{ik}^{(j)} \begin{Bmatrix} q_{bk}^{(j)} \\ q_{ak}^{(j)} \end{Bmatrix} \sqrt{\cos(\theta) + p_k^{(j)} \sin(\theta)} + \bar{A}_{ik}^{(j)} \begin{Bmatrix} s_{bk}^{(j)} \\ s_{ak}^{(j)} \end{Bmatrix} \sqrt{\cos(\theta) + \bar{p}_k^{(j)} \sin(\theta)} \right],$$

$$\begin{Bmatrix} \Psi_{bi}^{(j)}(\theta) \\ \Psi_{ai}^{(j)}(\theta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[\frac{B_{ik}^{(j)}}{\sqrt{\cos(\theta) + p_k^{(j)} \sin(\theta)}} \begin{Bmatrix} q_{bk}^{(j)} \\ q_{ak}^{(j)} \end{Bmatrix} + \frac{\bar{B}_{ik}^{(j)}}{\sqrt{\cos(\theta) + \bar{p}_k^{(j)} \sin(\theta)}} \begin{Bmatrix} s_{bk}^{(j)} \\ s_{ak}^{(j)} \end{Bmatrix} \right],$$

C_b, C_a – невизначені дійсні сталі.

Асимптотичні розв'язки (7), які визначають поведінку поля лише навколо особливих точок, мають поєднуватись зі скінченноелементним розв'язком для всієї області, що будуватиметься з урахуванням усіх граничних умов як на тріщині, так і на зовнішніх межах області. З умов поєднання цих розв'язків і знаходимо сталі C_b та C_a , детальна методика визначення яких описується далі на конкретному прикладі.

Числові результати. Чисельну реалізацію наведеної методики проводили за допомогою методу скінченних елементів. Оскільки концентрація напружень і електричного поля навколо вершин тріщини найбільша, скінченноелементну сітку будували зі зміщенням до вершини тріщини (рис. 1). При цьому використовувалися 8-вузлові чотирикутні ізопараметричні елементи. Довжина тріщини та геометричні розміри тіла задавалися такі: $l = 2 \text{ мм}$, $h_1 = h_2 = 20 \text{ мм}$, $\lambda = (b_2 - a) / l = 0,01$, а довжина найменшого елемента становила $3 \cdot 10^{-8}$ довжини тріщини. За верхній та нижній матеріал обиралися відповідно п'єзокераміки PZT-5H та PZT-4 [2].

Оскільки довжина тріщини набагато менша від розмірів тіла, то це дає можливість провести порівняльний аналіз із точним аналітичним розв'язком для електропроникної тріщини між двома різними п'єзокерамічними півплощинами.

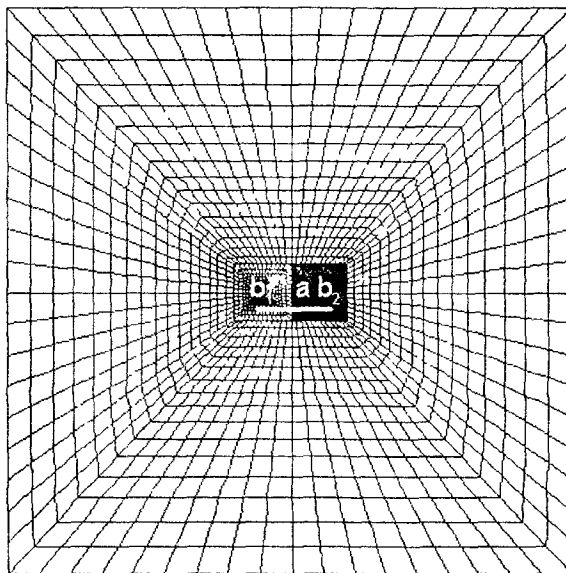


Рис. 1. Розбиття області на скінченні елементи

Розглянемо КІН

$$K_1 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} \sigma_{33}(x_1, 0), \quad K_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b_2+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b_2)} \sigma_{13}(x_1, 0).$$

Скориставшись співвідношеннями (7), можна записати вирази для K_1 та K_2 у вигляді

$$K_1 = \sqrt{2\pi} C_a \Psi_{a2}(0), \quad K_2 = \sqrt{2\pi} C_b \Psi_{b1}(0), \quad (8)$$

де $\Psi_{a2}(0) = \Psi_{a2}^{(1)}(0) = \Psi_{a2}^{(2)}(0)$.

Як уже зазначалось, асимптотичний розв'язок навколо вершини тріщини має поєднуватись зі скінченноелементним розв'язком для всієї області. Це поєднання здійснимо на відстані $r = r_0$ від точок b_2 та a . Оскільки шукані сталі C_b та C_a дійсні, для їх визначення необхідно лише по одній додатковій умові. Чисельний аналіз показав, що найкращі результати відповідають випадку, коли додаткові умови обираються таким чином:

для визначення C_b :

$$\sigma_{13}^{(asym)}(r_0, 0) = \sigma_{13}^{(FEM)}(r_0, 0); \quad (9)$$

для визначення C_a :

$$[[u_3(r_0)]]^{(asym)} = [[u_3(r_0)]]^{(FEM)}. \quad (10)$$

Підставивши (7) в умови (9), (10), дістанемо вирази для сталей C_b та C_a

$$C_b = \frac{\sqrt{r_0} \sigma_{13}^{(FEM)}(r_0, 0)}{\Psi_{b1}(0)}, \quad C_a = \frac{[[u_3(r_0)]]^{(FEM)}}{\sqrt{r_0} (\Phi_{a2}^{(1)}(\pi) - \Phi_{a2}^{(2)}(-\pi))},$$

де $\Psi_{b1}(0) = \Psi_{b1}^{(1)}(0) = \Psi_{b1}^{(2)}(0)$.

Числові значення КІН $\langle K_1 \rangle = K_1 / (\sigma_{33}^{(ext)} \sqrt{l})$ та $\langle K_2 \rangle = K_2 / (\sigma_{33}^{(ext)} \sqrt{l})$, які обчислено за формулою (8) при $\sigma_{33}^{(ext)} = 10 \text{ МПа}$, $\sigma_{13}^{(ext)} = 0$ та різних значеннях r_0 , наведено в табл. 1. У дужках подано відносні похибки чисельних результатів і точного аналітичного розв'язку [10].

Таблиця 1

Результати обчислення КІН K_1 та K_2 при різних значеннях величини r_0

r_0 / l	$\langle K_1 \rangle$	$\langle K_2 \rangle$
$0,1 \cdot 10^{-6}$	1,20621 (2,95%)	-0,105262 (1,83%)
$0,4 \cdot 10^{-6}$	1,25261 (0,86%)	-0,107592 (0,37%)
$0,52 \cdot 10^{-4}$	1,25609 (1,14%)	-0,108627 (1,32%)
$0,57 \cdot 10^{-2}$	1,26897 (2,14%)	-0,087591 (22,4%)

Як видно з таблиці, одержані результати суттєво залежать від вибору величини r_0 . Зокрема, значення K_1 та K_2 , що одержані за дуже малих або дуже великих величин r_0 / l , значно відрізняються від точного розв'язку. У той же час для проміжку $r_0 / l = 0,3 \cdot 10^{-6} - 0,3 \cdot 10^{-4}$ одержані результати практично збігаються з точним розв'язком, тому саме цей проміжок значень r_0 обирався для подальших обчислень.

Розв'язок задачі будувався при довільному положенні точки a , однак він стає фізично обґрунтованим для реальної довжини зони контакту $\lambda = \lambda_0$, коли виконуються такі додаткові умови:

$$\sigma_{33}(x_1, 0) \leq 0 \text{ для } x_1 \in L, \quad \llbracket u_3(x_1) \rrbracket \geq 0 \text{ для } x_1 \in M$$

та має місце модель із зонами контакту в сенсі Комніноу.

Оскільки модель Комніноу – це частковий випадок моделі тріщини зі штучною зоною контакту, не має потреби додатково проводити її чисельний аналіз, досить скористатись отриманими у [10] співвідношеннями для різних моделей міжфазної тріщини. Так, для визначення реальної довжини зони контакту λ_0 , знаючи певне значення λ та відповідні йому КІН K_1 та K_2 , використаємо формулу [10]

$$tg(\beta_0 - \beta) = g(K, \lambda, \lambda_0), \quad (11)$$

$$\text{де } g(K, \lambda, \lambda_0) = \frac{(\sqrt{1-\lambda_0} + 4\varepsilon_1^2 \sqrt{1-\lambda})\sqrt{\alpha} - 2\varepsilon_1 \tilde{s}_1 \sqrt{1-\lambda} K}{2}, \quad \beta = \varepsilon_1 \ln \frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{1+\sqrt{1-\lambda}},$$

$$\beta_0 = \varepsilon_1 \ln \frac{1-\sqrt{1-\lambda_0}}{1+\sqrt{1-\lambda_0}}, \quad K = -\frac{m_1 K_2}{K_1}, \quad \tilde{s}_1 = 1 - \sqrt{\frac{1-\lambda_0}{1-\lambda}}, \quad \tilde{s}_2 = \sqrt{\frac{1}{1-\lambda}} - \sqrt{1-\lambda_0},$$

α , ε_1 , m_1 – сталі, що залежать від характеристик матеріалу [10].

Розв'язок рівняння (11) знаходиться чисельно й обирається максимальний корінь із проміжку (0;1).

Оскільки значення КІН $K_{10} = K_1(\lambda_0)$ для реальної довжини зони контакту дорівнює нулю, основним параметром руйнування цієї моделі виступає КІН $K_{20} = K_2(\lambda_0)$, який знаходимо за формулою [10]

$$K_{20} = -\frac{1}{m_1(1+4\varepsilon_1^2)} \left\{ \tilde{t}_1 \sqrt{\alpha} K_1 - 2\varepsilon_1 m_1 \tilde{s}_2 K_2 \right\} \sin(\beta_0 - \beta) - \left\{ 2\varepsilon_1 \tilde{s}_1 \sqrt{\alpha} K_1 + \tilde{t}_2 m_1 K_2 \right\} \cos(\beta_0 - \beta), \quad (12)$$

$$\text{де } \tilde{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} + 4\varepsilon_1^2 \sqrt{1-\lambda_0}, \quad \tilde{t}_2 = 1 + 4\varepsilon_1^2 \sqrt{\frac{1-\lambda_0}{1-\lambda}}.$$

На рис. 2, 3 показано числові значення відносної довжини реальної зони контакту λ_0 та КІН $\langle K_{20} \rangle = K_{20} / (\sigma_{33}^{(ext)} \sqrt{l})$, які обчислено відповідно за формулами (11), (12) при $\sigma_{33}^{(ext)} = 10 \text{ МПа}$, $l = 2 \text{ мм}$, $r_0 / l = 0,4 \cdot 10^{-6}$ та різних значеннях $h = h_1 = h_2$ і $\sigma_{13}^{(ext)}$.

Крива 1 відповідає $h/l = 3$; 2 – $h/l = 10$. З отриманих результатів випливає, що зона контакту, як правило, дуже мала, але в деяких випадках, у першу чергу в полі значних зсувних зусиль, вона може бути суттєвою. Видно також, що зменшення розмірів тіла призводить до збільшення КІН K_{20} за модулем та зменшення відносної довжини зони контакту λ_0 .

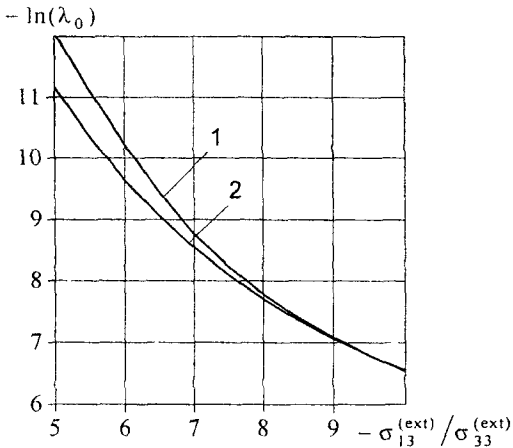


Рис. 2. Залежність відносної довжини зони контакту λ_0 від механічного навантаження

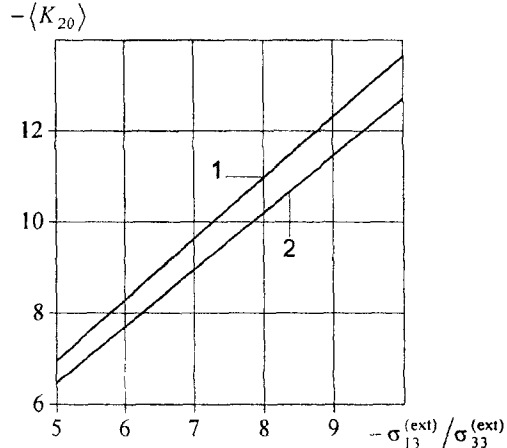


Рис. 3. Залежність КІН K_{20} від механічного навантаження

Запропоновану тут методику можна також застосовувати до композитних тіл довільної форми з міжфазними тріщинами шляхом перебудови скінченно-елементної сітки лише в областях, віддалених від області тріщини.

Бібліографічні посилання

1. **Говоруха В. Б.** О влиянии электрического потока на длину зоны контакта межфазной трещины в пьезоэлектрическом биматериале / В. Б. Говоруха, В. В. Лобода // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Сер. Механіка. – 2003. – Т. 2, вип. 7. – С. 20–30.
2. **Гринченко В. Т.** Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – К., 1989. – 279 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т.; Т. 5).
3. **Лобода В. В.** Об одном эффекте в теории межфазной трещины / В. В. Лобода // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. – 1989. – № 8. – С. 39–43.
4. **Острик В. І.** Тріщина на межі розділу півплощин з різних матеріалів / В. І. Острик, А. Ф. Улітко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 2. – С. 119–126.
5. **Симонов І. В.** Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений / И. В. Симонов // Механика композитных материалов. – 1985. – № 6. – С. 969–976.
6. **Черепанов Г. П.** Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. – М., 1974. – 640 с.
7. **Comninou М.** The interface crack / М. Comninou // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – V. 44. – P. 631–636.
8. **Fracture mechanics for piezoelectric ceramics** / Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett, J. R. Willis // J. Mech. Phys. Solids. – 1992. – V. 40. – P. 739–765.
9. **Herrmann К. Р.** Determination of fracture mechanical parameters at an interface crack tip / К. Р. Herrmann, V. V. Loboda // Arch. Appl. Mech. – 1998. – V. 66. – P. 227–236.
10. **Herrmann К. Р.** Fracture-mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimetals by consideration of various contact zone models / К. Р. Herrmann, V. V. Loboda // Arch. Appl. Mech. – 2000. – V. 70. – P. 127–143.

Надійшла до редколегії 07.04.10

УДК 539.3

Н. А. Гук

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ИДЕНТИФИКАЦИЯ УПРАВЛЯЮЩИХ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ ДЛЯ ОГРАНИЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Розроблено підхід, що дозволяє ідентифікувати функцію навантаження і керуючу силовою дією для систем, що знаходяться в умовах квазидинамічного (динамічного) навантаження за наявності обмежень на дійсні параметри пружно-деформованого стану. Задача формулюється як обернена. Для ідентифікації вектора параметрів застосовано декомпозиційний підхід.

Ключові слова: тонкостінна оболонка, функція навантаження, керуюча силова дія, обернена динамічна задача, узагальнений розв'язок, декомпозиційний підхід.

Разработан подход, позволяющий идентифицировать функцию нагрузки и управляющие силовые воздействия для систем, находящихся в условиях квазидинамического (динамического) нагружения при наличии ограничений на действительные параметры напряженно-деформированного состояния. Задача формулируется как обратная. Для идентификации вектора параметров используется декомпозиционный подход.

Ключевые слова: тонкостенная оболочка, функция нагрузки, управляющее силовое воздействие, обобщенное решение, обратная динамическая задача, декомпозиционный подход.

Function of external loading and control's load influences of kvazidynamic (dynamic) systems with limits on the parameters of the stress-strain state are determined. The problem is formulated as inverse problem, the decoupling approach for identification vector of parameters is used.

Key words: thin-walled shell, function of loading, managing power influence, generalized decision, inverse dynamic problem, decoupling approach.

Введение. В авиационной, космической технике, кораблестроении для оценки текущего состояния оболочечных элементов тонкостенных систем обычно используются измерения некоторых параметров деформирования, по которым восстанавливается действующая нагрузка [3]. Интерпретация получаемых результатов наблюдения за состоянием системы обычно производится путем решения задачи идентификации параметров фиксированной модели деформирования [3]. При этом предполагается, что параметры наблюдения не выходят за пределы границы области их определения [9].

Между тем, в экстремальных ситуациях возможен выход значений наблюдаемых параметров из области определения. Тогда необходима корректировка рассматриваемой модели действительности путем введения в рассмотрение управляющих воздействий.

Задачу можно трактовать как задачу о динамическом восстановлении неизвестных распределенных параметров в режиме реального времени на основании поступающих в процессе функционирования данных о системе. Подобного рода задачи для динамических систем изучались в различных постановках в теории управления [1], теории оценивания и идентификации [10], теории позиционных дифференциальных игр [5].

В случае, когда состояние объекта является частично неопределенным, предлагается либо сведение к прямой задаче теории позиционного управления [8], где по априорной информации находится приемлемая стратегия управления, либо создание дискретной динамической модели, основанной на знаниях [6], в которой непрерывная часть связана с управлением, а дискретная, представленная в виде базы правил, формулирует причинно-следственные связи и позволяет описывать как количественные, так и качественные параметры процесса. 3

В настоящей работе предлагается восстанавливать неизвестную функцию нагрузки и управляющее воздействие из решения обратной динамической задачи, используя результат восстановления по ходу процесса деформирования для его контроля.

Постановка задачи. Рассматривается элемент тонкостенной оболочки, находящейся под действием внешней нагрузки $P(X, t)$. В процессе функционирования измеряются значения компонент вектор-функции $\bar{\sigma}(X, t)$, характеризующей напряженно-деформированное состояние оболочки, $\sigma_n(X, t) = \{\varepsilon_{ij}(X, t), \chi_{ij}(X, t)\}^T$, $i, j = 1, 2$, здесь $\varepsilon_{ij}(X, t)$, $\chi_{ij}(X, t)$ – деформации растяжения и изгиба соответственно. При этом граница области определения вектор-функции $\bar{\sigma}(X, t)$ задана: $\bar{\sigma}(X, t) \in \bar{\sigma}$ и σ_n ограничена $0 \leq \sigma_n \leq \sigma^*$.

Вектор-функция внешней нагрузки $P(X, t)$ может быть определена из решения обратной граничной задачи теории оболочек [3]. В том случае, когда измеренные значения $\sigma_n(X, t)$ превосходят заданные σ^* , возможно корректировать напряженно-деформированное состояние путем введения управляющего внешнего воздействия $U(X, t)$.

Тогда задача может быть сформулирована следующим образом: для тонкостенной оболочки, находящейся под действием нагрузки $P(X, t)$, идентифицированной по результатам измерений, и для которой измеренные значения $\sigma_n(X, t)$ превысили σ^* , определить управляющую нагрузку $U(X, t)$, обеспечивающую

$$\int_{\Omega} (\sigma_{расч}(P(X, t), U(X, t)) - \sigma^*)^2 d\Omega \Rightarrow \min_U, \quad (1)$$

где Ω – область, занимаемая оболочкой; σ^* – заданный вектор значений функции $\sigma(X, t)$; $\sigma_{расч}(P(X, t), U(X, t))$ – значение вектор-функции $\sigma(X, t)$, вычисленной для идентифицированной нагрузки $P(X, t) = P_0(X, t) + U(X, t)$; $P_0(X, t)$ – номинальная нагрузка.

В начальный момент времени при $t = 0$ $P(X, 0) = P_0(X, 0)$; $U(X, 0) = 0$.

Математическая модель. Математическая модель задачи управления может быть сформулирована следующим образом.

На области $\Omega = \{X \mid X = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 : X \in \Omega\}$, где $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ – вектор пространственных координат, задан элемент цилиндрической оболочки. Поведение тонкостенной системы, находящейся под действием нагрузки, описывается обобщенным решением нелинейной задачи деформирования [2]:

$$(w, \varphi)_{\Psi_K} = \int_{\Omega} [T^{ij} (B_{ij} \varphi - w_{,x_i} \varphi_{,x_j}) + q \varphi] d\Omega + \int_{\Gamma_c} \tilde{M}_{ij} \varphi_{,x_j} ds + \int_{\Gamma_2} \tilde{Q}_{ij} \varphi ds, \quad (2)$$

$$(\omega(w_1, w_2) \cdot \kappa(\varphi_1, \varphi_2))_{\Psi_l} = \int_{\Gamma_e} \tilde{T}_{ij} \varphi_i ds + \int_{\Gamma_p} \tilde{T}_{ij} \varphi_j ds +$$

$$+ \iint_{\Omega} \left[B_{kl} w - \frac{1}{2} w_{,x_k} w_{,x_l} \right] D_p^{ijkl} \nabla_i \varphi_j + (P_i + U_i) \varphi_i \Big] d\Omega, \quad (3)$$

где $W = (w_1, w_2, w)$ – полный вектор перемещений точки срединной поверхности в направлениях $\{x_1, x_2, x_3\}$; $\omega(w_1, w_2)$ – вектор тангенциальных перемещений точки срединной поверхности; B_{ij}, B_{kl} – кривизны срединной поверхности; T^ij – усилия, возникающие в конструкции от нагружения; $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi)$ – некоторая вектор-функция; $\tilde{M}_{ii}, \tilde{Q}_{ii}, \tilde{T}_{ij}, \tilde{T}_{ij}, P_1, P_2, q$ – действующие нагрузки; U_i – управляющее воздействие; $\Gamma_c, \Gamma_p, \Gamma_z, \Gamma_e$ – участки граничного контура Γ ; $i, j, k, l = 1, 2$; Ψ_κ, Ψ_t – специальные функциональные пространства. Функции задачи являются зависящими от времени t . Принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. В качестве граничных условий считаем выполненным условие $w|_{\Gamma} = 0$, остальные условия на Γ считаются естественными [2].

Принято, что нагрузка, действующая на систему, изменяется медленно, т. е. время является параметром процесса деформирования.

Весь временной диапазон $0 \leq t \leq t^*$ процесса деформирования разобьем на этапы $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, $n = 0, N$. Для каждого дискретного момента времени t_n известен вектор наблюдений $\sigma_n(X, t_n)$, который характеризует напряженно-деформированное состояние оболочки. Тогда задача определения функции нагрузки $P(X, t)$ в момент времени t_n по известному отклику системы формулируется как вариационная [3].

Вектор неизвестных параметров нагрузки определяется из условия минимума функционала-невязки

$$\min J = \int_{\Omega} (\sigma_p(X, t_n) - \sigma_n(X, t_n))^2 d\Omega, \quad (4)$$

где $\sigma_n(X, t_n)$ – наблюдаемая в момент времени t_n вектор-функция состояния; $\sigma_p(X, t_n)$ – расчетная вектор-функция, характеризующая деформированное состояние в момент времени t_n вызванное действием нагрузки $P(X, t_n)$. Вектор $\sigma_p(X, t_n)$ формируется для каждого момента времени t_n из решения прямой задачи (2), (3).

На каждом временном интервале необходимо выполнять проверку условия $\sigma_n(X, t_n) < \sigma^*$. В том случае, когда условие не выполняется необходимо для временного интервала $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ определить управляющее внешнее воздействие $U(X, t_n)$, корректирующее нагрузку.

Предполагается, что для каждого измеримого управления $U(X, t_n)$, определенного на интервале $t_n \leq t \leq t_{n+1}$, для различных номинальных и полученных в результате управления состояний векторы наблюдений различны, т. е. система **наблюдасма**.

Управляющее внешнее воздействие $U(X, t_n)$ определяется так, чтобы

$$\min J_1 = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega} (\sigma_{расч}(P(X,t), U(X,t)) - \sigma^*)^2 d\Omega dt \Rightarrow \min_U J_1 \quad (5)$$

при выполнении условия (4), где σ^* – заданный вектор значений функции $\sigma(X,t)$; $\sigma_{расч}(P(X,t), U(X,t))$ – расчетная вектор-функция $\sigma(X,t)$, характеризующая деформированное состояние для идентифицированной нагрузки $P(X,t) = P_0(X,t) + U(X,t)$.

Так как информация о состоянии системы поступает в моменты времени (t_1, t_2, \dots, t_N) , то сформулированную задачу можно рассматривать как дискретную квазидинамическую систему, состоящую из N условных подсистем, каждая n -ая из которых изменяется во времени t на интервале $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ за счет изменения нагрузки $P(X,t)$.

Принимается, что момент времени t_n является начальным моментом времени для $(n+1)$ -ой подсистемы. Решение задачи (5) позволяет синтезировать управление $U(X, t_n)$ на интервале $t_n \leq t \leq t_{n+1}$.

Для идентификации функции нагрузки и управляющего воздействия можно сформулировать следующую последовательность действий:

1. Идентифицировать нагрузку $P(X, t_n)$ для момента времени t_n из решения вариационной задачи

$$\min J = \int_{\Omega} (\sigma_P(X, t_n) - \sigma_n(X, t_n))^2 d\Omega \Rightarrow \min_P J; \quad (6)$$

2. Выполнить проверку условия $\sigma_n(X, t_n) < \sigma^*$, если истина, то $n := n + 1$ и переход к п. 1, иначе переход к п. 3;

3. Определить необходимое управляющее воздействие $U(X, t_{n+1})$ из решения вариационной задачи

$$\min J_1 = \int_{\Omega} (\sigma_{расч}(P(X, t_n), U(X, t_{n+1})) - \sigma^*)^2 d\Omega \Rightarrow \min_U J_1; \quad (7)$$

4. Сформировать вектор-функцию нагрузки $P(X, t_{n+1}) = P_0(X, t_n) + U(X, t_{n+1})$;
5. Определить напряженно-деформированное состояние $\sigma_P(X, t_{n+1})$ от оказанного внешнего воздействия $P(X, t_{n+1})$ из решения прямой задачи (2), (3);
6. Выполнить проверку условия $\sigma_P(X, t_{n+1}) > \sigma^*$, если истина, то $n := n + 1$ и переход к п. 3, иначе $P_0(X, t_{n+2}) = P(X, t_{n+1}) - U(X, t_{n+1})$, $n := n + 1$ и переход к п. 5.

Формирование вектор-функции управления $U(X, t)$ происходит за время $\tau \ll (t_{n+1} - t_n)$, где τ – суммарное время работы алгоритма по определению управления $U(X, t)$ и самого процесса управления – создания нагрузки на интервале $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ с учетом корректирующего управления $U(X, t)$.

Метод решения. Для определения неизвестной функции нагрузки $P(X, t)$ в момент времени t_n используется конечно-элементная аппроксимация задачи (2),

(3). Применение метода конечных элементов (МКЭ) предполагает дискретизацию всех неизвестных функций и их последующую аппроксимацию. Для дискретизации функций задачи вводятся сетки:

1) сетка $X_k, k = \overline{1, K}$, для описания вектор-функций $W(X_k, t_n) = \{W_k\}$, $\Phi = \{\Phi_k\}$ и $\sigma(X_k, t_n) = \{\sigma_k\}$, $\sigma_{расч}(X_k, t_n) = \{\sigma_{расч_k}\}$, где W_k, Φ_k и $\sigma_{P_k}, \sigma_{расч_k}$ – узловые значения соответствующих функций определенные в момент времени t_n ;

2) сетка $X_v, v = \overline{1, V}$, в узлах которой задаются значения вектор-функций наблюдения $\sigma_n(X_v, t_n) = \{\sigma_{nv}\}$ в момент времени t_n и $\sigma^*(X_v) = \{\sigma^*_v\}$;

3) сетка $X_s, s = \overline{1, S}$ (может быть неравномерной), в узлах которой определяются значения неизвестных функций нагрузки $P(X_s, t_n) = \{P_s\}$ и управляющих воздействий $U(X_s, t_n) = \{U_s\}$.

Представим рассматриваемую систему в виде ансамбля конечных элементов.

Неизвестная функция $W(X, t_n)$ на элементе e задается при помощи аппроксимации через ее узловые значения на сетке X_k , функция Φ аналогично с узловыми значениями равными единице [4]:

$$W^e(X, t_n) = \sum_{k=1}^L W_k(t_n) \Psi_k(X), \quad \varphi_1^e = \sum_{i=1}^L \Psi_i(X), \quad \varphi_2^e = \sum_{j=1}^L \Psi_j(X),$$

$$\dots, \quad \varphi^e = \sum_{q=1}^L \Psi_q(X), \quad \dots$$

где $\Psi(X)$ – функций формы, L – число узлов элемента.

После выполнения соответствующей процедуры интегрирования и суммирования матриц элементов получаем систему алгебраических уравнений в виде:

$$K(W) = R(P), \tag{8}$$

где K – нелинейная матрица жесткости; $W = \{W_k\}$ – вектор узловых перемещений; $R(P) = \{R_s\}$ – проекция вектора $P = \{P_s\}$ на функции формы.

Решение системы уравнений (8) для каждого момента времени t_n дает возможность сформировать вектор значений σ_p или $\sigma_{расч}$ в узлах сетки $X_v, v = \overline{1, V}$ в виде $\sigma_{p_0} = \{\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}\}' = \{\sigma_{p_0}\}$ или $\sigma_{расч} = \{\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}\}' = \{\sigma_{расч}\}$. Совместно с вектором результатов наблюдений $\sigma_n(X_v) = \{\sigma_{nv}\}$ или заданным вектором $\sigma^*(X_v) = \{\sigma^*_v\}$ это позволяет построить векторы невязок, необходимые для вычисления функционалов (6), (7).

Функция управления $U(X, t)$ на интервале $[0, t^*]$ синтезируется в виде суммы кусочно-постоянных функций времени в виде:

$$U(X, t) = \sum_{i=1}^N U_n(X) [H(t - t_n) - H(t - t_{n+1})].$$

Для определения неизвестных векторов $P(X, t)$ и $U(X, t)$ при наблюдаемом векторе σ_n и заданном σ^* соответственно используется дискретная формулировка условий (6), (7) в виде:

$$P_0 = \arg \min_P (\sigma_P - \sigma_n)^T (\sigma_P - \sigma_n), \quad (9)$$

$$U = \arg \min_U (\sigma_{расч} - \sigma^*)^T (\sigma_{расч} - \sigma^*). \quad (10)$$

Для выполнения численной минимизации сформулированных функционалов будем использовать метод Ньютона. Процедура определения неизвестного вектора параметров $P(X, t)$ аналогична описанной в [7], а итерационный процесс для определения вектора $U(X, t)$ будет иметь вид:

$$U^{(l+1)} = U^{(l)} - A^{-1} (U^{(l)}) \varepsilon(U^{(l)}), \quad (11)$$

где $A(U^{(l)})$ – матрица производных функции невязки $\varepsilon(U^{(l)}) = (\sigma(U^{(l)}) - \sigma_n)$ по компонентам вектора-аргумента; l – номер шага итерационного процесса. При численной реализации матрица заменяется разностным аналогом, такая замена не нарушает сходимости процесса метода Ньютона.

Основными проблемами, возникающими при решении задачи, являются ее плохая обусловленность и высокая размерность. Для устранения этих проблем выполняется декомпозиция вектора неизвестных параметров задачи в соответствии с вводимым критерием и последующее решение обратной задачи на основе параллельных алгоритмов.

Неизвестный вектор приращений параметров ΔU представляется в виде двух независимых векторов ΔU^1 и ΔU^2 , при этом вводится предположение, что в вектор ΔU^1 помещаются наиболее информативные компоненты вектора ΔU , такие, что выполняется условие $\|\Delta U - \Delta U^1\|_{\Delta U^1 \in \Delta U} \rightarrow \min$. Функции u_j^d ($j = \overline{1, M}$, $d = 1, 2$) характеризуют принадлежность компонент вектора ΔU векторам ΔU^1 , ΔU^2 и имеют вид:

$$\begin{aligned} u_{k_1}^1(X) &= \delta(X - X_{k_1}); & k_1 \in I^1, & I^1 = \{k_{p_1}, \dots, k_{p_{v_1}}\} \\ u_{k_2}^2(X) &= \delta(X - X_{k_2}); & k_2 \in I^2, & I^2 = \{k_{i_1}, \dots, k_{i_{v_2}}\}; & I^1 \cap I^2 = \emptyset, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\delta(X - X_{k_p})$ – функция Дирака; M – общее число компонент вектора параметров, $M_1 + M_2 = M$; M_1, M_2 – заданное число ненулевых компонент векторов ΔU^1 , ΔU^2 соответственно.

Векторы приращений ΔU^1 , ΔU^2 определяются независимо друг от друга в виде двух параллельных алгоритмов:

$$\Delta U^1 = \int_{\Omega} Q_1(X) \varepsilon(U) d\Omega; \quad (13)$$

$$\Delta U^2 = \int_{\Omega} Q_2(X) \varepsilon(U) d\Omega, \quad (14)$$

где $Q_i(X) = [Q_{mg} \cdot \delta(X), m=1, M_i, g=1, G]$, $i=1,2$ – матрицы, подлежащие определению из условий несмещенности и инвариантности оценивания вектора параметров; G – количество точек измерений.

Анализируя окончательные выражения для вычисления компонент вектора приращений параметров ΔU^i , $i=1,2$:

$$[\Delta U^i]_{M_i \times 1} = [F_{ij} Z_i (R_i' F_{ij} Z_i)^{-1}]_{M_i \times G} [\varepsilon]_{G \times 1}, \quad (15)$$

где F_{ij} , Z_i , R_i – матрицы, полученные в результате преобразований, можно сделать вывод, что при выполнении вычислений производится обращение матриц размера $M_i \times M_i$, $i=1,2$, в отличие от способа сведения задачи к системе нормальных уравнений, где выполняется обращение матриц размера $M \times M$. При высокой размерности вектора неизвестных параметров, а следовательно, и размерности матриц и их плохой обусловленности предлагаемый подход является более эффективным в вычислительном плане. Кроме того, решение (15) позволяет выделить доминирующие компоненты вектора параметров при его идентификации.

Результаты вычислительного эксперимента. Предложенный подход был применен для решения задачи идентификации функции внешней нагрузки $P(X,t)$ и управляющего внешнего воздействия $U(X,t)$. Рассматривалась цилиндрическая оболочка ($L/R=4$, $R/h=200$, L , R , h – длина, радиус, толщина оболочки, $E=2 \cdot 10^6$ Н/м²) закрепленная по торцам и находящаяся под действием неравномерно распределенного внешнего давления. Модель конструкции задавалась в конечноэлементной форме.

В результате решения прямой задачи на интервале $[0, t^*]$ с заранее заданным видом функции внешнего воздействия

$$P(t) = \lambda [H(\varphi - \varphi_0) - H(-\varphi + \varphi_0)] \sin \frac{\pi t}{t^*}$$

(нагружение осуществляется внешним давлением $P(t)$, распределенным по полосе с углом раствора $\varphi_0 = \pi/6$; φ – угловая координата; λ – параметр нагружения) определялось напряженно-деформированное состояние оболочки, а полученные значения деформации растяжения и изгиба конструкции в узлах сетки были использованы в качестве векторов значений результатов наблюдений $\sigma_n(X, t_p)$ для моментов времени $t \in [0, t^*]$. Значения σ^* также были заданы в узлах сетки и для рассматриваемой оболочки составляли $\sigma^* = 1500 \text{ кгс} / \text{см}^2$.

Неизвестные функции внешней нагрузки и управляющих воздействий описываются соответствующими векторами значений, заданными в узлах конечно элементной сетки, и определяются для каждого временного интервала в итерационном процессе (11).

Весь временной интервал $[0, t^*]$ процесса деформирования разобьем на этапы

$t_{n+1} = t_n + \Delta t$, $n = \overline{0, N}$, $N = 6$. Процедура ідентифікації функції зовнішньої навантаження $P(X, t)$ виконується для моментів часу t_n , $n = \overline{0, N}$. В якості початкового наближення при $t = 0$ вибиралось розподілення тиску в відповідності з законом $P(X, 0) = \lambda(0.5 + 0.5 \cos \varphi)^2$ (рис. 1, тонка пунктирна лінія), для наступних моментів часу в якості початкового наближення використовувався результат ідентифікації функції навантаження з попереднього часового кроку.

На рис. 1 представлено результат ідентифікації функції $P(X, t)$ (сплошна жирна лінія) в момент часу $t_3 = t^* / 2$, дійсне навантаження (сплошна тонка лінія) відповідає зовнішньому тиску, розподіленому по полосі з кутом розвора $\varphi = 30^\circ$. Максимальна відносна похибка ідентифікованих значень функції зовнішнього тиску не перевищує 4 %.

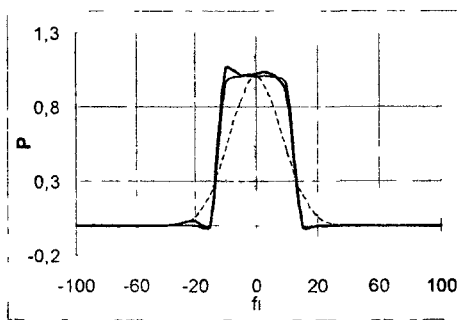


Рис. 1. Результат ідентифікації функції навантаження $P(X, t)$.

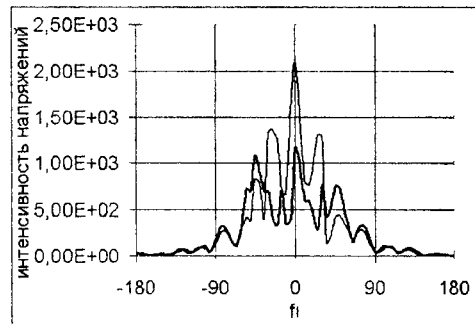


Рис. 2. Розподілення напружень в поперечному сеченні оболонки.

Для кожного моменту часу t_n виконується перевірка умов, накладуваних на функцію $\sigma(X, t_p)$. На рис. 2 представлено розподілення напружень в елементах оболонки, розташованих в поперечному сеченні (сплошна тонка лінія), викликане дією ідентифікованого навантаження $P(X, t)$ в момент часу $t_3 = t^* / 2$. Видно, що в області дії навантаження значення напружень перевищують задані значення σ^* .

В відповідності з запропонованим підходом на інтервалі $t_3 \leq t \leq t_4$ необхідно визначити керуюче впливання.

На рис. 3 (сплошна жирна лінія) представлено результат ідентифікації функції навантаження з коректуючим керуючим впливанням $U(X, t)$. Отримане в результаті ідентифікації керуюче впливання разом з тиском $P(X, t_3)$ (на рис. 3 сплошна тонка лінія), визначеним в момент часу $t_3 = t^* / 2$, змінює характер розподілення навантаження, область, що знаходиться під дією зовнішнього тиску збільшується. Розподілення напружень в поперечному сеченні оболонки, відповідне ідентифікованому впливанню представлено на рис. 2 (сплошна жирна лінія). В результаті керування зовнішнім впливанням забезпечується виконання обмеження на значення напружень, крім того, виникаючі в конструкції напруження мають суттєво меншу амплітуду.

Для наступного часового кроку t_5 обмеження на значення напружень виконуються, відповідно, керуюче впливання відключається. На рис. 4 представлено вигляд функції керування.

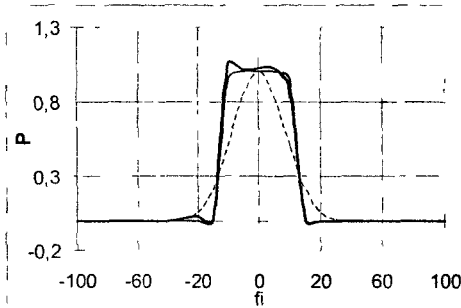


Рис. 3. Результат идентификации функции нагрузки $P(X,t)$ с корректирующим управляющим воздействием $U(X,t)$

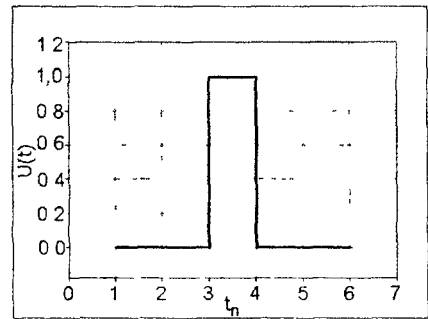


Рис. 4. Вид функции управления

Выводы. Полученные результаты показывают, что предложенный подход позволяет идентифицировать функцию нагружения и управляющие воздействия для систем, находящихся в условиях квазидинамического (динамического) нагружения при наличии ограничений на действительные параметры напряженно-деформированного состояния; декомпозиция вектора параметров позволяет снизить размерность матриц, подлежащих обращению, что приводит к формированию устойчивых оценок вектора параметров; применение управляющих воздействий обеспечивает пребывание значений наблюдаемых параметров в области определения.

Библиографические ссылки

1. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. – М., 1975. – 568 с.
2. Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И. И. Ворович – М., 1989. – 373 с.
3. Гук Н. А. Идентификация внешних воздействий при деформировании тонкостенных оболочек / Н. А. Гук // Theoretical Foundations of Civil Engineering. Polish-Ukrainian-Lithuanian Transaction, Warsaw. – V. 17. – 2010. P. .
4. Зенкевич О. С. Метод конечных элементов в технике / О. С. Зенкевич – М., 1975. – 541 с.
5. Красовский Н. Н. Управление динамической системой / Н. Н. Красовский. – М., 1985. – 520 с.
6. Лебедева Т. Г. Архитектура и управляемость дискретных динамических систем, основанных на знаниях / Т. Г. Лебедева, Г. С. Осипов // Известия Академии наук. Теория и системы управления. – М., 2000. – № 5. – С. 37–43.
7. Ободан Н. И. Декомпозиционный подход к решению обратных задач деформирования тонкостенных оболочек и пластин / Н. И. Ободан, Н. А. Гук // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка. – 2009. – Т. 17. – № 5. – С. 43-53.
8. Осипов Ю. С. Позиционное управление в параболических системах / Ю. С. Осипов // Прикладная математика и механика. – 1977. – Т. 41. – № 2. – С. 195 – 201.
9. Тихонов А. Н. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А. Н. Тихонов, В. Д. Кальнер, В. Б. Гласко. – М., 1990. – 263 с.
10. Фомин В. Н. Адаптивное управление динамическими объектами / В. Н. Фомин, А. Л. Фрадков, В. А. Якубович. – М., 1981. – 447 с.

Надійшла до редколеги 16 09 10

УДК 539.3

А. И. Маневич, В. Ю. Власова

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара***КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ БАЛКИ
С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ**

Досліджено задачу про вільні коливання консольної балки з грузом на кінці, що обертається навколо вісі, перпендикулярної вісі балки. Проведено порівняння точного розв'язку (в рамках балочної моделі) з наближеним розв'язком Я. Г. Пановко. Показано, що використання статичного прогину для визначення жорсткості балки, що широко застосовується в енергетичних методах, може призводити до великої похибки і, зокрема, не дає змоги кількісно визначити вплив обертання на власну частоту коливань. Виконано параметричний аналіз розв'язку, в тому числі для вищих форм коливань.

Ключові слова: коливання балок, що обертаються з масами, енергетичні методи

Исследована задача о свободных колебаниях консольной балки с грузом на конце, которая вращается вокруг оси, перпендикулярной оси балки. Выполнено сравнение точного решения (в рамках балочной модели) с приближенным решением Я. Г. Пановко. Показано, что использование статического прогиба для определения жесткости балки, которое используется в приближенных методах, может привести к большой погрешности и, в частности, не дает возможности количественно определить влияние вращения на собственную частоту колебаний. Выполнен параметрический анализ решения, в том числе для высших форм колебаний.

Ключевые слова: колебания вращающихся балок с массами, энергетические методы.

The free oscillation problem for a console beam with a mass on the end, which rotates about the axis perpendicular to the beam axis is studied. Two solutions are compared – the exact solution (within framework of the beam model) and the approximate solution by Y. G. Panovko. It is shown that the use of the static deflection for determination of the beam integral stiffness, which is widely employed in approximate methods, can lead to a large error and, in particular, does not allow to estimate quantitatively the effect of rotation on the natural frequency of vibration. The parametric analysis of the solution, including higher oscillation modes, is carried out.

Key words: oscillations of rotating beams with masses, energy methods

Введение. Задача о колебаниях вращающихся балок исследовалась применительно к различным техническим системам (диски и лопатки турбин, компрессоров и др.) в течение нескольких десятилетий. При этом широко использовались приближенные решения, основанные преимущественно на энергетических методах. Большие угловые скорости вращения существенно влияют на собственные частоты и другие характеристики колебаний.

Данная работа выполнена в связи с решением задачи о свободных изгибных колебаниях консольной балки с грузом на конце, вращающейся с угловой скоростью Ω относительно оси, перпендикулярной оси балки, приведенным в [3]. Авторы [3] обращают внимание на то, что влияние вращения на колебания может быть различным для двух возможных случаев: (А) колебания происходят в плоскости, перпендикулярной оси вращения и (Б) колебания происходят в плоскости, проходящей через ось вращения (рис. 1). В обоих случаях при колебаниях действует центробежная сила инерции груза N , перпендикулярная оси вращения, но направление силы по отношению к оси балки для этих двух возможных случаев различно, как показано на рис. 1.

В первом случае сила N поворачивается при изгибных колебаниях и проходит через начальное сечение консоли, во втором случае сила N имеет неизменное

направление Для этих двух случаев в [3] определена первая собственная частота колебаний балки и показано, что вращение заметно увеличивает собственную частоту, причём во втором случае это влияние больше, чем в первом.

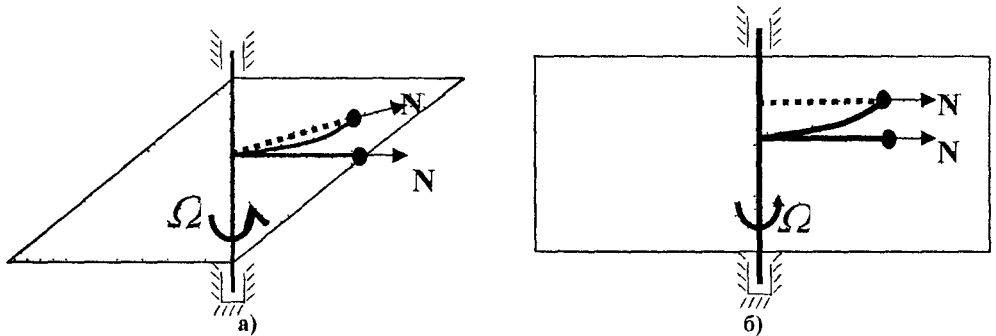


Рис. 1. Колебания вращающейся балки в различных плоскостях

Балка в [3] рассматривается как система с одной степенью свободы (линейный осциллятор) Жёсткость этого осциллятора находится из решения статической задачи об изгибе балки силой на крае (с учётом центробежной силы инерции груза) Иными словами, при определении формы колебаний учитывается зависимость продольной (центробежной) силы в балке от угловой скорости вращения, но поперечная сила на крае принимается заданной. Однако действительная форма колебаний (определяющая интегральную жёсткость балки) определяется поперечными силами инерции, зависящими от частоты колебаний и возрастающими с увеличением угловой скорости вращения. Отметим также, что масса самой балки в решении [3] не может быть учтена, учитывается только масса груза на крае.

Возникает вопрос, в какой мере упрощения, принятые в [3], влияют на результаты анализа. Ответ на этот вопрос имеет общее значение для вращающихся тел, выходящее за рамки данной конкретной задачи, так как подход, основанный на замене действительной формы колебаний статическим прогибом от некоторой нагрузки, широко распространён.

В данной работе проанализировано точное решение данной задачи (в рамках линейной теории балок), и показано, что использование статического прогиба для определения жёсткости без учета зависимости поперечных сил инерции от угловой скорости вращения приводит к недопустимо большой погрешности решения. Выполнен параметрический анализ решения, включая высшие формы колебаний, который нельзя провести в рамках приближённого решения

Постановка задачи. Рассматривается консольная балка с грузом массы m на конце, вращающаяся относительно оси, проходящей через левый конец балки. Определяется зависимость собственной частоты линейных колебаний от угловой скорости вращения для двух указанных положений плоскости колебаний по отношению к оси вращения (случаи А и Б). При определении центробежных сил учитывается сила инерции груза, не пренебрегается центробежными силами, возникающими в самой балке (такая постановка задачи соответствует валу с диском большой массы).

Точное решение. Будем исходить из известного дифференциального уравнения колебаний балки с учётом растягивающей силы N (в данном случае равной центробежной силе груза $N = m\Omega^2 l$)

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Решение уравнения (1) записывается в виде

$$y(x,t) = X(x) \sin(\omega_0 t),$$

$$X(x) = C_1 \sin k_2 x + C_2 \cos k_2 x + C_3 \operatorname{sh} k_1 x + C_4 \operatorname{ch} k_1 x, \quad (2)$$

где

$$k_1^2 = \frac{\sqrt{N^2 + 4EI\rho A\omega_0^2} - N}{2EI}, \quad k_2^2 = \frac{\sqrt{N^2 + 4EI\rho A\omega_0^2} + N}{2EI}. \quad (3)$$

Два рассмотренных выше случая отличаются граничными условиями, а именно, граничным условием по поперечной силе на краю. Поперечная сила складывается из относительной силы инерции груза (одинаковой в обоих случаях), и проекции центробежной силы (т. е. переносной силы инерции) на плоскость поперечного сечения.

В случае А (рис.2) центробежная сила направлена по секущей, проходящей через начальную и конечную точки балки, и проекция зависит от разности углов между касательной и секущей в конечном сечении балки; в случае Б центробежная сила не меняет своего направления и остаётся параллельной первоначальной оси балки, тогда проекция зависит только от угла наклона касательной

Граничные условия по поперечной силе для двух случаев имеют вид.

$$A. \quad EIy'''(l) = my(l) + m\Omega^2 l [y'(l) - y(l)/l]. \quad (4)$$

$$B. \quad EIy'''(l) = m\dot{y}(l) + m\Omega^2 ly'(l).$$

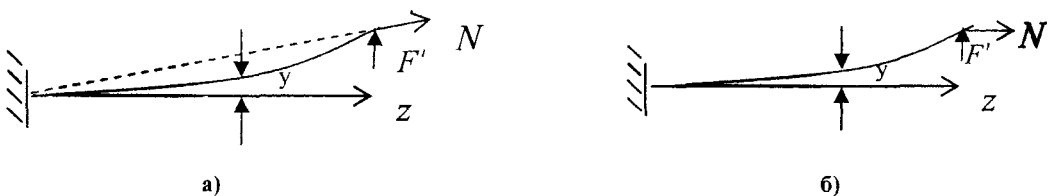


Рис. 2. К формулировке граничных условий в случаях А и Б

(N – центробежная сила инерции груза, $F' = -m\ddot{y}(l)$ – относительная сила инерции груза на краю)

Остальные ГУ очевидны: $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(l) = 0$ (если не учитывается момент сил инерции при вращении груза). Граничные условия приводят к четырём однородным уравнениям относительно произвольных постоянных, входящих в общее решение (2).

Условие существования нетривиального решения этой системы уравнений приводит к частотному уравнению. Для случаев А и Б частотные уравнения имеют следующий вид :

А:

$$-\frac{\bar{k}_2}{3} \left[\bar{k}_2^4 + \bar{k}_1^4 + 6\mu\bar{\omega}_0^2 \cos \bar{k}_2 \operatorname{ch} \bar{k}_1 + 3\bar{\Omega}^2 \bar{k}_1 \bar{k}_2 \sin \bar{k}_2 \operatorname{sh} \bar{k}_1 \right] + \bar{\omega}_0^2 \left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 \right) \left[-\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1} \operatorname{sh} \bar{k}_1 \cos \bar{k}_2 + \operatorname{ch} \bar{k}_1 \sin \bar{k}_2 \right] - \bar{\Omega}^2 \left[\bar{k}_2 \left(3\bar{\Omega}^2 - 3\bar{\Omega}^2 \cos \bar{k}_2 \operatorname{ch} \bar{k}_1 + 2\bar{k}_1 \bar{k}_2 \sin \bar{k}_2 \operatorname{sh} \bar{k}_1 \right) + \left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 \right) \left(-\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1} \operatorname{sh} \bar{k}_1 \cos \bar{k}_2 + \operatorname{ch} \bar{k}_1 \sin \bar{k}_2 \right) \right] = 0, \quad (5)$$

Б:

$$-\frac{\bar{k}_2}{3} \left[\bar{k}_2^4 + \bar{k}_1^4 + 6\mu\bar{\omega}_0^2 \cos \bar{k}_2 \operatorname{ch} \bar{k}_1 + 3\bar{\Omega}^2 \bar{k}_1 \bar{k}_2 \sin \bar{k}_2 \operatorname{sh} \bar{k}_1 \right] + \bar{\omega}_0^2 \left(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2 \right) \left[-\frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1} \operatorname{sh} \bar{k}_1 \cos \bar{k}_2 + \operatorname{ch} \bar{k}_1 \sin \bar{k}_2 \right] - \bar{\Omega}^2 \bar{k}_2 \left(3\bar{\Omega}^2 - 3\bar{\Omega}^2 \cos \bar{k}_2 \operatorname{ch} \bar{k}_1 + 2\bar{k}_1 \bar{k}_2 \sin \bar{k}_2 \operatorname{sh} \bar{k}_1 \right) = 0,$$

где $\bar{k}_i = k_i l$ ($i=1, 2$). Эти уравнения решались численно в пакете Maple-10.

Численный анализ решения. Вначале были выполнены тестовые расчёты.

Для известных предельных случаев балки без вращения получились точные значения собственных частот. Затем рассмотрен случай вращающейся балки, но с пренебрежимо малой массой по сравнению с массой груза ($\mu = 0$), чтобы можно было сравнить с приближённым решением Я. Г. Пановко.

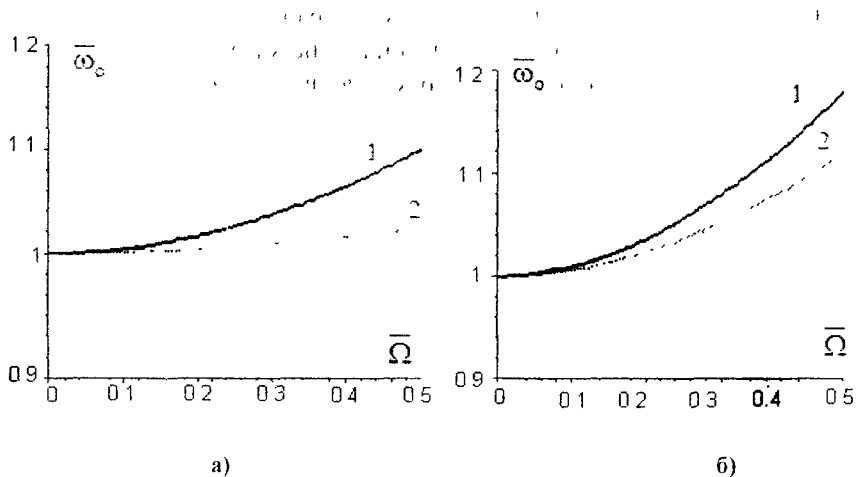


Рис. 3. Зависимость собственной частоты от угловой скорости вращения в точном и приближённых решениях, для $\mu = 0$, случаи А и Б:
1 – точное решение, 2 – решение Я. Г. Пановко

На рис. 3, а и б, сопоставлены кривые, построенные по точному решению, с приближённым решением, для обоих случаев А и Б. Оба решения дают один и тот же качественный результат – собственная частота растёт с увеличением угловой скорости вращения, но количественно эффект совершенно различный. Влияние центробежной силы на собственную частоту оказывается значительно большим, чем по приближенному решению.

Например, в случае В для $\bar{\Omega} = 0.5$ согласно решению Я. Г. Пановко вращение увеличивает собственную частоту колебаний на 14 %, а точное решение даёт 20 %. Таким образом, количественно невозможно оценить этот эффект, основываясь на приближенном решении.

Для того, чтобы изучить причины неожиданно большой погрешности приближённого решения [3], проанализируем формы колебаний в точном и приближённом решениях. На рис. 4, а построены функции статического прогиба балки для случая А, при различных значениях центробежной силы, согласно решению [3]. Точные собственные формы колебаний для различных угловых скоростей вращения балки, рассчитанные по выражению (6), показаны на рис. 4, б (случай А, $\mu = 0$).

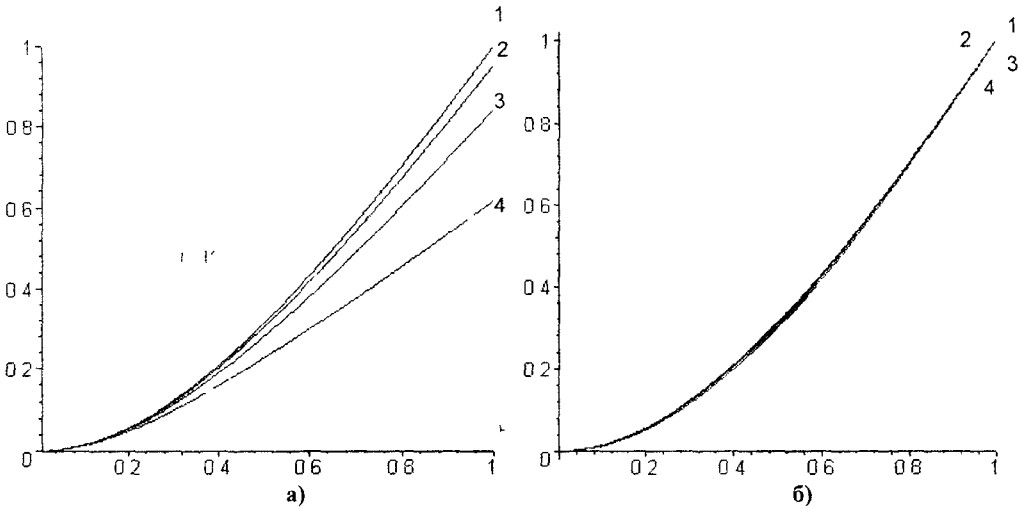


Рис. 4. Изменение прогиба по длине балки для разных значений угловой скорости вращения балки, по решению [3] (а) и по точному решению в случае А (б):

1 – $\bar{\Omega} = 0$, 2 – $\bar{\Omega} = 0.25$, 3 – $\bar{\Omega} = 0.5$, 4 – $\bar{\Omega} = 0.75$

В отличие от функций статического прогиба с разными значениями центробежных сил, показанных на рис. 4, а, точные кривые на рис. 4, б практически сливаются в одну кривую для всех угловых скоростей вращения. (Аналогичные результаты получены и для случая Б, когда колебания происходят в плоскости, проходящей через ось вращения. Также следует заметить, что для обоих случаев форма колебаний практически не зависит от изменения параметра масс μ).

Таким образом, в точном решении для случаев А и Б форма колебаний практически не изменяется при изменении угловой скорости вращения балки Ω , в то время, как в решении Я. Г. Пановко эта форма заметно изменяется при увеличении Ω , становясь более «спрямлённой». Очевидно, что это отличие является принципиальным, и именно оно приводит к большому расхождению между приближённым и точным решениями. На первый взгляд, «спрямление» формы колебаний при увеличении угловой скорости вращения Ω кажется естественным, так как увеличивается центробежная сила инерции груза. Однако нужно учесть, что собственная частота колебаний также возрастает с увеличением Ω . Это приводит к увеличению связанной с собственными колебаниями относительной силы инерции (пропорциональной квадрату частоты). Действительная форма колебаний определяется соотношением между относительными силами

инерции балки и груза (которые действуют в поперечном направлении и стремятся сделать форму колебаний более искривлённой), и переносной силой инерции – центробежной силой груза (которая направлена преимущественно вдоль оси балки и стремится «спрямить» форму колебаний). Как показывают расчёты для точного решения, совместное действие этих факторов оставляет действительную форму колебаний неизменной (оба этих фактора оказываются пропорциональными Ω^2).

В приближённом решении Я. Г. Пановко изогнутая ось балки определяется при одной и той же постоянной поперечной силе. Это решение учитывает переносную (центробежную) силу инерции и её возрастание с угловой скоростью Ω , но не учитывает одновременного возрастания относительных сил инерции. В итоге баланс этих двух сил оказывается нарушенным, форма колебаний – искажённой. При «спрямлении» формы колебаний влияние центробежной силы оказывается уменьшенным, и эффект вращения при расчёте собственной частоты – существенно заниженным.

Результаты параметрического анализа. а) *Влияние массы балки на собственную частоту колебаний.* Рассмотрим вначале влияние массы балки на собственную частоту (напомним, что в рамках приближённого решения [3] учитывается лишь масса груза на крае). На рис. 5а и б, построены зависимости $\bar{\omega}_0$ от параметра угловой скорости $\bar{\Omega}$ при различных значениях параметра относительной массы балки μ , для случаев А и Б.

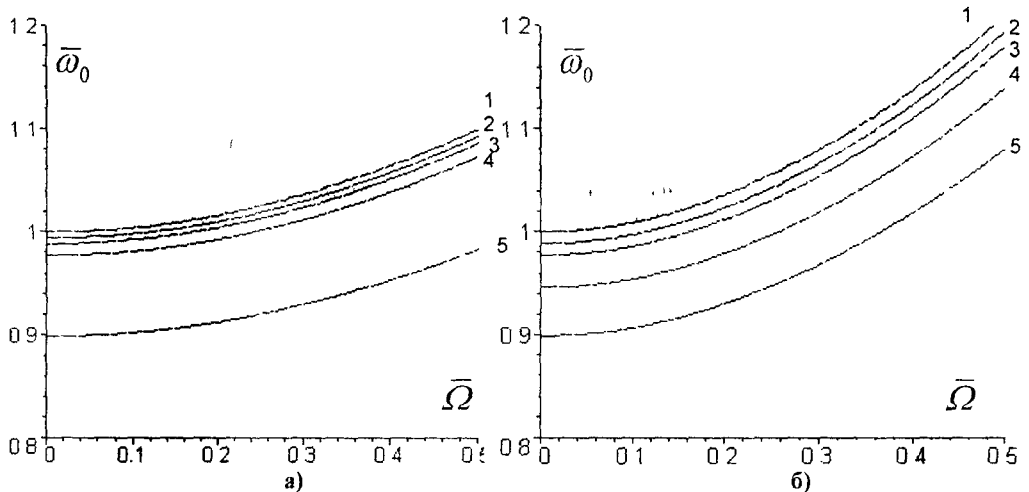
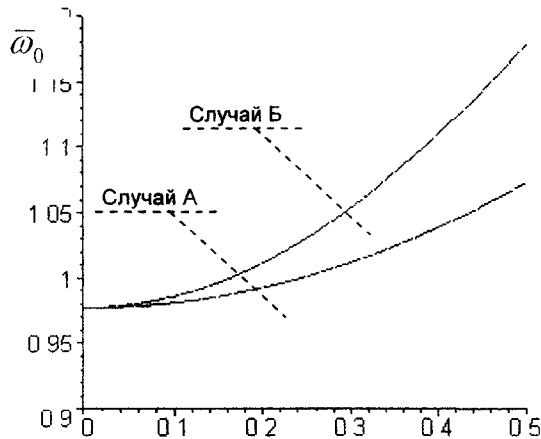


Рис. 5. Зависимости $\bar{\omega}_0$ от $\bar{\Omega}$ для разных значений μ :
1 – случай $\mu=0$, 2 – $\mu=0.1$, 3 – $\mu=0.2$, 4 – $\mu=0.5$, 5 – $\mu=1.0$

Как и следовало ожидать, даже относительно малая (по сравнению с грузом) масса балки оказывает заметное влияние на собственную частоту, во всём диапазоне угловых скоростей балки. Для $\mu=1$ снижение собственной частоты составляет примерно 10 %, по сравнению со случаем $\mu=0$.

б) *Сравнение двух случаев – А и Б.* На рис. 6 сопоставлены эффекты вращения для двух случаев – А и Б, для $\mu=0,2$. Как и в приближённом решении [3], влияние вращения в случае Б (ось вращения лежит в плоскости колебаний) значительно более выражено по сравнению со случаем А (ось вращения перпендикулярна плоскости колебаний).

Рис. 6. Зависимости $\bar{\omega}_0$ от $\bar{\Omega}$ для случаев А и В ($\mu=0,2$) $\bar{\Omega}$

в) *Высшие собственные формы и собственные частоты колебаний вращающейся балки.*

Полученное решение, в отличие от приближённого решения, позволяет рассмотреть высшие формы и собственные частоты вращающейся балки. Приведём некоторые результаты анализа для случая Б. В таблице показаны первые три собственные формы и даны значения относительных собственных частот балки при $\mu=1$ для трёх значений относительной угловой скорости вращения $\bar{\Omega} = 0; 0.2; 0.5$.

В таблице показаны собственные формы колебаний для невращающейся балки, однако они остаются примерно такими же и для вращающейся балки. Вращение слабо влияет на эти формы (это показано выше для первой формы и остаётся в силе для высших форм).

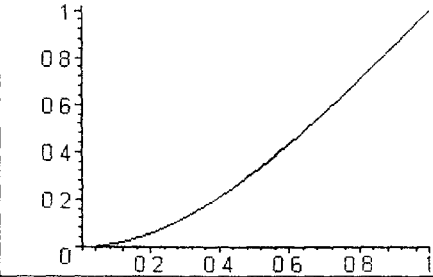
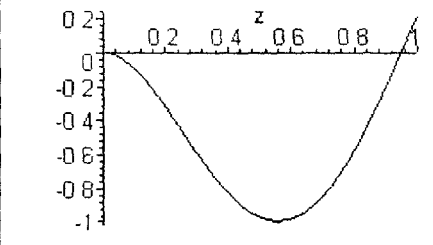
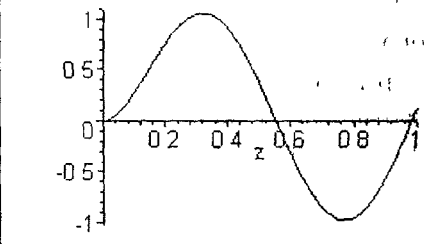
Как видно из таблицы, влияние вращения балки на первую и высшие собственные частоты существенно различно. Если первая собственная частота растёт с увеличением угловой скорости вращения, то вторая и третья частоты почти не изменяются (незначительно уменьшаются). Это можно объяснить тем, что, в отличие от первой формы, для высших форм кривизна (или $\partial^2 y / \partial x^2$) меняет свой знак по длине балки. Поэтому, знак второго слагаемого в дифференциальном уравнении (1) не остаётся постоянным по длине (как для первой формы), а оказывается различным на участках разной кривизны. Упрощённо говоря, влияние растягивающей силы на разных участках балки не складывается, а компенсирует друг друга.

Выводы. 1). Известное приближённое решение, основанное на замене формы колебаний кривой статического прогиба балки под некоторой нагрузкой, не позволяет получить удовлетворительную количественную оценку влияния угловой скорости вращения балки с массой на конце (относительно оси, перпендикулярной оси балки) на собственную частоту колебаний. Такая оценка может быть получена только при точном решении задачи.

2. Вращение балки практически не влияет на собственные формы колебаний.
3. Вращение балки существенно влияет на первую собственную частоту колебаний и почти не оказывает влияния на высшие собственные частоты.

Таблиця

Влияние вращения на первые три формы колебаний балки с массой

№ формы	Собственная форма	Собственные частоты		
		$\bar{\Omega}=0$	$\bar{\Omega}=0,2$	$\bar{\Omega}=0,5$
1		$\bar{\omega}_0 = 0,8991$	$\bar{\omega}_0 = 0,9302$	$\bar{\omega}_0 = 1,0802$
2		$\bar{\omega}_0 = 9,382$	$\bar{\omega}_0 = 9,361$	$\bar{\omega}_0 = 9,251$
3		$\bar{\omega}_0 = 29,38$	$\bar{\omega}_0 = 29,36$	$\bar{\omega}_0 = 29,21$

Библиографические ссылки

1. **Бицено К. Б.** Техническая динамика / К. Б. Бицено, Р. Граммель. – пер. с немецкого под ред. А. И. Лурье – М., 1950. – Т. 1 – с. 257-261.
2. **Пановко Я. Г.** Основы прикладной теории упругих колебаний. Изд. 2./ Я. Г. Пановко. – М., 1967. – 316 с.
3. **Пановко Я. Г.** Устойчивость и колебания упругих систем / Я. Г. Пановко. И. И. Губанова. – М., 1987. – 420 с.

Надійшла до редколлегии 01 05 10

УДК 532.5:517.958

В. І. Перехрест, О. А. Мельник

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ТВІРНА ФУНКЦІЯ ТЕЧІЇ ОДИНИЧНОГО ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ВИХРОДЖЕРЕЛА ТА СИСТЕМ ТАКИХ ВИХОРІВ

На основі математичної моделі одиничного просторового вихроджерела створена методика побудови твірних функцій складних вихрових течій, що дозволяє описувати та досліджувати взаємодію систем таких вихорів, таких як вихорові доріжки і пелени та ін.

Ключові слова: просторове вихроджерело, функція течії, вихорові доріжки

На основе математической модели единичного пространственного вихреисточника создана методика построения образующих функций сложных вихревых течений, которая позволяет описывать и исследовать взаимодействие систем таких вихрей, таких как вихревые дорожки, вихревые подушки и др.

Ключевые слова: пространственный вихреисточник, функция течения, вихревые дорожки.

On the basis of mathematical model individual spatial vortical source the technique of construction of creating functions of the combined vortical currents is created which allows to describe and to investigate interaction of systems of such whirlwinds, such as vortical pathes, vortical pillows etc.

Key words: spatial vortical source, functions of currents, vortical pathes.

Одиничний фундаментальний вихор та його твірна функція. У [1] побудовано та досліджено простий окремий розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера в циліндричних координатах, який описує просторовий вихор, сконцентрований в околі осі та зникаючий на нескінченності. Його поле швидкостей у циліндричних координатах (r, φ, x) має вигляд:

$$\begin{aligned}
 V_r^{(0)} &= 0, \\
 V_x^{(0)} &= A_0 \left(1 - y^2/2\right) e^{-y^2/2}, \quad (0 \leq y < \infty), \\
 V_\varphi^{(0)} &= A_0 y e^{-y^2/2},
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

де $y = C_0 r/2$ – безрозмірна радіальна координата, $A_0 = AC_0^2/4$ – амплітудна константа, A, C_0 – довільні константи. Цей вихор являє собою просторовий гвинт, в якому поєднується осьова швидкість A_0 на осі симетрії з чисто обертовим рухом циліндра радіусом $y_0 = \sqrt{2}$ зі швидкістю $A_0/2 \approx 0.52 A_0$. Траєкторіями частинок на проміжних циліндрах є просторові гвинтові лінії зі змінним кроком [1].

Особливими властивостями цього вихору-солітону є такі. По-перше, осьовий витік вихора через будь-яку горизонтальну площину $x = h$ є нульовим, тобто

$$Q_\infty = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty V_x^{(0)} r dr = 0,
 \tag{2}$$

при цьому, оскільки єдиним нулем неперервної функції $V_x^{(0)}$ з (1.1) є $y_0 = \sqrt{2}$, то

$$Q = \frac{8\pi}{C_0^2} \int_0^{\sqrt{2}} V_x^{(0)}(\bar{y}) \bar{y} d\bar{y} = - \frac{8\pi}{C_0^2} \int_{-\sqrt{2}}^{\infty} V_x^{(0)}(\bar{y}) \bar{y} d\bar{y} = \frac{2\pi A}{e}, \quad (3)$$

тобто даний осьовий витік у межах так званого «вихрового шнура» $0 \leq y \leq \sqrt{2}$ не залежить від інтенсивності обертання шнура – константи C_0 , а залежить лише від амплітудного коефіцієнта A . Точніше, при збільшенні C_0 хвиля вихрового збурення стискується до осі при одночасному збільшенні амплітуди A_0 , так що в результаті значення інтеграла (3) зберігається.

Циліндр $y_0 = \sqrt{2}$ має ще таку екстремальну властивість. Погонна циркуляція швидкості по всіляких циліндрах радіусів r , а з нею й інтенсивність вихрової трубки

$$\Gamma = 2\pi r V_\varphi^{(0)} = \left(\frac{4\pi}{C_0} \right) A_0 y^2 e^{-y^2/2}, \quad (4)$$

досягає при $y_0 = \sqrt{2}$ екстремального значення

$$\Gamma_{max} = 2\pi A C_0 / e = C_0 Q. \quad (5)$$

Ця формула пов'язує інтенсивність вихрового шнура з осьовим витоком у ньому.

Перетворимо поле (1) до глобальної системи циліндричних координат (r, φ, x) , в якій вісь вихора має координати (r_0, φ_0) . Зв'язок між місцевими (r, φ, x) і глобальними координатами задається формулами:

$$x = x, \quad r^2 = r_0^2 - 2r_0 r \cos(\varphi - \varphi_0) + r^2, \\ \sin(\varphi - \varphi_0) = \frac{r}{r_0} \sin(\varphi - \varphi_0), \quad \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{1}{r} [r \cos(\varphi - \varphi_0) - r_0], \quad (6)$$

у площині (r, φ) .

Векторне поле $\vec{V}(V_r^{(0)}, V_\varphi^{(0)})$ з (1) перетворюється до глобальних координат (r, φ) за формулами переходу

$$V_r = V_r^{(0)} \cos \beta - V_\varphi^{(0)} \sin \beta, \quad V_\varphi = V_r^{(0)} \sin \beta + V_\varphi^{(0)} \cos \beta, \quad (7)$$

де $\beta = \varphi - \varphi_0$. Після деяких перетворень з урахуванням співвідношень (6) з (7) маємо:

$$V_r = -A_0 y_0 \sin(\varphi - \varphi_0) e^{-y^2/2}, \\ V_x = A_0 (1 - y^2/2) e^{-y^2/2}, \\ V_\varphi = A_0 (y - y_0 \cos(\varphi - \varphi_0)) e^{-y^2/2}, \quad (8)$$

де $y^2 = y_0^2 - 2y_0 y \cos(\varphi - \varphi_0) + y^2$, $y = C_0 r / 2$, $y_0 = C_0 r_0 / 2$.

Прямою підстановкою неважко перевірити, рівняння нерозривності [3] в глобальних координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial}{\partial x} (V_x) + \frac{\partial V_\varphi}{r \partial \varphi} = 0, \quad (9)$$

поле (8) задовольняє при будь-яких r_0, φ_0 .

Знайдемо функцію течії поля (8) з диференціальних рівнянь руху в площині (r, φ) :

$$\frac{dr}{dt} = -A_0 y_0 \sin(\varphi - \varphi_0) e^{-\bar{r}^2/2}, \quad \frac{rd\varphi}{dt} = A_0 (y - y_0 \cos(\varphi - \varphi_0)) e^{-\bar{r}^2/2}. \quad (10)$$

Комбінуючи ці рівняння, отримуємо диференціальне рівняння першого порядку

$$[y - y_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] dy + y y_0 \sin(\varphi - \varphi_0) d\varphi = 0. \quad (11)$$

Це рівняння з допомогою інтегрувального множника $\mu = e^{-(y^2 + y_0^2)/2}$ зводиться до рівняння у повних диференціалах і має інтеграл $\psi(y, \varphi) = C$,

$$\psi(y, \varphi) = A_0 e^{-(y^2 + y_0^2 - 2yy_0 \cos(\varphi - \varphi_0))/2} \quad (12)$$

– функція течії поля (1). Через неї швидкості в горизонтальній площині (r, φ) виражаються таким чином:

$$V_r = \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad V_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_x = V_x(y, \varphi), \quad (13)$$

звідки видно, що рівняння нерозривності (8) задовольняється тотожно.

Отже, функція (12) є твірною функцією течії одиничного вихроджерела, вміщеного у довільну точку (r_0, φ_0, x_0) простору.

Вихроджерело (8) при $A > 0$ має позитивну орієнтацію: спрямовану вгору вертикальну швидкість A_0 на осі, та обертання проти годинникової стрілки. Вихор з негативною, оберненою орієнтацією одержимо, якщо в (8) та (12) константу A замінимо на $(-A)$.

Функція течії системи вихорів. У силу лінійності рівняння нерозривності (9) сума функцій течії типу (12) для вихорів, однозначно поміщених у кілька точок $(r_1, \varphi_1, x_1), (r_2, \varphi_2, x_2), \dots, (r_n, \varphi_n, x_n)$, буде твірною функцією сумарної течії

$$\Psi^{(s)}(y, \varphi) = \sum_{k=1}^n A_k \frac{C_{0k}^2}{4} e^{-(y_k^2 + y_{0k}^2 - 2y_k \cdot y_{0k} \cos(\varphi - \varphi_{0k}))/2}, \quad (14)$$

в якій кожен з вихорів має свою амплітуду A_k та інтенсивність закручування C_{0k} , при цьому $y_{0k} = C_{0k} r_0/2$, $y_k = C_{0k} r/2$. Кожен такий вихор окремо є розв'язком рівнянь Ейлера, що не можна априорі сказати про їх суму (13), хоча рівняння нерозривності для сум (14) буде виконуватись.

При цьому поля осьових швидкостей складових вихорів складаються окремо, тобто

$$V_x^{(s)} = \sum_{k=1}^n A_k \frac{C_{0k}^2}{4} (1 - y_k^2)^2 e^{-y_k^2/2} \quad (15)$$

– це забезпечує взаємовплив осьових та окружних вихорів у горизонтальній площині на осьовий рух течії (рис. 1, 2, 3).

Далі, можна неперервно розподіляти вихроджерела (10) з функцією розподілу $A(y_0, \varphi_0)$, та однаковою інтенсивністю закручування C_0 . Тоді сумарна твірна функція течії, породжена вихорами, розподіленими в області $(r_0, \varphi_0) \in D$, буде задаватись інтегралом

$$\Psi^{(s)}(y, \varphi) = \iint_D A(y_0, \varphi_0) e^{-(y^2 + y_0^2 - 2y y_0 \cos(\varphi - \varphi_0))/2} y_0 dy_0 d\varphi_0. \quad (16)$$

Щоб вияснити основні закономірності кінематичної взаємодії систем вихорів, розглянемо послідовно сукупності дискретних вихроджерел та розподілених у певній області.

Двовимірний вихровий ланцюжок. Розглянемо систему однакових вихорів (1), розташованих на горизонтальній прямій – осі Ox . Для двох таких вихорів у [2] було встановлено, що найбільшою критичною відстанню між ними, при якій вони об'єднуються в один, є $y_2 = 2$ ($r_2 = 4/C_0$). Здогадно, що в ланцюжку з 3-х, 4-х, і т. д. вихорів умови об'єднання будуть іншими. Зокрема, для трьох однакових вихорів (рис. 4) маємо таке сумарне поле швидкостей:

$$\begin{aligned} V_r^{(s)} &= -A_0 y_0 \cdot e^{-\frac{y_0^2 + y^2}{2}} \cdot \text{sh}(y y_0 \cos \varphi) \cdot \sin \varphi, \\ V_\varphi^{(s)} &= A_0 e^{-\frac{y^2}{2}} \left[e^{\frac{y_0^2}{2}} (y \cdot \text{ch}(y y_0 \cos \varphi) - y_0 \cdot \text{sh}(y y_0 \cos \varphi) \cos \varphi) + y \right], \\ V_x^{(s)} &= A_0 \exp\left(-\frac{y_0^2 + y^2}{2}\right) \left[\left(\frac{y_0^2 + y^2}{2} - 1\right) \cdot \text{sh}(y y_0 \cos \varphi) - y y_0 \cdot \text{ch}(y y_0 \cos \varphi) \cos \varphi \right], \end{aligned} \quad (17)$$

і сумарну функцію течії

$$\Psi^{(s)} = A_0 e^{-\bar{y}^2/2} + A_0 e^{-\bar{y}^2/2} + A_0 e^{-\bar{r}^2/2}, \quad (18)$$

де $y^2 = y^2 + y_0^2 - 2y \cdot y_0 \cos \varphi$; $\bar{y}^2 = y^2 + y_0^2 + 2y \cdot y_0 \cos \varphi$, $y = C_0 r/2$.

З умови знаходження особливих точок

$$V_r^{(s)}(y, \varphi) = 0, \quad V_\varphi^{(s)}(y, \varphi) = 0, \quad (19)$$

та міркувань симетрії поля швидкостей покладемо $\varphi = 0$, що тягне за собою $V_r^{(s)} = 0$. Друге рівняння умови (19) зводиться до наступного трансцендентного рівняння для радіальної координати особливих точок

$$\frac{y}{y_0} = \frac{sh(y y_0)}{ch(y y_0) + e^{y_0^2/2}} \tag{20}$$

Першим очевидним розв’язком є $y_1 = 0$, тобто центр системи вихорів завжди буде особливою точкою типу «центр». Але картина ліній течії функції (рис. 4) показує, що для $x \geq 0$ при значній відстані y_0 існує ще дві особливі точки – точка самоперетину сепаратиси («сідло») та точка типу «центр» для центра правого вихора.

Таблиця 1

Залежність розташування точок типу «центр» та самоперетину сепаратиси після взаємодії в системі трьох однакових вихорів від початкового розташування їх центрів

y_0	2.0621	2.7	2.8	2.9	3.0	3.1	4.0
y^*	1.3341	2.6138	2.735	2.851	2.9632	3.041726	3.999
y сепар	1.3341	1.3517	1.4009	1.4504	1.5002	1.5501	2.0

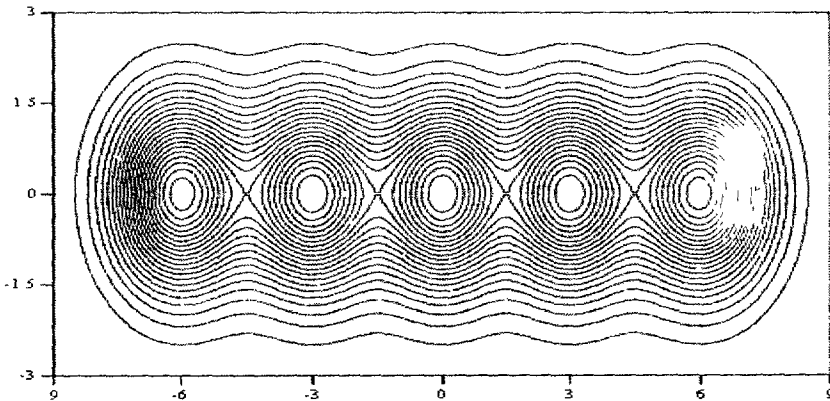


Рис. 1. П’ять вихорів на одній лінії, з відстанню між сусідніми 3 – одиниці

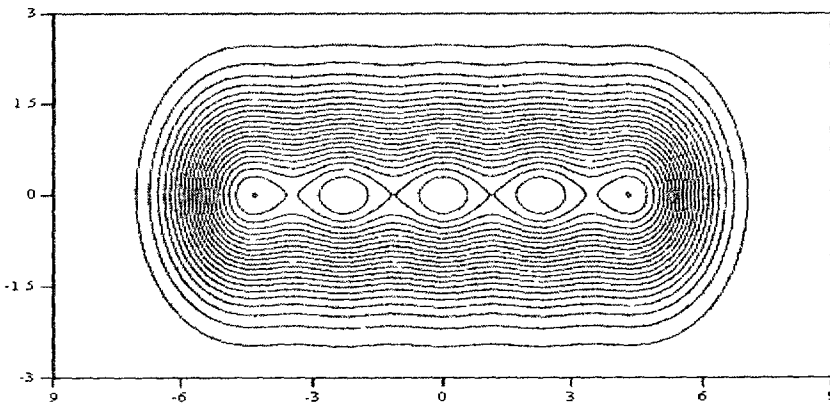


Рис. 2. П’ять вихорів на одній лінії, з відстанню між сусідніми 2.3 – одиниці

Таблиця 2 показує залежність між кількістю вихорів, розташованих в одну лінію, та критичним значенням y_0 , за якого всі внутрішні вихори об’єднуються в один. Нагадаємо, що y_0 – відстань між кожними із сусідніх вихорів.

Таблиця 2

Залежність початкового розташування центрів вихорів y_0 від кількості вихорів у лінії, за умови їх нового об’єднання в один

n	3	5	7	9	41	#	2	4	6	40
y_0 критичне	2.062	1,580	1,333	1,191	0,730	#	2,00	1,55	1,30	0,73

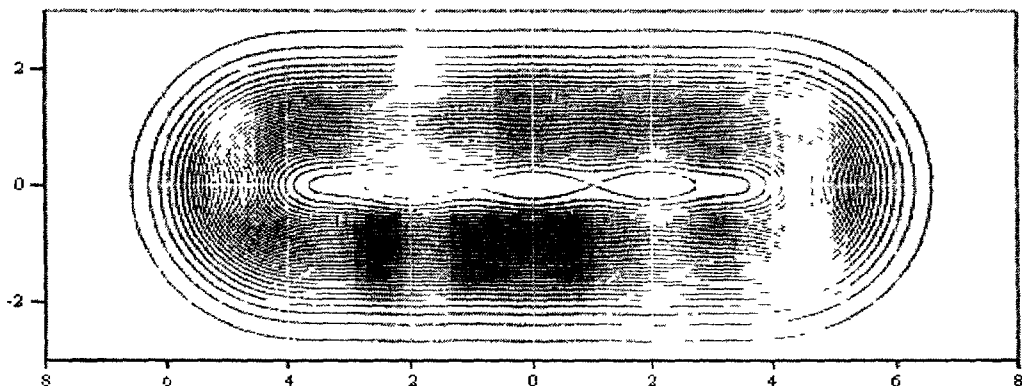


Рис. 3. П'ять вихорів на одній лінії, з відстанню між сусідніми 2 – одиниці

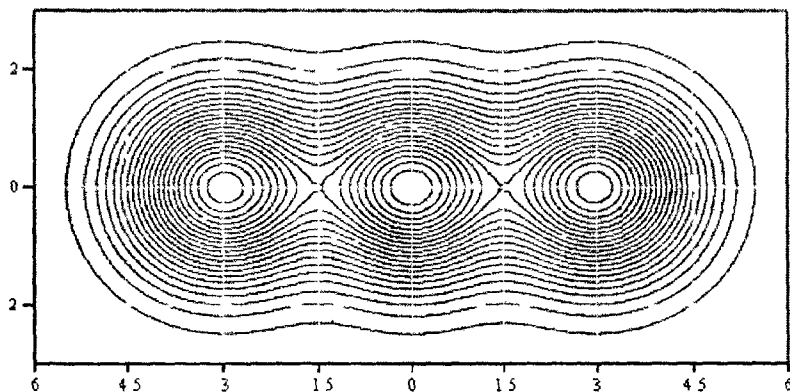


Рис. 4. Три вихори на одній лінії, з відстанню між сусідніми 3 – одиниці

Двовимірний вихровий ланцюжок неперервно розподілених вихорів. Розглянемо модель неперервного розподілу вихроджерела (10) на горизонтальній прямій – осі Ox з функцією розподілу інтенсивності $A(y_0, \varphi_0)$, та однаковим закручуванням C_0 . Як було показано вище, сумарна функція току такої моделі буде задана формулою (16)

$$\Psi^{(s)}(y, \varphi) = \iint_D A(y_0, \varphi_0) e^{(y^2 + y_0^2 - 2y y_0 \cos(\varphi - \varphi_0)) / 2} y_0 dy_0 d\varphi_0. \quad (21)$$

Цей подвійний інтеграл можна задати в декартовій системі координат, якщо використати формулами тригонометрії $\cos(\varphi - \varphi_0) = \cos(\varphi)\cos(\varphi_0) + \sin(\varphi)\sin(\varphi_0)$, та формули переходу від полярної системи координат до декартової.

$$\begin{cases} \bar{x} = y \cos(\varphi), & \bar{x}_0 = y_0 \cos(\varphi_0), \\ \bar{y} = y \sin(\varphi), & \bar{y}_0 = y_0 \sin(\varphi_0), \end{cases} \quad (22)$$

таким чином отримаємо

$$\Psi^{(s)}(\bar{x}, \bar{y}) = \iint_D A(\bar{x}_0, \bar{y}_0) e^{-((\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_0)^2) / 2} d\bar{x}_0 d\bar{y}_0. \quad (23)$$

Як уже було сказано функція $A(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ не має бути константою, тому для організації конкретної моделі розподілу вихорів ми задамо її таким чином

$$A(x_0, y_0) = R \cos\left(\frac{2\pi}{T} x_0\right) + h, \quad (24)$$

де R – величина збурення ($2 \cdot R$ – різниця між максимальним та мінімальним значеннями функції розподілу (24)), T – період збурення, h – висота, на яку піднято середнє значення функції (24). Так при $2R=4$, $T=2$, $h=3$, $C_0=2$, $(-2T \leq x_0 \leq 2T)$ матимемо рис. 5а, 5б.

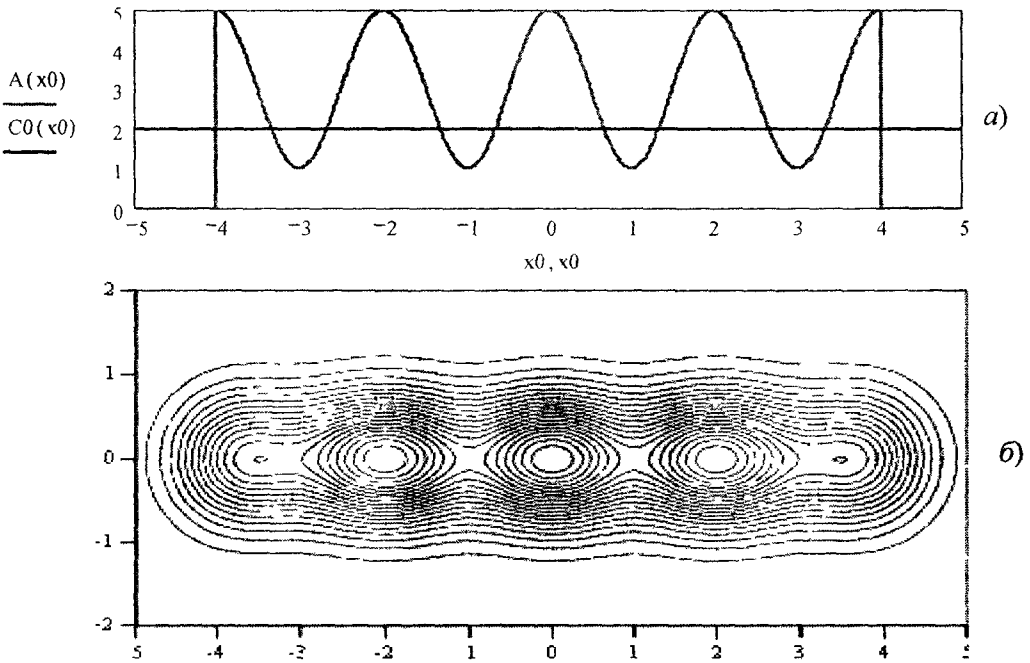


Рис. 5. а) Графіки функцій розподілу інтенсивності $A(x_0, 0)$ і закручування $C_0=2$;
б) Функція току $\psi^{(s)}(y, \varphi)$, яка відповідає параметричним умовам розподілу рис. 5а

При інших значеннях $2R=2$, $T=1,5$, $h=2$, $C_0=2$, $(-2T \leq x \leq 2T)$ отримаємо рис. 6а, 6б.

На рис. 6б ми бачимо, що функція току при значеннях $2R=2$, $T=1,5$, $h=2$, $C_0=2$, $(-2T \leq x \leq 2T)$ має дуже велику схожість з дискретним розташуванням на одній лінії трьох вихорів (рис. 4), і навіть більш подібна до дискретного розподілу п'яти вихорів в одну лінію (рис. 3), за умови поглинання самих крайніх вихорів тими, що розташовані ближче до центру рисунка. Так само, як для дискретно розподілених вихорів, так і для неперервно розподілених, існують параметричні умови, за яких відбувається повне об'єднання в один вихор, хоча й дещо розмитий вздовж лінії розподілу.

Для моделі (24) нами встановлено ряд важливих закономірностей. А саме, що біфуркаційне об'єднання вихорів в один, при фіксованих значеннях R та h дає гіперболічну залежність між T та C_0 рис. 7а, а також при фіксованих C_0 та h дає лінійну залежність між параметрами $2 \cdot R$ та h рис. 7б.

Двовимірний неперервний розподіл вихорів по області D . Розглянемо модель неперервного розподілу вихроджерела (10) по області D , з функцією розподілу інтенсивності $A(y_0, \varphi_0)$, та однаковим закручуванням C_0 .

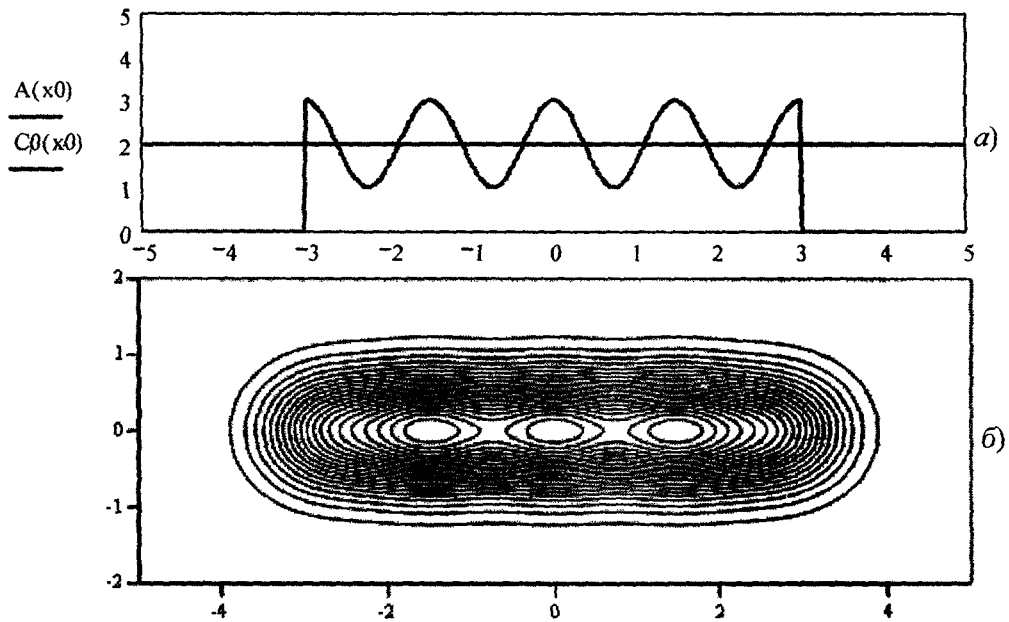


Рис. 6. а) Графіки функцій розподілу інтенсивності $A(x_0, 0)$ і закручування $C_0=2$
 б) Функція току $\psi^{(s)}(y, \varphi)$, яка відповідає параметричним умовам розподілу рис. 6а

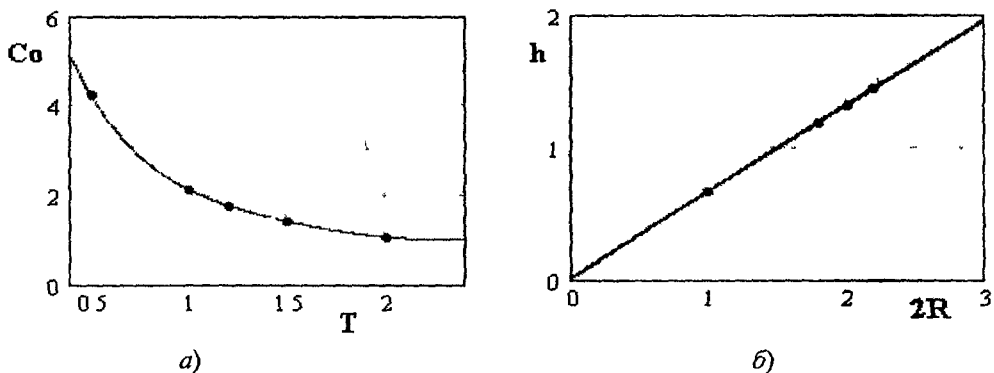


Рис. 7. Параметричні залежності при біфуркаційному об'єднанні всіх вихорів в один

Представимо область D у вигляді круга $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \leq 16$ і в даній області розподілимо інтенсивність так, як це показано на рис. 8а, тобто $A(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = 0.1\tilde{x}_0$. На рис. 8б нами отримано поверхню функції току (23).

Аналогічно представимо область D у вигляді квадрата з центром на початку системи координат із стороною в 8 одиниць (рис. 9а) і в даній області розподілимо інтенсивність згідно формули $A(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = 0.1\tilde{x}_0$. На рис. 9б нами отримано відповідну поверхню функції току.

Висновки. Збільшення числа вихорів у ланцюжку веде до зменшення критичної відстані y_0 , яка лежить у межах $0 < y_{кр} \leq 2.062$. Також важливу роль для невеликої кількості вихорів відіграє парним чи непарним є число вихорів розташованих в одну лінію.

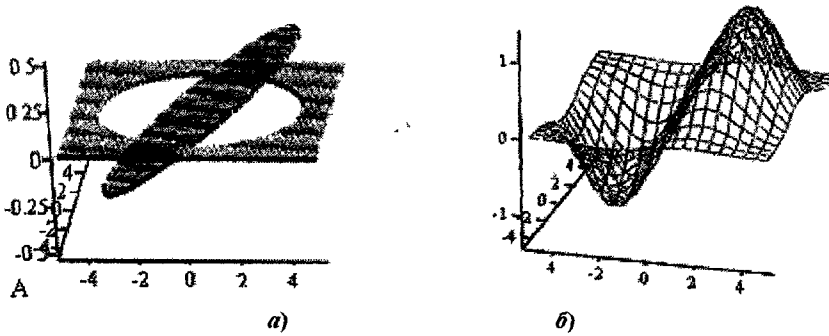


Рис. 8. Двовимірний неперервний розподіл вихорів в області круга

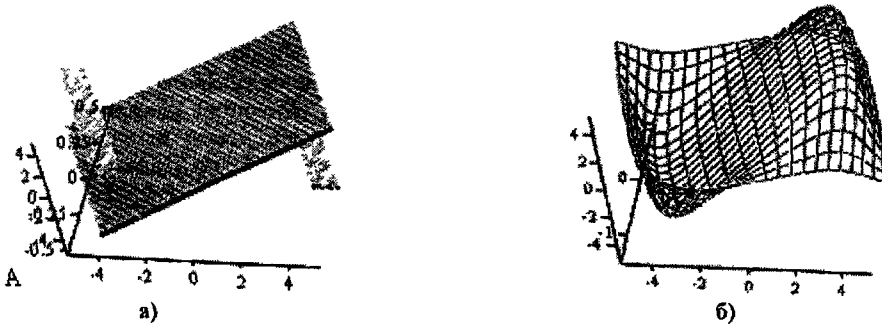


Рис. 9. Двовимірний неперервний розподіл вихорів в області квадрата

При неперервному одновимірному розподілі вихроджерел монотонним знакосталим розподілом відповідає один інтегральний вихор з одним центром; для періодичного знакосталого розподілу на відрізку $[-a, a]$ виникає число інтегральних вихорів, яке дорівнює кількості періодів коливань, з центрами в точках максимуму функції розподілу. Дане число вихорів може зменшуватись, у зв'язку з умовами об'єднання (поглинання) вихорів.

Як видно з рис. 8, 9, знакозмінний антисиметричний розподіл вихроджерел формує два антисиметричні вихори з оберненими напрямками обертання та осьовими швидкостями. Якісно обидві поверхні та течії (для квадратної та круглої областей) – подібні між собою. Як було показано в [4], вихори протилежного напрямку не об'єднуються, а навпаки відштовхуються.

Бібліографічні посилання

1. **Перехрест В. І.** Просторовий циліндричний вихровий шнур як точний розв'язок рівнянь Ейлера. / В. І. Перехрест // Вісник Дніпропетр. ун-ту, сер. Механіка. – Т. 1 – Вип. 7, 2003. – С. 46–53.
2. **Перехрест В. І.** Кінематика взаємодії двох паралельних вихрових шнурів одного напрямку обертання та інтенсивності. / В. І. Перехрест, О. А. Мельник // Диференціальні рівняння та їх застосування. – 2003. – С. 141–148.
3. **Милн-Томсон.** Теоретическая гидромеханика / Милн-Томсон. // – М., 1964. – 655 с.
4. **Перехрест В. І.** Про взаємодію просторових вихорів. / В. І. Перехрест, О. А. Мельник // Вісник Дніпропетр. ун-ту, сер. Механіка. – Т. 1. – Вип. 11. – 2007. – С. 32–43.

Надійшла до редколеги 01.07 10

УДК 532.516

А. А. Пилипенко

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Украина

КЛАССИФИКАЦИЯ РЕЖИМОВ ТРАНСЗВУКОВОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ОБТЕКАНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ

На основі нестационарних осереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса, замкнених за допомогою диференціальної моделі турбулентності Spalart-Allmaras, проведено систематичне чисельне дослідження трансзвукової течії навколо профілю NACA 0012 у широкому діапазоні чисел Маху потоку, що набігає, і кутів атаки. Виявлено фізичні особливості структури поля течії, запропоновані критерії ідентифікації окремих режимів трансзвукового турбулентного обтекання аеродинамічних профілів і проведена їх класифікація.

Ключові слова: трансзвукова течія, турбулентність, відрив потоку, ударні хвилі, чисельне моделювання, рівняння Нав'є-Стокса, аеродинамічний профіль

На основе нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, замкнутых с помощью дифференциальной модели турбулентности Spalart-Allmaras, проведено систематическое численное исследование трансзвукового обтекания профиля NACA 0012 в широком диапазоне чисел Маха набегающего потока и углов атаки. Выявлены физические особенности структуры поля течения, предложены критерии идентификации отдельных режимов трансзвукового турбулентного обтекания аэродинамических профилей и проведена их классификация.

Ключевые слова: трансзвуковое течение, турбулентность, отрыв потока, ударные волны, численное моделирование, уравнения Навье-Стокса, аэродинамический профиль.

The systematical numerical investigation of the transonic flow around NACA 0012 airfoil in the wide free stream Mach numbers and incidence angles range was carried out based on non-stationary Reynolds Average Navier-Stokes equations, which were closed by Spalart-Allmaras' deferential turbulence model. Flow structure physical features were discovered, the identification criteria of different transonic turbulent airfoil flow regimes and its classification were proposed.

Key words: transonic flow, turbulence, flow separation, shock waves, numerical modeling, Navier-Stokes equations, airfoil.

Введение. Исследование трансзвуковых турбулентных течений имеет важное теоретическое и практическое значение при решении задач внешней и внутренней аэродинамики. Трансзвуковой диапазон скоростей является основным при обтекании несущих поверхностей и хвостового оперения летательных аппаратов, роторов вертолетов, течения вблизи воздухозаборников авиационных двигателей, в решетках компрессоров и диффузорах, в проточной части газовых турбин.

Особый интерес представляет трансзвуковое турбулентное обтекание неподвижного аэродинамического профиля при различных параметрах набегающего потока. Здесь могут наблюдаться локальные сверхзвуковые зоны, ударные волны и волны разрежения различной конфигурации, отрыв пограничного слоя, автоколебания скачка уплотнения, вызывающие крупномасштабные пульсации и нестационарность всего поля течения. Физические особенности такого течения приводят к возникновению различных режимов трансзвукового обтекания аэродинамических профилей. На сегодняшний день подробно изучены лишь некоторые из них при больших дозвуковых числах Маха набегающего потока и малых углах атаки. Данные режимы представляют собой четыре классических случая – дозвуковое безотрывное обтекание, одноступенчатый режим обтекания с отрывом потока, двухступенчатый режим обтекания с отрывом потока, и обтекание с наличием хвостовых скачков [1–4]. В этой связи выработка критериев идентификации отдельных

режимов трансзвукового турбулентного обтекания аэродинамических профилей; проведение их классификации в широком диапазоне чисел Маха набегающего потока и углов атаки представляет собой актуальную задачу.

Цель работы состоит в проведении двухпараметрических численных экспериментов трансзвукового турбулентного обтекания аэродинамического профиля NASA 0012 в широком диапазоне углов атаки и чисел Маха невозмущенного потока. На основе результатов численного исследования выработать критерии идентификации отдельных режимов и составить «план-карту» режимов на плоскости «число Маха набегающего потока – угол атаки».

Постановка задачи. Численные исследования трансзвукового турбулентного обтекания аэродинамического профиля NASA 0012 (рис.1) выполнены в диапазоне чисел Маха невозмущенного потока $M_\infty = 0.2 \div 0.95$, углов атаки $\alpha = 0^\circ \div 40^\circ$ при фиксированном числе Рейнольдса $Re = 3.91 \cdot 10^6$.

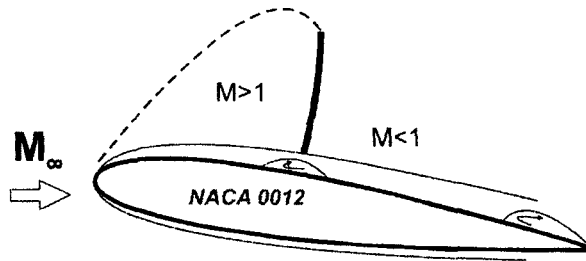


Рис. 1. Схема трансзвукового турбулентного обтекания профиля NASA 0012

Рассматриваемые течения моделируются с помощью двумерных нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, записанных в произвольных криволинейных координатах [5–7]. Исходная система дополнялась уравнением состояния совершенного газа. Динамический коэффициент молекулярной вязкости определялся по степенной зависимости от температуры [8]. Для расчета коэффициента турбулентной вязкости использовалась однопараметрическая дифференциальная модель Spalart-Allmaras [9]. В качестве граничных условий на поверхности профиля задавались условия прилипания и отсутствия теплообмена. На внешней границе расчетной области значения параметров потока определялись на основе инвариантов Римана. Значение рабочей переменной модели турбулентности Spalart-Allmaras полагалось равным нулю на твердой поверхности, на входной внешней границе 0.1, на выходной границе ставились безградиентные условия.

Численный алгоритм и его тестирование. Дискретизация системы исходных уравнений Навье–Стокса выполнена с помощью конечно-объемного метода [5; 7; 10]. Для вычисления конвективных слагаемых использовалась схема Roe [11]. Второй порядок точности по пространству обеспечивался с помощью симметричного ограничителя потоков Jameson [12]. Выбор данного ограничителя потоков обусловлен тем, что он был разработан специально для течений с сильными разрывами, образующимися на ударных волнах.

При построении неявного алгоритма дискретный аналог исходных уравнений Навье–Стокса записывался относительно искомого приращения переменных на новом временном слое. Второй порядок точности по времени обеспечивался использованием трехслойной схемы. Полученная блочно-матричная система алгебраических

уравнений решалась ітераційним методом Гаусса-Зейделя [5; 13]. Описаний вище численний алгоритм реалізований в рамках єдиного пакета програм [5; 14; 15].

Тестування численного алгоритма проведено на трьох задачах, воспроизводящих різні режими обтекання аеродинамічного профіля. Стационарне трансзвукове обтекання профіля RAЕ 2822 моделювалось при параметрах набегаючого потоку $M_\infty = 0.734$, $\alpha = 2.54^\circ$, $Re = 6.5 \cdot 10^6$ [16]. Виникнення локальних сверхзвукових зон малої інтенсивності для низьких чисел Маха $M_\infty = 0.3$ і $M_\infty = 0.4$ вблизи профіля НАСА 0012 досліджено в [15]. Виконано порівняння з результатами розрахунків [17] і продувок в аеродинамічній трубі [18]. Режим дозвукового слабо сжимаемого обтекання профіля НАСА 4412 при $M_\infty = 0.085$, $\alpha = 12^\circ$, $Re = 1.64 \cdot 10^6$ розглянуто в [19; 20].

Обсуждение результатов. Фізическі особливості взаємодії скачков ущільнення і волн разреження з пограничним шаром і слідом приводять до виникненню різних режимів трансзвукового турбулентного обтекання аеродинамічних профілів.

Для ілюстрації особливостей взаємодії скачков ущільнення і волн разреження з пограничним шаром і слідом за профілем НАСА 0012 на рис. 2 і 3 представлені численні шлірен-фотографії, отримані на основі розподілу градієнта щільності.

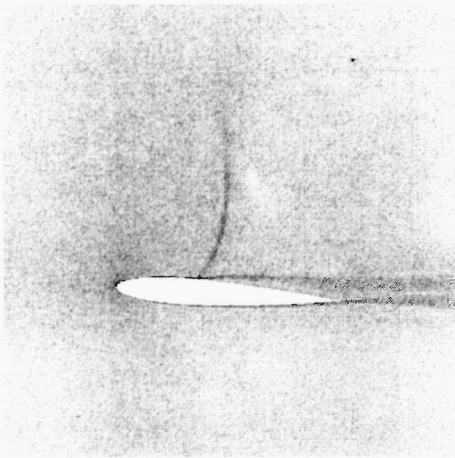
На рис. 2а представлений односкачковий режим обтекання з наявністю стрижневих зон на підветренній стороні профіля. Хоча ударна хвиля є криволінійною, за своєю природою у поверхні профіля вона відповідає нормальному скачку, переводячому сверхзвукове течіння в дозвукове. Даний режим є класическим і добре вивчений [2–4].

Стационарний односкачковий режим з наявністю лямбда-ножки виникає при декількох великих числах Маха і кутах атаки (рис. 2б). За косим скачком відрива течіння залишається сверхзвуковим. Тильний нормальний скачок замикає утворюючуся махову конфігурацію ударних хвиль.

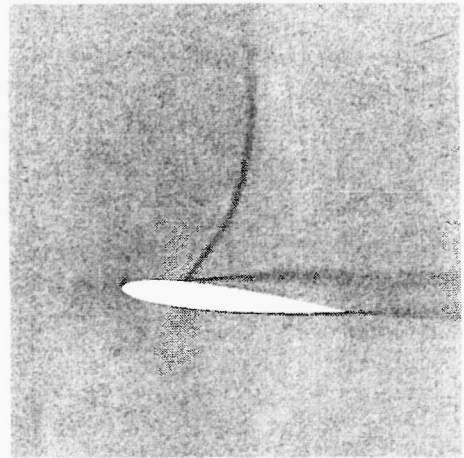
Трансзвукове обтекання симетричних і двояковыпуклих профілів при малих кутах атаки приводить до виникненню класического двухскачкового режиму [1], який представлений на рис. 3в. Інтенсивність скачков ущільнення, їх розташування на профілі, взаємодія з турбулентним пограничним шаром суттєво різні. На підветренній стороні виникає стрижнева зона, в той час як на наветренній стороні течіння безотрывное.

Необычная конфігурація скачков ущільнення була отримана для $M_\infty = 0.855$, $\alpha = 5^\circ$ (рис. 2г). Даний режим відноситься до двухскачкового з сумішним розташуванням ударних хвиль. Верхній скачок відповідає односкачковому режиму з наявністю лямбда-ножки, аналогічно рис. 3б. На нижній стороні профіля локальна сверхзвукова зона простягається вздовж всієї хорди, замикаючись нормальним хвостовим скачком (без лямбда-ножки).

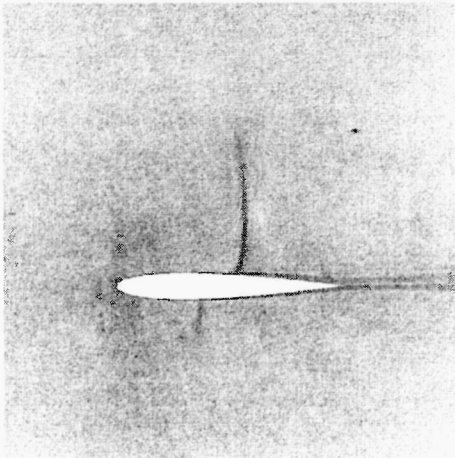
Рис. 2д і 2е демонструють симетричний і несиметричний двухскачковий режим з наявністю хвостових скачков ущільнення. Характерною особливістю даного режиму є одночасне наявність лямбда-ножок, взаємодіючих з пограничним шаром на профілі і слідом. Сверхзвукові потоки, сходящі з наветренній і підветренній сторін під певним кутом, приводять до утворенню косих скачков ущільнення на задній кромці. Наявність кута між



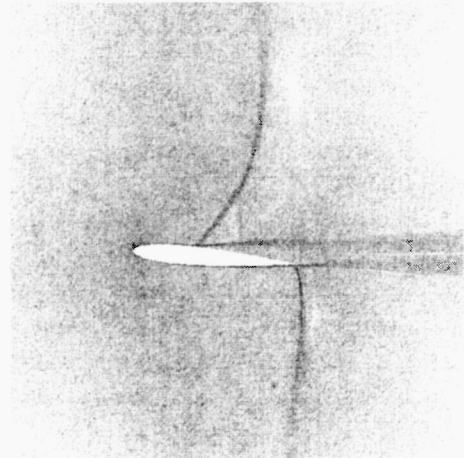
а) $M_{\infty} = 0.8, \alpha = 3.7^{\circ}$



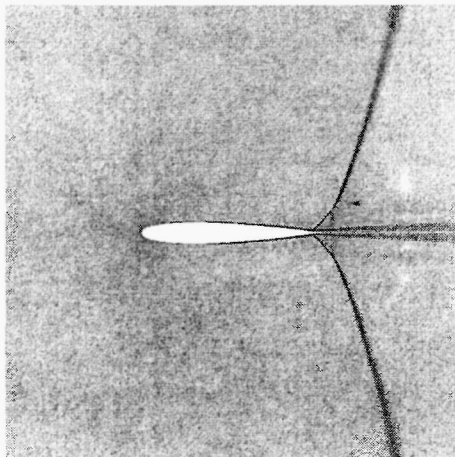
б) $M_{\infty} = 0.825, \alpha = 6.2^{\circ}$



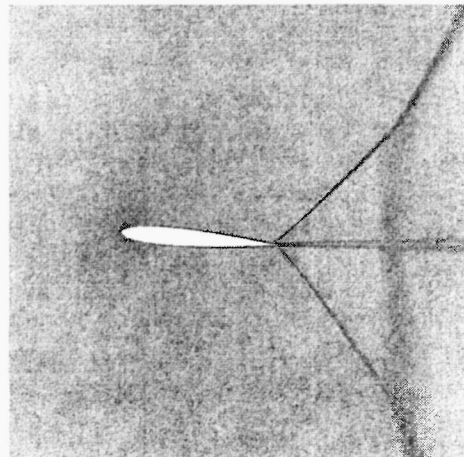
в) $M_{\infty} = 0.8, \alpha = 1.25^{\circ}$



г) $M_{\infty} = 0.855, \alpha = 5^{\circ}$

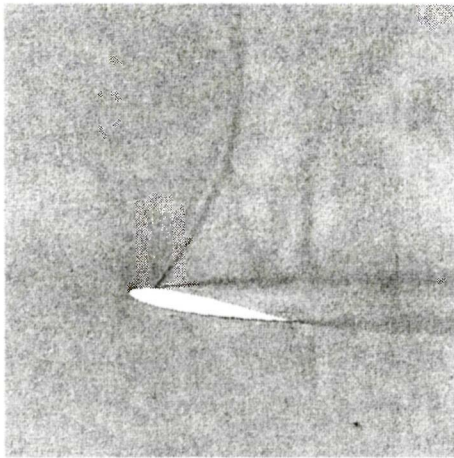


д) $M_{\infty} = 0.9, \alpha = 0^{\circ}$

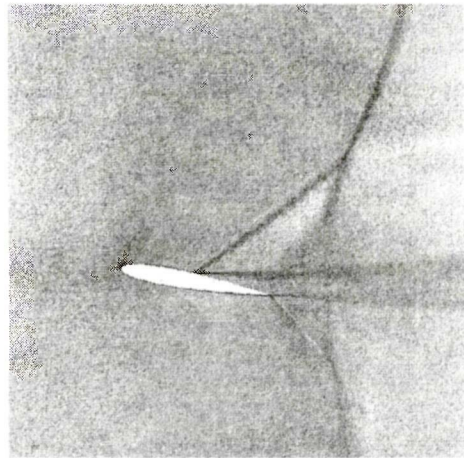


е) $M_{\infty} = 0.925, \alpha = 5^{\circ}$

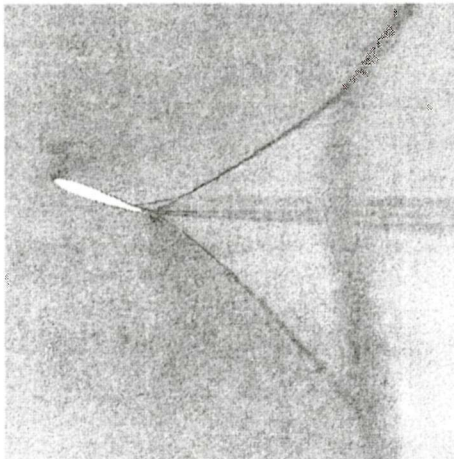
Рис. 2. Численные «шlierен-фотографии» для одно- и двухскачковых режимов обтекания профиля *NACA 0012*



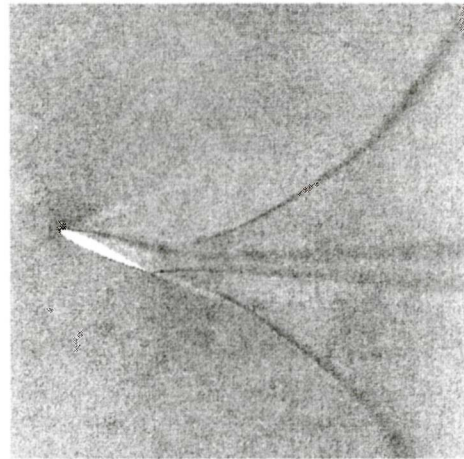
а) $M_\infty = 0.825, \alpha = 10^\circ$



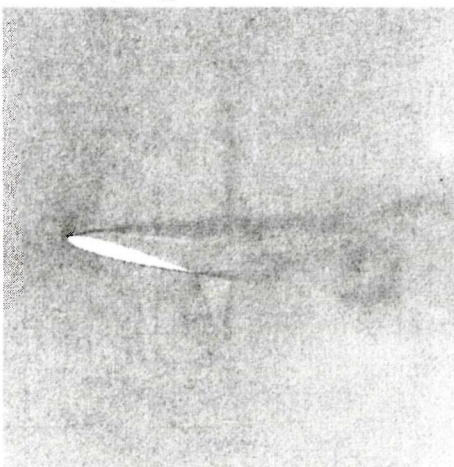
б) $M_\infty = 0.875, \alpha = 10^\circ$



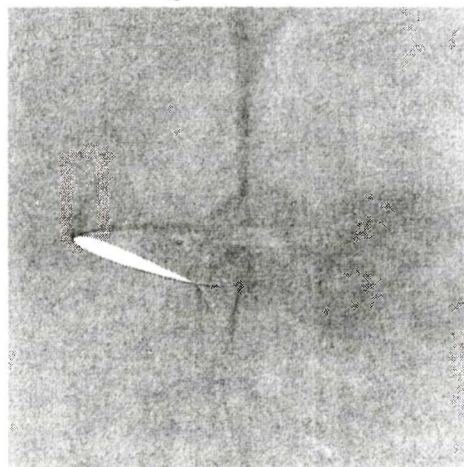
в) $M_\infty = 0.9, \alpha = 20^\circ$



г) $M_\infty = 0.9, \alpha = 25^\circ$



д) $M_\infty = 0.8, \alpha = 15^\circ$



е) $M_\infty = 0.8, \alpha = 20^\circ$

Рис. 3. Численные «шлiren-фотографии» обтекания профиля NACA 0012 при наличии систем ударных волн и колебаний в следе за профилем

взаимодействующими потоками, обусловленного формой профиля, делает невозможным образование нормальных хвостовых скачков уплотнения, как в случае, представленном на рис. 2г. Замыкающие тыльные скачки уплотнения могут располагаться как в непосредственной близости обтекаемого профиля, так и в дальнем следе.

Конфигурация, состоящая из нескольких скачков уплотнения и волн разрежения, приведена на рис. 3а. Оба скачка уплотнения, образующие лямбда-ножку, в отличие от ранее рассмотренных случаев, являются косыми. Течение за тыльным скачком остается сверхзвуковым, что приводит к формированию веера волн разрежения. Дополнительная сверхзвуковая зона на подветренной стороне замыкается прямым скачком уплотнения, взаимодействующим со следом за профилем. На наветренной стороне от задней кромки возникает еще один веер волн разрежения, и затем прямой скачок.

С увеличением числа Маха данная конфигурация трансформируется (рис. 3б). Скачки уплотнения сдвигаются ниже по потоку, так что тыльный скачок на подветренной стороне взаимодействует со следом за профилем. В следе образуется прогиб, приводящий к образованию веера волн сжатия, переходящих в тыльный скачок. На нижней стороне аналогично предыдущему случаю образуется веер волн разрежения от задней кромки, но скачки уплотнения здесь имеют характерную лямбда-ножку.

Режим обтекания, где реализовывалось взаимодействие хвостовых ударных волн со скачком уплотнения, вызванным отрывом потока вблизи задней кромки, представлен на рис. 3в. Число Маха набегающего потока было достаточно высоким $M_\infty = 0.9$, большую интенсивность имеют не только скачки уплотнения, но и контактный разрыв, располагающийся над следом за профилем.

С увеличением угла атаки точка отрыва смещается к носу профиля (рис. 3г), что приводит к изменению конфигурации локальных сверхзвуковых зон и скачков уплотнения. Отрыв занимает всю подветренную сторону. Над задней кромкой образуется веер волн сжатия, переходящий в косой хвостовой скачок уплотнения. Образование скачков уплотнения ниже следа также происходит при наличии волн разрежения и сжатия.

На рис. 3д и 3е представлен нестационарный режим обтекания, возникающий из-за колебаний в следе за профилем. На подветренной стороне профиля зарождается ряд отдельных вихрей. Сверхзвуковые зоны и сверху и снизу распространяются далеко за профиль. Замыкающие скачки уплотнения взаимодействуют со следом. Колебания всего поля течения приводят к небольшим осцилляциям скачка уплотнения вблизи носика профиля.

С целью идентификации отдельных режимов обтекания в настоящей работе на основе анализа полученных результатов, экспериментальных и расчетных данных других авторов предложены классификационные критерии, которые состоят из нескольких групп.

1. Наличие локальных сверхзвуковых зон (ЛСЗ):

- полностью дозвуковое течение;
- возникновение и исчезновение ЛСЗ во время колебания поля течения;
- наличие ЛСЗ для всех моментов времени.

2. Стационарность или нестационарность поля течения:

- стационарное обтекание (безотрывное обтекание либо небольшая отрывная стационарная зона вблизи задней кромки или скачка уплотнения);
- автоколебания ударной волны;
- нестационарное закритическое обтекание (точка отрыва совершает колебания на подветренной стороне);

- квазистационарний режим (точка отрыва фіксована либо совершает малые колебания вблизи носика профіля);
- нестационарні колебання, вызванні взаємодією скачков уплотнення со следом за профілем.

3. Конфігурації скачков уплотнення:

- безскачковий режим (дозвукове обтекание либо ЛСЗ слабой интенсивности);
- односкачковий режим с криволинейной ударной волной;
- односкачковий режим с лямбда-ножкой;
- двухскачковий режим с криволинейными ударными волнами;
- двухскачковий режим с хвостовыми скачками уплотнення;
- двухскачковые режимы со смешанным расположением ударных волн;
- расположение скачков уплотнення за аэродинамическим профілем;
- сложные конфигурации скачков уплотнення, включающие систему ударных волн, волн разрежения и сжатия.

4. Характер взаимодействия скачка уплотнення с пограничным слоем:

- стационарное безотрывное взаимодействие;
- стационарное взаимодействие с отрывом потока;
- нестационарное взаимодействие, связанное с автоколебаниями ударной волны;
- нестационарное взаимодействие, связанное с системой вихрей в отрывной зоне на подветренной стороне;
- взаимодействие скачков уплотнення со следом за профілем;
- взаимодействие системы скачков уплотнення с пограничным слоем и следом за профілем.

5. Изменения по времени значений интегральных аэродинамических характеристик (АДХ):

- стационарные значения АДХ;
- периодические либо хаотические значения колебаний АДХ;
- амплитуда колебаний значений АДХ.

На основе полученных данных в соответствии с предложенными критериями составлена «план-карта» расположения отдельных режимов для чисел Маха $M_x = 0.2 \div 0.95$ и углов атаки $\alpha = 0^0 \div 40^0$ (рис. 4).

Полностью дозвуковое течение находится в нижней части «план-карты» и соответствует умеренным числам Маха набегающего потока.

Переход через значения критического числа Маха для углов атаки $\alpha \leq 15^0$ сопровождается возникновением стационарного режима с локальными сверхзвуковыми зонами небольшой интенсивности при отсутствии скачков уплотнення. Для закритических углов атаки наблюдался нестационарный режим, когда в процессе колебания ЛСЗ слабой интенсивности исчезает, а потом появляется вновь.

Односкачковый режим с криволинейной ударной волной (рис. 2а) может происходить как с отрывом потока, так и без него в зависимости от интенсивности ударной волны. Появление скачка с характерной лямбда-ножкой (рис. 2б) всегда сопровождается отрывной зоной большой протяженности.

Режим с двухскачковой конфигурацией (рис. 2в) соответствует несколько большим числам Маха набегающего потока и меньшим углам атаки. Здесь также наблюдаются течения с отрывом пограничного слоя и безотрывные. К этому режиму относится конфигурация, в которой скачок на наветренной поверхности является хвостовым, а на подветренной стороне образуется характерная лямбда-ножка (рис. 2г).

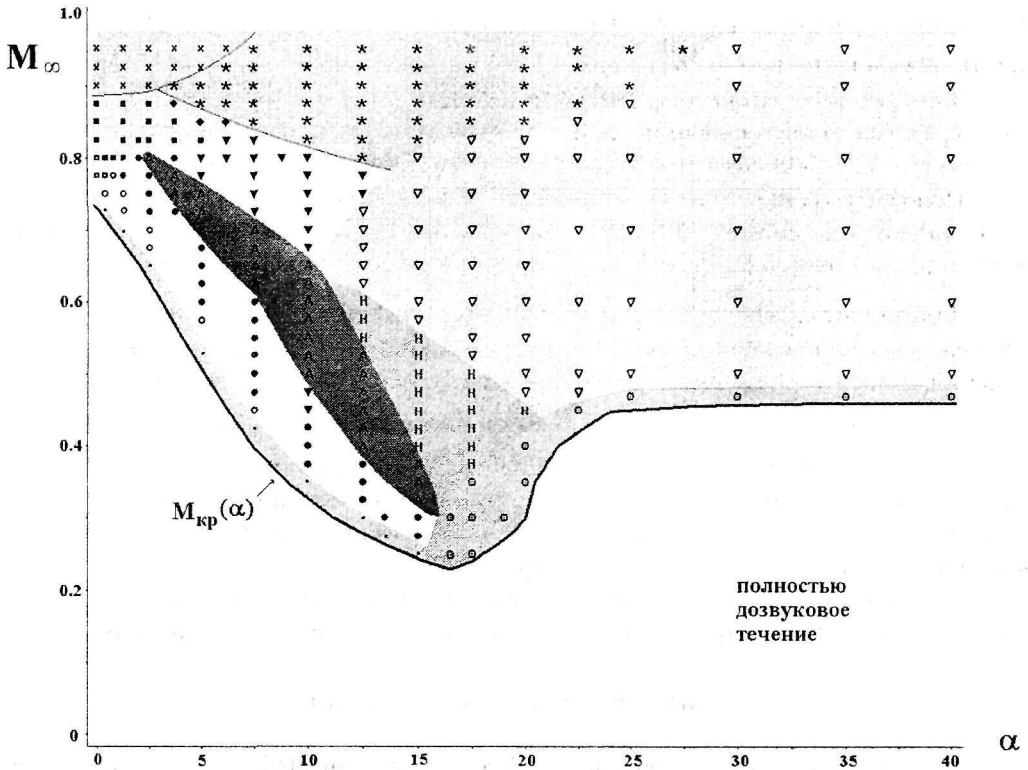


Рис. 4. «План-карта» расположения режимов обтекания профиля NASA 0012

Таблица 1

Условные обозначения режимов обтекания профиля NASA 0012

Символ	Описание конфигурации
■	ЛСЗ слабой интенсивности без скачков
○	Односкачковый режим (без отрыва)
●	Односкачковый режим (с отрывом)
▼	Односкачковый режим с лямбда-ножкой
▲	Автоколебания скачка уплотнения
□	Двухскачковый режим (без отрыва)
■	Двухскачковый режим (с отрывом)
◆	Двухскачковый режим (λ + хвостовой)
×	Двухскачковый режим с хвостовыми скачками
*	Системы ударных волн и волн разрежения
Н	Неустойчивость отрыва на подветренной стороне
▽	Колебания в следе за профилем
○	Возникновение и исчезновение ЛСЗ

При числах Маха набегающего потока $M_\infty = 0.9 \div 0.95$ и углах атаки $\alpha \leq 6.2^\circ$ реализуются режимы с хвостовыми скачками уплотнения (рис. 2д, 2е).

Системы ударных волн, волн сжатия и разрежения наблюдались при числах Маха $M_\infty \geq 0.8$ и углах атаки $\alpha \geq 3.7^\circ$ (рис. 3а – 3г). Характерной

особенностью данного режима является сохранение стационарности поля течения вплоть до углов атаки $\alpha = 28^0$.

Зона автоколебания ударных волн находится полностью в рамках односкачкового режима. Идентификация данного режима осуществлялась по периодическим колебаниям АДХ большой амплитуды для докритических углов атаки.

Непосредственно к нему примыкает режим неустойчивости с распадением отрывной зоны на систему вихрей и хаотическим изменением АДХ. При больших углах атаки реализуется режим с колебаниями в следе за профилем (рис. 3д, 3е).

Заключение. На основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса проведены численные параметрические исследования трансзвуковых течений вблизи аэродинамического профиля NASA 0012 в диапазоне чисел Маха $M_\infty = 0.2 \div 0.95$, углов атаки $\alpha = 0^0 \div 40^0$ и числе Рейнольдса $Re = 3.91 \cdot 10^6$.

Рассмотрены физические особенности взаимодействия ударной волны с турбулентным пограничным слоем для режима автоколебания скачка уплотнения на профиле NASA 0012, выработаны классификационные признаки отдельных режимов обтекания аэродинамических профилей.

Составлена «карта» режимов трансзвукового турбулентного обтекания профиля NASA 0012 на плоскости «число Маха набегающего потока - угол атаки».

Библиографические ссылки

1. **Nieuwland G. Y.** Transonic airfoils: Recent developments in theory, experiment and design / G. Y. Nieuwland, B. M. Spee // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – V.5. – 1973. – P. 119–150.
2. **Mason W. H.** Configuration aerodynamics, Transonic aerodynamics of airfoils and wings / W. H. Mason // *Course of Lectures.* – 2006. – 24 p.
3. **Петров К. П.** Аэродинамика элементов летательных аппаратов / К. П. Петров. – М., 1985, 272 с.
4. **Коул Дж.** Трансзвуковая аэродинамика / Дж. Коул, Л. Кук // М., 1989. – 360 с.
5. **Приходько А. А.** Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и теплообмене / А. А. Приходько // –К., 2003. – 380 с.
6. **Pulliam T. H.** Efficient solution methods for the Navier-Stokes equations / T. H. Pulliam // *Lecture notes for the von Karman Institute for Fluid Dynamics. Lecture Series, Von Karman Institute, Belgium, 1985, 98 p.*
7. **Tannehill J. C.** Computational fluid mechanics and heat transfer / J. C. Tannehill, D. A. Anderson, R. H. Pletcher. – New York, Taylor & Francis, 1997. – 785 p.
8. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М., 1974. – 711 с.
9. **Spalart P. R.** A one-equation turbulence model for aerodynamic flow / P. R. Spalart, S. R. Allmaras – AIAA Paper, № 92-0439, 1992. – 22 p.
10. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкости / К. Флетчер – М., 1991. – Т.1. – 501 с.; –Т.2. – 552 с.
11. **Roe P. L.** Characteristic-based schemes for the Euler equations / P. L. Roe *Annual review of fluid mechanics.* – V. 18. – 1986, – P. 337-365.
12. **Jameson A.** Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics 1: Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence / A. Jameson // *International Journal of Computational Fluid Dynamics,* – V.4. – 1995. – P. 171-218.

13. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский – М. – 1977. – 656 с.
14. Полевой О. Б. Численное моделирование управления отрывом сверхзвукового трехмерного потока при обтекании стреловидных углов сжатия / О. Б. Полевой, А. А. Приходько // *Аэрогидродинамика: проблемы и перспективы*, –Х., Вып. № 2. – 2006. – С. 101–119.
15. Приходько А. А. Численное исследование возникновения и развития локальных сверхзвуковых зон при дозвуковом обтекании профиля NASA 0012 / А. А. Приходько, О. Б. Полевой, А. А. Пилипенко // *Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка*, 2008. – Т.16. – № 5. –Вип.11. –Т.1, – С. 19-30.
16. Приходько А. А. Численное моделирование нестационарных трансзвуковых турбулентных отрывных течений при обтекании профилей / А. А. Приходько, О. Б. Полевой, А. А. Пилипенко // *Тези науково-практичної конференції «Комп'ютерна гідромеханіка»*. – Київ. – 2008. – С. 41.
17. Бартон Дж. Т. Влияние вязкости и погрешностей, свойственным численным методам, на результаты расчета обтекания профиля при больших углах атаки / Дж. Т. Бартон, Т. Х. Пуллиам // *Аэрокосмическая техника*. – 1987. – № 2, – С. 153–163.
18. McCorskey W. An experimental study of dynamic stall on advanced airfoil sections. –V. 1: Summary of experiment / W. McCorskey, K. McAlicter, L. Carr, S. Pucci // NASA TM 84245. – 1982. – 143 p.
20. Пилипенко А. А. О значениях критического числа Маха набегающего потока при трансзвуковом обтекании аэродинамических профилей / А. А. Пилипенко // *Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка*. – 2009. – Т.17. – № 5. – Вип. 13. – Т.1. –С. 17-27.
21. Приходько А. А. Режимы трансзвукового обтекания аэродинамических профилей / А. А. Приходько, О. Б. Полевой, А. А. Пилипенко // *Тезисы IX международной школы семинара «Модели и методы аэродинамики»*. – Евпатория, 2009. –С. 142-144.

Надійшла до редколегії 24.05 10

УДК 532.516

О. Б. Полевой

Институт транспортных систем и технологий НАН Украины «Трансмаг»

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРЕПЯТСТВИЯ В УСЛОВИЯХ ТЕПЛООБМЕНА С ОБТЕКАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Для дослідження течії навколо кругового циліндра, встановленого на пластині, використані трьохвимірні осередненні за Рейнольдсом рівняння Нав'є-Стокса, записані у довільних криволінійних координатах. Замикання вихідної системи рівнянь здійснювалося за допомогою диференціальної моделі Spalart-Allmaras, модифікованої для ефектів стисливості. Розв'язок системи рівнянь отримано за допомогою неявного кінцево-об'ємного методу, що базується на схемі Roe. Розглянуто вплив охолодження та підігріву поверхні на структуру й характеристики трьохвимірного відриву надзвукового турбулентного примежевого шару, викликаного просторовою ударною хвилею.

Ключові слова: надзвуковий відрив, примежевий шар, турбулентність, рівняння Нав'є-Стокса, кругового циліндра на пластині

Для исследования обтекания кругового цилиндра, установленного на плоской пластине, использованы трехмерные осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса, записанные в произвольных криволинейных координатах. Замыкание исходной системы уравнений осуществлялось с помощью дифференциальной модели Spalart-Allmaras, модифицированной для учета эффектов сжимаемости. Решение системы уравнений получено с помощью неявного конечно-объемного метода, базирующегося на схеме Roe. Рассмотрено влияние охлаждения и подогрева обтекаемой поверхности на структуру и характеристики трехмерного отрыва сверхзвукового турбулентного пограничного слоя, вызванного пространственной ударной волной.

Ключевые слова: сверхзвуковой отрыв, пограничный слой, турбулентность, уравнения Навье-Стокса, круговой цилиндр на пластине

Three-dimensional Reynolds Averaged Navier-Stokes equations in generalized curvilinear coordinates were used for investigation of flow around vertical circular cylinder installed on a flat plate. The closure of the initial equations was made by modified for compressible flows Spalart-Allmaras differential model of turbulent viscosity. Solution of the equations system was obtained with finite-volume method based on Roe's scheme. Influence of cooling and heating of streamlined surface on the structure and parameters of three-dimensional supersonic turbulent boundary layer separation, initiated by spatial shock wave, is considered.

Key words: supersonic separation, boundary layer turbulence, Navier-Stokes equations, circular cylinder on a flat plate

Задачі дослідження структури та управління отрывом турбулентних сверхзвукових потоків актуальні при проектуванні транс- і сверхзвукових летательних апаратів, газотурбінних установок, прямооточних воздушно-реактивних двигателів, створенні теплозахити. Ведущою дослідницькою роллю тут грає натурний експеримент, дозволяючий виявити основні фізическі закономірності даного класу течій. В то же время, развитие апаратів методів вичислительной аэродинамики позволило проведение численних експериментів, взаємодополняющих возможности фізическіх досліджень. Наряду с обработкой и интерпретацией результатов испытаний в аэродинамических трубах и летных експериментах применение компьютерных технологий на самых ранних этапах проектирования позволяет оптимизировать форму летательного апарата, улучшить аэродинамическое качество, снизить стоимость как конструкторских работ, так и стоимость конечного продукта

К настоящему времени проведен ряд исследований влияния условий теплообмена на отрыв сверхзвукового пограничного слоя в двумерных плоских и осесимметричных течениях. Выявлены некоторые закономерности для структуры течения, влияния вверх по потоку, положения точки отрыва для ламинарных и турбулентных вязко-невязких взаимодействий [1–4]. Несколько другая ситуация сложилась для пространственных течений. Почти полностью отсутствуют результаты по проблеме управления пространственными взаимодействиями посредством изменения характеристик пограничного слоя. Методические исследования влияния условий теплообмена на структуру сверхзвукового пространственного отрыва потока не проводились, более того, судя по обзору литературы [5–11], такой вопрос фактически не ставится.

Постановка задачи. Целью настоящей работы является численное исследование структуры трехмерного сверхзвукового турбулентного отрывного течения, вызванного взаимодействием ударной волны с пограничным слоем в условиях теплообмена с обтекаемой поверхностью.

Ударная волна генерируется круговым цилиндром, установленным вертикально на плоской пластине (рис. 1). Число Маха невозмущенного потока составляло $M_\infty = 2.5$; диаметр цилиндра $D = 3.81$ см; толщина набегающего турбулентного пограничного слоя $\delta_0 = 2.5$ см; число Рейнольдса, определенное по величине δ_0 , составило $Re_\delta = 4.85 \cdot 10^5$ в соответствии с экспериментальными данными [13]. Условия теплообмена определялись отношением T_w/T_r в диапазоне от 0.4 до 1.3.

Здесь T_w – температура поверхности, $T_r = T_\infty \left(1 + r \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)$ – температура восстановления с коэффициентом восстановления $r = 0.89$ для турбулентных течений. Температура всех поверхностей полагалась одинаковой.

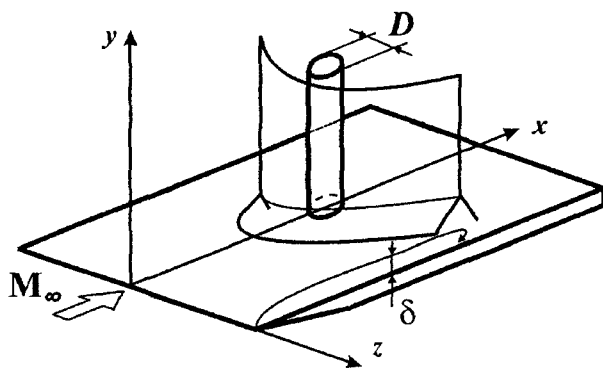


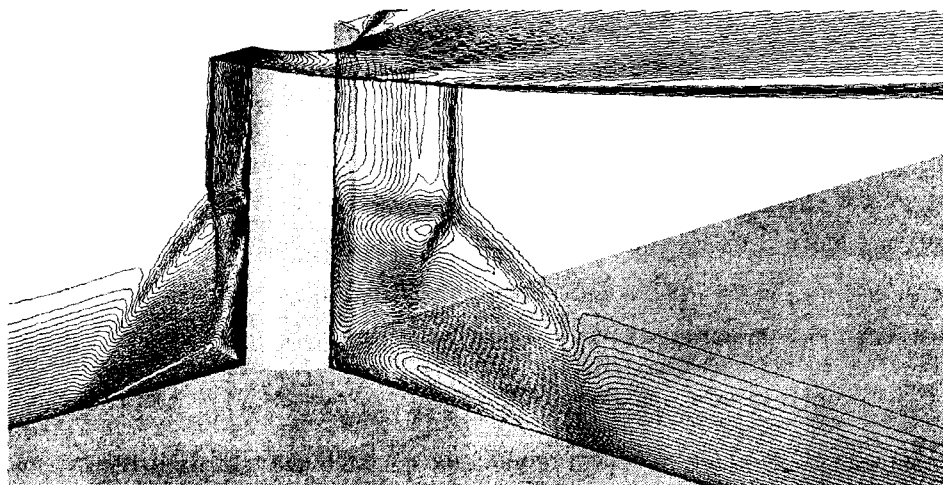
Рис.1. Схема обтекания цилиндрического препятствия, установленного на плоской пластине

Численное моделирование проводилось на основе решения полных трехмерных нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, записанных для произвольных криволинейных координат. Для расчета динамического коэффициента турбулентной вязкости использовалась однопараметрическая дифференциальная модель Spalart-Allmaras с дополнительным слагаемым, учитывающим влияние сжимаемости потока. Дискретизация исходной системы уравнений выполнена с помощью метода контрольного объема. Расчеты конвективных слагаемых на гранях проводились на основе схемы Roe с симметричным

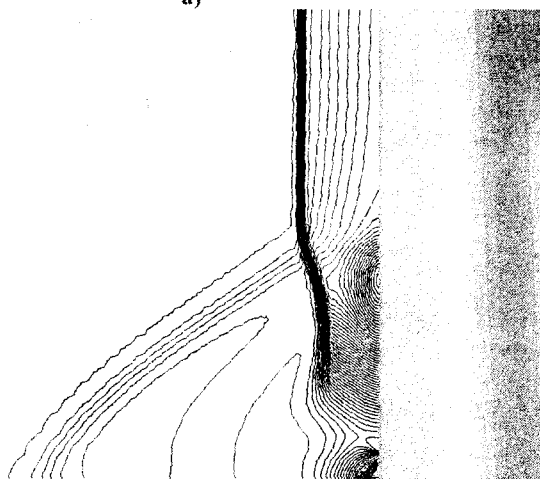
ограничителем второго порядка схем SLIP, CUSP. Используемый численный алгоритм подробно изложен в [13].

Результаты расчетов. Расчеты проводились на сетке, содержащей $150 \cdot 100 \cdot 200 = 3 \cdot 10^6$ узлов. Для достижения установившегося решения требовалось $10000 \div 12000$ итераций на каждый вариант расчета при числах Куранта $CFL = 1100 \div 1400$, что составляло примерно $300 \div 400$ часов процессорного времени РС Athlon 2.4ГГц.

Общая структура взаимодействия может быть иллюстрирована распределениями локальных чисел Маха в расчетной области, давления в плоскости симметрии перед цилиндром, а также распределениями предельных линий тока на поверхности пластины (рис. 2, 3).



а)



б)

Рис.2. Изолинии чисел Маха в расчетной области (а) и распределение давления в плоскости симметрии перед цилиндром

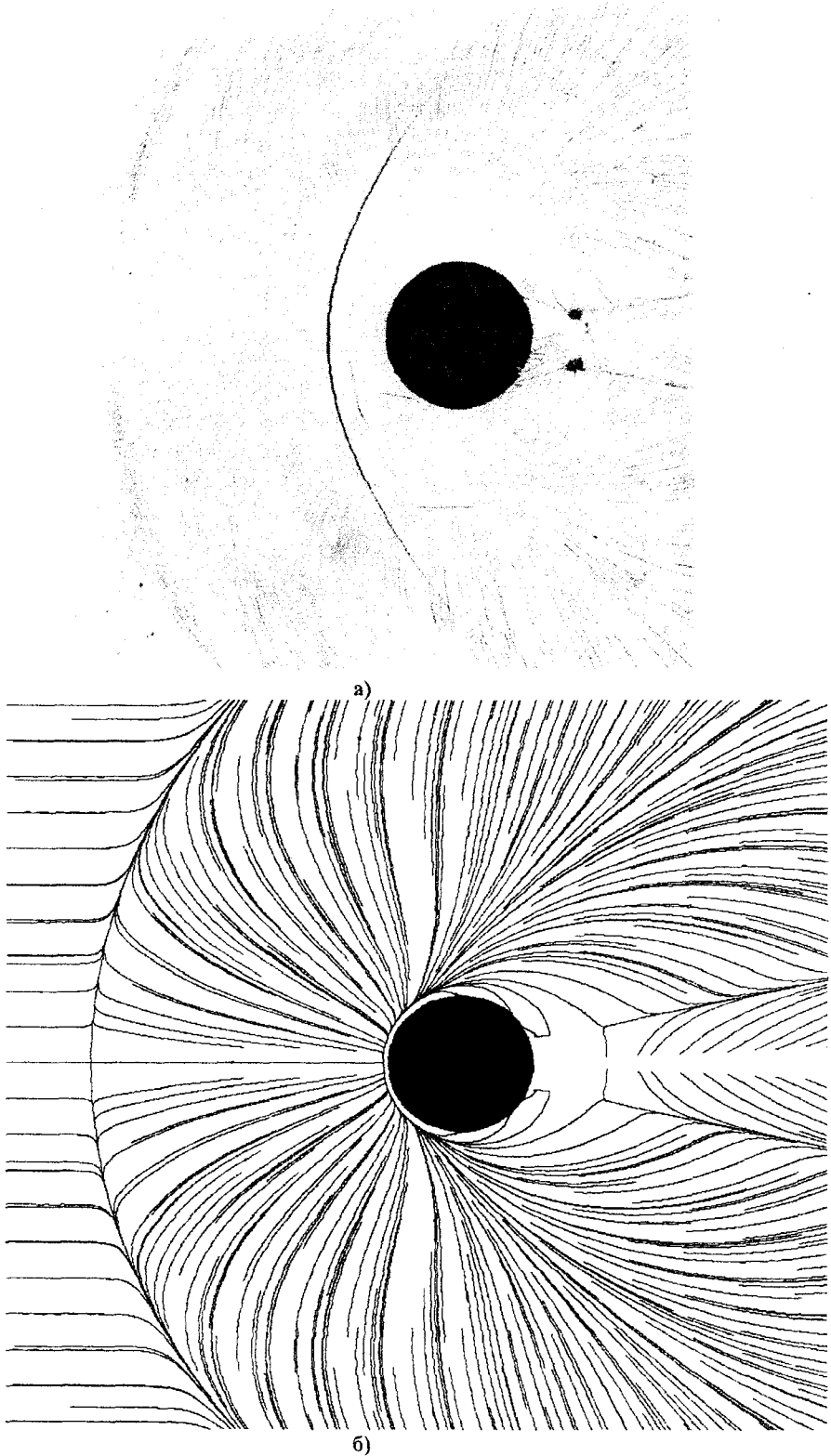


Рис.3. Распределение предельных линий тока на поверхности пластины
а) экспериментальные данные [12, 14]; б) расчет настоящей работы

В верхней части течение соответствует двумерному обтеканию кругового цилиндра сверхзвуковым потоком. Здесь образуется отошедшая головная ударная волна и веер волн разрежения за цилиндром. Наличие дозвуковой зоны в пограничном слое приводит к передаче возмущений вверх по потоку. Вблизи пластины при взаимодействии с турбулентным пограничным слоем головная ударная волна разделяется на скачок отрыва и тыльный скачок, образуя тройную точку с выходящим из нее контактным разрывом. В распределении давления формируются два локальных пика (рис. 2б). Один из них расположен на поверхности цилиндра несколько ниже поверхности контактного разрыва, обусловленный струйным характером присоединения потока в данной области. Второй пик давления вызван присоединением основного отрывного течения на плоской пластине непосредственно перед цилиндром.

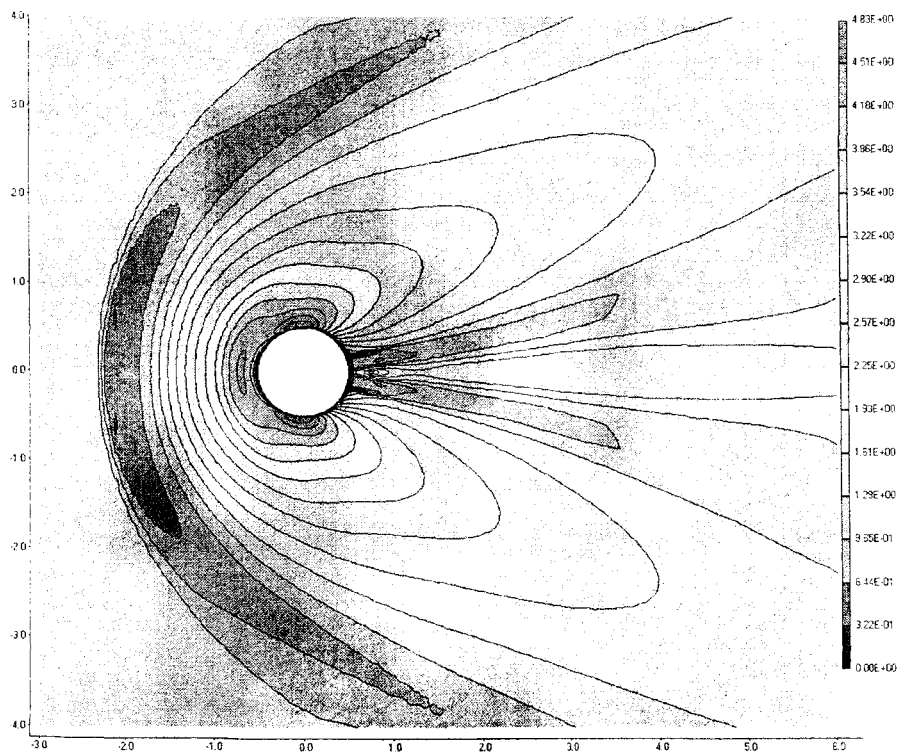
Перепад давления на головной ударной волне достаточно велик для образования отрывного течения. С точки зрения топологии отрыва потока образуется классический подковообразный вихрь (рис. 3). Нижняя часть набегающего пограничного слоя вовлекается в основной отрывной вихрь, который распространяется вдоль линии скачка уплотнения, соответствующей невязкому течению. Следует заметить, что ядро отрывного вихря является сверхзвуковым. Присоединение потока происходит на пластине в непосредственной близости от цилиндра, затем линия растекания отдалается под углом $\sim 35^{\circ} \div 40^{\circ}$. Ниже линии присоединения образуется угловой вихрь, вращающийся в сторону, противоположную основному отрыву. Взаимодействие волн разрежения приводит к образованию двух смерчеобразных вихрей, поднимающихся от поверхности пластины вверх вдоль тыльной поверхности цилиндра. Скачки уплотнения в следе за цилиндром приводят к формированию еще одного хвостового подковообразного отрывного течения.

Сравнение экспериментальных [12; 14] и численных результатов распределения предельных линий тока на поверхности пластины показывает хорошее согласование в расположении как первичных, так и вторичных элементов структуры взаимодействия (рис. 3).

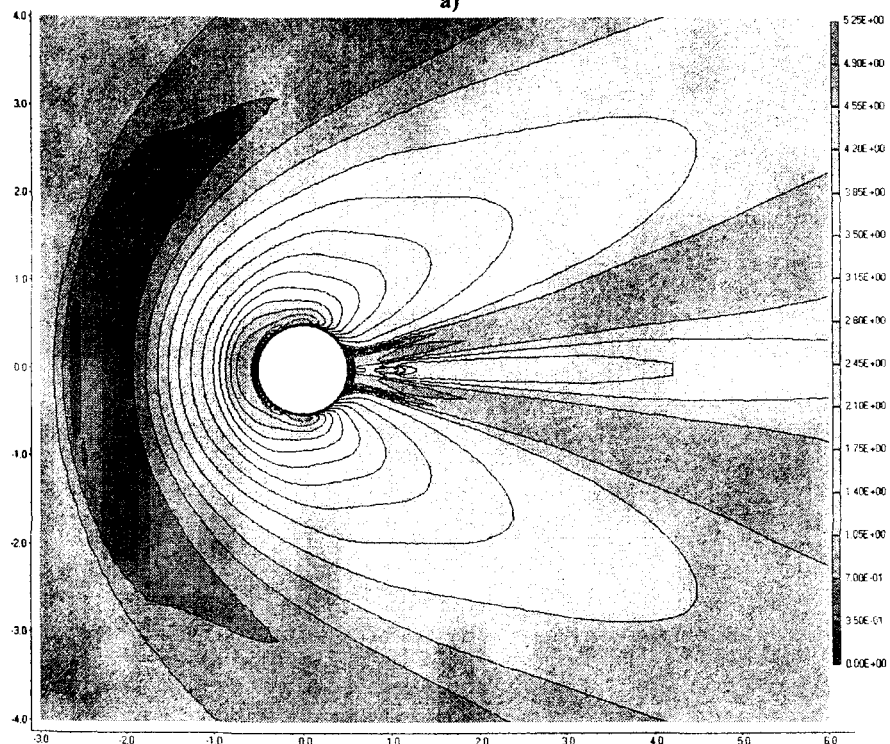
Влияние теплообмена с обтекаемой поверхностью наглядно проявляется в распределениях давления и модуля коэффициента трения на поверхности пластины, а также давления и коэффициента трения по поверхности пластины в плоскости симметрии перед цилиндром (рис. 4–6).

При охлаждении происходит увеличение плотности газа вблизи твердой стенки, и, соответственно, его инерционности. Уменьшается дозвуковая зона набегающего пограничного слоя, меняется баланс сил в вязко-невязком взаимодействии, отрыв наступает несколько позже. Это проявляется в смещении линии отрыва и скачка отрыва ближе к углу сжатия. В пространственный вихрь вовлекается меньший объем газа, жгут линий тока становится тоньше. Это проявляется в смещении линии отрыва ближе к цилиндру (рис. 6б). Линия присоединения также смещается ниже по потоку, однако это смещение незначительно, и, в целом, отрывная зона уменьшается в размерах.

Влияние теплообмена проявляется также и для значений давления на обтекаемой поверхности (рис. 6а). В зависимости от условий теплообмена изменяется влияние вверх по потоку. С уменьшением температуры поверхности значение «плато» давления увеличивается, что связано с увеличением интенсивности скачка отрыва.



а)



б)

Рис. 4. Распределение модуля коэффициента трения по поверхности пластины при $T_w/T_r = 0.4$ (а) и $T_w/T_r = 1.3$ (б)

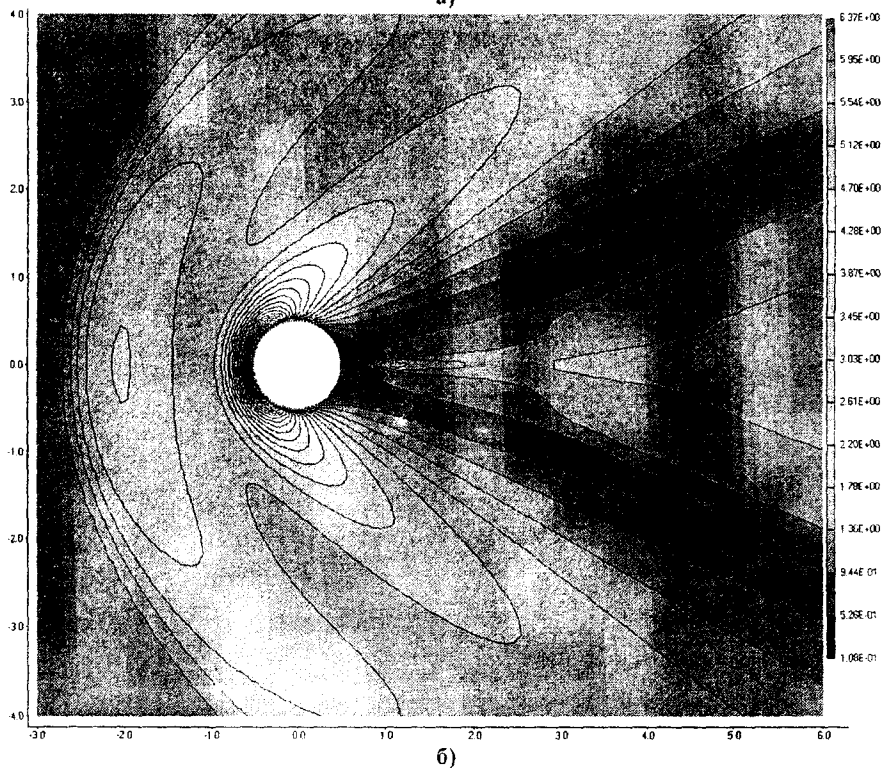
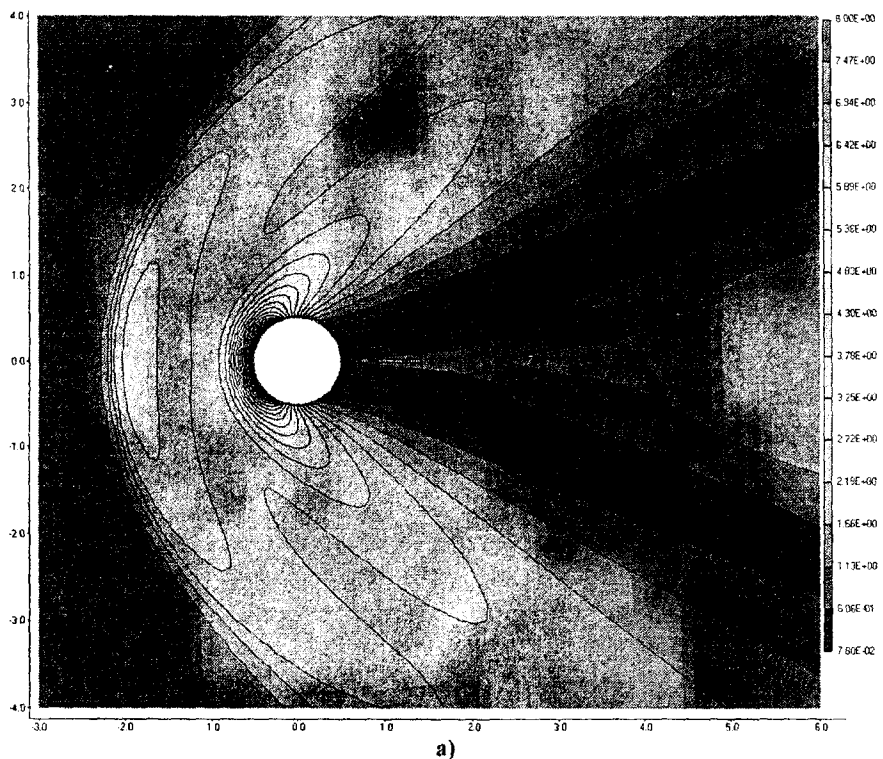
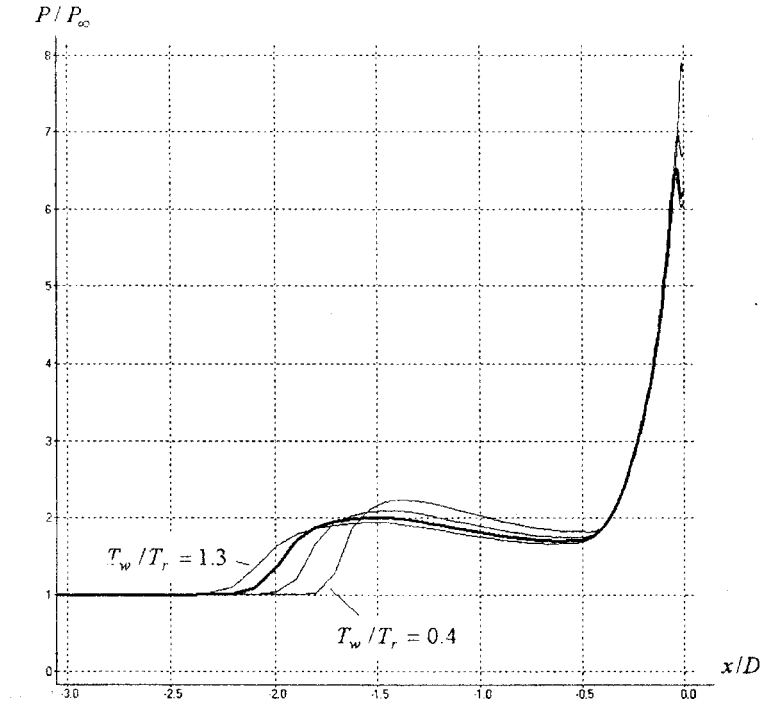
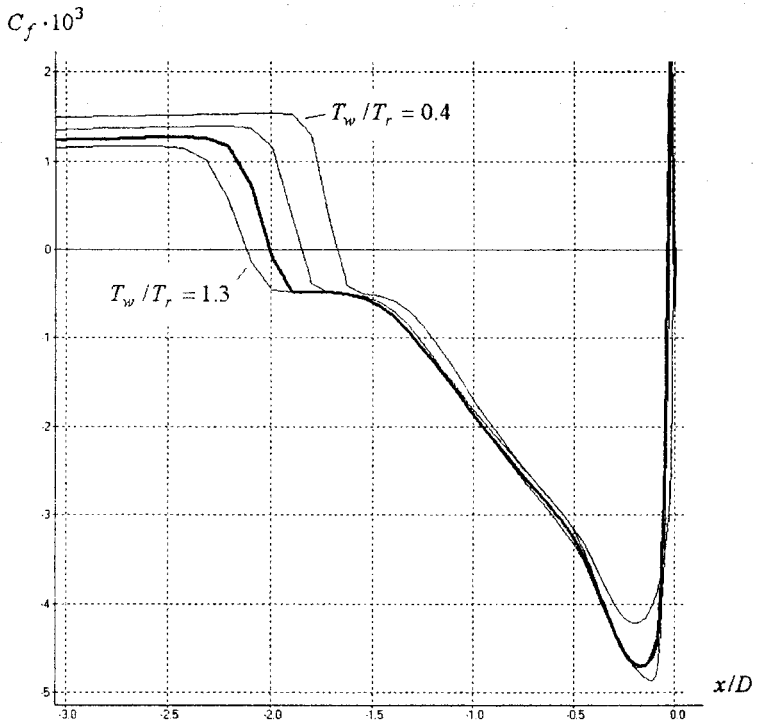


Рис. 5. Распределение давления по поверхности пластины при $T_w/T_r = 0.4$ (а) и $T_w/T_r = 1.3$ (б)



a)



б)

Рис. 6. Распределение давления (а) и коэффициента трения (б) по поверхности пластины в плоскости симметрии перед цилиндром

Было зафиксировано смещение тройной точки скачков уплотнения. Это обусловлено тем, что круговым цилиндром, установленным вертикально на плоской пластине, генерирует существенно криволинейная головная ударная волна. Изменение интенсивности скачка отрыва приводит к смещению «лямбда-ножки» в пространстве.

Кроме того, происходит некоторое повышение давления в зоне присоединения отрывного вихря. Это объясняется уменьшением геометрических размеров углового вихря, вращающегося в сторону, противоположную основному отрыву, а также увеличением угла наклона присоединяющегося потока.

Увеличение температуры обтекаемой поверхности имеет обратную тенденцию. Подогрев газа приводит к уменьшению плотности газа в пристеночном слое, утолщению дозвуковой области пограничного слоя. Возмущения проникают выше в набегающий поток, и, соответственно, отрыв возникает раньше. Частицы газа, которые при более низких температурах стенки проходили над отрывной зоной, теперь вовлекаются в отрывное вихревое движение.

Увеличение геометрических размеров отрывного вихря приводит к ускорению потока в его ядре. Это проявляется в некотором росте модуля коэффициента трения на поверхности пластины. Если для значения температурного параметра $T_w/T_r = 0.4$ максимальное значение коэффициента трения на пластине составляло $C_{f \max} = 4.83 \cdot 10^{-3}$, то при подогреве до $T_w/T_r = 1.3$ его максимальное значение на пластине увеличилось до $C_{f \max} = 5.25 \cdot 10^{-3}$. Кроме того, подогрев пластины приводит к смещению вниз по потоку хвостового подковообразного отрывного течения и смерчеобразных вихрей, расположенных вдоль тыльной поверхности цилиндра.

Вместе с тем, следует отметить, что общая интенсивность сверхзвукового отрывного течения для данного вида взаимодействия ударной волны с турбулентным пограничным слоем слабо зависит от теплообмена с обтекаемой поверхностью.

В целом, механизм влияния условий теплообмена на пространственный отрыв сверхзвукового турбулентного пограничного слоя аналогичен двумерному случаю [1 – 4]. Однако результирующее воздействие оказывается существенно другим. Если в двумерных течениях за счет охлаждения можно добиться значительного уменьшения отрывной зоны, а при сравнительно небольших перепадах давления добиться безотрывного течения, то в трехмерном случае этого не происходит. Прежде всего, для трехмерного случая сохраняется пространственная структура отрывного течения, и, следовательно, неограниченный рост ее размеров. Несмотря на ряд изменений параметров течения, трехмерный отрывной вихрь сохраняет свою топологическую структуру, обусловленную общей картиной пространственного вязко-невязкого взаимодействия.

Заключение. Проведены численные эксперименты по исследованию отрыва пространственного сверхзвукового турбулентного пограничного слоя при обтекании кругового цилиндра, установленного вертикально на плоской пластине. Выполнен анализ влияния теплообмена на структуру трехмерного сверхзвукового отрывного течения, вызванного взаимодействием ударной волны с пограничным слоем. Показано, что механизм влияния теплообмена на структуру сверхзвуковых отрывных течений является фактически одинаковым как для двумерных, так и для трехмерных случаев. В тоже время, результирующее воздействие теплообмена для двумерных и трехмерных течений принципиально разное.

Библиографические ссылки

1. Бэк. Влияние охлаждения стенки на взаимодействие скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем / Бэк, Каффел // Ракетная техника и космонавтика. – 1976. – Т. 14. – № 4. – С. 134-142.
2. Спейд Ф. Возникновение отрыва сверхзвукового турбулентного пограничного слоя и влияние теплообмена на это явление / Ф. Спейд, Ж. Фришет // Ракетная техника и космонавтика. – 1972. – Т. 10. – № 7. – С. 80-89.
3. Приходько А. А. Влияние условий тепло- и массообмена на развитие двумерных турбулентных отрывных течений / А.А. Приходько, О.Б. Полевой // Инж.-физ. журн. – 1996. – 69. – № 4. – С. 647-656.
4. Приходько А. А. Управление отрывом турбулентного сверхзвукового потока с помощью тепло- и массообмена / А.А. Приходько, О.Б. Полевой // Промышленная теплотехника. – 2007. – 29. – № 1. – С.15-20.
5. Сеттлс Г. С. Пространственные взаимодействия ударных волн с пограничными слоями / Г.С. Сеттлс, Д.С. Доллинг // Аэродинамика ракет; под ред. М. Хемша, Дж. Нилсена. – М., 1989. – Т. 1. – 426 с.; 1989. – Т. 2. – 510 с.
6. Settles G. S. Swept shock/boundary-layer interactions — scaling laws, flow field structure, and experimental methods / G.S. Settles // AGARD Report № 792. – 1993. – Ch. 1. – 40 p.
7. Knight D. D. Shock wave/boundary layer interactions in high Mach number flows. A critical survey of current numerical prediction capabilities / D.D. Knight, G. Degrez // AGARD Report AR-319. – 1998. – V. 2. – 35 p.
8. Dolling D. Fifty years of shock wave boundary layer interaction research: what next? / D. Dolling // AIAA Journal. – 2001. – V. 39. – № 8. – P. 1517-1531.
9. Knight D. Advances in CFD prediction of shockwave turbulent boundary layer interactions / D. Knight, H. Yan, A. Panaras, A. Zheltovodov // Progress in aerospace sciences. – 2003. – V. 39. – P. 121-184.
10. Zheltovodov A. A. Advances and problems in modeling of shock wave turbulent boundary layer interactions. / A. A. Zheltovodov // Proceedings of XII International conference ICMAR. – Novosibirsk, 2004. – P. 225-237.
11. Zheltovodov A. A. Some advances in research of shock wave turbulent boundary layer interactions / A. A. Zheltovodov // AIAA Pap. – 2006. – №. 0496. – 25 p.
12. Сидней Р. Отрыв перед выступающими элементами в сверхзвуковом турбулентном пограничном слое / Р. Сидней, К. Китченс // Ракетная техника и космонавтика. – 1977, № 4. – С. 118-122.
13. Полевой О. Б. Численное моделирование управления отрывом сверхзвукового трехмерного потока при обтекании стреловидных углов сжатия / О. Б. Полевой, А. А. Приходько // Аэрогидродинамика: проблемы и перспективы. – Харьков. – 2006. – С. 101-119.
14. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа./ М. Ван-Дайк – М., 1986. – 182 с.

УДК 532.516

А. А. Приходько, Е. Б. Рогоза

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

КОНЕЧНО-ОБЪЕМНЫЕ СХЕМЫ РАСЧЕТА КОНВЕКТИВНЫХ ПОТОКОВ ПОВЫШЕННОЙ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ И ИХ СРАВНЕНИЕ НА ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ РИМАНА

Розглянуто алгоритми застосування чисельних схем розрахунку конвективних потоків. Наведено результати порівняння п'яти методик обчислення векторів потоку через грань контрольного об'єму на двовимірних задачах Римана.

Ключові слова: чисельні схеми, задача Римана, рівняння Ейлера

Рассмотрено алгоритмы применения численных схем расчета конвективных потоков. Приведены результаты сравнения пяти методик вычисления векторов потоков через грань контрольного объема на двумерных задачах Римана.

Ключевые слова: численные схемы, задача Римана, уравнения Эйлера.

Convective current calculation numerical schemes application algorithms are examined herein. Results of comparison are provided for five computing techniques of current vectors through control volume on two-dimensional problems Riemann.

Key words: numerical schemes, Riemann problem, Euler equations.

Введение. Решение задач газовой динамики в широком диапазоне чисел Маха предъявляет повышенные требования к используемому численному методу, который, с одной стороны, должен достаточно точно воспроизводить разрывные решения, а с другой стороны описывать динамику малых возмущений на фоне среднего течения. Указанные требования являются противоречивыми, поскольку описание динамики малых возмущений требует понижение схемной диссипации, что приводит к нежелательным осцилляциям решения в областях больших градиентов искомым функций [1; 2].

Для преодоления этих трудностей разработаны конечно-объемные схемы переменного порядка аппроксимации на грани расчетной ячейки, позволяющие получать одновременно точные и монотонные решения. В тех областях потока, где решение является гладким, применяются схемы повышенного порядка. Для того чтобы не допускать возникновения нежелательных осцилляций решения в окрестности разрывов, используются схемы с искусственной вязкостью или монотонные схемы низкого порядка. К таким схемам относятся *FCT*-алгоритм (*Flux Corrected Transport*), различные типы *TVD*-схем (*Total Variation Diminishing*), схемы типа *ENO* и *WENO* [7; 8].

Особый интерес вызывают так называемые противопоточные конечно-объемные схемы, обладающие численной диссипацией. Схемы данного класса можно разделить на схемы *FDS* (*Flux Difference Splitting*), и схемы *FVS* (*Flux Vector Splitting*) [14].

В данной работе сравниваются *FDS* и *FVS* схемы на двумерных задачах Римана, с целью выбора схемы с наилучшими разрешающими способностями. Несмотря на то, что приведенные схемы разработаны для дискретизации уравнений Эйлера, они могут использоваться для дискретизации уравнений Навье–Стокса с учетом расщепления векторов потоков на невязкую и вязкую составляющие.

Обобщенная постановка задач. Рассматриваются задачи о взаимодействии сверхзвуковых потоков, ограниченных линиями разрывов газодинамических пара-

метров (рис. 1). Состояние потоков до взаимодействия считается заданным. Потоки однородны и двигаются с постоянными скоростями, относительно неподвижной системы координат xOy . Область течения разбивается на четыре сектора, на границах которых возникают элементарные газодинамические разрывы [3–6].

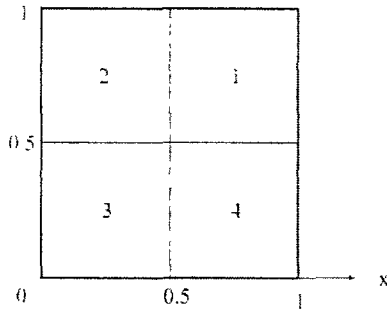


Рис. 1. Область взаимодействия сверхзвуковых потоков

Введем обозначения газодинамических разрывов. S – ударная волна (*Shock*), различают прямую \bar{S} и обратную $\bar{\bar{S}}$ волну. J – сосредоточенный контактный разрыв (*Junction*), J^+ – положительно закрученный разрыв (против часовой стрелки), J^- – отрицательно закрученный разрыв (по часовой стрелки). R – волна разрежения (*Rarefaction*), \bar{R} – прямая волна разрежения, $\bar{\bar{R}}$ – обратная волна разрежения.

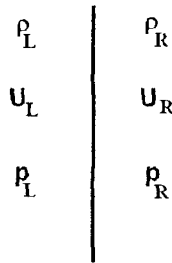


Рис. 2. Параметры на разрыве

В зависимости от направления движения волн будем различать LR и RL волны (рис. 2).

На границах разрывов газодинамических параметров потребуем выполнения условий совместности [3].

Условия совместности для ударных волн (УВ):

$$\bar{S}_{RL} : \frac{U_R - U_L}{\rho_R - \rho_L} = - \sqrt{\frac{1}{\rho_R \rho_L} \frac{p_R - p_L}{\rho_R - \rho_L}}, \quad (1)$$

$$\bar{S}_{LR} : \frac{U_L - U_R}{\rho_L - \rho_R} = + \sqrt{\frac{1}{\rho_L \rho_R} \frac{p_L - p_R}{\rho_L - \rho_R}}, \quad (2)$$

$$\frac{\rho_L}{\rho_R} = \left(\frac{\gamma - 1 + p_L}{\gamma + 1 + p_R} \right) \cdot \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{p_L}{p_R} \right)^{-1}. \quad (3)$$

Условия совместности для контактных разрывов (КР):

$$J_{LR}^- : U_L = U_R, \quad (4)$$

$$J_{RL}^+ : U_L = U_R, \quad (5)$$

$$p_L = p_R. \quad (6)$$

Условия совместности для волн разрежения (ВР):

$$\bar{R}_{RL} : U_R - U_L = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma - 1} \left(\sqrt{\frac{p_R}{\rho_R}} - \sqrt{\frac{p_L}{\rho_L}} \right), \quad (7)$$

$$\bar{R}_{LR} : U_L - U_R = \frac{2\sqrt{\gamma}}{\gamma - 1} \left(\sqrt{\frac{p_L}{\rho_L}} - \sqrt{\frac{p_R}{\rho_R}} \right). \quad (8)$$

$$\frac{p_L}{p_R} = \left(\frac{\rho_L}{\rho_R} \right)^\gamma. \quad (9)$$

Здесь U , ρ , p – нормальная скорость к разрыву, плотность и давление соответственно.

Начальные условия двумерной задачи Римана представим в виде:

$$(p \ \rho \ u \ v) = \begin{cases} (p_1; \ \rho_1; \ u_1; \ v_1), & \text{если } (x > 0.5; \ y > 0.5) \\ (p_2; \ \rho_2; \ u_2; \ v_2), & \text{если } (x < 0.5; \ y > 0.5) \\ (p_3; \ \rho_3; \ u_3; \ v_3), & \text{если } (x < 0.5; \ y < 0.5) \\ (p_4; \ \rho_4; \ u_4; \ v_4), & \text{если } (x > 0.5; \ y < 0.5) \end{cases}. \quad (10)$$

Конфигурации разрывов, удовлетворяющих заданным начальным условиям (10) и условиям совместности (1–9) представлены на рис. 3.

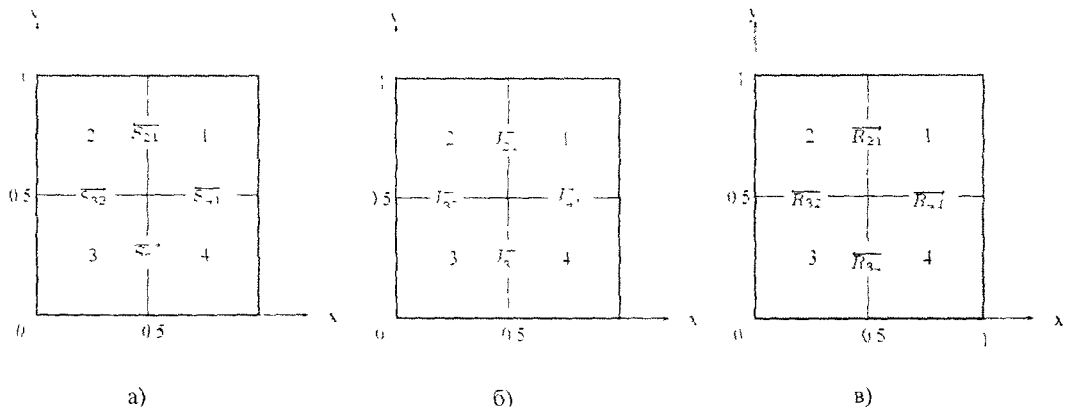


Рис. 3. Конфигурации возникновения разрывов

Математическая постановка задач. В качестве исходной системы уравнений движения сжимаемого газа используются двумерные уравнения газовой динамики в форме уравнений Эйлера, записанные в векторно-интегральном виде и представляющие собой законы сохранения во всей области течения [1; 2; 8]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{S} \oint_L F_n(Q) dL = 0, \quad (11)$$

где Q – вектор состояния потока, S – площадь контрольной ячейки, L – длина грани контрольной ячейки, $F_n(Q) = F(Q) \cdot n$ – вектор конвективного потока, спроектированный на нормаль к грани контрольной ячейки.

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad F_n(Q) = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + n_x p \\ \rho v U + n_y p \\ (e + p)U \end{bmatrix}. \quad (12)$$

$U = n_x u + n_y v$ – скорость в направлении внешней единичной нормали к грани ячейки, n_x, n_y – компоненты вектора нормали к грани ячейки.

В уравнениях приняты следующие обозначения: u, v – декартовы компоненты вектора скорости в направлениях x, y ; ρ, p, e – плотность, давление и полная энергия единицы объема газа.

Система уравнений замыкается уравнением состояния идеального газа

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon, \quad (13)$$

где $\gamma = 1.4$, ε – внутренняя энергия, определяемая соотношением

$$\varepsilon = \frac{e}{\rho} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2). \quad (14)$$

Дискретизация исходных уравнений. Для дискретизации исходных уравнений (11) воспользуемся явной, двухслойной по времени, схемой первого порядка точности и методом контрольного объема (КО) [8]

$$\frac{\Delta Q^n}{\Delta t} + \frac{1}{S} \sum_{k=1}^4 (F \cdot n)_k L_k = 0, \quad (15)$$

где $\Delta Q^n = Q^{n+1} - Q^n$, n – временной слой. Уравнения интегрируются методом установления по времени.

Методы расчета потоков. Для повышения порядка аппроксимации базовой схемы первого порядка точности, был использован *MUSCL*-подход (*Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws*), связанный с монотонной интерполяцией сеточных решений.

Формальную запись вектора потока на грани КО можно представить в виде

$$F = F(Q_L, Q_R), \quad (16)$$

$$\begin{cases} Q_L = Q_i + \psi(\Delta Q_L, \Delta Q_R) \\ Q_R = Q_{i+1} - \psi(\Delta Q_L, \Delta Q_R) \end{cases} \quad (17)$$

где Q_L, Q_R – консервативные переменные слева и справа от грани контрольного объема (рис. 4).

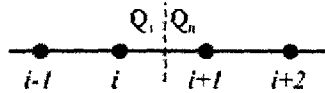


Рис. 4. Параметры потоков на грани КО

В настоящей работе используется ограничитель потока предложенный Jameson [12]

$$\psi(a, b) = \frac{a + b}{2} \cdot \left(1 - \frac{a - b}{|a| + |b| + \varepsilon} \right). \quad (18)$$

Рассмотрим реализации FDS схем: Roe, JST, и FVS схем: Van Leer, AUSM, CUSP:

Схема Roe. Подход основан на квазилинейной форме уравнений Эйлера и предполагает построение некоторой матрицы, являющейся аналогом якобиана применительно к задаче Римана [10]. На матрицу налагается ряд условий, при которых задача является гиперболической и разрешимой, а метод консервативным, и обеспечивается необходимая гладкость аппроксимации вектора потока при вариации состояний слева и справа. При этих условиях задача решается на основе характеристических свойств уравнений Эйлера.

Поток через грань КО рассчитывается по формуле

$$F_k = \frac{1}{2} \left[F(Q_R) + F(Q_L) - |\tilde{A}_k| \cdot (Q_R - Q_L) \right], \quad (19)$$

Матрица $\tilde{A}_k(Q_L, Q_R)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\Delta F = F_R - F_L = \tilde{A}(Q_R - Q_L)$;
2. $\tilde{A}(Q, Q) = A(Q) = \frac{\partial F}{\partial Q}$;
3. Матрица $\tilde{A}(Q_L, Q_R)$ обладает действительными собственными значениями и полным набором собственных векторов (матрица диагонализуема), поэтому $\tilde{A}(Q_L, Q_R) = \tilde{T} \cdot \tilde{\Lambda} \cdot \tilde{T}^{-1}$.

При расчете якобиана используются средние величины $\tilde{A}(Q_L, Q_R) = A(\tilde{Q})$, выражения для которых даются формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \sqrt{\rho_L \rho_R}, & \tilde{u} &= \frac{\sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, & \tilde{v} &= \frac{\sqrt{\rho_L} v_L + \sqrt{\rho_R} v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, \\ \tilde{h} &= \frac{\sqrt{\rho_L} h_L + \sqrt{\rho_R} h_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}}, & \tilde{\alpha} &= (\gamma - 1) \left(\tilde{h} - \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Диссипативное слагаемое запишем в виде [8]:

$$|\tilde{A}| (Q_R - Q_L) = |\Delta\tilde{F}_1| + |\Delta\tilde{F}_4| + |\Delta\tilde{F}_5|,$$

где

$$|\Delta\tilde{F}_1| = |\tilde{U}| \left\{ \left(\Delta\rho - \frac{\Delta p}{\tilde{a}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} \end{bmatrix} + \tilde{\rho} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u - n_x \Delta U \\ \Delta v - n_y \Delta U \\ \tilde{u} \Delta u + \tilde{v} \Delta v - \tilde{U} \Delta U \end{bmatrix} \right\},$$

$$|\Delta\tilde{F}_{4,5}| = |\tilde{U} \pm \tilde{a}| \frac{\Delta p \pm \tilde{\rho} \tilde{a} \Delta U}{2\tilde{a}^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \pm n_x \tilde{a} \\ \tilde{v} \pm n_y \tilde{a} \\ \tilde{h} \pm \tilde{U} \tilde{a} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{U} = n_x \tilde{u} + n_y \tilde{v}, \quad \Delta U = n_x \Delta u + n_y \Delta v.$$

Схема JST (Jameson Schmidt Turkel). Отличие данного подхода от схемы Roe состоит в структуре диссипативного слагаемого [11]. Вместо матрицы \tilde{A} используется максимальное собственное значение матрицы якоби A .

Поток через грань КО рассчитывается по формуле

$$F_k = \frac{1}{2} [F(Q_R) + F(Q_L) - \max(\Lambda) \cdot (Q_R - Q_L)], \quad (20)$$

Схема Van Leer. В данном методе расщепляется поток, в зависимости от числа Маха [14; 15]:

$$F_k = \begin{cases} F(Q_L), & M_{k+1/2} \geq 1 \\ F^+(Q_L) + F^-(Q_R), & |M_{k+1/2}| < 1 \\ F(Q_R), & M_{k+1/2} \leq -1 \end{cases}, \quad (21)$$

где

$$F^\pm = \begin{bmatrix} f_{mass}^\pm \\ f_{mass}^\pm (n_x [-U \pm 2a] / \gamma + u) \\ f_{mass}^\pm (n_y [-U \pm 2a] / \gamma + v) \\ f_{energy}^\pm \end{bmatrix},$$

$$f_{mass}^\pm = \pm \rho a (M_n \pm 1)^2 / 4,$$

$$f_{energy}^\pm = f_{mass}^\pm \left[\frac{(1-\gamma)U^2 \pm 2(\gamma-1)Ua + 2a^2}{\gamma^2 - 1} + \frac{u^2 + v^2}{2} \right]$$

Схема AUSM (Advection Upstream Splitting Method). Метод основан на расщеплении вектора потока на слагаемые конвективные и слагаемые связанные с давлением. В некотором смысле, слагаемые связанные с давлением способствуют акустическим волнам, в то время как конвективные слагаемые способствуют конвективным волнам. Следовательно, эти слагаемые вектора потока должны быть обработаны различно. Разложение вектора потока, основано на разложениях, масштабированных по числу Маха для левой и правой сторон к грани КО [16]

$$F(W_L, W_R) = F^+ + F^-, \tag{22}$$

$$W = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad H]^T,$$

где $H = \frac{h}{\rho} = e + p$ - полная энтальпия, h - удельная энтальпия.

$$F^+ = M_c^+ a_l U_l + M_p^+ p_l \cdot N, \quad F^- = M_c^- a_r U_r + M_p^- p_r \cdot N,$$

$$M_c^+ = \frac{1}{2} (m^+ + m^- + |m^+ + m^-|), \quad M_c^- = \frac{1}{2} (m^+ + m^- - |m^+ + m^-|),$$

$$m^+ = \begin{cases} 0 & M_l \leq -1; \\ \frac{1}{4} (M_l + 1)^2 & -1 < M_l < 1; \\ M_l & M_l \geq 1. \end{cases} \quad m^- = \begin{cases} M_r & M_r \leq -1; \\ -\frac{1}{4} (M_r - 1)^2 & -1 < M_r < 1; \\ 0 & M_r \geq 1. \end{cases}$$

$$M_p^+ = \begin{cases} 0 & M_l \leq -1; \\ m^+ (2 - M_l) & -1 < M_l < 1; \\ 1 & M_l \geq 1. \end{cases} \quad M_p^- = \begin{cases} 1 & M_r \leq -1; \\ -m^- (2 + M_r) & -1 < M_r < 1; \\ 0 & M_r \geq 1. \end{cases}$$

$$N = [0 \quad n_x \quad n_y \quad 0]^T.$$

Схема CUSP (Convective Upward Split Pressure). Схема имеет несколько преимуществ. Во-первых, можно рассмотреть ее как другой тип схем с искусственной вязкостью, так она определена как сумма осреднения центрального потока плюс диссипативный поток. Следовательно, она может легко использоваться для разнообразных схем с интегрированием по времени. Во вторых, формулировка может использоваться многошаговыми схемами, которые не оценивают искусственную диссипацию на каждом шаге для уменьшения вычислительной работы. Опишем несколько версий этой схемы [13]:

$$F_k = \begin{cases} F(Q_l), & U_{k-1/2} \geq a \\ \frac{1}{2} [(\rho u)_{1,2} (Q_R^c + Q_l^c) - |\rho u|_{1,2} (Q_R^c - Q_l^c)] + F_l^p + F_R^p, & |U_{k+1/2}| < a \\ F(Q_R), & U_{k+1/2} \leq -a \end{cases}, \tag{23}$$

где

$$Q^c = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ e \\ \rho \end{bmatrix}, \quad F_L^P = \begin{bmatrix} 0 \\ P^+ n_x p \\ P^+ n_x p \\ \frac{1}{2} p \left(u + a_{1/2} \right) \end{bmatrix}, \quad F_R^P = \begin{bmatrix} 0 \\ P^- n_x p \\ P^- n_x p \\ \frac{1}{2} p \left(u - a_{1/2} \right) \end{bmatrix},$$

$$(\rho u)_{1/2}^\pm = (\rho_l u_l^\pm + \rho_R u_R^\pm), \quad a_{1/2} = \frac{1}{2} (a_l + a_R), \quad M_l = \frac{u_l}{a_{1/2}}, \quad M_R = \frac{u_R}{a_{1/2}},$$

$$P^\pm = -\frac{1}{4} (M \pm 1)^2 (2 \pm M) \pm \frac{3}{16} M (M^2 - 1)^2,$$

$$\begin{cases} u_l^+ = a_{1/2} \left(\frac{M_l + |M_l|}{2} + \alpha_L \left[+\frac{1}{4} (M_l + 1)^2 - \frac{M_l + |M_l|}{2} \right] \right) \\ u_R^- = a_{1/2} \left(\frac{M_R - |M_R|}{2} + \alpha_R \left[-\frac{1}{4} (M_R - 1)^2 - \frac{M_R - |M_R|}{2} \right] \right) \end{cases}$$

$$A-CUSP. \quad \begin{cases} \alpha_l = \frac{a_L^2}{a_L^2 + a_R^2} \\ \alpha_R = \frac{a_R^2}{a_L^2 + a_R^2} \end{cases} \quad H-CUSP \quad \begin{cases} \alpha_l = \frac{h_L}{h_l + h_R} \\ \alpha_R = \frac{h_R}{h_l + h_R} \end{cases}$$

Результаты расчетов. В табл. 1 приведены результаты численных расчетов рассмотренных методик, на двумерных задачах Римана: взаимодействие ударных волн, контактных разрывов и волн разрежения [3; 5; 6; 9]. При расчетах использовались равномерные сетки, размерностью 600×600 ячеек.

Таблица 1

Результаты численного решения задач

Задача	Численная схема:	Шаг по времени Δt	Число Куранта σ	Время установления T	Время счета задачи (с) $Time$
Взаимод-е УВ	<i>Roe</i>	10^{-4}	0.125	0.25	892
	<i>JST</i>				709
	<i>Van Leer</i>				840
	<i>AUSM</i>				778
	<i>A-CUSP</i>				817
	<i>H-CUSP</i>				813
Взаимод-е КР	<i>Roe</i>	10^{-4}	0.1	0.3	993
	<i>JST</i>				855
	<i>Van Leer</i>				932
	<i>AUSM</i>				904
	<i>A-CUSP</i>				1028
	<i>H-CUSP</i>				1094
Взаимод-е ВР	<i>Roe</i>	10^{-4}	0.12	0.2	674
	<i>JST</i>				612
	<i>Van Leer</i>				743
	<i>AUSM</i>				657
	<i>A-CUSP</i>				738
	<i>H-CUSP</i>				732

Шаг интегрирования по времени выбирался из условия устойчивости для явной схемы.

Из приведенных результатов видно, что более экономичными по времени счета являются *FDS* схема *JST* и *FVS* схема *AUSM*, так как требуют минимального количества операций расчета численного потока на грани КО.

Схема *Roe* требует максимальных временных затрат машинного времени и связано это с расчетом матричного диссипативного слагаемого, присутствующего в численном потоке.

В качестве результатов приведены изолинии полей плотности для исследуемых задач

На (рис 5 а, б) показан расчет задачи о взаимодействии ударных волн. Наилучшие разрешающие способности продемонстрировали схемы *FDS*, так как структура диссипативного слагаемого, входящего в численный поток, тождественно удовлетворяет соотношениям *Ренкина-Гюгонно* [10; 11].

В численных решениях полученных по схемам *FVS* возникают амплитудные осцилляции в угловых конфигурациях фронта взаимодействия.

Результаты расчета задачи о контактном взаимодействии разрывов (рис. 5 в, г) показали завышенные диссипативные свойства схемы *JST*, проявляющиеся в размывании разрывов на несколько вычислительных ячеек. Схемы *CUSP* обладают умеренной численной диссипацией и требуют одну расчетную ячейку для разрешения разрывов.

При расчете задачи о взаимодействии волн разрежения (рис. 5 д, е) схемы *Roe* и *CUSP* продемонстрировала наилучшие разрешающие способности, передавая правильную динамику взаимодействия. Остальные схемы являлись сильно мажущими.

Преимущество схем *FDS* над схемами *FVS* состоит в том, что в численном потоке данных схем имеется четкая структура диссипативного слагаемого. Все *FDS* схемы противопоточные.

Схемы *FVS* можно отнести как к центрированным так и к противопоточным, что выделяет их при использовании различных схем интегрирования по времени. Численная диссипация не имеет четкой структуры, а скрыта в нелинейном расщеплении векторов потоков.

Привлекательными представляются схемы *CUSP*, требующие для разрешения разрывов, как и схема *Roe*, одну расчетную ячейку. Однако поведение схем в случае сильных вязких взаимодействий, а так же при укрупненных сетках требует дальнейшей верификации.

Выводы. Разработаны численные методики, реализующие вычисление потоков через грани контрольного объема повышенной разрешающей способности с использованием подхода *MUSCL*.

Сравнение численных схем *FDS* и *FVS* проведено на примерах решения двумерных задач Римана о взаимодействии ударных волн, контактных разрывов и волн разрежения

Установлено, что схема *Roe* является наиболее эффективной для расчета сжимаемых течений. Схема с хорошей точностью разрешает ударные волны, контактные разрывы и волны разрежения. Схема полностью противопоточная и имеет матричную структуру диссипативного слагаемого, опирающуюся на характеристические свойства уравнений Эйлера. При монотонной интерполяции вектора консервативных переменных схема имеет второй порядок точности по пространству.

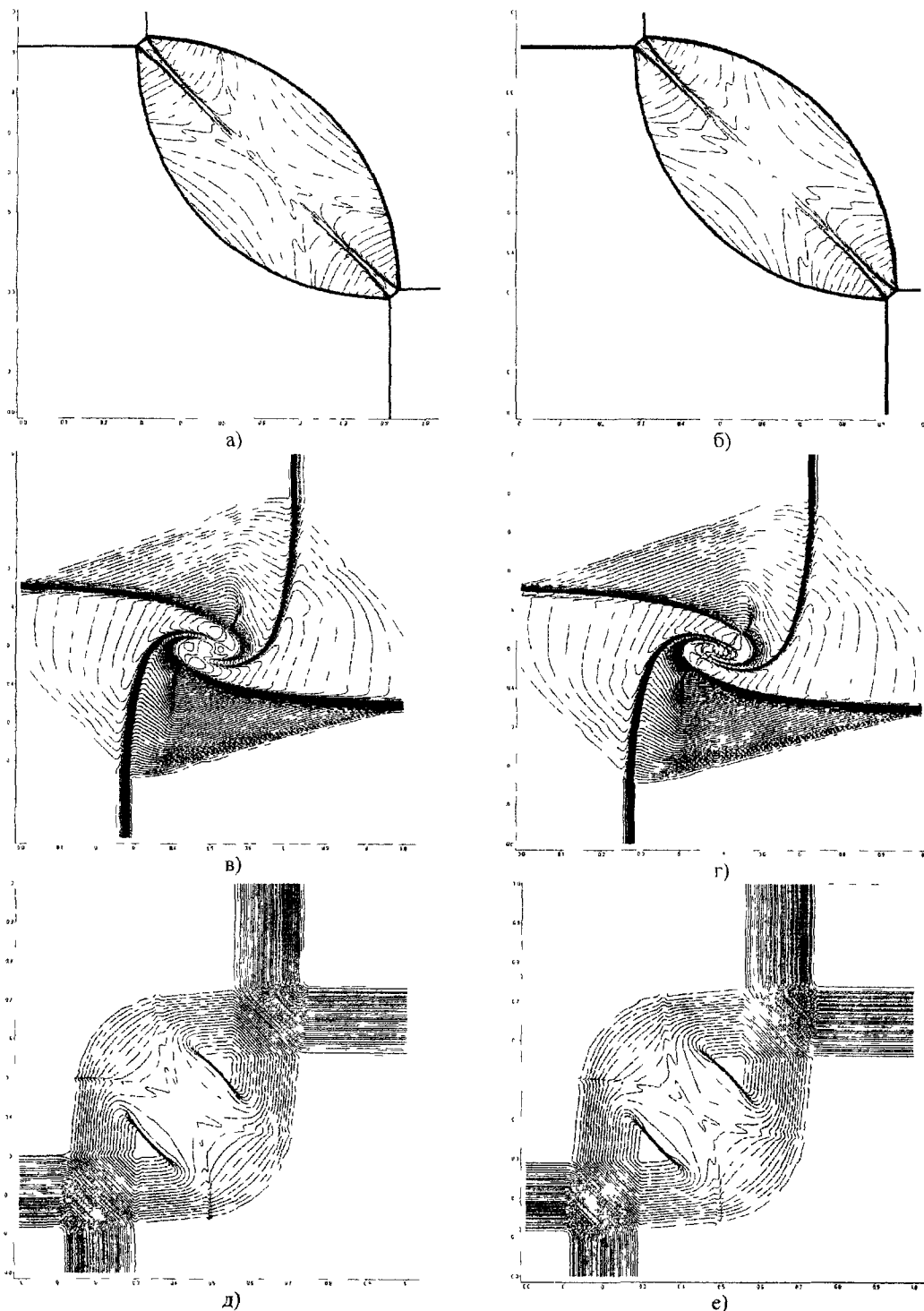


Рис. 5 Взаимодействие разрывов, схемы: а) Roe, б) Van Leer, в) JST, г) A-CUSP, д) AUSM, е) H-CUSP

Библиографические ссылки

1. Годунов С. К., Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики / С. К. Годунов // *Мат. Сборник*. – 1959. – 477. – Вып. 3. – С. 271–306.
2. Годунов С. К., Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов, А. В. Забродин, В. Я. Иванов и др. – М., 1976. – 400 с.
3. Lax P. and Liu X. – D., Solution of two– dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes / P. Lax, X. – D. Liu // *SIAM J. Sci. Comp.* – 1998, № 19. – P. 319– 340.
4. Schulz–Rinne C. W., Classification of the Riemann problem for two–dimensional gas dynamics / C. W. Schulz– Rinne // *SIAM J. Math.* – 1993, Anal. 24. P. 76– 88.
5. Schulz–Rinne C. W., Collins J. P., and Glaz H. M., Numerical solution of Riemann problem for two–dimensional gas dynamics / C. W. Schulz–Rinne, J. P. Collins, H. M. Glaz // *SIAM J. Comp.* – 1993, № 14. – P. 1394– 1414.
6. Kurganov A. and Tadmor E., Solution of two–dimensional Riemann for gas dynamics without Riemann problem solvers / A. Kurganov, E. Tadmor // *SIAM J. Comp. Phys.* – 2002. – № 23. – P. 214– 282.
7. Harten A., High resolution schemes for hyperbolic conservations laws /A. Harten // *J. Comp. Phys.* – 1983. –№ 49. – P. 357–393.
8. Приходько А. А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене / А. А. Приходько. – К., 2003. – 380 с.
9. Устюгов С. Д. Кусочно-параболический метод на локальном шаблоне. / С. Д. Устюгов, М. В. Попов // *И. Уравнения газодинамики. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН*. – 2006. – № 71. 22 с.
10. Roe P. L. Characteristic-based schemes for the Euler equations / P. L. Roe // *Ann. Rev. Fluid Mech.* – 1986. V. 18. – P. 337– 365.
11. Jameson A., and Schmidt W. and Turkel E., Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes /A. Jameson, W. Schmidt, E. Turkel // *AIAA Paper 81–1259*, July, 1981.
12. Jameson A., Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on Accuracy and multigrid convergence in transonic and hypersonic flow / A. Jameson // *AIAA Paper 93– 3559*, 1993.
13. Jameson A., Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics 1: Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence / A. Jameson // *International Journal of Computational fluid Dynamics*. – 1995. – V. 4. – P. 171–218.
14. Van Leer B., Flux Vector Splitting for the Euler equations / B. Van Leer // *Lecture Notes in Phys.* – 1982. – 170. – P. 507–512.
15. Van Leer B., Towards the ultimate conservative difference scheme / B. van Leer // V. A second order sequel to Godunov’s method, *J. Comp. Phys.* – 1979, N 32. – P. 101–136.
16. Liou M. – S., Steffen C. J., A new flux splitting scheme / M. –S. Liou, C. J. Steffen // *Journal of Computational Physics*. – 1993. 107. –№ 1. – P. 23–39.

Надійшла до редколеги 05 05 10

УДК 539.3

В. П. Ревенко

*Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача
НАН України, Львів***РОЗТЯГ СКІНЧЕННОГО ЦИЛІНДРА ДОТИЧНИМИ
НАВАНТАЖЕННЯМИ ПРИКЛАДЕНИМИ НА БІЧНІЙ ПОВЕРХНІ**

Визначено напружено-деформований стан скінченного циліндра під дією локально розподілених нормальних і дотичних осесиметричних навантажень, які розтягують циліндр. Вектор пружних переміщень і тензор напружень подані у вигляді ряду за власними неортогональними функціями. Використано метод найменших квадратів. Проблема задоволення двох крайових умов зведена до мінімізації квадратичної форми. Показано, що запропонований підхід дає високу точність розв'язку. Знайдено якісні і кількісні закономірності розподілу напружень і переміщень у скінченному циліндрі. Установлено умови за яких виникає однорідний розтяг в середині циліндру.

Ключові слова: аналітично-числовий метод, власні функції, квадратична форма, напруження, переміщення, циліндр

Определено напряженно-деформированное состояние конечного цилиндра под действием локально распределенных нормальных и касательных осесимметричных напряжений, которые растягивают цилиндр. Вектор упругих перемещений и тензор напряжений представлены в виде ряда по собственным неортогональным функциям. Использован метод наименьших квадратов. Проблема удовлетворения двух граничных условий сведена к минимизации квадратичной формы. Показано, что предложенный подход гарантирует высокую точность решения. Определены качественные и количественные особенности распределения напряжений и перемещений в конечном цилиндре. Найдены условия, при которых устанавливается однородное растяжение в середине цилиндра.

Ключевые слова: аналитическо-численный метод, собственные функции, квадратическая форма, напряжения, перемещения, цилиндр

Abstract. The stress-strain state of a finite cylinder under action of both normal and tangential axisymmetric local distributed loadings which stretch a cylinder is determined. A vector of a elastic displacement and a stress tensor are submitted in view of series at the eigenfunctions. The least square method is used. The problem of satisfaction of two boundary conditions is reduced to minimization of the quadratic form. It is shown that offered approach gives a high accuracy solution. Quality and quantitative conformities to the law of both stresses distribution and displacements are found in a finite cylinder. The conditions are obtained at which the uniform homogeneous stretching in the middle of the cylinder is established.

Keywords: a analytical-numerical method, eigenfunctions, the quadratic form, displacements, stresses, cylinder

Вступ. Розтяг пружного циліндра під дією одних тільки дотичних навантажень прикладених до бокової поверхні (як модельна задача пояснення експериментальних досліджень циліндричних зразків на розтяг у розривній машині) розглядався Файлоном [6; 7]. Уточненню результатів Файлона присвячена [8], де розглянуто прямокутний розподіл дотичного навантаження. Для знаходження компонентів тензора напружень [8] використано метод суперпозицій з подальшим розкладом граничних умов у ряди Фур'є і Діні. Відзначимо, що при використанні розривних зовнішніх навантажень не вдається знайти точні значення компонентів тензора напружень у точці розриву навантажень, а також істотно погіршується збіжність обчислень.

Нижче, вивчено розподіл напружень і переміщень у циліндрі під дією не тільки дотичного, але і узгодженого з ним нормального навантаження. Для

знаходження розв'язку використані неортогональні функції і розроблена в [2; 9] аналітично-числова методика на основі методу найменших квадратів. Запропоновано підхід який дає змогу розраховувати напружено-деформований стан (НДС) циліндра як за розривних, так і неперервних розподілів навантажень. Досліджено збіжність і точність задоволення крайових умов на поверхні циліндра.

Постановка задачі. Знайдемо НДС скінченного ізотропного циліндра $D = \{(r, \varphi, z) \in ([0, R] \times [0, 2\pi] \times [-h, h])\}$ у циліндричній системі координат. Циліндр навантажений на боковій поверхні віссиметричними навантаженнями

$$\sigma_r(R, \varphi, z) = \sigma_g(z), \quad \tau_{rz}(R, \varphi, z) = \tau_1(z), \quad (1)$$

де $\sigma_g(z)$, $\tau_1(z)$ – навантаження бокової поверхні циліндра, $\tau_1(\pm h) = 0$ [1, 3, 4]. Оскільки задача є осесиметричною, то надалі не будемо використовувати кут φ . На торцях циліндра відсутні навантаження

$$\sigma_z(r, \pm h) = 0, \quad \tau_{rz}(r, \pm h) = 0. \quad (2)$$

Розв'язок поставленої задачі будемо будувати в рамках статичної лінійної теорії пружності [1; 5], для якої переміщення і деформації є неперервними функціями в області D . Визначимо, які обмеження накладають допущення лінійної теорії пружності на значення зовнішніх навантажень $\sigma_g(z)$, $\tau_1(z)$, $z \in [-h, h]$.

Лема. Для того, щоб знайдений НДС циліндра задовольняв всі співвідношення лінійної теорії пружності, навантаження $\sigma_g(z)$, $\tau_1(z)$, $z \in [-h, h]$ повинні бути неперервними функціями.

Доведення. Доведення першої частини лема проведемо від супротивного. Припустимо, що функції $\sigma_g(z)$, $\tau_1(z)$ мають розрив першого роду на поверхні циліндра і виконуються всі співвідношення лінійної теорії пружності. Згідно узагальненого закону Гука напруження виражаються через деформації [4]

$$\sigma_r(r, z) = \lambda e + 2G\varepsilon_r, \quad \tau_{rz}(r, z) = G\gamma_{rz}(r, z), \quad (3)$$

де $e = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z$ – об'ємне розширення; $\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ –

модуль зсуву; E – модуль Юнга; ν – коефіцієнт Пуассона. Згідно з гіпотезами лінійної теорії пружності всі переміщення і деформації у пружному тілі є неперервними функціями в області D . Із лінійних співвідношень (3) випливає, що напруження $\sigma_r(r, z)$, $\tau_{rz}(r, z)$ будуть неперервними функціями в області D . Оскільки мають місце залежності, $\sigma_g(z) = \sigma_r(R, z)$, $\tau_1(z) = \tau_{rz}(R, z)$, то функції $\sigma_g(z)$, $\tau_1(z)$ також будуть неперервними на поверхні циліндра. Ми прийшли до суперечності. Кінець доведення.

Лема визначає тільки необхідні умови, яким повинні задовольняти функції, що описують навантаження. Можна показати, що точне задоволення рівнянь рівноваги і умов сумісності вимагає щоб похідні від навантажень були неперервними функціями. Проте, неперервну функцію можна змінити нескінченно малою деформацією її значень так, що її похідна також буде неперервною. Тому при технічних розрахунках достатньо вважати зовнішні навантаження неперервними функціями.

Будемо вважати що дотичні навантаження в умовах (1) виникають внаслідок тертя від притискання зажимних губок в розривній машині. Прийmemo лiнійний закон зв'язку мiж дотичним i нормальним навантаженням

$$\sigma_g(z) = -\kappa\tau_1(z), \quad z \in [0, h], \quad (4)$$

де κ – безрозмiрний коефiцiєнт. Навантаження $\tau_1(z)$ будемо задавати двома трапецеїдальними симетрично розмiщеними функцiями на вiдстанi $\gamma_0 - \delta$ вiд початку координат. Розглянемо парнi $\sigma_g(-z) = \sigma_g(z)$ нормальнi i непарнi $\tau_1(-z) = -\tau_1(z)$ дотичнi навантаження, де $z \in [-h, h]$. Задамо дотичнi навантаження для додатнiх значень безрозмiрної координати $\gamma = z/h$:

$$\begin{aligned} \tau_1(h\gamma) &= 0, \quad \gamma \in [\gamma_0 - \delta, \gamma_1 + \delta]; \quad \tau_1(h\gamma) = \chi(\gamma - \gamma_0 + \delta), \quad \gamma \in [\gamma_0 - \delta, \gamma_0], \\ \tau_1(h\gamma) &= \tau_m, \quad \gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]; \quad \tau_1(h\gamma) = \chi(\gamma_1 + \delta - \gamma), \quad \gamma \in [\gamma_1, \gamma_1 + \delta], \end{aligned} \quad (5)$$

де $\chi = \tau_m/\delta$; δ – безрозмiрне число, яке характеризує вiдхилення трапецiї вiд прямокутника; τ_m – максимальне значення дотичного навантаження; $1 > \gamma_1 > \gamma_0 > 0$. Якщо покласти $\delta = 0$, $\chi = 0$, то спiввiдношення (5) будуть описувати дотичне навантаження з прямокутним розподiлом.

З умов рiвноваги цилiндра впливає, що розподiл дотичних навантажень на боковiй поверхнi задовольняє iнтегральну умову

$$N_z = 2\pi R \int_{-h}^h \tau_1(z) dz = 0,$$

де N_z – дотична сила прикладена до поверхнi цилiндра [3]. Ця умова завжди виконується для непарного навантаження. Знайдемо дотичну силу вiд навантаження (5), яка розтягує цилiндр в перерiзi $z = 0$

$$S_z = 2\pi R \int_0^h \tau_1(z) dz = 2\pi R h \tau_m (\gamma_1 + \delta - \gamma_0). \quad (6)$$

Для знаходження НДС цилiндра використаємо аналітично-числовий метод, запропонований у [2; 9]. Показано [2], що загальний розв'язок осесиметричної задачі описують такі функції переміщень:

$$\begin{aligned} \Phi &= h \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{b_j I_0(\beta_j r) \sin(z_j \gamma)\} + \Phi_0, \\ \Psi &= h^2 \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{\delta(z_j) b_j I_0(\beta_j r) \cos(z_j \gamma)\} + \Psi_0, \end{aligned} \quad (7)$$

де b_j – невідомі комплексні коефiцiєнти; функцiї $\Phi_0 = -2a_0 z$, $\Psi_0 = a_0(1-\nu)(r^2 - 2z^2)$ – описують основний НДС [3, 9]; $a_0 = \sigma/(2E)$; z_j – вiдомi власнi значення; $\beta_j = z_j/h$; $\delta(z_j) = -[2(1-\nu)/z_j + tg(z_j)]$. Пiдставимо функцiї (7)

до виразу переміщень [9] і знайдемо:

$$u_r = h \sum_{k=1}^{\infty} Re \left\{ b_k z_k \left[\delta(z_k) \cos(z_k \gamma) + \gamma \sin(z_k \gamma) \right] I_1(\beta_k r) \right\} + \frac{1-\nu}{E} \sigma r, \quad u_\varphi = 0,$$

$$u_z = h \sum_{k=1}^{\infty} Re \left\{ b_k \left\{ z_k \gamma \cos(z_k \gamma) - [3 - 4\nu + z_k \delta(z_k)] \sin(z_k \gamma) \right\} I_0(\beta_k r) \right\} + \nu \sigma r / E.$$

Задоволення граничних умов. Використаємо загальне подання тензора напружень [2] і функцій переміщень (7), та приведемо крайові умови (1) до такого безрозмірного вигляду [2]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k A_k^m(\gamma) = P_m(\gamma), \quad m = \overline{1, 2}, \quad \gamma \in [-1, 1]. \quad (8)$$

Отже, задача знаходження НДС ізотропного циліндра зведена до розв'язання функціональних рівнянь (8). Обмежимося у співвідношеннях (7) першими N членами ряду і позначимо такі наближені функції переміщень $\Phi_N(r, \gamma)$, $\Psi_N(r, \gamma)$. Функції Φ_N , Ψ_N точно задовольняють усі співвідношення тривимірної теорії пружності та крайові умови (2). Для знаходження невідомих коефіцієнтів c_k в [2; 9] запропоновано мінімізувати числову міру відхилення шуканого наближеного розв'язку від точного, яка буде рівна сумі інтегралів квадратів нев'язки в граничних умовах (8). Величину відхилення наближеного розв'язку від точного буде визначати мінімум такого функціонала:

$$\Omega_N \{c_1, \dots, c_{2N}\} \equiv \sum_{m=1}^2 \|f_m^m(\gamma) - P_m(\gamma)\|^2 \equiv \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{m=1}^2 \left\{ \sum_{k=1}^{2N} c_k A_k^m(\gamma) - P_m(\gamma) \right\}^2 \right\} d\gamma \equiv$$

$$\equiv \sum_{k,j=1}^{2N} c_k c_j W_{kj} - 2 \sum_{k=1}^{2N} c_k V_k + P^2, \quad (9)$$

де

$$W_{kj} = \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{m=1}^2 A_k^m(\gamma) A_j^m(\gamma) \right\} d\gamma, \quad W_{kj} = W_{jk}, \quad V_k = \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{m=1}^2 A_k^m(\gamma) P_m(\gamma) \right\} d\gamma, \quad k, j = \overline{1, 2N};$$

$$P^2 = \int_{-1}^1 \left\{ P_1(\gamma)^2 + P_2(\gamma)^2 \right\} d\gamma; \quad \|f(\gamma)\| - \text{норма в просторі функцій } L_2[-1, 1].$$

Зазначимо, що коефіцієнти W_{kj} знайдені точно і виражені через тригонометричні та Бесселя функції.

Числовий аналіз. При проведенні числових розрахунків використано результати [2; 9]. Мінімум функціонала (9) для заданого значення N позначимо $F(N)$. Коефіцієнти, на яких досягається це мінімальне значення позначимо c_k^N . Підставимо їх до формули (7) і визначимо найкращий наближений розв'язок Φ_N , Ψ_N . Чисельно було перевірено, що при $N \rightarrow \infty$ виконується умова $F(N) \rightarrow 0$, а похибка задоволення крайових умов (8) лінійно залежить від $F(N)$ і збігається до нуля. У [3] показано, що на поведінку напружень у циліндрі суттєво впливає значення відношення R/h .

Таблиця наводить порівняння результатів праці [8], де безрозмірні значення

переміщень $\frac{u_z(r, \gamma)}{w_Q(c)}$: $w_Q(c) = \frac{\pi}{3E} h \tau_m$; $c = h$; $Q = \frac{2h\tau_m}{3R}$, $\chi = \frac{R}{h} = \frac{2}{\pi} \approx 0,64$ знайдені

для такого прямокутного дотичного навантаження $\gamma_0 = \frac{1}{3}$, $\gamma_1 = \frac{2}{3}$, $\frac{\tau_m}{Q} = \frac{3}{\pi}$, $\delta = 0$,

яке розтягує циліндр. Там же їх порівняно з результатами одержаними Файлоном [7]. Для того, щоб не виходити за межі лінійної теорії пружності нами

розглянуто неперервне навантаження (5): $\bar{\gamma}_0 = \frac{1}{3} + \frac{\delta}{2}$, $\bar{\gamma}_1 = \frac{2}{3} - \frac{\delta}{2}$, $\delta = 0,02$, яке за

винятком околів точок γ_0 , γ_1 співпадає з таким же навантаженням, як у [7; 8]. У круглих дужках записані переміщення наведені в [8], у квадратних дужках знайдені нами переміщення, без дужок – результати Файлона [7].

Таблиця

Порівняння знайдених переміщень $u_z(r, \gamma) / w_Q(c)$ [8] залежно від координати $\gamma = z / h$. Циліндр під дією тільки дотичних навантажень

z / h	$r = 0$	$r = 0,4R$	$r = 0,6R$	$r = R$
0.0	0,000 (0,000) [0,000]	0,000 (0,000) [0,000]	0,000 (0,000) [0,000]	0,000 (0,000) [0,000]
0.1	0,103 (0,057) [0,054]	0,118 (0,070) [0,069]	0,136 (0,087) [0,087]	0,161 (0,110) [0,110]
0.2	0,203 (0,111) [0,105]	0,230 (0,135) [0,134]	0,266 (0,167) [0,166]	0,331 (0,229) [0,231]
0.3	0,299 (0,162) [0,150]	0,335 (0,192) [0,191]	0,384 (0,237) [0,234]	0,535 (0,382) [0,384]
0.4	0,391 (0,211) [0,200]	0,433 (0,245) [0,243]	0,491 (0,295) [0,292]	0,800 (0,592) [0,597]
0.5	0,481 (0,260) [0,242]	0,527 (0,295) [0,293]	0,591 (0,347) [0,343]	0,942 (0,671) [0,691]
0.6	0,571 (0,309) [0,292]	0,620 (0,344) [0,340]	0,687 (0,395) [0,388]	1,010 (0,688) [0,707]
0.7	0,657 (0,355) [0,321]	0,710 (0,390) [0,386]	0,777 (0,437) [0,428]	0,955 (0,574) [0,605]
0.8	0,737 (0,393) [0,363]	0,791 (0,427) [0,418]	0,855 (0,467) [0,458]	0,965 (0,517) [0,565]
0.9	0,810 (0,418) [0,384]	0,864 (0,450) [0,442]	0,923 (0,482) [0,474]	1,011 (0,497) [0,560]
1.0	0,883 (0,427) [0,405]	0,933 (0,458) [0,456]	0,986 (0,487) [0,486]	1,062 (0,492) [0,562]

На рис. 1 наведено знайдений для цієї задачі парний відносно γ розподіл нормальних напружень σ_z в залежності від безрозмірного радіусу r/R . Напруження приведені до безрозмірного вигляду діленням на Q . Графіки напружень є якісно близькі до результатів праць [7; 8]. Напруження в перерізі $z = 0$ змінюються від $\sigma_z(1,0) = 1,14$ до $\sigma_z(0,0) = 0,67$, відповідно на краю зажимних губок від $\sigma_z(1, \gamma_0) = 3,34$ до $\sigma_z(0, \gamma_0) = 0,54$. Як бачимо, розподіл напружень σ_z у середині циліндра не є однорідним. Аналогічний висновок також слідує із аналізу результатів [6 – 8].

Відзначимо, що в [7; 8] не наведено значення напружень σ_z у вершинах прямокутного навантаження $\gamma_0 = 1/3$, $\gamma_1 = 2/3$, оскільки розклади за ортогональними функціями, які використовуються там, у цих точках будуть збігатися до нескінченності.

Наведемо значення мінімуму $F(N)$ для цієї задачі: $F(150) = 1,3 * 10^{-5}$, $F(300) = 1,1 * 10^{-6}$. Якщо $N = 300$, то похибка задоволення в крайових умовах

(5) нормальних напружень не перевищує $2 \cdot 10^{-5}$, а дотичних напружень менша ніж $2 \cdot 10^{-4}$ за винятком околів точок, в яких дотичне навантаження має розрив першої похідної. У цих точках похибка рівна $8 \cdot 10^{-3}$. При збільшенні N похибка обчислень прямує до нуля.

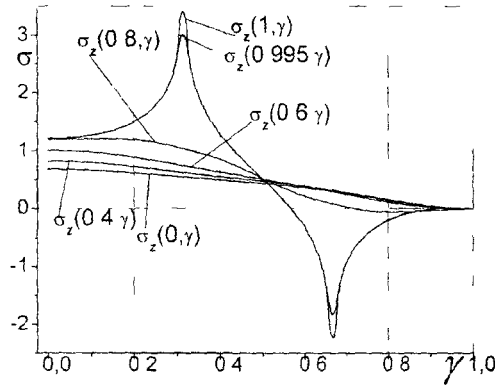


Рис. 1. Розподіл нормальних напружень у циліндрі

На рис. 2а, рис. 3а наведено розподіл напружень для циліндра $R/h = 0,1$; $\nu = 0,25$, який знаходиться під дією навантаження (5): $\tau_m = 4\sigma$; $\gamma_0 = 0,6 + \delta/2$, $\gamma_1 = 0,8 - \delta/2$, $\delta = 0,02$; $\kappa = 0$. На рис. 2б, 3б розглянуто випадок коли крім дотичного діє нормальне навантаження, $\kappa = 1$. При числових обчисленнях знайдені напруження і переміщення u_r , u_z відповідно діленням на σ , $u_r(R, \gamma_0 - \delta)/5$ $u_z(R, \gamma_0 - \delta)/5$ були зведені до безрозмірного вигляду.

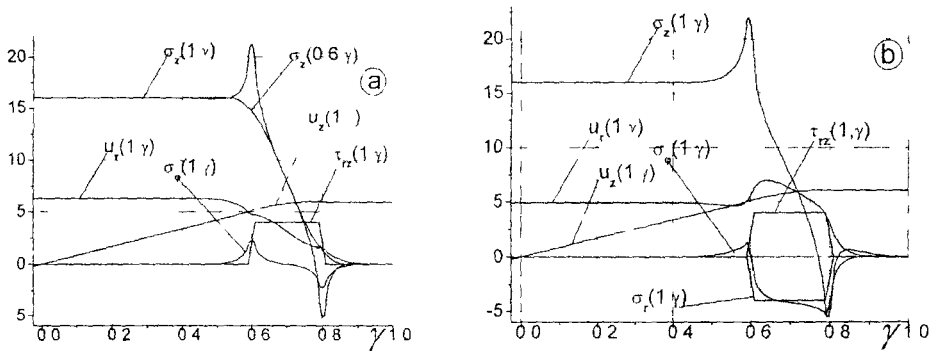


Рис. 2. Розподіл безрозмірних напружень і переміщень на поверхні циліндра

Із аналізу числових даних для циліндра $R/h < 0,2$ (рис. 2, 3) випливає, що такий розподіл створює однорідний напружений стан у середині циліндричного зразка. Установлено, що там де навантаження різко зростає або спадає і відповідно похідна від навантаження рівна

$$d = \frac{d}{dz} \tau_1(z) = \frac{\tau_m}{h\delta}$$

і суттєво зростає при зменшенні δ , спостерігається збурення нормальних

напружень σ_z . Це збурення локалізовано в межах

$$|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{2R}{3h}.$$

Числовим експериментом встановлено, що чим менше значення δ і відповідно більше значення похідної d , тим більший пік у напружень σ_z . Якщо в навантаженні наведеному на рис 2b міняти δ , то одержимо: $\delta = 0,1$, $Max \sigma_z = 18,2$; $\delta = 0,02$, $Max \sigma_z = 21,9$; $\delta = 0,002$, $Max \sigma_z = 26,5$. Знайдено, що чим більше значення R/h , тим більший пік у напружень σ_z . Це підтверджує теоретичні висновки леми.

У випадку розглянутому Файлоном [7] та із аналізу наведених там даних випливає, що збурення напружень σ_z , σ_r будуть повністю охоплювати середину область циліндричного зразка.

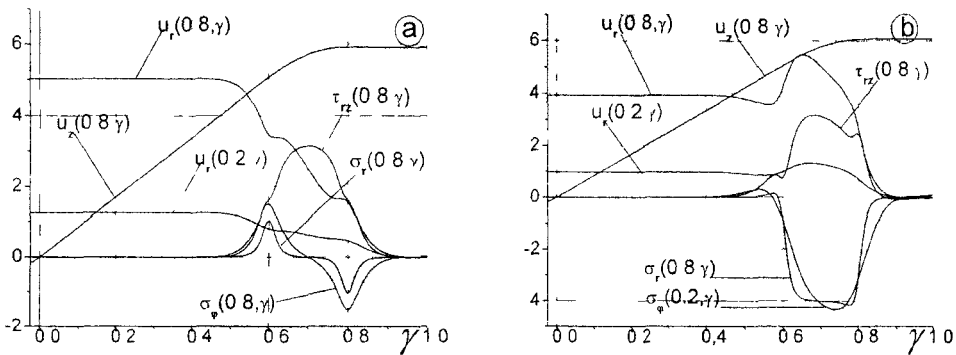


Рис. 3. Розподіл безрозмірних напружень і переміщень у середині циліндра

Проведені обчислення показують, що як при чистому дотичному навантаженні так і за врахування додаткового стиску в середині циліндру маємо такий розподіл напружень: $\sigma_z(r, z) \approx \sigma_1 = 16\sigma$, $\sigma_r(r, z) \approx 0$, $\sigma_\phi(r, z) \approx 0$, $\tau_{rz}(r, z) \approx 0$ для $0 \leq r \leq R$, $|z| < h/2$. Прирівнявши силу дотичного розтягу (6) до сили від нормальних напружень σ_z у перерізі циліндра $z = 0$, одержимо

$$S_z = 2\pi R h \tau_m (\gamma_1 + \delta - \gamma_0) = \pi R^2 \sigma_1. \tag{10}$$

Із умови (10) визначимо напруження однорідного розтягу $\sigma_1 = 0,4 h \tau_m / R = 16\sigma$, які співпадають з даними рис 2, 3

Аналіз числових результатів показав, що для $r < R/2$ спостерігається залежність $\sigma_\phi(r, z) \approx \sigma_r(r, z)$, $z \in [-h, h]$. На осі симетрії виконуються рівності $\sigma_\phi(0, z) = \sigma_r(0, z)$. Знайдено, що при зменшенні r напруження $\tau_{rz}(r, z)$ і переміщення $u_r(r, z)$ прямують до нуля і має місце рівність $\tau_{rz}(0, z) = 0$, $u_r(0, z) = 0$, $z \in [-h, h]$. Установлено, що зменшення коефіцієнта Пуассона приводить до зменшення σ_ϕ , σ_z і відповідно збільшення u_r .

Висновки. Підтверджено високу точність запропонованого аналітично-числового методу. Знайдено, що при розтягу циліндру $R/h < 0,2$ дотичними навантаженнями локалізація збурених напружень σ_z буде знаходитися в межах

$|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{2R}{3h}$, $|\gamma - \gamma_1| \leq \frac{2R}{3h}$. Якщо $\gamma_0 > \frac{2R}{3h}$, то матеріал циліндра при $|z| < h\gamma_0 - \frac{2R}{3}$

перебуває у стані однорідного розтягу напруженням $\sigma_1 = \frac{S_z}{\pi R^2}$. Числовим експериментом встановлено: максимальні напруження σ_z зростають при зменшенні δ і відповідно зростанні похідної d ($\delta = 0,1$, $Max \sigma_z = 18,2$; $\delta = 0,02$, $Max \sigma_z = 21,9$; $\delta = 0,002$, $Max \sigma_z = 26,5$); на осі симетрії виконуються наступні рівності $\sigma_\varphi(0, z) = \sigma_r(0, z)$, $\tau_{rz}(0, z) = 0$, $u_r(0, z) = 0$, $z \in [-h, h]$; а при зменшенні r напруження $\tau_{rz}(r, z)$ і переміщення $u_r(r, z)$ прямують до нуля. Встановлено, що максимальні напруження σ_z в околі локально розподілених навантажень залежать від значення градієнту навантажень. Запропоновану методику обчислень можна використати для розрахунку НДС циліндра під дією різноманітних навантажень.

Бібліографічні посилання

1. Лурье А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М., 1970. – 940 с.
2. Ревенко В. П. Знаходження напруженого стану вісесиметрично навантаженого на боковій поверхні циліндра / В. П. Ревенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2009. – № 4. – Вип. 13, т. 16. – С. 79 – 86.
3. Ревенко В. П. Дослідження напруженого стану навантаженого скінченного циліндра з використанням власних функцій / В. П. Ревенко // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2009. – Вип. 7. – С. 183–190.
4. Тимошенко С. П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер – М., 1975. – 576 с.
5. Улитко А. Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости / А. Ф. Улитко. – К., 2002. – 342 с.
6. Filon L. N. G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load // Proc. R. Soc. London, A68. – 1901. – P. 353–358.
7. Filon L. N. G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load // Phil. Trans. R. Soc. London, A198. – 1902. – P. 147–233.
8. Meleshko V. V. Equilibrium of an elastic finite cylinder: Filon's problem revisited, Journal of Engineering Mathematics, V.46. – 2003. P. 355–376.
9. Revenko V. P. Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity // Int. Appl. Mech. – 2009. – 45, № 7. – P. 730–741. (Прикл. Механіка. – 2009. – 45, № 7. – С. 52–65).

Надійшла до редакції 21.03.10

УДК 539.6

К. В. Рундуев, Н. И. Ободан, Г. М. Гавеля

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ДИАГНОСТИКА РАЗНОТОЛЩИННОСТИ ТОНКОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКИ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Задача про визначення областей різнотолщинності в тонкостінній системі ставиться як обернена із введенням спеціальної метрики й множини коректності. Як оператор обернення використовується інверсна нейронна мережа, навчена на основі навчальної вибірки, в якості якої виступають розв'язання прямих задач на заданій множині коректності. Показано, що забезпечується точність розв'язання задачі, не більша за п'ять відсотків.

Ключові слова: тонкостінна система, обернена задача, ідентифікація різнотолщинності, нейронна мережа.

Задача об определении областей разнотолщинности в тонкостенной системе ставится как обратная с введением специальной метрики и множества корректности. В качестве оператора обращения используется инверсная нейронная сеть, обученная на основе обучающей выборки, в качестве которой выступают решения прямых задач на заданном множестве корректности. Показано, что обеспечивается точность решения задачи, не больше пяти процентов.

Ключевые слова: тонкостенная система, обратная задача, идентификация разнотолщинности, нейронная сеть.

The problem to find areas of different thickness for a thin-walled system is considered as an inverse problem with employment of specific metrics and correctness set. A neural networks is an inversion operator. The neural net is learnt with training set constructed as direct problem solutions obtained for given correctness set. It was shown that discrepancy of the solution is lesser than five percents.

Ke words: thin-walled system, inverse problem, identification of areas with different thickness, neural network.

Введение. Тонкостенные конструкции являются элементами, которые находят широкое применение как несущие и защитные в ракетостроении, атомных реакторах, кораблестроении, металлургии. От их реального состояния зависит безопасность эксплуатации указанных систем, а также затраты на промежуточные ремонты. Поэтому диагностика состояния в процессе эксплуатации весьма актуальна. Процесс мониторинга таких конструкций, обычно связан с измерением перемещений, весьма затруднен, обусловленность такой задачи диагностики весьма низка. Поэтому разработка таких математических моделей и методов идентификации отклонений в номинальных параметрах тонкостенных конструкций [5], в частности, толщины, даст возможность повысить надежность их эксплуатации.

Объект исследования. В качестве объекта исследования рассматривается цилиндрическая оболочка, имеющая разнотолщинность во всей области, занимаемой оболочкой. Образование разнотолщинности связано с процессом изготовления или с процессом эксплуатации, когда происходит выгорание или унос материала на отдельных участках поверхности.

Постановка задачи. Рассматривается задача об определении функции распределения толщины на поверхности оболочки по результатам наблюдений. В качестве наблюдаемых параметров выступают значения функций σ^* , характеризую-

щих напряженно-деформированное состояние в точках измерений; такие задачи являются обратными, их главной особенностью является некорректность [1]. Поэтому для решения поставленной задачи должен быть использован метод регуляризации [6].

В качестве метода регуляризации может быть использован прием выбора решения на множестве корректности, тогда задача определения неизвестной толщины $H(x)$ может быть сформулирована как

$$H_0(x) = \arg \min_{H \in H} \rho_w(\sigma(H), \sigma^*), \sigma^* \in F, \quad (1)$$

где σ^* – наблюдаемые значения функций напряженно-деформированного состояния, H^* – множество корректности (компакт), F – множество возможных состояний оболочки, $\rho_w(\sigma, \sigma^*)$ – метрика в пространстве состояний, которая должна быть задана на основе учета свойств решений прямой задачи [6], $H(x)$ – функция, характеризующая распределение толщины.

Для поиска решения $H_0(X)$ из соотношения (1) при известном решении прямой задачи может быть использована нейросетевая аппроксимация, если принять, что σ_r^* , $r = \overline{1, L}$ – вектор входных значений нейросети, $H(x_i)$, $i = \overline{1, P}$ – вектор её выходных значений [4]. Аппроксимационные свойства нейронных сетей базируются на теореме Колмогорова и обобщенной теореме Стоуна, которые устанавливают факт возможности точной аппроксимации непрерывных функций многих переменных (H) с помощью операций сложения, умножения и суперпозиции непрерывных функций одной переменной (σ^*).

Математическая модель. Поведение тонкостенной оболочки переменной толщины в ограниченной пространственной области $\Omega = \{X: X \in \Omega\}$, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ – вектор пространственных координат, описывается соотношениями:

$$\begin{aligned} L(U, H) &= Q(X), \\ L_{\Gamma_i}(U, H) &= 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $U(X)$ – вектор-функция перемещений, Γ_i – граничные контуры области Ω , $L(U, H)$, $L_{\Gamma_i}(U, H)$ – заданные дифференциальные операторы, $Q(X)$ – внешнее воздействие. В качестве математической модели обратной задачи выбрана нейросетевая аппроксимация; в случае использования двухслойного персептрона имеем

$$H(x) = F \left(\sum_{j=1}^J \theta_j D \left(\sum_{n=1}^N \theta_{jn} \sigma_n^* + \theta_{j0} \right) + \theta_0 \right), \quad (3)$$

где D, F – активационные функции, J, N – число нейронов в слоях; $\theta = \{\theta_j, \theta_{jn}\}$ – вектор настраиваемых параметров; σ_n^* – значения заданных функций в фиксированных точках области Ω .

Метод решения. Для получения решения $U(H)$ из уравнений (2) и использования его в структурной схеме обучения сети (3) используется метод конечных элементов. Для аппроксимации всех функций задачи вводятся следующие сетки:

1) для решения прямой задачи напряженно-деформированного состояния тонкостенной оболочки вводится сетка с координатами узлов X_l , где

$$X_l = \{x_{1l}, x_{2l}, x_{3l}\}, \text{ и соответствующими значениями для функции } \{\sigma_l\}, l = \overline{1, L};$$

2) для структурирования информации о наблюдаемых значениях функции σ^* вводится сетка с координатами узлов X_p , $p = \overline{1, P}$, $X_p \in V$, $V = \{X_1, \dots, X_L\}$ и значениями $\{\sigma_p^*\}$, $p = \overline{1, P}$;

3) для описания функции толщины $H(X)$ вводится сетка X_k , $k = \overline{1, K}$, $X_k \in V$, с соответствующими значениями функции $H = \{H_k\}$, $k = \overline{1, K}$.

Для решения задачи (2) будем использовать аппроксимацию на элементе в виде

$$U^e(X) = A^{(e)}(X)U, \quad (4)$$

где $A^{(e)}(X)$ – матрица функций формы; $U = \{U_l\}, l = \overline{1, L}$ – вектор узловых значений функции перемещений.

После выполнения процедуры метода Бубнова-Галеркина для задачи (2) с учетом аппроксимации (4) и суммирования матриц элементов получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$K(H)U = R, \quad (5)$$

где $K(H)$ – матрица жесткости, R – вектор внешней нагрузки.

Для выбора вида метрики $\rho_W(\sigma, \sigma^*)$ используется специальное нормированное пространство W_{ik} , отражающее свойства решений краевой задачи теории оболочек [3].

Введем функциональное пространство W_{ik} вектор функций $U = \{u, v, w\}$, у которых $w \in W_k$, вектор $\omega(u, v) \in W_t$ с нормой [2]

$$\|U\|_{W_{ik}}^2 = \|w\|_{W_k}^2 + \|\omega\|_{W_t}^2,$$

где

$$\|\omega\|_{W_t}^2 = \int_{\Omega} D_p^{ijkl}(H) \varepsilon_{ij}(\omega) \varepsilon_{kl}(\omega) d\Omega, \quad \|w\|_{W_k}^2 = \int_{\Omega} D_u^{ijkl}(H) k_{ij}(w) k_{kl}(w) d\Omega, \quad (6)$$

$$(w_1, w_2)_{W_k} = \int_{\Omega} D_p^{ijkl}(H) \kappa_{ij}(w_1) \kappa_{kl}(w_2) d\Omega,$$

$$(\omega_1, \omega_2)_{W_t} = \int_{\Omega} D_u^{ijkl}(H) \varepsilon_{ij}(\omega_1) \varepsilon_{kl}(\omega_2) d\Omega,$$

$$D_u^{ijkl} = \int_{-h(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} B^{ijkl}(x_1, x_2, x_3) x_3^2 dx_3, \quad D_p^{ijkl} = \int_{-h(x_1, x_2)}^{h(x_1, x_2)} B^{ijkl}(x_1, x_2, x_3) dx_3.$$

Для цилиндрической оболочки

$$\kappa_{ij} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,x_j} + u_{j,x_i}] - B_{ij} w + \frac{1}{2} w_{x_i} w_{x_j}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$B_{11} = 0; \quad B_{22} = \frac{1}{R}; \quad B_{12} = 0.$$

Выбирая $\rho_{W_{ik}}^2 = \|U\|_{W_{ik}}^2$, получаем условие (1) в виде

$$H_0 = \arg \min \rho_{W_{ik}}(\sigma, \sigma^*), \quad \sigma^* \in F, \quad (7)$$

где

$$\rho_{W_{ik}}^2(\sigma, \sigma^*) = \int_{\Omega} [D_p^{ijkl}(H)(\varepsilon_{ij}(\omega) - \varepsilon_{ij}^*) \cdot (\varepsilon_{kl}(\omega) - \varepsilon_{kl}^*) + D_u^{ijkl}(H)(\kappa_{ij}(\omega) - \kappa_{ij}^*) \cdot (\kappa_{kl}(\omega) - \kappa_{kl}^*)] d\Omega.$$

Здесь обозначены: $D_p^{ijkl}(H)$, $D_u^{ijkl}(H)$ – жесткости на растяжение и изгиб; ε_{ij} , κ_{ij} – функции деформаций при растяжении и изгибе соответственно.

Таким образом, в качестве вектор-функции σ выступает $\sigma(H) = \{\varepsilon_y(H), \kappa_y(H)\}^T$, где $\varepsilon_{ij}(H)$, $\kappa_{ij}(H)$ выражены через компоненты вектора $U(X)$.

Если условие (7) представить в дискретном виде с помощью конечно-элементной аппроксимации, то получим:

$$H = \arg \min_{H \in H^*} [D_p(E_{ij} - E_{ij}^*) \cdot (E_{kl} - E_{kl}^*) + D_u(K_{ij} - K_{ij}^*) \cdot (K_{kl} - K_{kl}^*)],$$

где E, K – векторы значений функций $\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}$ в точках X_p , $p = \overline{1, P}$. Здесь и выше принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

В качестве множества корректности H^* выберем интервал $\|H_1\|_{L_2(\Omega)} \leq \|H^*\|_{L_2(\Omega)} \leq \|H_2\|_{L_2(\Omega)}$, на котором, путем его дискретизации с шагом ΔH , строится обучающая выборка, т. е. набор значений $\sigma_j^* \in F$, $j = \overline{1, J}$, $J = \text{mod} \frac{\|H_2\| - \|H_1\|}{\Delta H}$.

Решение обратной задачи предполагает, в соответствии с принятой структурой (рис. 1), настройку нейросетевой модели на основе обучающей выборки на множестве значений H из множества корректности. Структурная схема обучения нейросетевой модели представлена на рис. 1

На рис. 1 обозначено: **ОВ** – обучающая выборка, **МНС** – многослойная нейронная сеть, **АО** – алгоритм обучения, **МКЭ** – пакет прикладных программ для решения прямой задачи, **e** – ошибка сети, равная $\rho_{W_{ik}}^2(\sigma, (H), \sigma^*)$. Для настройки сети используется стандартный метод обратного распространения ошибки [7].

Результаты. Предложенный подход был реализован для идентификации толщины цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего нормально-распределенного давления. Геометрические и физические параметры оболочки: радиус $R = 6 \text{ см}$, длина $L = 18 \text{ см}$, толщина $H_0 = 0.0857 \text{ см}$, модуль упругости $E = 1.85 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$.

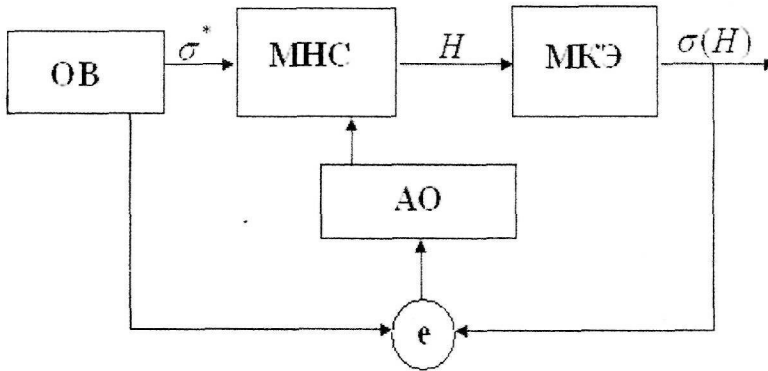


Рис. 1. Структурная схема обучения нейросетевой модели

В качестве обучающей выборки использовались различные варианты расположения областей изменения толщины с соответствующими наблюдаемыми прогибами, в качестве нейронной сети – двухслойный персептрон.

Изменение расположения участка разнотолщинности рассматривалось в диапазоне $x_{11} \leq x_1 \leq x_{12}$, $x_{31} \leq x_3 \leq x_{32}$, где x_1, x_2 – координаты центра тяжести участка утонения (утолщения) рис. 2. Изменение значений x_1, x_2 проводилось на координатной сетке X_j , $j = \overline{1, J}$, т. к. граница области разнотолщинности совпадала с границей элементов сетки X_j . Толщина изменялась в диапазоне значений $H_0 - n\Delta H_0$, где $n = \overline{1, 3}$, $\Delta H_0 = 0.1H_0$.

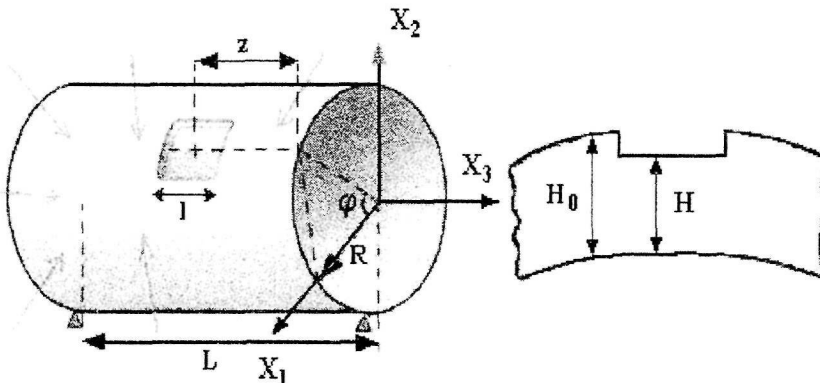


Рис. 2. Расчетная схема с участками разнотолщинности

На рис. 3 приведен фрагмент обучающей выборки – изменение прогибов W^* поверхности оболочки в зависимости от расположения области изменения толщины.

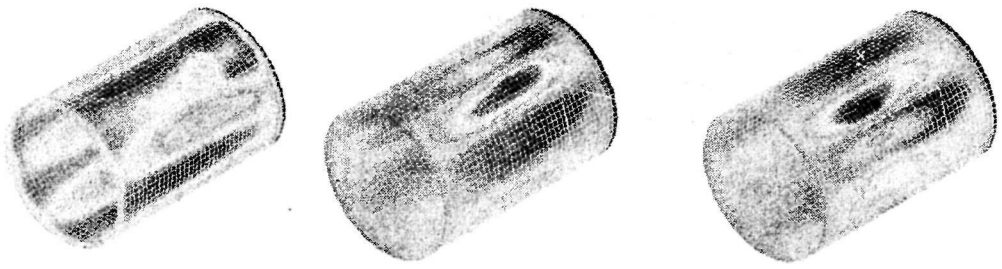


Рис. 3. Зависимость прогибов от расположения области измененной толщины

На рис. 4 показано изменение значения погрешности при обучении двух-слойного персептрона (кривая 1). По оси абсцисс отложено количество циклов и обучения, по оси ординат – значение ошибки e .

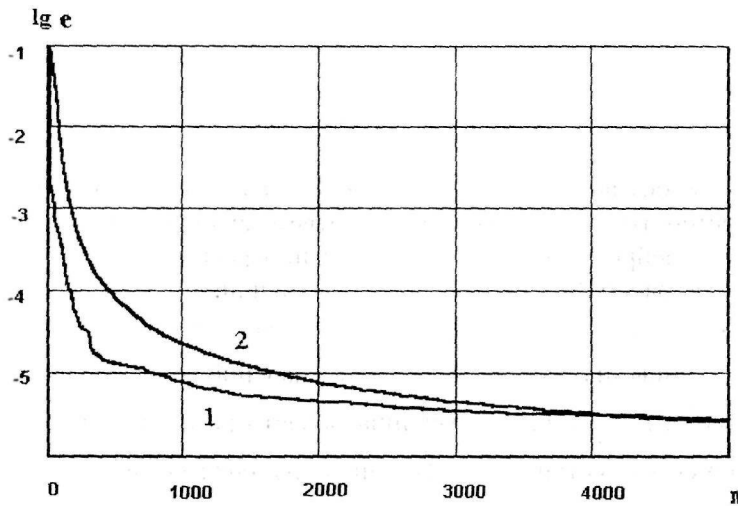


Рис. 4. Значение погрешности при обучении двух

В таблице 1 приведены результаты прогноза значений толщины по результатам наблюдений. В качестве результатов наблюдений использовались значения перемещений, определенные из тестовых прямых расчетов, не входящих в обучающую

Таблица 1

← Прогноз значений толщины по результатам наблюдений

Область	Координаты центра области		h^*	$h^{вост}$	e (%)
	x_1	x_2			
1	2.355	2.25	0.07713	0.07559	2
	2.355	2.25	0.06856	0.06650	3
	2.355	2.25	0.05999	0.05849	2.5
2	7.065	6.75	0.07713	0.07481	3
	7.065	6.75	0.06856	0.06684	2.5
	7.065	6.75	0.05999	0.05867	2.2
3	11.775	11.25	0.07713	0.07535	2.3
	11.775	11.25	0.06856	0.06664	2.8
	11.775	11.25	0.05999	0.05819	3

выборку. Для оценки выбранной структуры нейронной сети было проведено обучение трехслойного персептрона (рис. 4, кривая 2). Оптимальной с точки зрения погрешности налаживания оказалась двухслойная сеть. Число входных и выходных нейронов определялось соответственно заданным количеством измерений и характером разбиения функции $H(x)$ на конечные элементы.

Выводы. Задача идентификации толщины цилиндрической оболочки может решаться экспериментально-теоретическим методом, который объединяет многоконтактный метод измерений и алгоритм решения обратной задачи механики деформированного тела.

Дискретная математическая модель процесса идентификации параметров тонкостенной оболочки строится путем разбиения поверхности тела на конечные элементы и выбора способа аппроксимации решения для прямой задачи, способа аппроксимации решения для обратной задачи и точек наблюдения за текущим состоянием системы.

Для решения обратной задачи эффективно использование нейронной сети, которая настроена по обучающей выборке, полученной в результате решения прямой задачи.

Применение предложенного алгоритма идентификации толщины дает достаточные по точности результаты.

Предложенный алгоритм может быть использован в соединении с результатами мониторинга для идентификации толщины оболочки в реальных элементах систем при их эксплуатации.

Предложенный подход может быть использован для восстановления любых параметров коэффициентных обратных задач теории оболочек – модуля упругости, геометрии повреждений и т. п.

Бібліографічні посилання

1. **Ватульян А. О.** Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела / А. О. Ватульян. – М., 2006. – 222 с.
2. **Ворович И. И.** Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И. И. Ворович. – М., 1989. – 373 с.
3. **Гук Н.А.** Выбор критерия идентификации в обратных задачах теории оболочек / Н. А. Гук, Н. И. Ободан, Г. М. Гавеля // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Д., 2010. – Вип.14. – С.123 – 133.
4. **Ободан Н. И.** Восстановление нагрузок, действующих на наблюдаемые тонкостенные системы, с помощью ядерных нейронных систем / Н. И. Ободан, К. В. Рундурев // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Д., 2010. – Вип. 14. – С.267 – 277.
5. **Сергиенко И. В.** Системный анализ многокомпонентных распределенных систем / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека. – К., 2009. – 638 с.
6. **Тихонов А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин – М., 1986. – 286 с.
7. **Хайкин С.** Нейронные сети: полный курс / С. Хайкин. – СПб. – 2006. – 1104 с.

Надійшла до редколегії 24.05.10

УДК 539.3

В. М. Рибка

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ДО ОБҐРУНТУВАННЯ НАПІВЗВОРОТНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗАННЯ УСКЛАДНЕНИХ МІШАНИХ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Для названих задач теорії пружності, переформульованих у векторну задачу спряження граничних значень кусково-голоморфних функцій, обґрунтовується напівзворотний підхід до побудови їхнього аналітичного розв'язку.

Ключові слова: теорія пружності, мішані плоскі задачі, векторна задача спряження, напівзворотний метод.

Для усложненных смешанных плоских задач теории упругости, переформулированных в векторную задачу сопряжения граничных значений кусочно-голоморфных функций, обосновывается полуобратный подход к построению их аналитического решения.

Ключевые слова: теория упругости, смешанные плоские задачи, векторная задача сопряжения, полуобратный метод.

For the complicated mixed 2-D problems of the elasticity theory, which are reformulated into vector conjugation problem of piece-wise holomorphic functions, a semi-inverse approach to construction of their analytical solution is justified.

Key words: elasticity theory, mixed 2-D problems, vector conjugation problem, semi-inverse method.

Вступ. Мішані плоскі задачі теорії пружності, зокрема, контактні задачі або задачі про тріщини й включення [6; 7; 12; 15–17] можуть бути приведені до задачі лінійного спряження граничних значень кусково-голоморфних функцій, або, коротше, задачі спряження [9]. У загальному випадку виникає векторна задача спряження, яку, зазвичай, намагаються звести до окремих скалярних задач спряження. Однак, приведення векторної задачі спряження до скалярних не є необхідним для побудови аналітичного розв'язку задачі [16]. При неможливості діагоналізації матриці спряження, задачу спряження, тим не менш, було в окремих випадках розв'язано на основі аналітичної теорії диференціальних рівнянь у комплексній площині синтезом розв'язків задач із меншим числом особливих точок [15–17]. Зазначене вище спонукає до розвитку напівзворотного методу розв'язання ускладнених мішаних плоских задач теорії пружності.

Стан питання. Контактні задачі плоскої теорії пружності можна звести до розв'язання задачі лінійного спряження граничних значень кусково-голоморфних функцій, скориставшись формулами Мусхелішвілі [9] для півплощини $y \leq 0$:

$$Y_y - iX_y = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (1)$$

$$2\mu(u' + iv') = \kappa \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (2)$$

що подають напруження та похідні переміщень через кусково-голоморфну функцію $\Phi(z)$ комплексної змінної $z = x + iy$, визначену як у нижній, так і верхній пів-

площині, а також кусково-голоморфну функцію $\overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$. Тут $\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$; λ ,

μ – коефіцієнти Ламе; i – уявна одиниця; риска над символом означає комплексне спряження.

Задачі теорії пружності про тріщини й включення до площині також можна звести до задачі лінійного спряження, скориставшись формулами Мусхелішвілі [9]

$$Y_y - iX_y = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (3)$$

$$2\mu(u' + iv') = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (4)$$

що подають напруження та похідні переміщень через кусково-голоморфні функції $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ комплексної змінної $z = x + iy$. Задачі в деяких інших галузях, зокрема, в гідромеханіці, також приводяться до задачі лінійного спряження граничних значень кусково-голоморфних функцій.

Нехай L означає сукупність скінченного числа простих розімкнутих дуг і простих замкнутих контурів у площині комплексної змінної z , що не мають спільних точок; за припущенням, ці дуги й контури є гладкими та на них визначено певний позитивний напрям.

Задача лінійного спряження (інакше її називають задачею Рімана і ще задачею Гільберта) формулюється наступним чином. Знайти кусково-голоморфну функцію $F(z)$ із лінією стрибків L , граничні значення якої ліворуч і праворуч задовольняють на L умові

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t). \quad (5)$$

Умова (5) має місце в усіх точках границі L , окрім кінців границі й точок розриву граничних умов. Функції $G(t)$ і $g(t)$ задовольняють умові Гельдера, $G(t) \neq 0$ ніде на границі L [3; 9].

Якщо в контактній задачі на всій лінії контакту задано однотипні граничні умови або однотипні граничні умови мають місце на контурі у площині з дефектами (тріщинами або включеннями), то розв'язання задачі істотно спрощується, оскільки виникає скалярна задача лінійного спряження. У загальному випадку потрібно шукати вектор-функцію $F(z) = (F_1(z), F_2(z))$, при цьому $G(t)$ – матриця, $g(t)$ – вектор-функція. Умові Гельдера мають задовольняти всі компоненти $G(t)$ і $g(t)$ та матриця $G(t)$ ніде не особлива на границі L [4; 10].

Розв'язок задачі (5) має вигляд [3; 4; 9; 10]

$$F(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{[X^+(t)]^{-1} g(t)}{t - z} dt + P(z)X(z), \quad (6)$$

де $X(z)$ – розв'язок однорідної задачі лінійного спряження, $P(z)$ – поліном із невідзначеними коефіцієнтами, які підлягають визначенню з умов конкретної задачі механіки.

Розв'язок однорідної задачі лінійного спряження, тобто (5) при $g(t) = 0$, з однією невідомою функцією не потребує особливих зусиль. Векторну задачу лінійного спряження зазвичай намагаються звести до окремих скалярних задач спряження, що, однак, не завжди можливо.

Мішані плоскі задачі теорії пружності називаємо ускладненими в тім розумінні, що ці задачі не зводяться до окремих скалярних задач спряження. У цьому випадку немає загального ефективного методу побудови $X(z)$ для будь-якої матриці $G(t)$. Дана робота елементи матриці $G(t)$ припускає кусково-постійними, що відповідає задачам механіки, які виникають. Точки розриву елементів матриці $G(t)$ є точками зміни граничних умов.

Раніш було показано, що приведення векторної задачі лінійного спряження до скалярних задач спряження не є необхідним для побудови аналітичного розв'язку задачі [15–17].

Щодо розв'язання векторної задачі лінійного спряження, наведемо цитату Гахова – автора фундаментальних досліджень крайових задач [3]:

«Теории краевой задачи Римана для случая $n > 1$ не хватает законченности. В то время как для $n = 1$ имеется полное решение, выражающееся в квадратурах через ее коэффициенты, для $n > 1$ решение может быть получено только из систем интегральных уравнений, и основная характеристика – частные индексы, от которых зависит разрешимость и число решений, не выражается явно через коэффициенты краевого условия...

Однако пока в истоках теории лежит решение системы интегральных уравнений, дальнейшего существенного прогресса ожидать нельзя. Ядро системы существенным образом зависит от произвольных функций и невозможность его полного исследования вытекает не из недоработанности вопроса, а из его существа. Безнадежно ожидать существенный прогресс на этом пути.» [4]

Методи дослідження. Однорідна задача лінійного спряження двовірних векторів

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) \quad (7)$$

може бути зведена в комплексній площині до однорідного диференціального рівняння другого порядку з особливими точками [8].

Дійсно, скористаємося можливістю побудови такого диференціального рівняння, виходячи з двох лінійно незалежних інтегралів (функцій) $\Phi(z)$ і $\overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}$. Виражаючи загальний інтеграл у вигляді

$$F(z) = c_1\Phi(z) + c_2\overline{\Phi}(z), \quad (8)$$

де c_1 і c_2 – довільні константи, потім виключаючи ці константи, отримаємо рівняння у вигляді

$$\begin{vmatrix} F(z) & \Phi(z) & \overline{\Phi}(z) \\ F'(z) & \Phi'(z) & \overline{\Phi}'(z) \\ F''(z) & \Phi''(z) & \overline{\Phi}''(z) \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

тобто однорідне диференціальне рівняння другого порядку відносно $F(z)$. Оскільки функції $\Phi(z)$ і $\overline{\Phi}(z)$, які, за припущенням, описують розв'язок мішаної плоскої задачі, можуть мати особливості, то коефіцієнти диференціального рівняння (9) теж можуть мати особливості. Зауважимо, що тут функції $\Phi(z)$ і $\overline{\Phi}(z)$ вважалися відомими, як це може бути, коли задача лінійного спряження є скалярною або зводиться до окремих скалярних задач.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння, інтеграли яких мають усі особливі точки регулярними, тобто не мають при $z = a_s$ для всіх особливих точок a_s істотних особливостей, є предметом підвищеного інтересу. Вони були вперше досліджені Фуксом і називаються рівняннями класу Фукса.

Рівняння (9) може бути приведено до рівняння класу Фукса, що дозволяє для розв'язання задач механіки застосовувати відповідну аналітичну теорію диференці-

альних рівнянь [5]. Такі рівняння можуть бути записані в різних формах [5; 13; 14], та чи не найзручнішою є форма рівняння класу Фукса, запропонована Папперітцем [5], тобто рівняння у вигляді

$$F''(z) + p(z)F'(z) + q(z)F(z) = 0, \quad (10)$$

де

$$p(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - \rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)}}{z - a_k}, \quad (11)$$

$$q(z) = \left[\sum_{k=1}^n \frac{\rho_1^{(k)} \rho_2^{(k)} (a_k - a_1)(a_k - a_1) \cdot (a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1}) \cdot (a_k - a_n)}{z - a_k} + Q_{n-4}(z) \right] \frac{1}{\prod_{k=1}^n (z - a_k)}, \quad (12)$$

причому, якщо $z = \infty$ є точкою голоморфності коефіцієнтів диференціального рівняння, то виконується співвідношення Фукса

$$\sum_{k=1}^n (1 - \rho_1^{(k)} - \rho_2^{(k)}) = 2, \quad (13)$$

$\rho_1^{(k)}, \rho_2^{(k)}$ – показники обходу особливих точок a_k ,

$Q_{n-4}(z)$ – поліном степені $n - 4$ з невизначеними коефіцієнтами.

Отже, починаючи з чотирьох особливих точок, рівняння класу Фукса (10–12), яке можна використовувати для розв'язання векторної однорідної задачі лінійного спряження (7), містить у собі за посередництвом полінома $Q_{n-4}(z)$ невідомі (акцесорні) параметри, що спричиняє істотні труднощі [2; 6].

У зв'язку з останнім, ситуація тут схожа на описану в приведеній цитаті Гахова, тобто із суті питання випливає те, що безнадійно очікувати істотний прогрес на шляху дослідження рівняння, яке не є цілком визначеним.

Зауважимо, що не саме кількість особливих точок, починаючи з чотирьох, є перешкодою, оскільки відомо, як побудувати розв'язок, коли при довільному числі ділянок спряження задача лінійного спряження є скалярною або зводиться до окремих скалярних задач. При меншому числі особливих точок задача може бути розв'язана іншими методами.

Оскільки лінійне однорідне диференціальне рівняння й задача лінійного спряження тісно пов'язані, то вивчення локальних властивостей першого є, таким чином, і вивченням локальних властивостей розв'язків задачі лінійного спряження.

Для повноти дослідження доцільно розвинути напівзворотний метод побудови загального (глобального) розв'язку на базі локальних розв'язків і граничних умов у цілому.

Рівняння (10) у випадку, коли корені характеристичного рівняння є різними, в околі особливої точки $z = a_s$ має канонічні інтеграли [5]:

$$\Psi_1(z) = (z - a_s)^{\rho_1} f_1(z), \quad (14)$$

$$\Psi_2(z) = (z - a_s)^{\rho_2} f_2(z), \quad (15)$$

де $\rho_1 = \ln \lambda_1 / 2\pi i$, $\rho_2 = \ln \lambda_2 / 2\pi i$ – показники обходу; λ_1, λ_2 – власні значення; регулярні функції $f_1(z), f_2(z)$ при обході особливої точки $z = a_s$ залишаються однозначними, отже, в околі цієї точки можуть бути розкладені в ряд Лорана.

Показано також, що у випадку $\lambda_1 = \lambda_2$ рівняння (10) в околі особливої точки $z = a_s$ має такі лінійно незалежні канонічні інтеграли:

$$\Psi_1(z) = (z - a_s)^{\rho_1} f_1(z), \quad (16)$$

$$\Psi_2(z) = \Psi_1(z) [\gamma \ln(z - a_s) + f_3(z)], \quad (17)$$

де константа γ в окремих випадках може бути нулем, а $f_3(z)$ – однозначна аналітична функція в околі особливої точки $z = a_s$.

Показники степеня ρ_1, ρ_2 , у силу властивості логарифмічної функції, визначаються з точністю до доданків, які є цілими числами. Це погоджується з формулами (14–17), оскільки помножуючи ряд Лорана на $(z - a_s)^m$, де m – будь-яке ціле число, знову отримуємо ряд Лорана.

Обмежимося випадком, коли функції $f_1(z), f_2(z), f_3(z)$ мають полюс. Тоді, помножуючи ряд Лорана на $(z - a_s)^m$, де m – підходяще ціле число, можна досягти, щоб у формулах (14–17) $f_1(z), f_2(z), f_3(z)$ в околі точки $z = a_s$ були голоморфними та відрізнялися від нуля при $z = a_s$, отже, розкладалися в ряд Тейлора.

Більш того, в теорії пружності показники степеня ρ_1, ρ_2 мають задовольняти певним фізичним умовам (наприклад, умові інтегрованості напружень).

У загальному випадку, для інтегралів рівняння (9) (або (10)) особлива точка є точкою розгалуження. Нехай $F_1(z)$ і $F_2(z)$ – будь-які два лінійно незалежні інтеграли рівняння (9). Після повного обходу особливої точки $z = a_s$ у додатному напрямку вони перетворюються на інтеграли, які позначимо $\tilde{F}_1(z)$ і $\tilde{F}_2(z)$. Оскільки будь-який інтеграл рівняння (9) лінійно виражається через два частинні лінійно незалежні інтеграли, то

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

де G є деяка матриця з постійними елементами.

Поглянемо тепер на умови спряження (7) як на такі, що характеризують обходи особливих точок.

Нехай на фрагменті контуру граничні умови змінюються

$$F^+ = G_{s-1} F^- \text{ при } x < a_s, \quad F^+ = G_s F^- \text{ при } x > a_s, \quad (19)$$

де $F(z) = \begin{pmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \end{pmatrix}$, G_{s-1} , G_s – матриці розміру 2×2 .

Якщо G_s – одинична матриця, то ділянка контуру праворуч a_s є ділянкою неперервного аналітичного продовження $F(z)$ із нижньої півплощини до верхньої

(або навпаки). Цього разу матриця G_{s-1} характеризує обхід вектор-функцією $F(z)$ точки a_s у позитивному напрямку.

Якщо G_{s-1} – одинична матриця, то ділянка контуру ліворуч a_s є ділянкою неперервного аналітичного продовження $F(z)$ із однієї півплощини до другої. У цьому разі матриця G_s^{-1} характеризує обхід вектор-функцією $F(z)$ точки a_s у позитивному напрямку.

У загальному випадку (19), якщо ні G_s , ні G_{s-1} не є одиничною матрицею, охарактеризувати обхід вектор-функцією $F(z)$ точки a_s у позитивному напрямку можна, наприклад, наступним чином. Уведемо функцію

$$R(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} F(z), y > 0; \\ G_s F(z), y < 0, \end{cases} \quad (20)$$

для якої при $x > a_s$ маємо $R^+ = R^-$. За термінами $R(z)$ умова $F^+ = G_{s-1}F^-$ при $x < a_s$ приймає вигляд

$$R^+ = G_{s-1}G_s^{-1}R^- \text{ при } x < a_s. \quad (21)$$

Отже, матриця $Q_{s-1} \stackrel{\text{def}}{=} G_{s-1}G_s^{-1}$ характеризує обхід вектор-функцією $R(z)$ (як і $F(z)$) точки a_s у позитивному напрямку. Формула (21) охоплює два попередні окремі випадки.

Матриця Q_{s-1} , взагалі кажучи, не є діагональною. Приведемо до канонічного вигляду лінійне перетворення (21). Для цього перейдемо від вектор-функції $R(z)$ до вектор-функції $\Psi(z)$ заміною

$$R(z) = S_s \Psi(z), \quad (22)$$

де матриця S_s має індекс s як прикмету особливої точки a_s .

Підберемо S_s так, щоб значення $\Psi(z)$ після одного повного обходу в додатному напрямку точки s були пов'язані з їхніми значеннями до обходу діагональною матрицею. Користуючись (22), з (21) маємо

$$\Psi^+(x) = S_s^{-1}Q_{s-1}S_s \Psi^-(x). \quad (23)$$

Розв'яжемо спочатку задачу на власні значення

$$(Q_{s-1} - \lambda E)r = 0, \quad (24)$$

де E – одинична матриця, r – власний вектор матриці Q_{s-1} .

Якщо корені λ_1, λ_2 характеристичного рівняння $\det(Q_{s-1} - \lambda E) = 0$ є різними і за стовпці матриці S_s взято власні вектори матриці Q_{s-1} , то матриця $S_s^{-1}Q_{s-1}S_s$ буде діагональною [18]. Отже, тоді перетворення (22) пов'язуватиме вектор неканонічних функцій $R(z)$ в околі точки a_s з вектором канонічних у цьому околі функцій $\Psi(z) = (\Psi_1(z), \Psi_2(z))$.

Подальше адитивне й мультиплікативне комбінування канонічних функцій може бути корисним для повного дослідження задачі.

Висновок. Для істотно векторної задачі спряження, що виникає, зокрема, в ускладнених мішаних плоских задачах теорії пружності та яка не зводиться методом діагоналізації матриці спряження до окремих скалярних задач спряження, тим не менш, можна провести аналіз задачі, а саме, на основі застосування аналітичної теорії диференціальних рівнянь у комплексній площині й розв'язання задач на власні значення в околі кожної з особливих точок та за коренями характеристичних рівнянь можна виписати канонічні функції в околі кожної з особливих точок, аналогічно як і для рівнянь класу Фукса. Оскільки вихідна крайова задача механіки пов'язана з досліджуваною векторною задачею спряження, то, таким чином, принципово вичерпується питання відшукування показників крайової задачі механіки.

Бібліографічні посилання

1. **Векуа Н. П.** Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи / Н. П. Векуа. – М., 1970. – 380 с.
2. **Галин Л. А.** Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления / Л. А. Галин // ПММ, – 1945, –Т. 9, вып. 5. – С. 413–424.
3. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М., 1977. – 640 с.
4. **Гахов Ф. Д.** Краевая задача Римана для системы n пар функций / Ф. Д. Гахов // Успехи математических наук, – 1952, т. 7, вып. 4 (50). – С. 3–53.
5. **Голубев В. В.** Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В. В. Голубев. – М.–Л., 1941. – 400 с.
6. **Моссаковский В. И.** Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления / В. И. Моссаковский, А. Г. Бискуп // ДАН СССР, – 1972, 206, № 5. – С. 1068–1070.
7. **Моссаковский В. И.** Задача о вдавливании выпуклого штампа в упругую полуплоскость при нормальной и касательной пригрузке / В. И. Моссаковский, В. М. Рыбка // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. 2003. – Вип. 7, т. 2. – С. 137–144.
8. **Моссаковский В. И.** Контактные задачи теории упругости для полуплоскости как задачи для линейного дифференциального уравнения в комплексной области / В. И. Моссаковский, В. М. Рыбка, С. А. Смирнов // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Вип. 3 (32). –Д., 2004. – С. 32–37.
9. **Мухелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М., 1966. – 708 с.
10. **Мухелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике / Н. И. Мухелишвили. – М., 1962. – 600 с.
11. **Рыбка В. М.** Про діагоналізацію і одночасну діагоналізацію матриць / В. М. Рыбка // Доп. НАНУ. Математика, природознавство, технічні науки. – 1999. – № 11. – С. 40–42.
12. **Рыбка В. М.** Контакт штампа с упругой полуплоскостью при нормальной и касательной пригрузке / В. М. Рыбка, А. Б. Ковура // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2000. – Вип. 3, т. 2. – С. 88–97.
13. **Рыбка В. М.** Теорія комплексних диференціальних рівнянь як основа для розв'язання ускладнених пружних контактних задач / В. М. Рыбка // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2005. – Вип. 9, т. 2. – С. 151–158.
14. **Рыбка В. М.** Аналітичний підхід до ускладнених пружних плоских контактних задач / В. М. Рыбка // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2006. – Вип. 10, т. 2. – С. 155–161.
15. **Рыбка В. М.** Аналітичний аспект векторної задачі лінійного спряження (на прикладі контактної задачі) / В. М. Рыбка // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2007. – Вип. 11, т. 2. – С. 221–228.
16. **Рыбка В. М.** Аспекти векторної задачі спряження на прикладі контактної задачі теорії пружності / В. М. Рыбка // Доп. НАНУ. Математика, природознавство, технічні науки. – 2008. – № 10. – С. 77–81
17. **Рыбка В. М.** Задача теорії пружності про площину з тріщиною і тонким включенням як векторна задача спряження / В. М. Рыбка // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2008. – Вип. 12, т. 2. – С. 107–114.
18. **Стренг Г.** Линейная алгебра и ее применения / Г. Стренг. – М., 1980. – 456 с.

УДК 539.3:534.1; 620.179:678.067

Ю.М. Селиванов

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ГОЛОГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДИКИ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОЖНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ СТРУКТУР

Представлены три методики выявления и оценки неоднородностей напряженно-деформированного состояния тонкостенных структур с конструктивными несовершенствами и технологическими дефектами, разработанные на базе усовершенствованных способов анализа голографического интерференционного портрета структуры.

Ключевые слова: тонкостенные структуры, напряженно-деформированное состояние, голографические методики.

Подано три методики віднаходження й оцінки неоднорідностей напружено-деформованого стану тонкостінних структур із конструктивними недосконалостями та технологічними дефектами, розроблені на базі удосконалених засобів аналізу голографічного інтерференційного портрету структури.

Ключові слова: тонкостінні структури, напружено-деформований стан, голографічні методики.

Three methods for finding and evaluation of stress-strain state inhomogeneities of thin-walled structures with constructive and technological defects are developed on the basis of improved analysis of holographic interference image of structure.

Key words: thin-walled structures, stress-strain state, holographic methods.

Введение. Теоретическое определение напряженно-деформированного состояния (НДС) реальных тонкостенных структур со сложным распределением кривизны и материала, особенно композитного, сопряжено с рядом трудно решаемых задач, возникающих в ходе построения адекватной расчетной модели. Достаточно надежные данные по НДС и прочностным свойствам таких структур можно получать только путем их испытаний с привлечением методов экспериментального исследования деформаций и напряжений [1, 4, 5, 8, 9]. Во многих случаях больший интерес представляют неоднородности НДС структуры, в частности, ее наиболее напряженные (слабые) зоны и ориентация главных напряжений в них.

При голографических исследованиях о неоднородностях НДС нагружаемого объекта часто судят по конфигурации и плотности интерференционных полос, сопровождающих аномалии его поверхностных деформаций в зоне неоднородности [1, 2, 5, 10]. Голографический интерференционный портрет (ГИП) тонкостенной структуры, как правило, включает полосы, обусловленные не только ее деформациями, но и формой исследуемой поверхности, параметрами оптической схемы освещения и наблюдения. Чтобы оценить полосы, вносимые в ГИП испытываемой структуры только неоднородностями НДС, его сравнивают с ГИПом эталонной структуры. При этом за эталон нередко принимают образец без технологических дефектов. Однако такой выбор эталона оправдывает себя лишь при контроле хорошо проявляющихся на интерферограмме локальных неоднородностей в простейших структурах, например, в металлических трубах под внутренним давлением при выявлении их трещин.

Для более сложных объектов, таких, как композитные оболочки переменной толщины и кривизны, этот подход оказывается мало пригодным по следующим причинам. В настоящее время практически невозможно изготовить бездефектные

образцы таких оболочек. Кроме того, сложная структура из композитного материала, даже при отсутствии в ней технологических дефектов, имеет собственные зоны повышенных деформаций (напряжений), вызванные ее конструктивными несовершенствами и особенностями действующей нагрузки.

Цель данного сообщения – представить три сравнительно простые голографические методики эффективного выявления и анализа неоднородностей НДС тонкостенной структуры с конструктивными несовершенствами и технологическими дефектами.

Первая методика (с использованием авторского варианта качественного анализа ГИПа). На первом этапе, как обычно, выявляются зоны повышенной плотности интерференционных полос на ГИПе структуры, в них – место локализации наибольшего изменения этой плотности и главное направление ее изменения (по нормали к полосам). Затем следуют три существенных отличия от известных методик [1; 2; 5; 10], предусматривающих определение величины местной плотности полос.

Во-первых, в месте локализации наибольшего изменения плотности полос вычисляется относительная величина изменения их шага h по главному направлению ($\overline{\Delta h_i} = |h_i - h_{i+1}|/h_{i+1}$, где i – номер интерференционной полосы). Таким образом, оценивается не угол наклона, а непосредственно величина главной деформации поверхности на рассматриваемом участке, точнее – ее проекция на вектор чувствительности оптической схемы.

Во-вторых, для определения самой величины главной деформации найденное значение $\overline{\Delta h_i}$ умножается на оптико-геометрический коэффициент соответствующего участка κ_y , который учитывает форму исследуемой поверхности, параметры ее освещения и наблюдения и в общем случае согласно [1, 5] определяется по формуле

$$\kappa_y = 1 / (\cos \theta \cdot \cos \psi) , \quad (1)$$

где θ – половина угла между направлениями освещения и наблюдения поверхности в заданной точке; ψ – угол между вектором смещения и биссектрисой угла 2θ в этой точке.

В-третьих, между собой сравниваются приведенные относительные величины изменения шага полос ($K_y = \overline{\Delta h_i} \times \kappa_y$), определяется их максимальное значение $K_{y \max}$, по которому и оценивается выявленная неоднородность НДС. Участок локализации $K_{y \max}$ отождествляется с наиболее деформируемой (слабой) зоной исследуемой структуры, а касательная к местным интерференционным полосам – с наиболее вероятной ориентацией ее начальной макротрещины (в предположении применимости деформационного критерия прочности).

Данная методика не имеет принципиальных ограничений на форму поверхности исследуемой тонкостенной структуры, но более точные результаты, приближающиеся к данным полной количественной расшивки [4; 5], следует ожидать, когда плотность полос на ее ГИПе невелика.

Коэффициент κ_y для цилиндрической оболочки под внутренним давлением при ее исследовании с использованием распространенной оптической схемы центрального освещения и наблюдения (рис. 1) принимает вид

$$\kappa_y = 1 / [\cos (\varphi + \beta) \times \cos \gamma] \quad (2)$$

или в более удобной для расчета форме

$$\kappa_y = 1/\{\cos [\arcsin (r/R) + \arctg (r/S)] \times \cos [\arctg (l/S)]\}. \quad (2a)$$

Углы и размеры в формулах (2) и (2a) соответствуют рис. 1. Характерный график функции (2a) для данных реального эксперимента приведен на рис. 2.

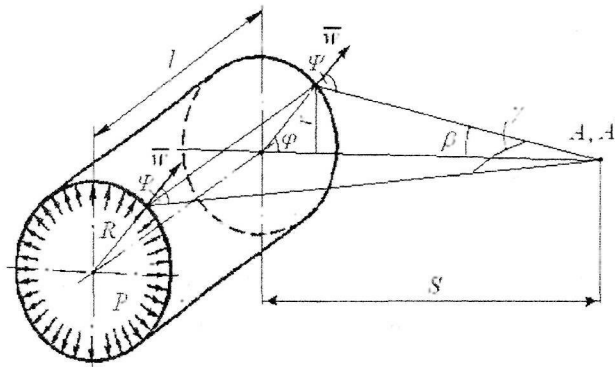


Рис. 1. Геометрические параметры голографического измерения прогибов \bar{w} цилиндрической оболочки (A и A' – точки освещения и наблюдения)

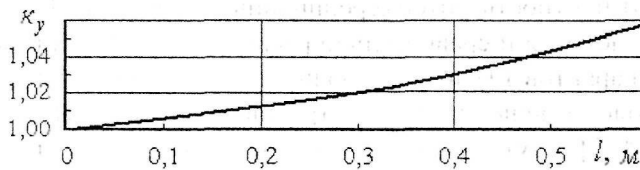


Рис. 2. Распределение κ_y вдоль продольной оси цилиндрической оболочки при $\varphi = \beta = 0$; $S = 1,725$ м; $l = 0,6$ м

При исследовании сферической оболочки под внутренним давлением с использованием такой же схемы

$$\kappa_y = 1 / \cos (\varphi + \beta) \quad (3)$$

или

$$\kappa_y = 1/\cos [\arcsin (r/R) + \arctg (r/S)]. \quad (3a)$$

График функции (3a) показан на рис. 3.

На приведенных графиках видно, что коэффициент κ_y по центральному сектору цилиндрической оболочки остается практически постоянным ($\kappa_y \approx 1$), но по поверхности сферической оболочки изменяется значительно, достигая в периферийной зоне величины $\kappa_y \approx 3,5$.

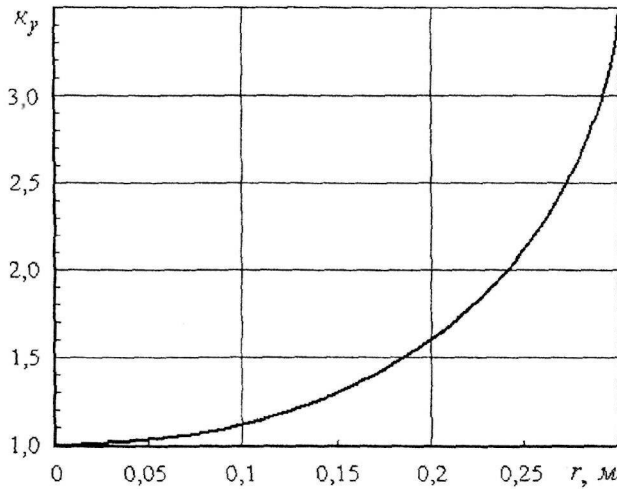


Рис. 3. Распределение κ_y вдоль радиуса сечения сферической оболочки при

$S = 1,725$ м; $R = 0,325$ м; радиус основания $r_0 = 0,291$ м (данные реального эксперимента)

Вторая методика (с использованием модернизированного муарового метода).

Эту методику целесообразно применять в исследованиях тонкостенных структур, отвечающих дум условиям: а) удастся изготовить равнопрочный эталонный образец структуры; б) плотность интерференционных полос на ГИПах контрольного образца и эталона немалая и сравнительно равномерная. Тогда компьютерным совмещением транспарантов ГИПов контролируемого образца и эталона визуализируется разница полей смещений, зарегистрированных на ГИПах, в виде картины муаровых полос [4, 7]. Путем анализа этой картины рассмотренным выше способом (с помощью первой методики) определяются наиболее деформируемая (слабая) зона контролируемого образца и наиболее вероятная ориентация его начальной макротрещины.

Третья методика (с использованием расчетного ГИПа равнопрочной модели).

Данная методика тоже предназначена для обнаружения и оценки отклонений НДС контролируемого образца от НДС равнопрочного образца, но применять ее целесообразно в исследованиях тонкостенных структур с каноническими формами поверхности, для которых невозможно изготовить бездефектный равнопрочный эталон, но можно рассчитать его ГИП.

Суть методики состоит в том, что из ГИПа контролируемого образца вычитается расчетный ГИП эталона. В результате, как и при использовании муарового метода, получается картина, которая визуализирует разницу полей смещений, зарегистрированных на ГИПах. Анализ этой результирующей картины с определением наиболее деформируемой (слабой) зоны контролируемого образца и наиболее вероятной ориентацией его начальной макротрещины также выполняется с помощью первой методики.

Для расчета ГИПов центрально освещаемых и наблюдаемых цилиндрических и сферических равнопрочных оболочек под внутренним давлением (рис. 1) получено следующее уравнение [10]:

$$N_i = 2 w \cos \left[\arcsin(S/R) + \arctg \eta \right] / \left(\lambda \sqrt{1 + \xi^2} \right), \quad (4)$$

где N_i – порядок интерференционной полосы ($i=1,2,3,\dots$); w – радиальная компонента перемещений равнопрочной модели (принимается равной среднему значению радиальных перемещений контролируемых образцов на бездефектных участках поверхности); $\eta = r/S$; λ – длина волны используемого лазерного излучения; $\xi = l/S$.

За равнопрочный эталон сферической оболочки под внутренним давлением принимается мысленно отсекаемая плоскостью часть замкнутой тонкой однородной сферической оболочки при такой же нагрузке. Ее ГИП, построенный по формуле (4) при $\xi = 0$, представляет собой семейство концентрических кольцевых линий, плотность которых растет к периферии.

В качестве равнопрочного эталона цилиндрической оболочки под внутренним давлением принимается участок аналогично нагруженной круглой трубы, двукратно усиленной в окружном направлении. Его расчетный ГИП – семейство эллипсообразных линий с возрастающей к периферии плотностью.

Апробация методик. Указанные методики использовались в анализе НДС ряда тонкостенных структур с конструктивными несовершенствами и технологическими дефектами. Рассматривались, в частности, стеклопластиковые модельные образцы корпуса твердотопливного ракетного двигателя, представлявшие собой оболочки в форме кокона, и диафрагмы критического сечения того же двигателя, выполненные как оболочки переменной толщины в форме сферического сегмента; все образцы нагружались равномерным внутренним давлением. Кроме того, исследовались оребренные пластины из оргстекла под действием поперечной сосредоточенной силы и натуральный картер коробки передач и сцепления легкового автомобиля при нагружении на разных передачах. Некоторые характерные результаты представлены на рис. 4, 5, где участки повышенных деформаций, в том числе и наиболее слабая зона, околонулены кривой, а наиболее вероятная ориентация макротрещины показана отрезком прямой.

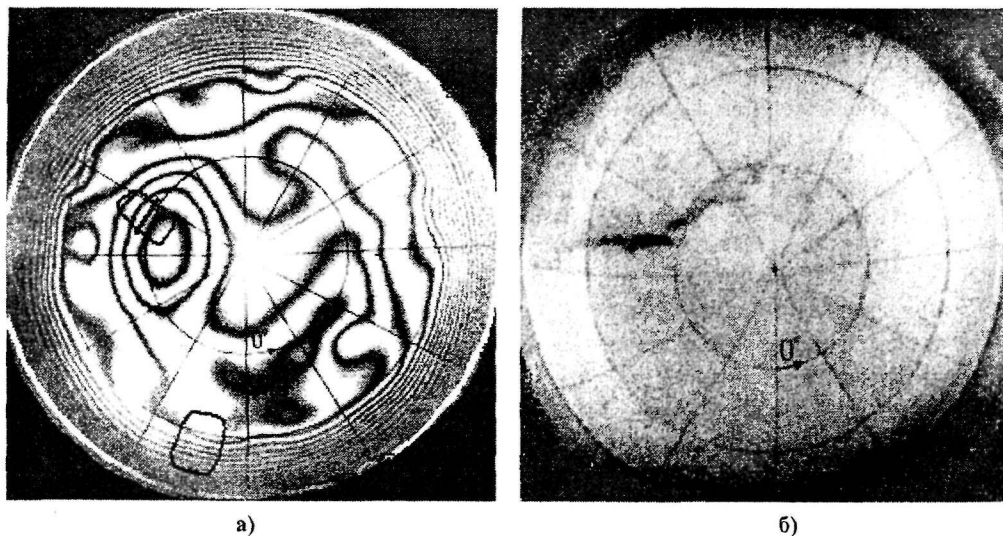


Рис. 4. ГИП с зонами повышенных деформаций и наиболее вероятной макротрещиной, определенными по первой методике (а), и кадр кинограммы начала разрушения (б) образца сферической стеклопластиковой оболочки

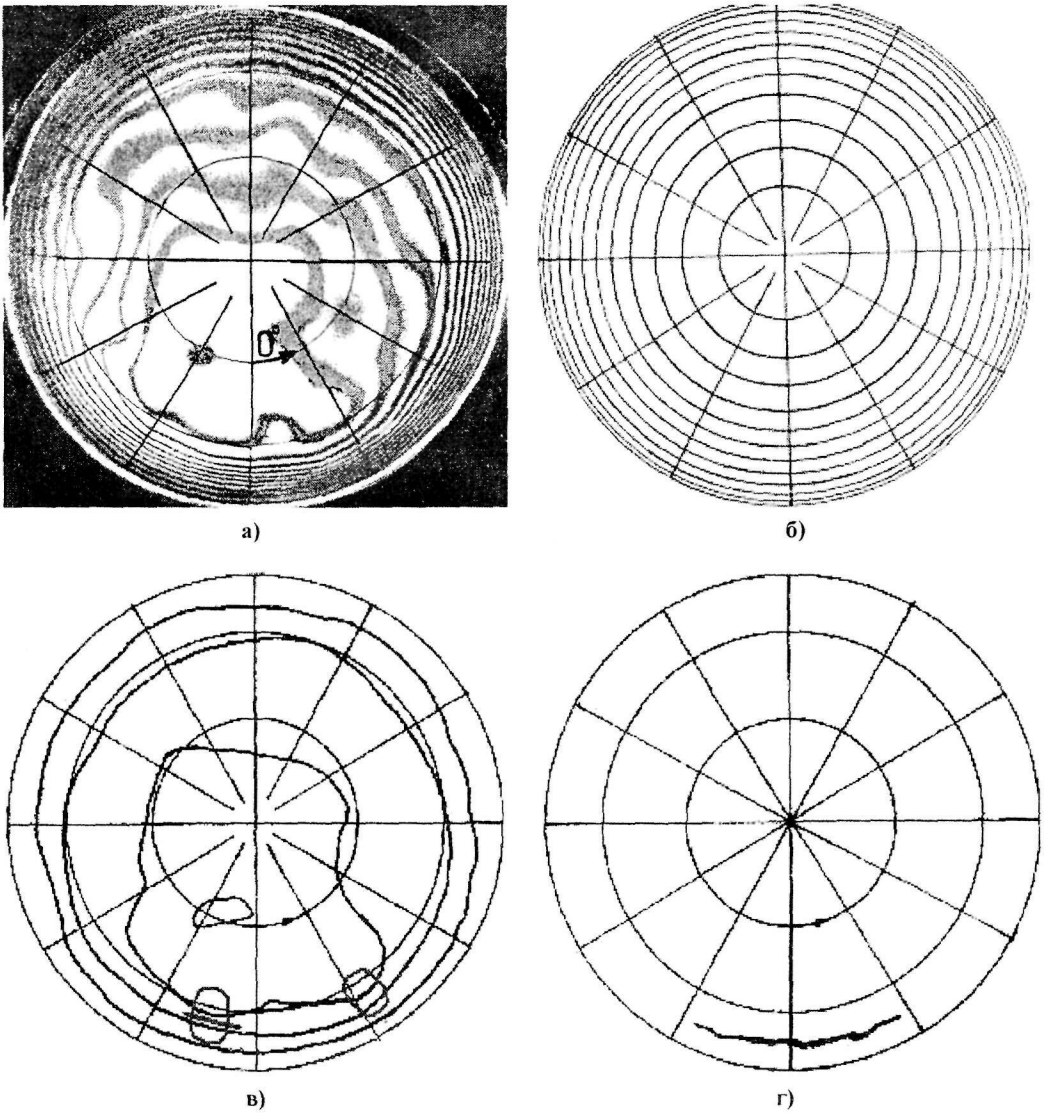


Рис. 5. ГИП (а), расчетный ГИП равнопрочного эталона (б), результирующая картина полос с зонами повышенных деформаций и наиболее вероятной макротрещиной, определенными по третьей методике (в), и кадр кинограммы начала разрушения (г) образца сферической стеклопластиковой оболочки

При сравнении полученных данных с результатами испытаний указанных структур на разрушение, отмечено их приемлемое соответствие, которое заключается в следующем.

Зафиксированное с помощью скоростной киносъемки место появления макротрещины оболочки и определенная по одной из предложенных методик зона локализации ее наибольших деформаций хорошо согласуются для всех образцов. Причем, максимальное соответствие результатов прогноза и испытаний достигнуто на образцах, ГИП которых содержит неоднородности в разных местах наблюдаемой поверхности, то есть с различными величинами оптико-геометрического коэффициента κ_y (рис. 4).

Традиційний голографічний спосіб визначення найбільш деформованої зони в таких випадках, як відомо, не дає задовільних результатів.

Орієнтації початкової макротріщини образців, визначені по голографічним інтерферограммам і з допомогою кінозйомки, збігаються в цілому гірше, ніж спрогнозовані і дійсні місця локалізації цієї тріщини. Тем не менше, максимальне несоответствие (найбільше значення кута) між дійсними і спрогнозованими напрямками макротріщини не перевищує $(20 - 25)^\circ$. Розходження, по-видимому, пов'язано в основному зі складним характером взаємодії шарів оболонки на завершальній стадії її мікроразрушення.

По мірі зростання якості випробовуваних образців відповідність результатів голографічних експериментів і випробувань на руйнування природно знижується.

Якщо зразок містить єдину добре виражену на інтерферограммі зону підвищених деформацій, місце локалізації його початкової макротріщини досить точно визначається звичайним способом [1] – шляхом якісного аналізу конфігурації і густоти інтерференційних смуг, супроводжуваних такою зоною на ГИПе. Цим слід користуватися на практиці, оскільки застосування розглянутих методик вимагає додаткових витрат часу.

Перша методика в частині варіанту (при $k_y \approx 1$) також успішно застосовувалася для виявлення і оцінки слабких зон картера коробки передач і сцеплення автомобіля – складної металевий корпусної конструкції [6].

Позитивні результати застосування другої методики отримані при виявленні відмінностей деформованих станів двох варіантів оптимізуваної ребристої плити з однорідного матеріалу [7]. Аналіз показав, що її використання забезпечує оперативне виявлення і оцінку всіх слабо виражених на ГИПе відхилень НДС контролюваного зразка від рівнопрочного.

Обсуждение результатов и выводы. З порівняння результатів виконаних прогнозів і випробувань на руйнування випливає, що запропоновані голографічні методики виявлення і оцінки неоднорідностей НДС тонкостінних структур з конструктивними недоліками і технологічними дефектами себе повністю оправдали. Їх основна перевага полягає в підвищеній достовірності отримуваних даних, яка досягається за рахунок застосування авторського варіанту аналізу ГИПа тонкостінної структури. Відповідно до цього варіанту визначається і порівнюється не густина смуг на окремих ділянках досліджуваної поверхні, а відносна величина зміни їх кроку по головному напрямку, тобто оцінюється безпосередньо величина місцевої головної деформації. Крім того, шляхом урахування в аналізі поправочного оптико-геометричного коефіцієнта повністю виключається вплив геометрії оболонки і оптичної схеми установки на достовірність результатів прогнозування, особливо в периферійних зонах контролюваної поверхні, де величина коефіцієнта може бути значущою.

Таким чином, запропоновані методики, залишаючись досить простими, є більш ефективними порівняно з існуючими прийомами голографічного дослідження неоднорідностей НДС складних тонкостінних структур з склопластика, углепластика і інших, подібних їм за деформативно-прочніми властивостями матеріалів. Очевидно, їх можна використовувати і для модернізації відомих комбінованих методів діагностики основних характеристик руйнування структур такого класу, передбачаючих локальні заміри фізико-механічних характеристик контролюваного зразка [3].

Библиографические ссылки

1. **Вест Ч.** Голографическая интерферометрия: пер. с англ.: монография / Ч. Вест – М., 1982. – 504 с.
2. Голографічні технології в авіаційно-космічній техніці: навч. посіб. / О. О. Ларіонова, В. Ф. Рожковський, Ю. В. Сохач; під ред. В. П. Малайчука. – Д., 2003, – 272 с.
3. **Моссаковский В. И.** Методика оценки прочности конструкций из композиционных материалов с помощью комбинации голографической интерферометрии и традиционных методов контроля / В. И. Моссаковский, М. А. Ахметшин, В. В. Петров, Ю. М. Селиванов, В. Г. Тихий, Н. Е. Качаловская // IV Всесоюз. симпоз. «Механика конструкций из композиционных материалов». (Новосибирск 1982 г.) – Новосибирск. – 1984. – С. 85 – 89.
4. **Моссаковский В.** О компьютерном анализе голографических интерферограмм деформированного состояния конструкций / В. Моссаковский, А. Колодяжный, Ю. Селиванов // Theoretical Foundations of Civil Engineering – IX. Ed. by W. Szczesniak. – Warsaw: OW PW. – 2003. – P. 195 – 200.
5. **Селиванов Ю. М.** Некоторые способы оценки НДС конструкций с помощью голографической интерферометрии / Ю. М. Селиванов // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 1998. – Вип. 1. – Т. 2. – С. 130 – 135.
6. **Селиванов Ю. М.** О рациональном распределении материала конструкций из нерегулярных оболочек с помощью голографической интерферометрии / Ю. М. Селиванов // Методы решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела: сб. научн. трудов. – 1999. – С. 118 – 125.
7. **Селиванов Ю. М.** Метод муара голографических интерферограмм в задачах оптимизации конструкций / Ю. М. Селиванов // Вісник Дніпропетровського ун-ту, Механіка. – 1999. – Вип. 2. – Т. 2. – С. 145 – 152.
8. **Островский Ю. И.** Голографические интерференционные методы измерения деформаций: монография / Ю. И. Островский, В. П. Щепинов, В. В. Яковлев. – М., 1988. – 248 с.
9. Экспериментальная механика: в 2 кн. Кн. 1; пер. с англ. / под ред. А. Кабаяси. – М., 1990. – 616 с.
10. **Mossakovsky V. I.** Holographic testing of defects in composite material constructions / V. I. Mossakovsky, M. A. Achmetshin, V. V. Petrov, V. G. Tichy, Yu. M. Selivanov // 10-th World Conf. on Nondestructive Testing. – 5–10. – Moscow. – 1982. – P. 320 – 327.

Надійшла до редколегії 15.10.10

УДК 539.3

Т. В. Хитрова

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ДО ПОСТАНОВКИ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ СТВОРЕННЯ ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

Запропоновано постановку одного класу обернених задач теорії пружності. Розглядаються задачі визначення зовнішніх впливів на пружне тіло, за яких у заданій підобласті тіла виникає потрібне поле переміщень. Сформульована у такий спосіб обернена задача не має розв'язку, оскільки довільно заданий вектор переміщень точок заданої області не задовольняє, взагалі кажучи, рівняння теорії пружності. Тому запропоновано послаблене формулювання крайової задачі, згідно з яким ставиться вимога лише близькості до заданого поля переміщень.

Ключові слова: обернена задача, вектор переміщень, крайова задача, некоректність, регуляризація.

Предложена постановка одного класса обратных задач теории упругости. Рассматриваются задачи определения внешних влияний на упругое тело, при которых в заданной подобласти тела возникает нужное поле перемещений. Сформулированная таким образом обратная задача не имеет решения, поскольку произвольно заданный вектор смещений точек заданной области не удовлетворяет, вообще говоря, уравнениям теории упругости. Поэтому предложена ослабленная формулировка краевой задачи, согласно которой ставится только условие близости к указанному полю перемещений.

Ключевые слова: обратная задача, вектор смещений, краевая задача, некорректность, регуляризация.

The definition of one class of inverse elasticity theory problems is suggested. The problems of definition of external effects on the elastic body, when necessary strain field arises inside given subregion of solid, are considered. Outspoken in that way inverse problem doesn't have solution, because generally speaking the arbitrarily assigned vector of displacements of the given region's points doesn't meet elasticity theory equations. That's why relaxed definition of boundary-value problem is suggested.

Key words: inverse problem, vector of displacements, boundary-value problem, incorrectness, regularization.

Об'єктом дослідження в механіці деформованого твердого тіла традиційно є прямі задачі визначення напружено-деформованого стану тіла за відомою формою області, заданими механічними характеристиками та заданими крайовими умовами. Однак запити практики різних галузей науки і техніки приводять до задач іншого типу, певною мірою, протилежних до зазначених прямих задач. Важливе значення для машинобудування має проблема неруйнівної ідентифікації матеріалів. Проектування технологій обробки тиском потребує дослідження форми інструменту, яка б забезпечувала потрібну форму виробу. Важливий клас задач утворює створення умов для склеювання та дифузійного зварювання при виготовленні композиційних матеріалів. Наведені приклади обернених задач свідчать про різноманіття їхньої тематики. Очевидно, для обернених задач, на відміну від прямих, неможливий єдиний підхід до їх постановки. Тому особливого підходу потребує кожен клас обернених задач. Деякі класи обернених задач розглядалися у [1–3; 9].

Значної уваги при вивченні обернених задач потребує проблема коректності постановки. Якщо коректність постановки прямих задач добре обґрунтована і не викликає сумнівів, то для обернених факт існування та єдиності розв'язку не є очевидним. Крім того, більшість обернених задач виявляється некоректною за 3-ю умовою Адамара.

Дана робота пропонує постановку одного класу обернених задач теорії пружності. Розглядаються задачі визначення зовнішніх впливів на пружне тіло, за яких у заданій підобласті тіла виникає потрібне поле переміщень. Очевидно, що довільно заданий вектор переміщень точок заданої області не задовольняє, взагалі кажучи, рівняння теорії пружності. Тому сформульована у такий спосіб обернена задача не має розв'язку. Пропонується послаблене формулювання крайової задачі, згідно з яким ставиться вимога лише близькості до заданого поля переміщень у нормі простору Соболева. У рамках такої послабленої постановки вдалось обґрунтувати існування розв'язку оберненої задачі. Наводиться приклад, який показує, що вона є некоректною за третьою умовою Адамара і вказується конкретний спосіб використання методу регуляризації Тихонова.

Постановка задачі. Нехай пружне тіло займає область Ω простору. Позначимо через $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – радіус-вектор довільної точки тіла. Напружено-деформований стан характеризується вектором переміщень $\bar{u}(\bar{x})$, тензором малих деформацій $\varepsilon_{ij}(\bar{x})$, тензором напружень $\sigma_{ij}(\bar{x})$. Механічні властивості матеріалу описуються співвідношенням узагальненого закону Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

де λ, μ – сталі Ляме, $\theta = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$.

Зв'язок між компонентами тензора малих деформацій та вектора малих переміщень описується співвідношення Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2)$$

Компоненти тензора напружень задовольняють рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (3)$$

Тіло обмежене поверхнею Γ , на якій задані переміщення

$$\bar{u}(\bar{x}) = \bar{\varphi}(\bar{x}), x \in \Gamma. \quad (4)$$

Пряма задача полягає у визначенні переміщень $\bar{u}(\bar{x})$, деформацій $\varepsilon_{ij}(\bar{x})$ та напружень $\sigma_{ij}(\bar{x})$, які задовольняють співвідношення (1) – (3) та крайову умову (4).

Пряму задачу можна сформулювати як задачу в переміщеннях, тобто задачу знаходження вектор-функції $\bar{u}(\bar{x})$, яка задовольняє векторне рівняння Ляме

$$\mu \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \bar{u}) = 0 \quad (5)$$

та крайові умови (4).

Розширимо поняття розв'язку прямої задачі і розглянемо поняття узагальненого розв'язку. Введемо лінійний простір Соболева $[W_2^1(\Omega)]^3$ вектор-функцій $\bar{v}(\bar{x})$, визначених в області Ω , для яких існує інтеграл

$$\int_{\Omega} (\bar{v} + \text{grad} v_i \text{grad} v_i) d\Omega.$$

Наділимо цей простір структурою гільбертового простору, вводячи скалярний добуток

$$(\bar{u}, \bar{v})_{[W_2^1(\Omega)]^3} = \int_{\Omega} (\bar{u}\bar{v} + \text{grad}_i \bar{u} \text{grad}_i \bar{v}) d\Omega.$$

Утворимо множину узагальнених розв'язків рівняння Ляме. Позначимо через $\gamma\bar{v}$ слід вектор-функції $\bar{v} \in [W_2^1(\Omega)]^3$ на поверхні Γ . Згідно з теоремою Ліонса про

сліди [4], вектор-функція $\gamma\bar{u}$ належить простору Соболева $[W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^3$. Крім того,

кожній функції $\bar{\varphi} \in [W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^3$ можна поставити у відповідність вектор-функцію $\bar{v} \in [W_2^1(\Omega)]^3$, таку, що $\gamma\bar{v} = \bar{\varphi}$.

Нехай $\bar{\varphi}(x)$ – задана на Γ вектор-функція. Тоді позначимо через V множину всіх $\bar{v} \in [W_2^1(\Omega)]^3$, для яких $\gamma\bar{v} = \bar{\varphi}$. Відомо [7], що розв'язок прямої крайової задачі задовольняє варіаційне рівняння

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}(\bar{u}) \varepsilon_{ij}(\bar{v}) - \varepsilon_{ij}(\bar{u}) d\Omega = 0, \forall \Omega \in V. \quad (6)$$

З іншого боку, розв'язок варіаційного рівняння буде розв'язком прямої задачі лише за умови існування неперервних других частинних похідних. Тому розв'язок варіаційного рівняння будемо розглядати як узагальнений розв'язок прямої крайової задачі.

Доведено [5; 6], що за звичайних вимог на значення сталих Ляме та деяких вимог щодо гладкості поверхні Γ задача розв'язання варіаційного рівняння (6) має єдиний розв'язок. Будемо вважати, що умови існування єдиного розв'язку прямої

задачі виконані. Тоді кожній функції $\bar{\varphi} \in [W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^3$ можна поставити у

відповідність єдину функцію $\bar{u} \in [W_2^1(\Omega)]^3$ як розв'язок варіаційного рівняння (6)

(тобто узагальнений розв'язок прямої задачі). Простору $[W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^3$ ставиться у

відповідність множина V_{Ω} узагальнених розв'язків прямої задачі. Оскільки розглядається однорідне рівняння Ляме, то множина V_{Ω} фактично є підпростором

простору $[W_2^1(\Omega)]^3$. Отже, узагальнений розв'язок прямої задачі за різних вектор-

функцій $\bar{\varphi} \in [W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^3$ утворює підпростір V_{Ω} простору $[W_2^1(\Omega)]^3$.

Сформулюємо тепер обернену задачу створення потрібного деформованого стану. Нехай в області Ω виділена підобласть ω (рис. 1).

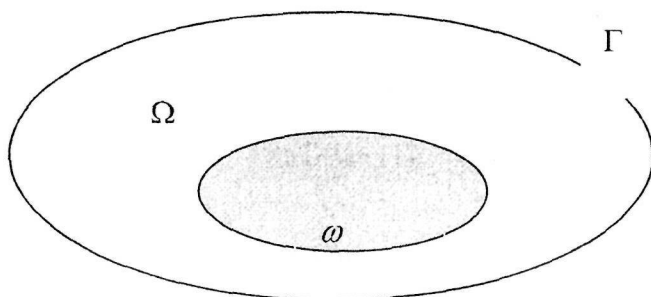


Рис. 1. Пружне тіло

У точках цієї підобласті задана вектор-функція $\bar{u}_0(\bar{x}), x \in \omega$. Кожній вектор-функції $\bar{v} \in [W_2^1(\Omega)]^3$ поставимо у відповідність вектор-функцію $\bar{v}^*(\bar{x})$, визначену в області ω , і таку, що $\bar{v}^*(\bar{x}) \equiv \bar{v}(\bar{x}), \forall x \in \Omega$. Очевидно, клас таких функцій утворює простір Соболева $[W_2^1(\omega)]^3$. Тоді множині V_Ω відповідає множина V_ω . Множина V_ω розглядається як звуження множини V_Ω на область ω . Під оберненою задачею створення деформованого стану будемо розуміти задачу знаходження вектор-функції $\bar{\varphi}^* \in [W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^3$, для якої відповідний елемент $\bar{u} \in V_\omega$ збігається із заданою вектор-функцією $\bar{u}_0(\bar{x})$ в усіх точках області ω .

Зауважимо, однак, що функція $\bar{u}_0(\bar{x})$ обирається на практиці із технологічних чи конструкторських міркувань і апіорі не належить до множини V_ω . Тому сформульована обернена задача, взагалі кажучи, не має розв'язку. З іншого боку, неминуча похибка наближеного розв'язку оберненої задачі також унеможлиблює виконання тотожності $\bar{u}(\bar{x}) \equiv \bar{u}_0(\bar{x})$. Це означає, що вимога повного збігу вектор-функції \bar{u} і \bar{u}_0 в усіх точках області ω є занадто жорсткою. Тому доцільно перейти до більш слабкого формулювання оберненої задачі. Будемо вимагати, щоб розподіл переміщень в області ω був лише близьким до $\bar{u}_0(\bar{x})$. За міру близькості візьмемо квадрат норми різниці між \bar{v} та \bar{u}_0 у метриці простору $[W_2^1(\omega)]^3$

$$\rho^2(\bar{v}, \bar{u}_0) = \|\bar{v} - \bar{u}_0\|_{[W_2^1(\omega)]^3}^2 = \int_{\omega} [(\bar{v} - \bar{u}_0)(\bar{v} - \bar{u}_0) + \text{grad}(v_i - u_{0i})\text{grad}(v_i - u_{0i})] d\omega.$$

Сформулюємо тепер обернену задачу як екстремальну варіаційну задачу

$$\inf_{v \in V_\omega} \|\bar{v} - \bar{u}_0\|_{[W_2^1(\omega)]^3}^2. \quad (7)$$

Отримавши розв'язок цієї задачі, знаходимо відповідну вектор-функцію $\bar{u} \in [W_2^1(\Omega)]^3$, а потім слід $\gamma\bar{u} = \bar{\varphi}$ цієї вектор-функції на поверхні Γ . Цей слід і вважається розв'язком оберненої задачі.

Спростимо вигляд функціоналу екстремальної задачі

$$\|\bar{u} - \bar{u}_0\|^2 = \int_{\omega} (\bar{v}\bar{v} - 2\bar{v}\bar{u}_0 + \bar{u}_0\bar{u}_0 + \text{grad}\bar{v}, \text{grad}\bar{v} - 2\text{grad}\bar{v}, \text{grad}\bar{u}_0 + \text{grad}\bar{u}_0, \text{grad}\bar{u}_0) d\omega.$$

Відкинемо сталі доданки, які не впливають на розв'язання екстремальної задачі і остаточно отримаємо функціонал варіаційної задачі у вигляді:

$$I(\bar{v}) = \frac{1}{2} \int_{\omega} (\bar{v}\bar{v} + \text{grad}\bar{v}, \text{grad}\bar{v}) d\omega - \int_{\omega} (\bar{v}\bar{u}_0 + \text{grad}\bar{v}, \text{grad}\bar{u}_0) d\omega$$

і надалі замість задачі (7) розглядаємо таку задачу:

$$\inf_{v \in V_{\omega}} I(\bar{v}). \quad (8)$$

Існування та єдиність розв'язку оберненої задачі створення деформованого стану. Вивчення принципової проблеми існування та єдиності розв'язку буде ґрунтуватися на відомій теоремі Лакса-Мільграма [6] для абстрактних варіаційних задач.

Нехай у гільбертовому просторі V задана неперервна білінійна форма $a(v, v)$ та неперервний лінійний функціонал $L(v)$. Розглядається задача розв'язання варіаційного рівняння

$$a(v, v) - L(v) = 0, \forall v \in V. \quad (9)$$

Теорема 1 (Лакса-Мільграма). Нехай квадратична форма $a(v, v)$ є коерцитивна (V – еліптична), тобто існує таке $\alpha > 0$, що

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \forall v \in V. \quad (10)$$

Тоді існує, причому єдиний, розв'язок варіаційного рівняння (9).

Подано тепер варіаційну задачу (8) у вигляді абстрактної варіаційної задачі.

Задамо у просторі $[W_2^1(\omega)]^3$ білінійну форму

$$a(\bar{u}, \bar{v}) = \int_{\omega} (\bar{u}\bar{v} + \text{grad}\bar{u}, \text{grad}\bar{v}) d\omega$$

та лінійний функціонал

$$L(\bar{v}) = \int_{\omega} (\bar{u}_0\bar{v} + \text{grad}\bar{u}_0, \text{grad}\bar{v}) d\omega.$$

Тоді функціонал $I(\bar{v})$ можна записати у вигляді

$$I(\bar{v}) = \frac{1}{2} a(\bar{v}, \bar{v}) - L(\bar{v}).$$

Розуміючи під V підпростір V_ω , сформулюємо абстрактну екстремальну варіаційну задачу

$$\inf_{\bar{v} \in V_\omega} \left\{ I(\bar{v}) = \frac{1}{2} a(\bar{v}, \bar{v}) - L(\bar{v}) \right\}$$

та еквівалентне варіаційне рівняння:

$$a(\bar{u}, \bar{v} - \bar{u}) - L(\bar{v} - \bar{u}) = 0, \forall \bar{v} \in V_\omega.$$

Оскільки V_ω є простором, то $\bar{v} - \bar{u} \in V_\omega$, тому варіаційне рівняння можна подати у вигляді (9)

$$a(\bar{u}, \bar{v}) - L(\bar{v}) = 0, \forall \bar{v} \in V_\omega.$$

Доведемо, що виконуються умови теореми Лакса-Мільграма. Виконання вимоги неперервності $a(\bar{u}, \bar{v})$ і $L(\bar{v})$ очевидне. Фактично залишається показати виконання умови коерцитивності. Якщо зауважити, що норма за простором $[W_2^1(\omega)]^3$ визначається співвідношенням

$$\|\bar{v}\|^2 = \int_{\omega} (\bar{v}\bar{v} + \text{grad} v_i \text{grad} v_i) d\omega,$$

то легко зробити висновок, що $a(\bar{v}, \bar{v}) = \|\bar{v}\|_{[W_2^1(\omega)]^3}^2$. Умова (10) буде виконана, якщо за α взяти будь-яке число з проміжку $(0, 1]$. Сформулюємо отриманий результат.

Теорема 2. За зроблених припущень існує, причому єдиний, узагальнений розв'язок оберненої задачі створення деформованого стану.

Некоректність оберненої задачі. Розв'язання оберненої задачі зводиться до розв'язання екстремальної варіаційної задачі. Практично отримання розв'язку здійснюється за допомогою наближених методів. Застосування таких методів до розв'язання варіаційних задач зводиться до побудови так званої мінімізуючої послідовності [5]. Принципове питання полягає в тому, чи буде мінімізуюча послідовність збігатися до розв'язку задачі. Можливість такої збіжності пов'язана з проблемою коректності варіаційної задачі.

Математична задача називається коректною за Адамаром, якщо виконуються такі 3 умови [8]:

- 1) розв'язок задачі існує;
- 2) розв'язок задачі єдиний;
- 3) розв'язок задачі неперервно залежить від умов задачі.

Теорема 2 підтверджує виконання перших двох умов Адамара. Конкретизуємо третю умову Адамара стосовно екстремальних задач.

Нехай $I(\bar{u}) = I_* = \inf_{\bar{v} \in V} I(\bar{v})$. Утворимо множину U_ε елементів $\bar{v} \in V$ таких, що

$I(\bar{v}) - I_* < \varepsilon$. Очевидно, третя умова Адамара означає даного разу, що для всіх $\bar{v} \in U_\varepsilon$ повинна виконуватись умова $\|\bar{v} - \bar{u}\| < \delta(\varepsilon)$, тобто малим відхиленням

відзначення точної нижньої грані повинні відповідати малі відхилення від розв'язку екстремальної задачі. Фактично це означає вимогу збіжності усіх мінімізуючих послідовностей. Тому під третьою умовою Адамара будемо розуміти таку: із кожної мінімізуючої послідовності можна вилучити підпослідовність, яка збігається до розв'язку екстремальної задачі у нормі простору V .

Покажемо, що сформульована обернена задача створення деформованого стану є некоректна за третьою умовою. Для цього достатньо навести контрприклад мінімізуючої послідовності для екстремальної задачі (8), яка, однак, буде розбіжною за нормою простору $\left[W_2^1(\Omega)\right]^3$. Підкреслимо, що йдеться саме про

збіжність у нормі простору $\left[W_2^1(\Omega)\right]^3$, а не у нормі простору $\left[W_2^1(\omega)\right]^3$, оскільки кінцевою метою є отримання переміщень на поверхні Γ області Ω .

Розглянемо обернену задачу теорії пружності у двовимірній області. Нехай області Ω і ω – це круги зі спільним центром і радіусами R_Ω і R_ω ($R_\Omega > R_\omega$). Скористаємося полярною системою координат (r, θ) , помістивши початок координат у спільному центрі кругів. Нехай u_r і u_θ – компоненти вектора переміщень. Відомо [7], що функції

$$u_r^{(k)} = \frac{r^k}{2} [(1 + \delta)k - (3 - \delta)] \{ (k - 1) [B_k \cos(k - 1)\theta - A_k \sin(k - 1)\theta] + (k + 1) [D_k \cos(k + 1)\theta - C_k \sin(k + 1)\theta] \} + a \sin \theta + b \cos \theta,$$

$$u_\theta^{(k)} = -\frac{r^k}{2} \{ (k - 1) [(1 + \delta)k + (3 - \delta)] [A_k \cos(k - 1)\theta + B_k \sin(k - 1)\theta] + (k + 1) [(1 + \delta)k - (3 - \delta)] [C_k \cos(k + 1)\theta + D_k \sin(k + 1)\theta] \} + a \cos \theta - b \sin \theta - cr$$

задовольняють систему рівнянь Ляме в усіх точках площини за будь-яких значень A_k, B_k, C_k, D_k, a, b . Покладемо $A_k = \frac{2}{R_\omega^k}, B_k = C_k = D_k = a = b = 0$.

Тоді

$$u_r^{(k)} = \left(\frac{r}{R_\omega}\right)^k [(1 + \delta)k - (3 - \delta)](1 - k) \sin(k - 1)\theta,$$

$$u_\theta^{(k)} = \left(\frac{r}{R_\omega}\right)^k [(1 + \delta)k + (3 - \delta)](1 - k) \cos(k - 1)\theta.$$

Утворимо функціональні ряди:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_r^{(k)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_\theta^{(k)}.$$

Очевидно, такі ряди будуть абсолютно збіжними в усіх внутрішніх точках області ω . Візьмемо тепер суми цих рядів за задані значення $u_r^{(0)}(r, \theta)$, $u_\theta^{(0)}(r, \theta)$. Тоді часткові суми цих рядів утворюють елементи мінімізуючої послідовності

$$\left\{ \overline{u}^{(n)} \right\} = \left\{ \begin{matrix} u_r^{(n)} \\ u_\theta^{(n)} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \sum_{k=1}^n u_r^{(k)} \\ \sum_{k=1}^n u_\theta^{(k)} \end{matrix} \right\}.$$

Доведемо, що така послідовність буде розбіжною у нормі простору $[W_2^1(\Omega)]^2$. Фактично доведемо, що мінімізуюча послідовність є необмеженою. Маємо

$$\|\overline{u}^{(n)}\|^2 \geq \int_{\Omega} \left[\left(u_r^{(n)} \right)^2 + \left(u_\theta^{(n)} \right)^2 \right] d\Omega.$$

Якщо зафіксувати значення θ , то ряди $\sum_{k=1}^{\infty} u_r^{(k)}$ і $\sum_{k=1}^{\infty} u_\theta^{(k)}$ фактично є степеневими рядами. Майже для всіх фіксованих значень θ радіус збіжності цих рядів дорівнює R_ω . Це означає, що майже в усіх точках області $R_\Omega \setminus R_\omega$, тобто при $R_\omega \leq r \leq R_\Omega$, вказані ряди є розбіжними. Звідси випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\overline{u}^{(n)}\|_{[W_2^1(\Omega)]^2}^2 = \infty.$$

Це означає, що мінімізуюча послідовність $\left\{ \overline{u}^{(n)} \right\}$ є необмежена за нормою $[W_2^1(\Omega)]^2$, тобто не може збігатися до жодного елемента з $[W_2^1(\Omega)]^2$. Обернена задача утворення деформованого стану є некоректною за третьою умовою Адамара.

Застосування методу регуляризації Тихонова. Для регуляризації отриманої некоректної задачі можна застосувати метод регуляризації, запропонований Тихоновим [8]. Замість некоректної екстремальної задачі (8) розглянемо наступну регуляризовану задачу

$$\inf_{v \in V_\omega} \left(T(\bar{v}, \alpha) = I(\bar{v}) + \alpha \Omega(\bar{v}) \right).$$

Функціонал $\Omega(\bar{v})$ називається стабілізатором Тихонова і визначений на множині V_ω . Для розглянутої оберненої задачі він має вигляд

$$\Omega(\bar{v}) = \int_{\omega} \left(\bar{v}\bar{v} + \text{grad} v_i \text{grad} v_i \right) d\omega.$$

Множник α називається параметром регуляризації і обирається, як правило, на основі числового експерименту.

Розглянемо алгоритм методу Тихонова. Уводиться послідовність чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$, така, що $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n \dots$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Для кожного значення α_n розв'язується задача знаходження такого елемента $\overline{u}_n \in V_\omega$, що

$$T_n^* \leq T_n(u_n) \leq T_n^* + \varepsilon_n,$$

де $\{\varepsilon_n\}$ – числа послідовність, що збігається до нуля, а

$$T_n^* = \inf_{v \in V_\omega} T(v, \alpha).$$

За певних умов послідовність $\{u_n\}$ буде збіжною мінімізуючою послідовністю для функціоналу $I(\overline{v})$ на множині V_ω .

Висновки. Запропонована і обґрунтована постановка класу обернених задач теорії пружності формування у певній області тіла заданого поля переміщень та відзначено особливості такої постановки, зокрема, некоректність за третьою умовою Адамара. Подальше дослідження будуть спрямовані на розробку методології числового розв'язання та аналіз конкретних задач.

Бібліографічні посилання

1. **Ватульян А. О.** О вариационном подходе при исследовании обратных коэффициентных задач в теории упругости. / А. О. Ватульян // Владикавказский математический журнал. – 2009. – Т.11. – Вып. 1. – С. 3 – 8.
2. **Кузьменко В. И.** Обратные задачи обработки давлением / В. И. Кузьменко // Сучасні проблеми металургії. Пластична деформація металів. – НМетАУ. – 2002. – С. 51–55.
3. **Кузьменко В. И.** О реализации оптимального давления при выполнении клеевых и диффузионных соединений / В. И. Кузьменко // Изв. Вузов. Машиностроение. – 1989. – №11. – С. 132 – 134.
4. **Лионс Ж.-Л.** Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс – М., 1972. – 588 с.
5. **Михлин С. Г.** Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. – М., 1980. – 512 с.
6. **Обэн Ж.-П.** Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн – М., 1977. – 384 с.
7. **Рекач В. Г.** Руководство к решению задач по теории упругости. Учеб. пособие для вузов. Изд. 2-е, испр. и доп. / В. Г. Рекач. – М., 1977. – 287 с.
8. **Тихонов А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М., 1979. – 142 с.
9. **Цвелодуб И. Ю.** Обратные задачи неупругого деформирования неоднородных сред. / И. Ю. Цвелодуб // Механика твёрдого тела. – 2005. – №2. – С. 61 – 69.

Надійшла до редколегії 04. 06. 10

УДК 539.3

А. Д. Шамровский, Л.Н. Егармина

Запорожская государственная инженерная академия

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИФРОНТОВЫХ ЗОН ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ

Розглядається процес розповсюдження нестационарної позадвожньої хвилі вздовж стрижня прямокутного перерізу на основі отримуваних уточнених рівнянь. Вивчена поведінка хвильового процесу поблизу фронту розповсюдження тривимірної хвилі із наступним переходом у квазіфронт двовимірної хвилі і далі у квазіфронт одновимірної хвилі.

Ключові слова: асимптотико-груповий аналіз, уточнені рівняння позадвожньої деформації стержня, поперечні коливання стержня, квазіфронт, класичні динамічні рівняння позадвожньої деформації стержня.

Рассматривается процесс распространения нестационарной продольной волны по стержню прямоугольного сечения на основе получаемых уточненных уравнений. Изучено поведение волнового процесса вблизи фронта распространения трехмерной волны с последующим переходом в квазифронт двумерной волны и далее в квазифронт одномерной волны.

Ключевые слова: асимптотико-групповой анализ, уточненные уравнения продольной динамической деформации стержня, поперечные колебания стержня, квазифронт, классические динамические уравнения продольной деформации стержня.

The process of distribution of non-stationary longitudinal wave in the bar of rectangular section on the basis of the got specified equalizations is examined. The conduct of wave process is studied nearby front of distribution of three-dimensional wave with the subsequent passing to quasifront of two-dimensional wave and further in quasifront of unidimensional wave.

Key words: asymptotic-group analysis, specified equalizations of longitudinal dynamic deformation of bar, transversal vibrations of bar, quasifront, classic dynamic equalizations of longitudinal deformation of bar.

Введение. Уравнения динамики стержней получают обычно на основе каких-то предположений о характере распределения искомых величин – напряжений и деформаций по поперечному сечению стержня [1]. В случае свободных колебаний все величины считаются постоянными по сечению стержня. Ранее в [2] было показано, как известные динамические уравнения продольной деформации стержня получают из трехмерных уравнений теории упругости при помощи метода асимптотико-группового анализа, не требующего использования каких-либо гипотез. Однако в динамических задачах существенную роль могут играть некоторые факторы, которые не учитываются классическими уравнениями, например, поперечные колебания стержня, возникающие при движении продольной волны. В [3; 4] метод асимптотико-группового анализа использован для построения уточненных динамических уравнений обобщенного плоского напряженного состояния пластин, учитывающих поперечные колебания пластин. Здесь аналогичный метод используется для получения уточненных динамических уравнений продольной деформации стержня.

Вывод уравнений. В [2] уравнения продольной деформации стержня получены, как результат комбинирования известных уравнений обобщенного плоского напряженного состояния. Здесь более точные уравнения продольной деформации получают на основе уравнений так называемого уточненного плоского напряженного состояния, приведенных в [3; 4]. Для пластины со срединной плоскостью x_1, x_2 соответствующие зависимости искомых функций от x_3 имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^1 &= \sigma_{33,1}^1, \quad u_1^1 = u_{1,1}^1, \quad u_2^1 = u_{2,1}^1, \quad \sigma_{11}^1 = \sigma_{11,1}^1, \quad \sigma_{22}^1 = \sigma_{22,1}^1, \quad \sigma_{12}^1 = \sigma_{12,1}^1 \\ \sigma_{13}^1 &= x_3 \sigma_{13,1}^1, \quad \sigma_{23}^1 = x_3 \sigma_{23,1}^1, \quad u_3^1 = x_3 u_{3,1}^1, \quad \sigma_{33}^2 = \frac{1}{2} (x_3)^2 \sigma_{33,1}^2. \end{aligned}$$

Если рассмотреть пластину со срединной плоскостью x_1, x_3 , то аналогично имеем зависимости от x_2 :

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^1 &= \sigma_{22,1}^1; u_1^1 = u_{1,1}^1; u_3^1 = u_{3,1}^1; \sigma_{11}^1 = \sigma_{11,1}^1; \sigma_{33}^1 = \sigma_{33,1}^1; \sigma_{13}^1 = \sigma_{13,1}^1 \\ \sigma_{12}^1 &= x_2 \sigma_{12,1}^1; \sigma_{23}^1 = x_2 \sigma_{23,1}^1; u_2^1 = x_2 u_{2,1}^1; \sigma_{22}^2 = \frac{1}{2}(x_2)^2 \sigma_{22,1}^2\end{aligned}$$

Комбинируя такие результаты приходим к следующим зависимостям искомых функций от аргументов x_2 и x_3 :

$$\begin{aligned}u_1^1 &= u_{1,1}^1(x_1, t), u_2^1 = x_2 u_{2,1}^1(x_1, t), u_3^1 = x_3 u_{3,1}^1(x_1, t), \sigma_{11}^1 = \sigma_{11,1}^1(x_1, t) \quad (1) \\ \sigma_{22}^1 &= \sigma_{22,1}^1(x_1, t), \sigma_{22}^2 = \frac{1}{2}(x_2)^2 \sigma_{22,1}^2(x_1, t), \sigma_{33}^1 = \sigma_{33,1}^1(x_1, t), \\ \sigma_{33}^2 &= \frac{1}{2}(x_3)^2 \sigma_{33,1}^2(x_1, t), \sigma_{12}^1 = x_2 \sigma_{12,1}^1(x_1, t), \\ \sigma_{13}^1 &= x_3 \sigma_{13,1}^1(x_1, t), \sigma_{23}^1 = x_2 x_3 \sigma_{23,1}^1(x_1, t)\end{aligned}$$

Подстановка (1) в динамические трехмерные уравнения теории упругости приводит, после отбрасывания второстепенных слагаемых, к уравнениям:

$$\begin{aligned}\partial_1 \sigma_{11,1}^1 + \sigma_{12,1}^1 + \sigma_{13,1}^1 - \rho \partial_t^2 u_{1,1}^1 &= 0; E \partial_1 u_{1,1}^1 = \sigma_{11,1}^1 - \nu (\sigma_{22,1}^1 + \sigma_{33,1}^1); \quad (2) \\ E u_{2,1}^1 &= \sigma_{22,1}^1 - \nu (\sigma_{11,1}^1 + \sigma_{33,1}^1); E u_{3,1}^1 = \sigma_{33,1}^1 - \nu (\sigma_{11,1}^1 + \sigma_{22,1}^1); \\ \partial_1 \sigma_{12,1}^1 + \sigma_{22,1}^2 + \sigma_{23,1}^1 - \rho \partial_t^2 u_{2,1}^1 &= 0; \partial_1 \sigma_{13,1}^1 + \sigma_{23,1}^1 + \sigma_{33,1}^2 - \rho \partial_t^2 u_{3,1}^1 = 0\end{aligned}$$

Получено шесть уравнений относительно одиннадцати искомых функций от x_1, t , входящих в решение (1). Для нахождения недостающих пяти уравнений воспользуемся граничными условиями на боковых поверхностях бруса $-h_2 \leq x_2 \leq h_2$, $-h_3 \leq x_3 \leq h_3$ с осью x_1 [2]. Учитывая закон парности касательных напряжений, в итоге получаем необходимые пять добавочных уравнений:

$$\begin{aligned}\sigma_{22,1}^1 + \frac{1}{2}(h_2)^2 \sigma_{22,1}^2 &= q_2^+ \cdot \sigma_{33,1}^1 + \frac{1}{2}(h_3)^2 \sigma_{33,1}^2 = q_3^+ \quad (3) \\ h_2 \sigma_{12,1}^1 &= \tau_{21}^+, h_3 \sigma_{13,1}^1 = \tau_{31}^+, h_2 \sigma_{23,1}^1 = \tau_{23}^+.\end{aligned}$$

Система из шести уравнений (2) и пяти уравнений (3) образует полную систему одиннадцати уравнений относительно одиннадцати неизвестных.

Подставим (3) в (2) и умножим каждое из полученных уравнений на площадь поперечного сечения $F = 4h_2h_3$. Вводя новые обозначения:

$$\begin{aligned}U &= u_{1,1}^1, V = u_{2,1}^1, W = u_{3,1}^1, T = F \sigma_{11,1}^1, K_2 = F \sigma_{22,1}^1, \\ K_3 &= F \sigma_{33,1}^1, \rho_1 = F \rho, \tau_2 = 4h_3 \tau_{21}^+, \tau_3 = 4h_2 \tau_{31}^+, \\ q_2 &= \frac{2F}{(h_2)^2} q_2^+ = 8 \frac{h_3}{h_2} q_2^+, q_3 = \frac{2F}{(h_3)^2} q_3^+ = 8 \frac{h_2}{h_3} q_3^+, \\ \tau_{23} &= \frac{F}{h_2} \tau_{23}^+ = 4h_3 \tau_{23}^+, \tau_{32} = \frac{F}{h_3} \tau_{32}^+ = 4h_2 \tau_{32}^+,\end{aligned}$$

будем иметь:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} - \rho_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\tau_2 - \tau_3, \quad EF \frac{\partial U}{\partial x_1} = T - \nu(K_2 + K_3), \quad (4)$$

$$EFV = K_2 - \nu(T + K_3), \quad EFW = K_3 - \nu(T + K_2),$$

$$\frac{2}{(h_2)^2} K_2 + \rho_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_2}{\partial x_1} + q_2 + \tau_{23}, \quad \frac{2}{(h_3)^2} K_3 + \rho_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_3}{\partial x_1} + q_3 + \tau_{32}.$$

Найдем из второго, третьего и четвертого уравнений (4) величины T , K_2 , K_3 и подставим результат в первое и два последних из уравнений (4). Приводя полученный результат к безразмерному виду с помощью следующих замен:

$$x_1 = 2h_3x, \quad U = 2h_3u, \quad t = 2h_3\sqrt{\frac{\rho_1}{B_1}}\tau, \quad T = B_1P, \quad K_2 = B_1P_2,$$

$$K_3 = B_1P_3, \quad \tau_2 = \frac{B_1}{2h_3}P_2, \quad \tau_3 = \frac{B_1}{2h_3}P_3, \quad q_2 = \frac{2B_1}{(h_2)^2}r_2,$$

$$q_3 = \frac{2B_1}{(h_3)^2}r_3, \quad \tau_{23} = \frac{2B_1}{(h_2)^2}r_{23}, \quad \tau_{32} = \frac{2B_1}{(h_3)^2}r_{32}$$

получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = -P_2 - P_3; \quad (5)$$

$$V + c \frac{\partial u}{\partial x} + cW + \frac{1}{8} \left(\frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = \frac{1}{8} \left(\frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial p_2}{\partial x} + r_2 + r_{23};$$

$$W + c \frac{\partial u}{\partial x} + cV + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = \frac{1}{8} \frac{\partial p_3}{\partial x} + r_3 + r_{32};$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} + cV + cW, \quad P_2 = V + c \frac{\partial u}{\partial x} + cW, \quad P_3 = W + c \frac{\partial u}{\partial x} + cV$$

Принципиальное отличие данных уравнений от известных динамических уравнений продольной деформации стержня является в том, что здесь учитываются поперечные колебания стержня.

Асимптотико-групповой анализ уравнений. Запишем первые четыре из уравнений (5) для случая отсутствия нагрузок на боковых поверхностях стержня, т.е. в однородном виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, \quad V + c \frac{\partial u}{\partial x} + cW + \frac{1}{8} \left(\frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = 0, \quad (6)$$

$$W + c \frac{\partial u}{\partial x} + cV + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0, \quad P = \frac{\partial u}{\partial x} + cV + cW.$$

Эти уравнения имеют более сложную структуру, чем обычные уравнения продольных колебаний стержня, поэтому подвергнем их дополнительному асимптотико-групповому анализу [4], что позволит лучше изучить их структуру и построить некоторые важные виды решений.

Уравнения (6) инвариантны относительно преобразований растяжения:

$$u = \delta^\gamma u^*, \quad V = \delta^\gamma V^*, \quad W = \delta^\gamma W^*, \quad P = \delta^\gamma P^*.$$

Это дает возможность, при сравнении весов слагаемых уравнений между собой, не растягивать одну из искомым функций, сравнивая с ней остальные функции. Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} \partial_x &= \delta^{\alpha_1} \partial_x^*, & \partial_t &= \delta^{\alpha_2} \partial_t^*, & u &= \delta^{\alpha_3} u^*, \\ V &= \delta^{\alpha_4} V^*, & W &= W^*, & P &= \delta^{\alpha_5} P^*, \end{aligned} \quad (7)$$

требуя выполнения соотношений:

$$\partial_x^* \sim 1, \quad \partial_t^* \sim 1, \quad u^* \sim V^* \sim W^* \sim P^*$$

Эти преобразования дают оценку абсолютных весов для дифференциальных операторов $\partial_x = \partial/\partial x$ и $\partial_t = \partial/\partial t$ и относительных весов для искомым функций путем сравнения их с W .

Подстановка (7) в (6) приводит к следующей таблице показателей степени:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_1, 2\alpha_2 + \alpha_3; \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3, 0, 2\alpha_2 + \alpha_4 \\ 0, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_4, 2\alpha_2; \alpha_5, \alpha_1 + \alpha_3, \alpha_4, 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Поочередно рассмотрим три варианта значений параметров асимптотического интегрирования $\alpha_1, \dots, \alpha_5$.

Пусть параметры имеют вид:

$$\alpha_1 = -0.5, \alpha_2 = -0.5, \quad \alpha_3 = -0.5, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = -1. \quad (9)$$

Таблица показателей степени (8) будет:

$$\begin{aligned} -1.5, -1.5, -1.5, -1.5; 0, -1, 0, -1 \\ 0, -1, 0, -1; -1, -1, 0, 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Соответствующие упрощенные уравнения будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, \quad c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{8} \left(\frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = 0, \\ c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0, \quad P = \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (11)$$

В соответствии с (9) имеем следующие асимптотические оценки:

$$\partial_x \sim \delta^{-0.5}, \quad \partial_t \sim \delta^{-0.5}, \quad u \sim \delta^{-0.5} W, \quad V \sim W, \quad P \sim \delta^{-1} W$$

Это означает, что полученное упрощение отвечает быстрым изменениям по аргументам x и τ , одинаковым весам величин V и W и бóльшим, чем W значениям u и P .

Первое из уравнений (11) является стандартным волновым уравнением. Оно отвечает распространению возмущения с безразмерной скоростью, равной единице, что отвечает размерной скорости

$$a_p = \sqrt{\frac{B_1}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}. \quad (12)$$

Это скорость распространения продольных волн в трехмерной упругой среде. Мы видим, что полученные одномерные динамические уравнения продольных ко-

лебаний стержней задають розповсюдження возмущений с такою же шкоростью, як и трехмерные уравнения теории упругости.

Второе, третье и четвертое уравнения (11) позволяют находить остальные искомые функции после нахождения из первого уравнения функции u .

Аналогично рассмотрим асимптотические оценки для таких значений $\alpha_1, \dots, \alpha_5$:

$$\alpha_1 = 0.5, \quad \alpha_2 = 0.5, \quad \alpha_3 = -0.5, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 0. \quad (13)$$

Тогда таблица показателей степени (8) принимает вид:

$$\begin{matrix} 0.5, 0.5, 0.5, 0.5; & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1; & 0, & 0, & 0, & 0. \end{matrix}$$

Соответствующие упрощенные уравнения будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} &= 0, \\ V + c \frac{\partial u}{\partial x} + cW &= 0, W + c \frac{\partial u}{\partial x} + cV = 0, \\ P &= \frac{\partial u}{\partial x} + cV + cW. \end{aligned} \quad (14)$$

В соответствии с (13) имеем следующие асимптотические оценки:

$$\partial_x \sim \delta^{0.5}, \quad \partial_\tau \sim \delta^{0.5}, \quad u \sim \delta^{-0.5}W, \quad V \sim W, \quad P \sim W$$

Это означает медленные изменения по x и τ ; большее чем W значение u , и значения V и P одного порядка с W .

Найдем из второго и третьего уравнений (14) величины V и W , и подставим эти результаты в первое и четвертое уравнения, получая:

$$\begin{aligned} b_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} &= 0, \quad P = b_1^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \\ b_1^2 &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} = \frac{a_1^2}{a_p^2}, \quad a_1^2 = \frac{E}{\rho} \end{aligned} \quad (15)$$

Величина a_1 – это скорость распространения продольных волн в стержне по классической теории стержней. Значит – величина b_1 – это безразмерная скорость распространения данных волн, отнесенная к скорости a_p . Таким образом, уравнения (15) – это классические динамические уравнения продольной деформации стержней в безразмерной форме.

И, наконец, последний вариант значений параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_5$:

$$\alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0.5, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0$$

Таблица показателей степени:

$$\begin{matrix} 1.5, 0.5, 0.5, 0.5; & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0; & 0, & 1, & 0, & 0. \end{matrix}$$

Упрощенные уравнения:

$$c \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, V + cW + \frac{1}{8} \left(\frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$W + cV + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0, P = cV + cW$$

Асимптотические оценки:

$$\partial_x \sim \delta^{0.5}, \quad \partial_t \sim 1, \quad u \sim \delta^{0.5} W, \quad V \sim W, P \sim W.$$

Они соответствуют малой скорости изменения по x , средней скорости изменения по τ , малому значению u по сравнению с W .

Второе и третье из этих уравнений – это уравнения поперечных колебаний стержня.

Мы видим, таким образом, что полученные уточненные уравнения описывают распространение фронта волны с «трехмерной» скоростью; при этом в качестве частного упрощенного случая, они содержат известные одномерные динамические уравнения. Кроме того, мы выяснили, что главным дополнительным эффектом, который учитывается уточненными уравнениями, является эффект поперечных колебаний стержня.

Прифронтальная асимптотика. Второй и третий варианты упрощения соответствуют медленным изменениям искомым функций по аргументам x и τ . В подобных случаях уже уравнения первого приближения, т.е. непосредственно упрощенные уравнения, дают удовлетворительную точность и не нуждаются в последующих уточнениях.

В то же время первый вариант упрощения отвечает быстрым изменениям по x и τ ; в этом случае первого приближения недостаточно, для получения достоверных результатов необходимо строить процедуру последовательных приближений. Представим искомые функции в виде рядов:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i, \quad V = \sum_{i=1}^{\infty} V_i, \quad W = \sum_{i=1}^{\infty} W_i, \quad P = \sum_{i=1}^{\infty} P_i. \quad (16)$$

В соответствии с таблицей показателей степени (10) члены этих рядов отвечают следующей рекуррентной системе уравнений:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + c \left(\frac{\partial V_{i-1}}{\partial x} + \frac{\partial W_{i-1}}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} = 0, \quad (17)$$

$$V_{i-1} + c \frac{\partial u_i}{\partial x} + cW_{i-1} + \frac{1}{8} \left(\frac{h_2}{h_3} \right)^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$W_{i-1} + c \frac{\partial u_i}{\partial x} + cV_{i-1} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$P_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} + cV_{i-1} + cW_{i-1}, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

Запишем решение для произвольного приближения в форме:

$$u_i = \sum_{j=1}^i u_{i,j} x^{i-j} (\tau - x)^{\gamma+i+j-1}, \quad P_i = \sum_{j=1}^i P_{i,j} x^{i-j} (\tau - x)^{\gamma+i+j-2}, \quad (18)$$

$$V_i = \sum_{j=1}^i V_{i,j} x^{i-j} (\tau - x)^{\gamma+i+j}, \quad W_i = \sum_{j=1}^i W_{i,j} x^{i-j} (\tau - x)^{\gamma+i+j}$$

Для проверки правильности записи решения, а также для получения выражений для вычисления входящих в выражения (18) коэффициентов нужно подставить (18) в (17). После соответствующих математических преобразований получим окончательные выражения для величин $u_{i,j}$, $P_{i,j}$, $V_{i,j}$, $W_{i,j}$ в обобщенном виде:

$$u_{i,j-1} = \frac{1}{2(i-j+1)(\gamma+i+j-2)} \{u_{i,j-2}(i-j+2)(i-j+1) + c[V_{i-1,j-2}(i-j+1) - V_{i-1,j-1}(\gamma+i+j-2) + W_{i-1,j-2}(i-j+1) - W_{i-1,j-1}(\gamma+i+j-2)]\}, \quad (i=2,3,\dots; \quad j=2,\dots,i) \quad (19)$$

$$V_{i,j} = -\frac{8}{(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left(\frac{h_3}{h_2}\right)^2 \{V_{i-1,j-1} + cW_{i-1,j-1} + c[u_{i,j-1}(i-j+1) - u_{i,j}(\gamma+i+j-1)]\}, \quad (i=1,2,\dots; \quad j=1,\dots,i)$$

$$W_{i,j} = -\frac{8}{(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \{W_{i-1,j-1} + cV_{i-1,j-1} + c[u_{i,j-1}(i-j+1) - u_{i,j}(\gamma+i+j-1)]\}, \quad (i=1,2,\dots; \quad j=1,\dots,i)$$

$$P_{i,j} = u_{i,j-1}(i-j+1) - u_{i,j}(\gamma+i+j-1) + c(V_{i-1,j-1} + W_{i-1,j-1}), \quad (i=1,2,\dots; \quad j=1,\dots,i)$$

Обратим внимание на то, что коэффициенты вида $u_{i,j}$ из первого выражения (19) не находятся. Они являются константами интегрирования; их значения следует находить из граничных условий.

Перед тем, как задавать граничные условия изучим подробнее смысл полученных результатов. Выражение $\tau - x$, возникающее первый раз при решении первого из уравнений (11), т.е. классического волнового уравнения, определено при $0 \leq x \leq \tau$. При $x = \tau$ это выражение равно нулю. Точка $x = \tau$ является фронтом волны, т.е. точкой, разделяющей возмущенную область $0 \leq x \leq \tau$ от невозмущенной области $x > \tau$, в которую волна еще не дошла. С ростом времени фронт передвигается в положительном направлении оси x с безразмерной скоростью, равной единице. При $\tau = 0$ фронт совпадает с началом координат $x = 0$. Таким образом, если рассматривать полубесконечный стержень $x \geq 0$, то при $\tau = 0$ он весь находится в покое, т.е. мы имеем нулевые начальные условия. Точка $x = 0$ излучает волну под действием какой-то нагрузки, приложенной в этой точке.

Рассмотрим возможный вид этой нагрузки. В соответствии с (16) и (18) для продольного усилия имеем:

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i P_{i,j} x^{i-j} (\tau - x)^{\gamma+i+j-2} \quad (20)$$

Подставим в это выражение $x = 0$. Обратим внимание на следующее. При $i \neq j$ выражение x^{i-j} обращается в ноль при $x = 0$. Соответственно, обращаются в ноль слагаемые в (20) при $i \neq j$. При $i = j$ получаем $x^0 = 1$. Таким образом, при $x = 0$ выражение (20) принимает вид:

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} P_{i,j} (\tau - x)^{\gamma + 2i - 2} \quad (21)$$

Это означает что нагрузку $F(t)$ на торце стержня $x = 0$, как заданную функцию времени, следует разложить в степенной ряд вида:

$$F = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \tau^{\gamma + 2i - 2} \quad (22)$$

Для случая внезапно приложенной и остающейся в дальнейшем постоянной нагрузки $F = 1$. В этом случае

$$F_1 = 1, \quad F_i = 0 \quad (i > 1), \quad \gamma = 0$$

Сравнение (22) и (21) дает

$$P_{i,i} = F_i \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Из четвертого выражения (19) имеем

$$F_i = P_{i,i} = u_{i,i-1} - u_{i,i}(\gamma + 2i - 1) + c(V_{i-1,i-1} + W_{i-1,i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Отсюда

$$u_{i,i} = \frac{u_{i,i-1} + c(V_{i-1,i-1} + W_{i-1,i-1}) - F_i}{\gamma + 2i - 1} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, теперь мы имеем возможность находить все коэффициенты сумм (18), т.е. доводить решение до конца.

Остановимся коротко на вопросе о сходимости построенных рядов. Эти ряды носят название так называемой прифронтной асимптотики. Это означает, что они в первую очередь предназначены для описания зоны вблизи фронта волны. В каждый член ряда входит величина $t - x$. При малых значениях этой величины общий член ряда стремится к нулю. Т.е. выполняется необходимое условие сходимости. Ранее было показано [3; 4], что удержание только слагаемых, преобладающих вблизи фронта, приводит к рядам для функции Бесселя, для которых сходимость доказана.

Однако на самом деле эти ряды непригодны для вычислений при больших значений $t - x$, как и вообще любые степенные ряды, из-за роста погрешности. Поэтому ниже рассмотрено поведение искомых функций вдали от фронта на основе других решений, которые описывают асимптотическое поведение волны с ростом времени.

На рис. 1 приведены соответствующие графические результаты. Изображен график продольного усилия как функция x для момента времени $\tau = 10$. Мы видим, что в отличие от картины, получаемой при помощи известных уравнений продольной деформации стержня, картина вблизи фронта распространяющейся волны выглядит значительно сложнее. Вблизи трехмерного фронта волны наблюдаются

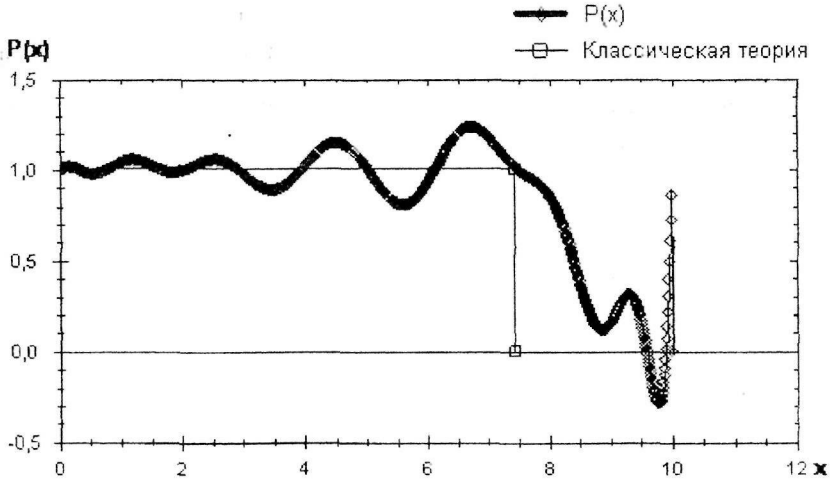


Рис. 1. Распространение волны $P(x)$ в стержне квадратного сечения

интенсивные поперечные колебания стержня, которые приводят к быстроизменяющемуся напряженно-деформированному состоянию. В дальнейшем происходит переход к классическому решению в виде так называемого квазифронта, то есть не ступенчатого, а быстроизменяющегося роста продольного усилия. С удалением от фронта, картина переходит в классическую. Таким образом классическое решение для продольной волны в стержне – это медленноизменяющаяся асимптотика по отношению к более точному решению.

Случай стержня вытянутого прямоугольного сечения. Обратим внимание на входящий в уравнения (6) квадрат соотношения сторон стержня h_2/h_3 . В случае, когда $h_2 = h_3$ мы имеем стержень с квадратным поперечным сечением (рис. 1.). Рассмотрим случай, когда $h_2 \neq h_3$, что соответствует прямоугольному поперечному сечению стержня. Ему отвечает малое (или, наоборот, большое) значение дроби h_2/h_3 . Выбирая случай малого значения этой дроби, отбросим во втором уравнении (6) слагаемое с квадратом дроби, получая:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0; \quad V + c \frac{\partial u}{\partial x} + cW = 0;$$

$$W + c \frac{\partial u}{\partial x} + cV + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0; \quad P = \frac{\partial u}{\partial x} + cV + cW.$$

Выражая из второго уравнения величину V и подставляя в остальные уравнения, имеем:

$$b_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu b_2^2 \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0; \quad b_2^2 W + \nu b_2^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0; \quad (23)$$

$$P = b_2^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu b_2^2 W; \quad b_2^2 = \frac{1 - 2\nu}{(1 - \nu)^2}.$$

Величина b_2 равна отношению:

$$b_2 = \frac{a_2}{a_p}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$

Величина a_p определена ранее (12) и равна скорости распространения продольных трехмерных волн. Величина a_2 равна скорости распространения двумерных продольных волн в пластине в рамках обобщенного плоского напряженного состояния. Таким образом, величина b_2 – это безразмерная скорость распространения продольных волн в пластине.

Для решения уравнений (23) поступаем так же, как в случае прифронтной асимптотики. Представляем искомые функции в виде рядов:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i, \quad W = \sum_{i=1}^{\infty} W_i, \quad P = \sum_{i=1}^{\infty} P_i \quad (24)$$

Члены этих рядов удовлетворяют рекуррентной системе уравнений:

$$b_2^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \nu b_2^2 \frac{\partial W_{i-1}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial \tau^2} = 0; \quad b_2^2 W_{i-1} + \nu b_2^2 \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2} = 0; \quad (25)$$

$$P_i = b_2^2 \frac{\partial u_i}{\partial x} + \nu b_2^2 W_{i-1}, \quad (i=1,2,\dots)$$

Решение данных уравнений разыскиваем в виде:

$$u_i = \sum_{j=1}^i u_{i,j} x^{i-j} (b_2 \tau - x)^{\gamma+i+j-1}, \quad P_i = \sum_{j=1}^i P_{i,j} x^{i-j} (b_2 \tau - x)^{\gamma+i+j-2} \quad (26)$$

$$W_i = \sum_{j=1}^i W_{i,j} x^{i-j} (b_2 \tau - x)^{\gamma+i+j}$$

Подставляя (26) в (25) получаем рекуррентные уравнения для поисков коэффициентов сумм (26):

$$u_{i,j} = \frac{1}{2b_2^2(i-j)(\gamma+i+j-1)} \left[b_2^2(i-j+1)(i-j)u_{i,j-1} + \nu b_2^2 \left((i-j)W_{i-1,j-1} - (\gamma+i+j-1)W_{i-1,j} \right) \right] \quad (27)$$

$$W_{i,j} = -\frac{8}{b_2^2(\gamma+i+j)(\gamma+i+j-1)} \left\{ b_2^2 W_{i-1,j-1} + \nu b_2^2 \left[(i-j+1)u_{i,j-1} - W_{i,j} - (\gamma+i+j-1)u_{i,j} \right] \right\}, \quad (i=1,2,\dots; \quad j=1,\dots,i);$$

$$P_{i,j} = b_2^2 \left[(i-j+1)u_{i,j-1} - (\gamma+i+j-1)u_{i,j} \right] + \nu b_2^2 W_{i-1,j-1}, \quad (i=1,2,\dots; \quad j=1,\dots,i)$$

Из этих зависимостей можно получить все коэффициенты, кроме $u_{i,i}$. Для нахождения указанных величин, являющихся константами интегрирования, воспользуемся граничными условиями, задаваемыми так же, как в случае прифронтной асимптотики (22) и получая, с учетом выражений для $P_{i,j}$ из (27):

$$u_{i,i} = \frac{1}{\gamma + 2i - 1} \left[u_{i,i-1} - \frac{F_i}{b_2^2(\gamma + 2i - 1)} + vW_{i-1,i-1} \right], \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (28)$$

В итоге мы имеем все необходимые расчетные формулы для произведения вычислений. Эти вычисления производятся для фиксированного значения τ с изменением x в диапазоне $0 \leq x \leq b_2\tau$ с некоторым небольшим шагом. Полученные результаты используются для построения графиков волны (например, графика $P(x)$) для заданного значения времени. Изменяя безразмерное время τ , можно проследивать картину распространения волны.

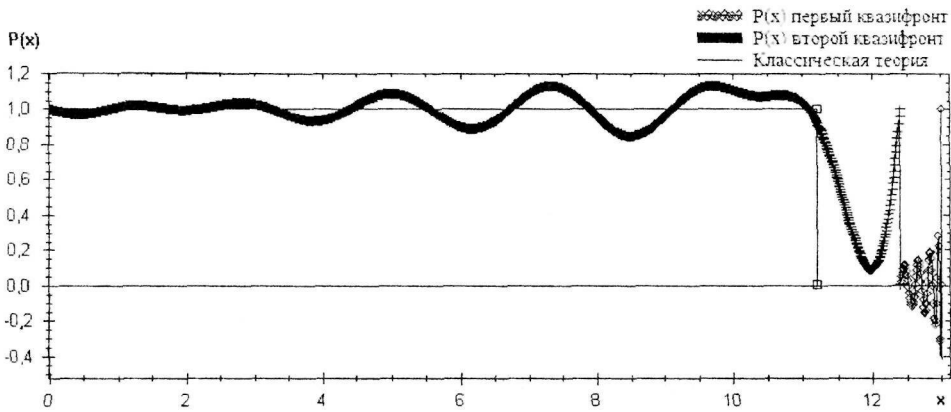


Рис. 2. Распространение волны в стержне $P(x)$ для значений $\frac{h_2}{h_3} = 0.2; \tau = 13$

На рис. 2 и рис. 3 изображены графики распространения волны $P(x)$ для случая внезапно приложенной постоянной продольной нагрузки, равной единице при разных значениях величины безразмерного времени τ . На графиках отчетливо видно, что волна, появляющаяся в стержне после приложения нагрузки, имеет сложный характер. Вблизи первого фронта $x = \tau$, распространяющегося со скоростью трехмерных продольных волн, имеем быстроизменяющийся процесс, быстро

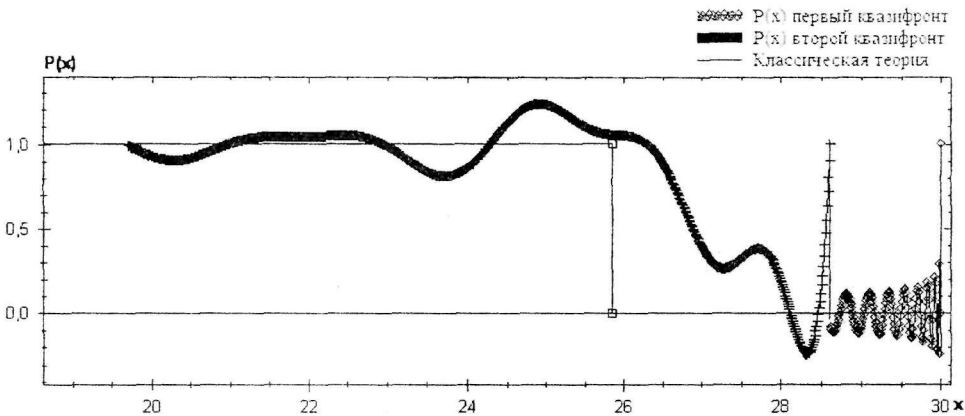


Рис. 3. Распространения волны в стержне $P(x)$ для значений $\frac{h_2}{h_3} = 0.2; \tau = 30$

затухающий с удалением от фронта. В точке $x = b_2\tau$ образуется квазифронт перехода от двумерного напряженно-деформированного состояния в трехмерное. И далее, при помощи еще одного квазифронта, происходит окончательный переход от двумерного состояния в одномерное.

Таким образом, исследовано сложное явление двойной перестройки волнового процесса в стержне, в процессе которого последовательно чередуются трехмерные, двумерные и одномерные явления. Общеизвестные одномерные результаты оказываются медленноизменяющейся асимптотикой для сложного пространственного процесса.

Выводы. Получены уточненные уравнения продольной динамической деформации стержня на основе асимптотико-группового анализа дифференциальных уравнений теории упругости. Рассмотрены примеры распространения нестационарной продольной волны в стержне, показывающие дополнительные возможности вновь предлагаемых уравнений по отношению к прежним. Исследованы явления одиночной (стержень квадратного сечения) и двойной (стержень прямоугольного сечения) перестройки, наблюдающейся в зоне вблизи фронта волны.

Библиографические ссылки

1. **Бабаков И. М.** Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М., 1968. – 559 с.
2. **Шамровский А. Д.** Вывод динамических уравнений продольной деформации стержня при помощи двойного упрощения уравнений теории упругости / А. Д. Шамровский, Л. Н. Егармина // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні, 2009. – №2. – С. 111 – 115.
3. **Скрыпник И. А.** Двумерное моделирование трехмерных продольных волн в плоском слое / И. А. Скрыпник, А. Д. Шамровский // Математическое моделирование физико-математических полей и интенсификация промышленного производства – Запорожье, 1995. – С. 43–50.
4. **Шамровский А. Д.** Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости / А. Д. Шамровский – Запорожье, 1997 – 169 с.

Надійшла до редколегії 04.10.10

УДК 539.3

О. Д. Шамровський, Г. В. Меркотан

Запорізька державна інженерна академія

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПОШИРЕННЯ ОДНОВИМІРНОЇ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕРМОПРУЖНОЇ ХВИЛІ МЕТОДОМ АСИМПТОТИКО-ГРУПОВОГО АНАЛІЗУ

Досліджено вплив взаємної зв'язаності полів деформації і температури, скінченності швидкості поширення тепла у півпросторі, вплив узагальненого теплообміну з його поверхні на поширення в ньому динамічного температурного напруження. Наведено розв'язання узагальненої зв'язаної динамічної задачі термопружності для півпростору, що піддалося тепловому удару зовнішнього середовища, джерелу тепла, або прикладеному напруженню. Розв'язок рівнянь виконується за допомогою теорії інваріантно-групових властивостей диференціальних рівнянь. Проілюстровані отримані результати.

Ключові слова: взаємозв'язана термопружність, температура, напруження, асимптотико-груповий аналіз, узагальнена термопружність.

Исследовано влияние взаимной связанности полей деформации и температуры, конечности скорости распространения тепла в полупространстве, влияние обобщенного теплообмена с его поверхности на распространение динамической температуры напряжения. Приведено решение обобщенной связанной динамической задачи термоупругости для полупространства, подвергнутого тепловому удару внешней средой, источником тепла, или приложенному напряжению. Решение уравнений выполнено с помощью теории инвариантно-групповых свойств дифференциальных уравнений. Проиллюстрированы полученные результаты.

Ключевые слова: взаимосвязанная термоупругость, температура, напряжение, асимптотико-групповой анализ, обобщенная термоупругость.

The influence of mutual connection of deformation and temperature areas and extremities of velocity of propagation of heat in half-space influence of the generalized heat exchange from his surface to distribution of dynamic temperature of tension is presented in this work. The decision of the generalized dynamic task of thermoelasticity is resulted for half-space, exposed to heat-prostration by an external environment or source of heat, or to the attached tension. The decision of equalizations is executed with a help of the theory of invariant-group properties of differential equalizations. Received results are illustrated.

Key words: interrelated thermoelasticity, temperature, strain, method of the asymptotic-group analysis, generalized thermoelasticity.

Вступ. Достатньо актуальними в багатьох розділах технічних наук є задачі поширення хвиль, що утворюються швидкозмінним навантаженням. Не менш важливим є метод розв'язання задач. Метод асимптотико-групового аналізу, який детально описаний у [3], достатньо чітко ілюструє розповсюдження напруження і температури в представлений задачі взаємозв'язаної термопружності. Ця задача розглядалась у [2], але без урахування конечності поширення тепла і порівняно складним методом інтегральних перетворень. Представлений метод дозволяє розв'язувати взаємозв'язану задачу термопружності з урахуванням конечності поширення тепла в більш загальній постановці.

Постановка задачі. Дослідити поширення плоских механічних і теплових хвиль у півпросторі для зв'язаного термопружного ізотропного середовища з урахуванням конечності швидкості поширення тепла. Задача описується системою рівнянь [1].

$$\begin{cases} \sigma_x = \rho u_{tt} \\ \sigma = (\lambda + 2\mu)u_x - k\rho S \\ S = \eta^{-1}(T - T_0) + k\eta^{-1}u_x \\ -q_x = \rho T_0 S_t \\ \tau q_t + q = -kT. \end{cases} \quad (1)$$

Рівняння системи (1) описують відповідно рівняння руху, співвідношення між напруженням і деформацією, щільність ентропії, щільність теплового потоку, рівняння теплопровідності, що враховує конечність швидкості поширення тепла, де $k = T_0(3\lambda + 2\mu)\alpha_T c^{-1}\rho^{-1}$, $\eta = T_0 c^{-1}$, T – температура середовища, u – переміщення вздовж осі x , σ – напруження, S – ентропія на одиницю маси, q – тепловий потік, ρ – щільність, λ , μ – адиабатичні коефіцієнти Ламе, τ – час релаксації теплового потоку.

Розв'язуючі систему (1) відносно напруження і температури, маємо наступну лінійзовану систему рівнянь:

$$\begin{cases} \left(\lambda + 2\mu - \frac{k^2\rho}{\eta} \right) \sigma_{xx} - \frac{k\rho^2}{\eta} T_{tt} = \rho\sigma_{tt} \\ \left(\lambda + 2\mu - \frac{k^2\rho}{\eta} \right) T_{xx} - \frac{\rho T_0}{\eta} (\tau\sigma_{tt} + \sigma_t) = \frac{\rho T_0 (\lambda + 2\mu)}{k\eta} (\tau T_{tt} + T_t) \end{cases}$$

Перейдемо до безрозмірних змінних:

$$\bar{x} = \frac{xa}{\beta\eta}, \quad \bar{t} = \frac{a^2 t}{\beta\eta}, \quad \bar{T} = \frac{T}{a\sqrt{\eta}}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\rho a^2}, \quad \beta = \frac{k}{\rho T_0}, \quad a^{-2} = \frac{(\lambda + \mu)}{\rho},$$

$$\tau_0 = \frac{\bar{a}}{a_T}, \quad \delta = \frac{k}{a\sqrt{\eta}}, \quad a_T = \frac{k}{\sqrt{\rho c \tau}}.$$

Тоді отримаємо задачу поширення нестационарної термопружної хвилі. Далі риси над безрозмірними координатами опустимо

$$\begin{cases} \frac{1}{1-\delta^2} \sigma_{tt} + \frac{\delta}{1-\delta^2} T_{tt} = \sigma_{tt} \\ \frac{\delta\tau_0}{1-\delta^2} \sigma_{tt} + \frac{\tau_0}{1-\delta^2} T_{tt} = T_{xx} - \frac{\delta}{1-\delta^2} \sigma_t - \frac{1}{1-\delta^2} T_t \end{cases} \quad (2)$$

Припускається, що на межі півпростору миттєво прикладені або температура, або напруження.

Приведення системи до хвильових рівнянь за допомогою ортогональних перетворень. Запишемо рівняння (2) для випадку відкинутих перших похідних

$$\begin{cases} \frac{1}{1-\delta^2} \sigma_{tt} + \frac{\delta}{1-\delta^2} T_{tt} = \sigma_{tt} \\ \frac{\delta\tau_0}{1-\delta^2} \sigma_{tt} + \frac{\tau_0}{1-\delta^2} T_{tt} = T_{xx} \end{cases} \quad (3)$$

Введемо позначення:

$$a_{11} = \frac{1}{1-\delta^2}, \quad a_{12} = \frac{\delta}{1-\delta^2}, \quad a_{21} = \frac{\delta\tau_0}{1-\delta^2}, \quad a_{22} = \frac{\tau_0}{1-\delta^2}, \quad \partial_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \partial_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Це дозволяє переписати (3) у вигляді:

$$\begin{cases} \partial_t^2 (a_{11}\sigma + a_{12}T) = \partial_x^2 \sigma \\ \partial_t^2 (a_{21}\sigma + a_{22}T) = \partial_x^2 T \end{cases} \quad (4)$$

Перейдемо у системі (4) до головних координат. Знайдемо власні числа та вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Власні вектори є стовпчиками матриці U , а власні числа обчислюються за формулами:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2}, \quad U = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} & \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix}.$$

Запишемо рівняння (4) в матричній формі

$$\partial_t^2 AX = \partial_x^2 X, \quad X = \begin{pmatrix} \sigma \\ T \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Виконаємо перетворення

$$X = UY, \quad Y = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad (7)$$

де f, g – нові шукані функції.

Враховуючи рівність $U^{-1}AU = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, приходимо до матричного рівняння

$$\partial_x^2 \Lambda Y = \partial_t^2 Y.$$

У розвернутій формі це рівняння дає два скалярних рівняння:

$$\lambda_1 \partial_t^2 f = \partial_x^2 f, \quad \lambda_2 \partial_t^2 g = \partial_x^2 g.$$

Введемо позначення:

$$\lambda_1 = \frac{1}{a_1^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{a_2^2}. \quad (8)$$

Перейдемо до стандартної форми хвильових рівнянь:

$$a_1^2 \partial_x^2 f - \partial_t^2 f = 0, \quad a_2^2 \partial_x^2 g - \partial_t^2 g = 0. \quad (9)$$

Таким чином, ми змінили два зв'язаних рівняння (3) на систему двох незалежних рівнянь (9). Розв'язуючи рівняння (9) відносно функцій f і g , ми маємо змогу вернутися до попередніх шуканих функцій за допомогою перетворення (7), яке в розвернутій формі має вигляд:

$$\begin{cases} \sigma = a_{12}f + a_{12}g \\ T = (\lambda_1 - a_{11})f + (\lambda_2 - a_{11})g \end{cases} \quad (10)$$

Вертаючись до рівнянь (2) розглянемо, окрім матриці A , також матрицю

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix}.$$

Це дозволяє переписати рівняння (2) в наступній матричній формі:

$$\partial_i^2 AX = \partial_x^2 X + \partial_i BX. \quad (11)$$

Підставимо до (11) перетворення (7), отримаємо:

$$\partial_i^2 AUY = \partial_x^2 UY + \partial_i BUY.$$

Помножимо вираз зліва на U^{-1} і введемо позначення

$$D = U^{-1}BU,$$

маємо

$$\partial_i^2 \Lambda Y = \partial_x^2 Y + \partial_i DY.$$

Обчислимо матрицю D :

$$U^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} & -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix}.$$

$$D = U^{-1}BU = \begin{pmatrix} \frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\frac{a_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{a_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} & \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix},$$

$$\text{де } d_{11} = -d_{21} = \frac{(a_{12})^2 + a_{11}(\lambda_1 - a_{11})}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad d_{12} = -d_{22} = \frac{(a_{12})^2 + a_{11}(\lambda_2 - a_{11})}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

У розвернутому вигляді матричне рівняння змінюється на два рівняння:

$$\lambda_1 \partial_i^2 f = \partial_x^2 f + d_{11} \partial_i f + d_{12} \partial_i g, \quad \lambda_2 \partial_i^2 f = \partial_x^2 f + d_{21} \partial_i f + d_{22} \partial_i g.$$

З урахуванням (8) остаточно маємо:

$$a_1^2 \partial_x^2 f - \partial_i^2 f = d_1 \partial_i f + d_2 \partial_i g, \quad a_2^2 \partial_x^2 g - \partial_i^2 g = -d_1 \partial_i f - d_2 \partial_i g, \quad (12)$$

$$d_1 = -a_1^2 d_{11}, \quad d_2 = -a_2^2 d_{12}.$$

Після розв'язання рівнянь (12) знову вертаємось до початкових шуканих функцій за допомогою перетворень (10).

Перший варіант розв’язання рівнянь. Розглянемо процедуру розв’язку рівнянь (12) з використанням метода асимптотико-групового аналізу [3]. Будемо шукати розв’язок у вигляді рядів:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i, \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i,$$

члени яких задовольняють рекурентній системі рівнянь:

$$\begin{cases} a_1^2 \partial_x^2 f_i - \partial_t^2 f_i = d_1 \partial_t f_{i-1} + d_2 \partial_t g_{i-1} \\ a_2^2 \partial_x^2 g_i - \partial_t^2 g_i = -d_1 \partial_t f_{i-1} - d_2 \partial_t g_{i-1} \end{cases} \quad (i=1,2,\dots). \quad (13)$$

за першим наближенням ($i = 1$) праві частини рівнянь (13) відсутні:

$$\begin{cases} a_1^2 \partial_x^2 f_1 - \partial_t^2 f_1 = 0 \\ a_2^2 \partial_x^2 g_1 - \partial_t^2 g_1 = 0 \end{cases}. \quad (14)$$

Будемо розшукувати розв’язок рівнянь (14) у формі:

$$f_1 = \begin{cases} f_{11}^1 (a_1 t - x)^\gamma & x \leq a_1 t \\ 0 & x > a_1 t \end{cases}, \quad g_1 = \begin{cases} g_{11}^2 (a_2 t - x)^\gamma & x \leq a_2 t \\ 0 & x > a_2 t \end{cases}.$$

Це означає, що перше з рівнянь задає хвилю, фронт якої поширюється зі швидкістю a_1 , а друге – хвилю, фронт якої поширюється з швидкістю a_2 . Величина γ , а також коефіцієнти f_{11}^1 і g_{11}^2 є довільними.

Використовуючи методику, що описана в [3], можна записати розв’язок для довільного наближення:

$$\begin{aligned} f_i &= \sum_{j=1}^i f_{ij}^1 x^{i-j} (a_1 t - x)^{\gamma+j-1} + \sum_{j=2}^i f_{ij}^2 x^{i-j} (a_2 t - x)^{\gamma+j-1}, \\ g_i &= \sum_{j=2}^i g_{ij}^1 x^{i-j} (a_1 t - x)^{\gamma+j-1} + \sum_{j=1}^i g_{ij}^2 x^{i-j} (a_2 t - x)^{\gamma+j-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут вирази $a_1 t - x$ визначені при $x \leq a_1 t$ і дорівнюють нулю при $x > a_1 t$. Аналогічно, вирази $a_2 t - x$ визначені при $x \leq a_2 t$ і дорівнюють нулю при $x > a_2 t$. Вирази для пошуку коефіцієнтів сум (15) можна знайти після підстановки (15) в (13).

Другий варіант розв’язання рівнянь. Отримані результати можна безпосередньо використовувати для розв’язання крайових задач, але знайдений розв’язок допускає значні поліпшення.

Згрупуємо доданки з однаковими степенями $a_1 t - x$ і $a_2 t - x$. Це відповідає розгляданню в (5) не рядків, а стовпців. Коефіцієнтами при зазначених величинах будуть деякі функції x . У результаті отримуємо:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^1(x) (a_1 t - x)^{\gamma+i-1} + \sum_{i=2}^{\infty} f_i^2(x) (a_2 t - x)^{\gamma+i-1},$$

$$g = \sum_{i=2}^{\infty} g_i^1(x)(a_1 t - x)^{\gamma+i-1} + \sum_{i=1}^{\infty} g_i^2(x)(a_2 t - x)^{\gamma+i-1}. \quad (16)$$

Підставляємо (16) до (13) і розщеплюємо за однаковими степенями величин $a_1 t - x$ і $a_2 t - x$, отримуємо:

$$\frac{df_i^1}{dx} + \frac{d_1}{2a_1} f_i^1 = \frac{1}{2a_1(\gamma+i-1)} \left[a_1 \frac{d^2 f_{i-1}^1}{dx^2} - d_2(\gamma+i-1)g_i^1 \right] \quad (i=1,2,\dots). \quad (17)$$

$$g_i^1 = \frac{1}{(a_2^2 - a_1^2)(\gamma+i-1)(\gamma+i-2)} \left[-a_2^2 \frac{d^2 g_{i-2}^1}{dx^2} + 2a_2^2 \frac{d g_{i-1}^1}{dx} (\gamma+i-2) - (d_1 f_{i-1}^1 + d_2 g_{i-1}^1) a_1 (\gamma+i-2) \right] \quad (i=2,3,\dots).$$

$$\frac{d g_i^2}{dx} - \frac{d_2}{2a_2} g_i^2 = \frac{1}{2a_2(\gamma+i-1)} \left[a_2 \frac{d^2 g_{i-1}^2}{dx^2} + d_1 f_{i-1}^2 (\gamma+i-1) \right] \quad (i=1,2,\dots). \quad (18)$$

$$f_i^2 = \frac{1}{(a_1^2 - a_2^2)(\gamma+i-1)(\gamma+i-2)} \left[-a_1^2 \frac{d^2 f_{i-2}^2}{dx^2} + 2a_1^2 \frac{d f_{i-1}^2}{dx} (\gamma+i-2) + (d_1 f_{i-1}^1 + d_2 g_{i-1}^1) a_1 (\gamma+i-2) \right] \quad (i=2,3,\dots).$$

Розглянемо отримані результати докладніше. При $i=1$ із (17) маємо

$$\frac{df_1^1}{dx} + \frac{d_1}{2a_1} f_1^1 = 0.$$

Розв'язок цього диференційного рівняння буде

$$f_1^1 = f_{11}^1 e^{-\alpha_1 x}, \quad \alpha_1 = \frac{d_1}{2a_1}. \quad (19)$$

Коефіцієнт f_{11}^1 є константою інтегрування. Аналогічно, із рівняння (18) при $i=1$ буде

$$\frac{d g_1^2}{dx} - \frac{d_2}{2a_2} g_1^2 = 0.$$

Розв'язок цього диференційного рівняння буде:

$$g_1^2 = g_{11}^2 e^{-\alpha_2 x}, \quad \alpha_2 = -\frac{d_2}{2a_2}. \quad (20)$$

Обмежимося знайденим модифікованим розв'язком за першим наближенням. Із (16) ($i=1$), (19) и (20) отримуємо:

$$f \approx f_{11}^1 e^{-\alpha_1 x} (a_1 t - x)^\gamma, \quad g \approx g_{11}^2 e^{-\alpha_2 x} (a_2 t - x)^\gamma. \quad (21)$$

Знайдемо величини f_{11}^1 і g_{11}^2 , які є константами інтегрування. Випромінювання хвилі із точки $x=0$ описує розв'язок (21). Підставляємо $x=0$ в (21), маємо:

$$f(0,t) \approx f_{11}^1 a_1^\gamma t^\gamma, \quad g(0,t) \approx g_{11}^2 a_2^\gamma t^\gamma.$$

Відповідно до (10) для напруження і температури буде:

$$\sigma(0,t) \approx a_{12} f_{11}^1 a_1^\gamma t^\gamma + a_{12} g_{11}^2 a_2^\gamma t^\gamma = a_{12} (f_{11}^1 a_1^\gamma + g_{11}^2 a_2^\gamma) t^\gamma. \quad (22)$$

$$T(0,t) \approx (\lambda_1 - a_{11}) f_{11}^1 a_1^\gamma t^\gamma + (\lambda_2 - a_{11}) g_{11}^2 a_2^\gamma t^\gamma = [(\lambda_1 - a_{11}) f_{11}^1 a_1^\gamma + (\lambda_2 - a_{11}) g_{11}^2 a_2^\gamma] t^\gamma.$$

Таким чином, на границі $x = 0$ напруження і температура змінюються пропорційно t^γ :

$$\sigma(0,t) = \sigma_1 t^\gamma, \quad T(0,t) = T_1 t^\gamma, \quad (23)$$

де σ_1 і T_1 – задані величини. При $\gamma = 0$ маємо випадок постійних (раптово прикладених) напруження і температури.

Прирівнюємо праві частини виразів (22) і (23) отримуємо:

$$a_{12} (f_{11}^1 a_1^\gamma + g_{11}^2 a_2^\gamma) = \sigma_1, \quad (\lambda_1 - a_{11}) f_{11}^1 a_1^\gamma + (\lambda_2 - a_{11}) g_{11}^2 a_2^\gamma = T_1.$$

Звідси знаходимо шукані константи інтегрування:

$$f_{11}^1 = \frac{a_{12} T_1 - (\lambda_2 - a_{11}) \sigma_1}{a_{12} (\lambda_1 - \lambda_2) a_1^\gamma}, \quad g_{11}^2 = \frac{a_{12} T_1 - (\lambda_1 - a_{11}) \sigma_1}{a_{12} (\lambda_2 - \lambda_1) a_2^\gamma}.$$

Відповідно до отриманих результатів розглянемо два окремих випадки: $\sigma_1 = 1, T_1 = 0$ і $\sigma_1 = 0, T_1 = 1$. В обох випадках спочатку будемо графіки функцій f і g (21) а потім уже їх комбінації (10), тобто шукані напруження і температуру.

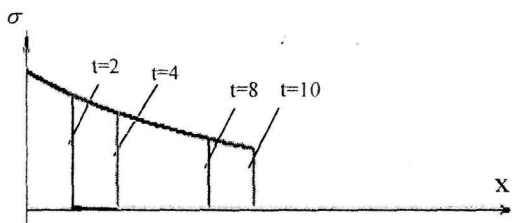
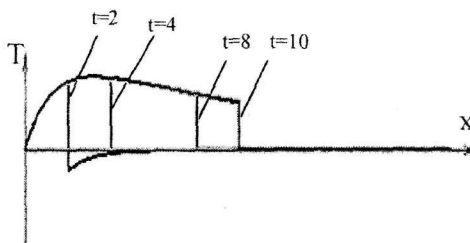
Розглянемо випадок $\delta = 0.3, \tau_0 = 0.3$ [2]. При раптово прикладеному навантаженні $\sigma_1 = 1$ і $T_1 = 0$ еволюція функції f має один фронт, що поширюється зі швидкістю a_1 . Вона «занурює» під експоненту $e^{-\alpha_1 x}$. Фронт хвилі функції g поширюється зі швидкістю a_2 , яка приблизно вдвічі швидша за a_1 . Функція «занурює» під експоненту $e^{-\alpha_2 x}$. Величина α_2 на порядок більша за α_1 , тому гасіння функції g відбувається значно швидше, ніж для функції f .

Графіки для σ мало відрізняються від графіків для f . Це зв'язано з незначним вкладом функції g . Тем не менш, поширення збурення має два фронти, що поширюються зі швидкостями a_1 і a_2 відповідно. На границі $x = 0$ напруження постійна і дорівнює прикладеному навантаженню $\sigma_1 = 1$.

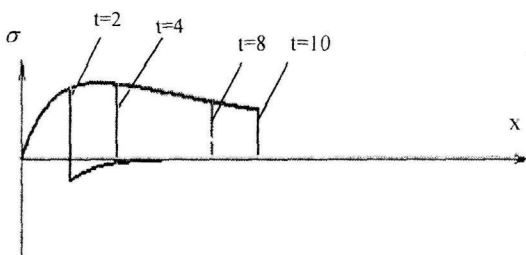
При $x = 0$ температура дорівнює нулю, що відповідає заданій граничній умові $T_1 = 0$. У цьому випадку зміна профілю хвилі у процесі її поширення особливо помітна.

Розглянемо тепер випадок раптово прикладеної постійної температури $\sigma_1 = 0, T_1 = 1$. Графіки функцій f і g принципово не відрізняються від графіків при розглянутих вище умовах. Та ж експонента $e^{-\alpha_1 x}$ на проміжку $0 \leq x \leq a_1 t$ для функції f і $e^{-\alpha_2 x}$ на проміжку $0 \leq x \leq a_2 t$ для функції g , має лише іншу амплітуду.

Ми бачимо, що еволюція напруження тут подібна до еволюції температури у попередньому випадку, зображеному на рис. 2. На границі $x = 0$ напруження дорівнює нулю, що відповідає заданій граничній умові $\sigma_1 = 0$.

Рис. 1. Еволюція напруження σ Рис. 2. Еволюція температури T

На рис. 4 також видно згасання температури по експоненті.

Рис. 3. Еволюція напруження σ Рис. 4. Еволюція температури T

Розглянемо збіжність отриманих рядів. Ці ряди носять назву так званої прифронтної асимптотики. Це означає, що вони, у першу чергу, призначені для розгляду зони поблизу фронту хвилі. До кожного член ряду входить величина $t - x$. При малих значеннях цієї величини загальний член ряду прагне до нуля, тобто виконується необхідна умова збіжності. Раніше було доведено [3], що утримання доданків, що описують прифронтну зону, приводить до рядів Беселя, для яких збіжність доведена.

Висновки. Наведений розв'язок задачі взаємозв'язаної термопружності з урахуванням конечності поширення тепла показав відносну легкість, а отже звів до мінімуму можливість помилки і похибки при використанні методу асимптотико-групового аналізу.

У півпросторі утворюються два фронти хвиль. Зі зменшенням тепловіддачі з поверхні півпростору динамічні температурні напруження зменшуються по експоненціальному закону. У випадку узагальненої динамічної задачі термопружності характер напруження залишається таким як і при безкінечно великому значенні тепловіддачі класичного випадку.

Бібліографічні посилання

1. **Кукуджаев В. Н.** Динамические задачи взаимосвязанной термоупругости. / В. Н. Кукуджаев, А. В. Острик // Институт проблем механики, – М., 1988 г. – С. 125 – 130.
2. **Подстригач Я. С.** Обобщенная термомеханика. / Я. С. Подстригач, Ю. Коляно – М., // – К., 1976 г. – С. 115 – 168.
3. **Шамровский А. Д.** Асимптотико-групповой анализ дифференциальных уравнений теории упругости. / А. Д. Шамровский // ЗГИА, 1997 г. – С. 20 – 136.

ЛОБОДА ВОЛОДИМИР ВАСИЛЬОВИЧ



Народився 15 травня 1950 року в місті Верхньодніпровську, Дніпропетровської області в сім'ї вчителів. Після закінчення Верхньодніпровської СШ № 1, став студентом механіко-математичного факультету Дніпропетровського державного університету, який закінчив в 1972 році. Далі аспірантура по кафедрі прикладної теорії пружності і захист кандидатської дисертації у Вченій раді Київського державного університету. З 1975 року – асистент, а з 1979 року – доцент кафедри обчислювальної математики ДДУ. В 1991 році захист докторської дисертації за спеціальністю «Механіка деформівного твердого тіла». З червня 1992 року по теперішній час очолює кафедру теоретичної та прикладної механіки Дніпропетровського національного університету. В 1995 році йому присвоєно вчене звання професора по цій кафедрі. Читає лекції з теорії пружності, методів наближених обчислень, механіки руйнування композиційних матеріалів, чисельних методів механіки та інших дисциплін.

Напрямки наукових досліджень пов'язані з актуальними проблемами механіки руйнування композиційних ізотропних, анізотропних та п'єзоелектричних матеріалів, аналізом особливостей пружно-деформівного стану в околі сингулярних точок, теорією сингулярних інтегральних рівнянь та задачею лінійного спряження. Ним вперше отримано ряд точних аналітичних розв'язків практично важливих задач для тріщини в області поділу анізотропних та п'єзоелектричних матеріалів з врахуванням контакту її берегів.

Починаючи з 1992 року був керівником ряду галузевих науково-дослідних тем за пріоритетними напрямками розвитку науки і техніки України, а також господарських робіт з підприємствами України та фірмою Дженерал моторз (США). Результати цих робіт знайшли впровадження у виробництво та навчальний процес.

Активно працює з молодими науковцями – студентами, аспірантами, здобувачами. Під його керівництвом захищено 8 кандидатських дисертацій.

Професор В. В. Лобода автор і співавтор більше 200 наукових праць, серед яких 7 монографій і навчальних посібників, а також 56 статей, опублікованих в провідних міжнародних журналах і внесених до інформаційної системи Scopus. Зокрема, публікації в журналі «Mechanics of Materials» (імпаکت фактор -2,21), «Int. J. Solids and Structures» (1,81) – 11 статей, «Int. Appl. Mech – Прикладна механіка» (1,7) – 5 статей, «Eng. Fracture Mechanics» (1,45) -3 статті, «Int. J. Eng. Sc.» (1,36) – 2 статті, «Acta Mech.» (1,30) – 4 статті, «Int. J. of Fracture» (1,15) – 2 статті, «Archive Appl. Mech.» (0,83) – 6 статей, «J. of Appl. Math. and Mech. - ПММ» (0,36) – 2 статті та ін. На його роботи в системі Scopus зареєстровано 125 посилань. Його індекс Хірша дорівнює 8.

Мав наукові гранти від США, Німеччини та Франції, зокрема 4 стипендії DAAD (1996, 2000, 2004, 2008 рр.), неодноразово був запрошеним професором до Падерборнського університету (Німеччина) та Інституту сучасної механіки (Франція). Виступав з доповідями, серед них пленарними, на наукових конференціях в Україні, Росії, Німеччині, США, Франції, Японії, Швейцарії, Данії та інших країнах.

Протягом багатьох років В. В. Лобода – заступник голови та член спеціалізованої вченої ради по захисту докторських дисертацій, більше 10 років є членом експертної ради з механіки ВАК України. Член Національного комітету України з теоретичної та прикладної механіки, Німецької спілки математиків та механіків, Нью-Йоркської академії наук, член правління Українського товариства з механіки руйнування матеріалів.

В 1985–1986 роках він був заступником відповідального секретаря та відповідальним секретарем приймальної комісії ДДУ, а з березня 1993 року по теперішній час – вчений секретар ДНУ. Нагороджений знаком «Відмінник освіти України», почесним званням «Заслужений працівник освіти України», медалями «Академік Володимир Моссаковський» та «За вірну службу ДНУ».

Зміст

<i>Боборькин В. Г.</i> Применение метода функций Грина к изгибу произвольно очерченной гибкой пластины со смешанными граничными условиями	3
<i>Бобылев А. А. (мл.)</i> Задача о сжатии упругой двухслойной полосы жесткими нагретыми выпуклыми штампами	15
<i>Волошко О. І., Смирнов С. О.</i> Про вплив розподілу напружень у зоні передруйнування тріщини та товщини прошарку на параметри руйнування	23
<i>Вьюн А.С., Смирнов С.А., Лобода В.В.</i> О развитии δ_k -модели на случай трещины в изотропном теле конечных размеров	38
<i>Говоруха В. Б.</i> Про врахування сингулярності при чисельному аналізі тріщини між двома п'єзокерамічними матеріалами	46
<i>Гук Н. А.</i> Идентификация управляющих силовых воздействий на цилиндрическую оболочку для ограничения параметров деформирования	54
<i>Маневич А. И., Власова В. Ю.</i> Колебания вращающейся балки с сосредоточенной массой	63
<i>Перехрест В. І., Мельник О. А.</i> Твірна функція течії одиничного фундаментального вихроджерела та систем таких вихорів	71
<i>Пилипенко А. А.</i> Классификация режимов трансзвукового турбулентного обтекания аэродинамических профилей	80
<i>Полевой О. Б.</i> Численное моделирование сверхзвукового обтекания цилиндрического препятствия в условиях теплообмена с обтекаемой поверхностью	90
<i>Приходько А. А., Рогоза Е. Б.</i> Конечно-объемные схемы расчета конвективных потоков повышенной разрешающей способности и их сравнение на двумерных задачах Римана	100
<i>Ревенко В.П.</i> Розтяг скінченного циліндра дотичними навантаженнями прикладеними на бічній поверхні	111
<i>Рундурев К.В., Ободан Н.И., Гавеля Г.М.</i> Диагностика разнотолщинности тонкостенной оболочки с помощью нейронной сети	119

Рыбка В.М.

До обґрунтування напівзворотного методу розв'язання
ускладнених мішаних плоских задач теорії пружності 126

Селиванов Ю.М.

Голографические методики исследования неоднородностей напряженно-деформированного состояния сложных тонкостенных структур 133

Хитрова Т. В.

До постановки обернених задач створення деформованого стану 141

Шамровский А. Д., Егармина Л. Н.

Исследование прифронтных зон при распространении продольной волны в стержне 150

Шамровський О. Д., Меркотан Г. В.

Розв'язок задачі поширення одновимірної нестационарної
термопружної хвилі методом асимптотико-групового аналізу 162

Лобода Володимир Васильович

(до 60-річчя з дня народження) 170

Наукове видання

ВІСНИК ДНІПРОПЕТРОВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Механіка

Заснований у 1993 р.

Том 2, випуск 14

УКРАЇНСЬКОЮ, РОСІЙСЬКОЮ ТА АНГЛІЙСЬКОЮ МОВАМИ

**Свідоцтво про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації.
Серія КВ № 7898 від 17.09.2003 р.**

Редактор В.П. Пименов
Технічний редактор В.А. Усенко
Коректор В.П. Пименов

Підписано до друку 12.02.2011 Формат 70×108 ¹/₁₆. Папір друкарський. Друк плоский. Ум. друк.
арк. 15,05. Ум. фарбовідб. 15,05. Обл.-вид. арк. 15,48. Тираж 100 прим. Вид. № 1506/1. Зам. № 296.

Свідоцтво Державної реєстрації ДК-289 від 21.12.2000 р.

Видавництво Дніпропетровського національного університету,
49010, м. Дніпропетровськ, пр. Гагаріна, 72,
Друкарня ДНУ, 49050, вул. Наукова, 5, м. Дніпропетровськ