

С

531/534  
Д. 54



**ISSN 9125 0912**

# **ВІСНИК**

## **Дніпропетровського університету**

**№ 5**

**Т. 18**

**2010**

**Серія: МЕХАНІКА**

**Випуск 14, том 1**

# ВІСНИК



## Дніпропетровського університету

Науковий журнал

№ 5

Том 18

2010

РЕДАКЦІЙНА РАДА:

акад. Академії наук ВО України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Поляков** (*голова редакційної ради*); акад. Академії наук ВО України, д-р техн. наук, проф. **М. М. Дронт** (*заст. голови*); д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. О. Кочубей**; д-р хім. наук, проф. **В. Ф. Варгалюк**; чл.-кор. АПН України, д-р філос. наук, проф. **П. І. Гнатенко**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Г. Гоман**; д-р філол. наук, проф. **В. Д. Демченко**; д-р техн. наук, проф. **А. П. Дзюба**; д-р пед. наук, проф. **Л. І. Зеленська**; чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. П. Моторний**; чл.-кор. АПН України, д-р психол. наук, проф. **Е. Л. Носенко**; д-р філос. наук, проф. **В. О. Панфілов**; д-р біол. наук, проф. **О. Є. Пахомов**; д-р іст. наук, проф. **С. І. Світленко**; акад. Академії наук ВО України, д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Скалозуб**; д-р філол. наук, проф. **Т. С. Пристайко**; чл.-кор. НАН України, д-р біол. наук, проф. **А. П. Травлєєв**; д-р техн. наук, проф. **Ю. Д. Шептун**.

Серія: **МЕХАНІКА**

**Випуск 14, том 1**

Дніпропетровськ  
Видавництво  
Дніпропетровського  
національного університету



Наведені результати досліджень у галузі гідромеханіки ідеальної та в'язкої рідини, тепломасопереносу з фазовими перетвореннями, експериментальних досліджень, застосування чисельних методів для розв'язку задач механіки рідини та газу, математичного моделювання течій рідини, газу та переносу забруднень у навколишньому середовищі, механіки деформівного твердого тіла.

Приведены результаты исследований в области гидромеханики идеальной и вязкой жидкости, тепломассопереноса с фазовыми переходами, экспериментальных исследований, применения численных методов для решения задач механики жидкости и газа, математического моделирования течений жидкости, газа и переноса загрязнений в окружающей среде, механики деформированного твердого тела.

*Друкується за рішенням вченої ради Дніпропетровського національного університету ім. Олеся Гончара згідно з затвердженим планом видань на 2010 р.*

#### **Редакційна колегія:**

д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. Г. Гоман** (відп. редактор); д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Лобода** (заст. відп. редактора); д-р техн. наук, проф. **М. М. Дронь**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. О. Кочубей**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. І. Кузьменко**; д-р техн. наук **А. С. Макарова**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **М. В. Поляков**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. А. Приходько**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **С. О. Смірнов**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю. А. Черняков**; к-т фіз.-мат. наук **В. П. Шнейдер** (відп. секретар)

<http://visnyk.dsu.dp.ua>

© Дніпропетровський національний університет, 2010

© Видавництво ДНУ, оформлення, 2010

УДК 539.3

Т. В. Ходанен, В. В. Лобода

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО/ПЬЕЗОМАГНИТНОГО БИМАТЕРИАЛА С ЭЛЕКТРОИЗОЛИРОВАННОЙ МАГНИТНОПРОНИЦАЕМОЙ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Рассмотрена задача для трещины, на границе раздела двух пьезоэлектрических/пьезомагнитных материалов под действием механических напряжений, электрического и магнитного потоков на бесконечности. С использованием представления напряжений и перемещений через кусочно-аналитические вектор-функции задача сведена к задаче Дирихле-Римана. Получены соотношения для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений, электрической и магнитной индукции, скорости освобождения энергии и относительной длины зоны контакта берегов трещины. Изучено влияние указанных нагрузок на относительную длину зоны контакта и коэффициент интенсивности напряжений, а также на скорость освобождения энергии.

*Ключевые слова* изотропный и пьезоэлектрический/пьезомагнитный биматериал, межфазная трещина, зона контакта, коэффициент интенсивности напряжений, скорость освобождения энергии

Розглянуто задачу для тріщини на межі поділу двох п'єзоелектричних/п'єзомагнітних матеріалів під дією механічних напружень, електричного та магнітного потоків на нескінченності. З використанням представлення напружень і переміщень через кусково-аналітичні вектор-функції задача зведена до задачі Діріхле-Рімана. Отримано співвідношення для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень, електричної та магнітної індукцій, швидкості звільнення енергії та відносно довжини зони контакту берегів тріщини. Вивчено вплив зазначених навантажень на відносну довжину зони контакту та коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), а також на швидкість звільнення енергії.

*Ключові слова* ізотропний і пьезоелектричний/пьезомагнітний биматериал, міжфазна тріщина, зона контакту, коефіцієнт інтенсивності напружень, швидкість звільнення енергії

The problem for the crack on the boundary between two piezoelectric/piezomagnetic materials under mechanical stress, as well as influence of electric and magnetic flows on the infinity was considered. The solution is resulted in Dirihle- Riman's problem by the presentation of stresses and dislocations with the use of sectionally analytical vector-function. The relations for the calculation of intensity stress coefficients, electric and magnetic induction, the rate of discharge energy and the relative length of side contact zone of the crack were obtained. The influence of the above mentioned loads on the relative length of side contact zone and the intensity stress coefficients as well as on the rate of discharged energy were studied.

*Keywords* isotropic and piezoelectric/piezomagnetic biomaterials, interphase crack, contact zone, intensity stress coefficient, energy release rate

**Введение.** В последнее время в технике стали активно использоваться диэлектрические материалы с ярко выраженными как пьезоэлектрическими, так и пьезомагнитными свойствами. Способность преобразовывать один вид энергии в другой (магнитный, электрический, механический) обуславливает их применение не только при производстве датчиков и приводов, но также имеет важное значение при использовании в таких областях современной техники, как электро- и лазерное оборудование, сверхзвуковая аэродинамика, микроволновая, инфракрасная электроника [16], а также при разработке магнитоэлектрических запоминающих элементов, «разумных» датчиков и преобразователей [15]. Учитывая, что конструкционные элементы, представляющие собой биматериалы подобного рода, функционируют в условиях воздействия



значительных электрических и магнитных полей, актуальным является изучение влияния таких видов внешних нагрузок на параметры разрушения этих материалов

Вплоть до последнего времени влияния электрических и магнитных полей на тела с трещинами рассматривались отдельно друг от друга в работах [1; 2; 9]. В последнее время появился ряд статей [10; 11, 16, 17; 20], посвященных задачам о совместном воздействии механических, электрических и магнитных полей на пьезоэлектрические/пьезомагнитные тела с трещинами.

Следует отметить, что в случае трещин между двумя пьезоэлектромагнитными материалами исследование ограничивается классической моделью трещины [12, 13, 18, 19; 20], которая приводит к физически нереальному взаимопроникновению ее берегов

Согласно результатам исследований пьезоэлектрических материалов с трещинами модель электропроницаемой трещины ближе к реальности, чем электроизолированной. Это же, как правило, имеет место и относительно предположения о магнитной проницаемости трещины. Но известно [6], что в отличие от электрической проницаемости, магнитная проницаемость некоторых материалов является даже более низкой, чем магнитная проницаемость вакуума. Поэтому исследование модели электропроницаемой и магнитноизолированной трещины с зоной контакта в пьезоэлектрическом/пьезомагнитном биматериале под действием различных физико-механических полей представляет существенный научный интерес и важно для практических приложений

**Постановка задачи и формулировка основных соотношений электромагнитоупругости.** Рассматривается трещина на промежутке  $(c, b)$  между двумя полубесконечными пьезоэлектромагнитными полупространствами под действием внешней механической нагрузки, электрического и магнитного потоков (рис. 1)

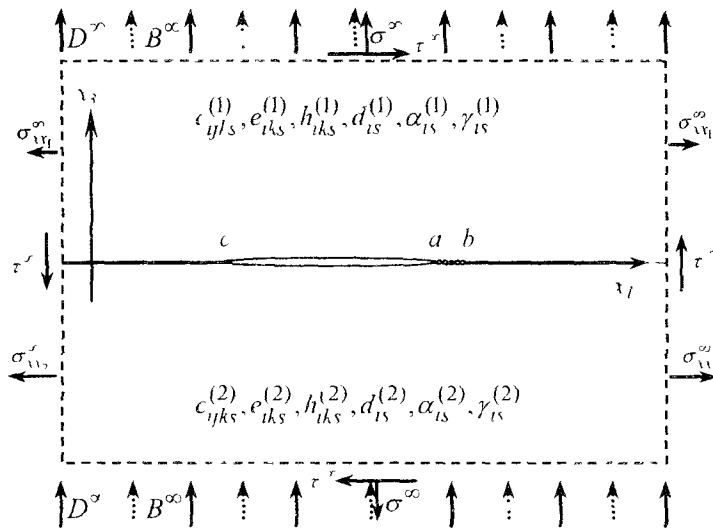


Рис. 1 Трещина с зоной контакта между двумя пьезоэлектрическими/пьезомагнитными материалами

Здесь  $\sigma^\sigma, \tau^\tau$  – равномерно распределенные нормальное и касательное напряжения соответственно, приложенные на бесконечности,  $D^\sigma, B^\sigma$  – постоянные электрический и магнитный потоки соответственно;  $c_{ijkl}$  – упругие,  $e_{iks}$  – пьезоэлектрические,  $h_{iks}$  – пьезомагнитные,  $d_{is}$  – электромагнитные константы,  $\alpha_{is}, \gamma_{is}$  – диэлектрические и магнитные проницаемости. Для случая биматериала они ис-

пользуются с верхними индексами (1) и (2) для верхнего и нижнего полупространств соответственно. Напряжения  $\sigma_{\alpha_1}^\infty, \sigma_{\alpha_2}^\infty$  определяются величинами  $\sigma^\infty, \tau^\infty$  так, чтобы обеспечивалась непрерывность деформаций при переходе через линию раздела материалов [7] Все поля предполагаются не зависящими от координаты  $x_2$ .

Для решения поставленной задачи рассмотрим вначале общие соотношения электромагнитоупругости для пьезоэлектромагнитного материала. Определяющие соотношения имеют вид [18]

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{ks} - e_{sij} E_s - h_{sij} H_s \\ D_i = e_{iks} \varepsilon_{ks} + \alpha_{is} E_s + d_{is} H_s \\ B_l = h_{lks} \varepsilon_{ks} + d_{ls} E_s + \gamma_{ls} H_s, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  – компоненты тензоров напряжений и деформаций;  $D_i, B_l$  – компоненты векторов электрической и магнитной индукций,  $E_i, H_l$  – напряженности электрического и магнитного полей

Уравнения равновесия в отсутствии массовых сил и свободных зарядов таковы:

$$\sigma_{ij,j} = 0, D_{i,i} = 0, B_{l,l} = 0, \quad (2)$$

где индекс « , j » означает дифференцирование по  $x_j$ . Выражения для деформаций, напряженности электрического и магнитного полей имеют вид:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), E_i = -\phi_{,i}, H_l = -\varphi_{,l}, \quad (3)$$

где  $\phi, \varphi$  – электрический и магнитный потенциалы.

Из (1), (2), (3) получаются уравнения

$$\begin{cases} (c_{ijkl} u_k + e_{sij} \phi - h_{sij} \varphi)_{,sl} = 0, \\ (e_{iks} u_k - \alpha_{is} \phi - d_{is} \varphi)_{,sl} = 0 \\ (h_{lks} u_k - d_{ls} \phi - \gamma_{ls} \varphi)_{,sl} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Для наиболее важного для практики трансверсально-изотропного материала с осью симметрии  $x_3$  в условиях плоской деформации в плоскости  $(x_1, x_3)$  уравнения (1) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{31} \\ 0 & e_{33} \\ e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & h_{31} \\ 0 & h_{33} \\ h_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_3 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_3 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_{15} \\ h_{31} & h_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$



Из соотношений (5) следует, что в рассматриваемом случае материала большая часть коэффициентов в соотношениях (1) равна 0. При переходе от соотношений (4) к (5) используется общепринятая перенумерация индексов [14], аналогичная [5]. Следует отметить, что к указанным материалам относятся пьезоэлектрические/пьезомагнитные керамики.

Введем векторы:

$$\mathbf{V} = \{u_1, u_2, u_3, \phi, \varphi\}^T, \quad \mathbf{t} = \{\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, D_3, B_3\}^T. \quad (6)$$

Поскольку все поля не зависят от координаты  $x_2$ , то решение уравнений (4) получаем в соответствии с методом, предложенным в [8] для анизотропного материала.

Принимается, что вектор  $\mathbf{t}$  непрерывен вдоль всей поверхности раздела материалов, и на части  $L = \{(-\infty, c) \cup (b, \infty)\}$  интерфейса  $-\infty < x_1 < \infty, x_3 = 0$  вектор  $\mathbf{V}$  механически, электрически и магнитно непрерывен, то есть граничные условия на поверхности раздела  $x_3 = 0$  следующие:

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{t}^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \in (-\infty, \infty), \quad (7)$$

$$\mathbf{V}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{V}^{(2)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \in L. \quad (8)$$

С учетом равенства (7) получаем представления:

$$[\mathbf{V}'(x_1)] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (9)$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (10)$$

где  $\mathbf{G}$  – биматериальная матрица, определяемая константами материалов аналогично [3],  $\mathbf{W}(z)$  – вектор-функция, аналитическая всюду, включая сцепленные участки интерфейса, и  $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}(x_1 + i0)$ ,  $\mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1 - i0)$ .

С помощью полученных представлений (9), (10) могут быть сформулированы задачи линейного сопряжения для широкого круга смешанных задач для пьезоэлектрической/пьезомагнитной биматериальной плоскости.

В дальнейшем будем рассматривать плоскую деформацию биматериальных тел, при которой матрица  $\mathbf{G}$  без вторых строки и столбца будет иметь размерность  $4 \times 4$ .

**Биматериал с электропроницаемой магнитноизолированной трещиной с зоной контакта.** Поскольку в [3] рассмотрен случай однородного материала, а также неоднородного материала с электромагнитнопроницаемой трещиной, то далее предполагаем, что открытая часть трещины электропроницаемая и магнитно-изолированная. То есть, граничные условия в этой зоне имеют вид:

$$\sigma_{13}^{\pm} = 0, \quad \sigma_{33}^{\pm} = 0, \quad [\phi] = 0, \quad [D_3] = 0, \quad B_3 = 0 \text{ для } \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{33} \\ B_3 \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Граничные же условия на участке контакта будут иметь вид:

$$[u_3] = 0, \quad \sigma_{13}^{\pm} = 0, \quad [\phi] = 0, \quad [D_3] = 0, \quad [\varphi] = 0, \quad [B_3] = 0, \quad [\sigma_{33}] = 0. \quad (12)$$

Принимая во внимание, что  $[\phi] = 0$  для всего интерфейса, и выполняя анализ, аналогичный изложенному в [3], получаем:  $W_4(z) = W_4^0 = const$  во всей плоскости, а это значит, что  $W_4^0$  определяется внешней нагрузкой.

Вводя следующие векторы:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{33} \\ B_3 \end{Bmatrix}, \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \end{Bmatrix}, \mathbf{\Psi} = \begin{Bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_3 \\ \Psi_5 \end{Bmatrix} \text{ и матрицу } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{13} & R_{15} \\ R_{31} & R_{33} & R_{35} \\ R_{51} & R_{53} & R_{55} \end{bmatrix}$$

с компонентами  $e_1 = 0, e_3 = 2G_{34}W_{40}, e_5 = 2G_{54}W_{40}, \Psi_i = W_i, R_{ij} = G_{ij} (i, j = 1, 3, 5)$ , представление (10) без второй и четвертой строк может быть записано в виде:

$$\mathbf{Q}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{R}\mathbf{\Psi}^+(x_1) - \bar{\mathbf{R}}\mathbf{\Psi}^-(x_1), \tag{13}$$

Преобразуя далее уравнения (13) приходим к следующим соотношениям:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j5}B_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \Omega_j^+(x_1) + \gamma_j\Omega_j^-(x_1) + \eta_j, \tag{14}$$

$$n_{j1}[u_1'(x_1)] + in_{j3}[u_3'(x_1)] + in_{j5}[\phi'(x_1)] = \Omega_j^+(x_1) - \Omega_j^-(x_1), \tag{15}$$

где

$$\Omega_j(z) = n_{j1}\Psi_1(z) + i\{n_{j3}\Psi_3(z) + n_{j4}\Psi_5(z)\},$$

а  $\eta_j = \mathbf{S}_j\mathbf{e} = 2(G_{34} + m_{j3}G_{54})W_{40}, m_{j5} = S_{j5}, m_{j1} = -iS_{j1}, n_{j1} = Y_{j1}, n_{j3} = -iY_{j3}, n_{j5} = -iY_{j5}$  и  $m_{jl}, n_{jl} (l = 1, 3, 5)$  являюся действительными,  $\mathbf{Y}_j = \mathbf{S}_j\mathbf{R}$ . Кроме того,  $\gamma_j$  и  $\mathbf{S}_j^T = [S_{j1}, S_{j3}, S_{j5}] (j = 1, 3, 5)$  представляют собой соответственно собственное значение и собственный вектор матрицы  $(\gamma\mathbf{R}^T + \bar{\mathbf{R}}^T)$ . Следует отметить, что корни уравнения  $det(\gamma\mathbf{R}^T + \bar{\mathbf{R}}^T) = 0$  могут быть представлены в виде:

$$\gamma_1 = \frac{1 + \delta}{1 - \delta}, \gamma_3 = \gamma_1^{-1}, \gamma_5 = 1,$$

где

$$\delta^2 = \frac{g_{15}^2g_{33} + g_{13}^2g_{55} - 2g_{15}g_{13}g_{35}}{g_{11}(g_{33}g_{55} - g_{35}^2)}.$$

Для исследуемых в данной работе пьезоэлектрических/пьезомагнитных материалов выполняется условие  $\delta^2 > 0$ , и в этом случае справедливы указанные выше свойства коэффициентов  $m_{jl}, n_{jl}$ .

Принимая во внимание, что для  $x_1 \in L$  выполняются соотношения  $\Omega_j^+(x_1) = \Omega_j^-(x_1) = \Omega_j(x_1)$ , получаем

$$(1 + \gamma_j)\Omega_j(x_1) = \mathbf{S}_j\mathbf{Q}^{(1)}(x_1, 0) \text{ для } x_1 \rightarrow \infty.$$



Поскольку функции  $\Omega_j(z)$  являются аналитическими во всей плоскости, разрезанной вдоль  $L_1 \cup L_2$  и учитывая, что  $Q^{(1)}(x_1, 0) = [\tau^\infty, \sigma^\infty, B^\infty]^{1,1}$  для  $x_1 \rightarrow \infty$ , получаем

$$\Omega_j(z) = (1 + \gamma_j)^{-1} (im_{j1}\tau^\infty + \sigma^\infty + m_{j5}B^\infty - \eta_j) \text{ для } z \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Вводя далее новую функцию

$$\Theta_j(z) = \Omega_j(z) + (1 + \gamma_j)^{-1} \eta_j,$$

уравнения (14), (15) и (16) можно записать в форме:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j5}B_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \Theta_j^+(x_1) + \gamma_j \Theta_j^-(x_1), \quad (17)$$

$$n_{j1}[u_1'(x_1)] + m_{j3}[u_3'(x_1)] + in_{j5}[\phi'(x_1)] = \Theta_j^+(x_1) - \Theta_j^-(x_1), \quad (18)$$

$$\Theta_j(z)|_{z \rightarrow \infty} = (1 + \gamma_j)^{-1} (im_{j1}\tau^\infty + \sigma^\infty + m_{j5}B^\infty).$$

Удовлетворяя с использованием уравнений (17), (18) для  $j=1$  условиям на интерфейсе (11) и (12), приходим к следующей комбинированной задаче Дирихле-Римана

$$\Theta_1^+(x_1) + \gamma_1 \Theta_1^-(x_1) = 0 \text{ для } x_1 \in (c, a),$$

$$Im \Theta_1^+(x_1) = 0 \text{ для } x_1 \in (a, b).$$

Находя решение этой задачи и используя соотношения (17), (18) приходим к следующим выражениям на линии раздела материалов

для  $x_1 > b$ :

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{14}B_3^{(1)}(x_1, 0) + im_{11}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \left[ \frac{Q(x_1)}{\sqrt{x_1 - a}} + \frac{iP(x_1)}{\sqrt{x_1 - b}} \right] \frac{\eta_1 \exp[i\phi(x_1)]}{\sqrt{x_1 - c}}, \quad (19)$$

для  $x_1 \in L_2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{14}B_3^{(1)}(x_1, 0) = & \frac{\eta_1 P(x_1)}{\sqrt{(x_1 - c)(b - x_1)}} \left[ \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} ch\phi_0(x_1) + sh\phi_0(x_1) \right] + \\ & + \frac{\eta_1 Q(x_1)}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)}} \left[ ch\phi_0(x_1) + \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} sh\phi_0(x_1) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

$$[u_1'(x_1, 0)] = \frac{2}{m_{11}\sqrt{x_1 - c}} \left[ \frac{P(x_1)}{\sqrt{b - x_1}} ch\phi_0(x_1) + \frac{Q(x_1)}{\sqrt{x_1 - a}} sh\phi_0(x_1) \right], \quad (21)$$

для  $x_1 \in L_1$ :

$$n_{11} [u'_1(x_1, 0)] + i \{ n_{13} [u'_3(x_1, 0)] + n_{14} [\varphi(x_1, 0)] \} = 2\sqrt{\alpha} \left[ \frac{P(x_1)}{\sqrt{b-x_1}} - i \frac{Q(x_1)}{\sqrt{a-x_1}} \right] \frac{\exp[i\varphi^*(x_1)]}{\sqrt{x_1-c}}, \quad (22)$$

где

$$C_1 = -\bar{\tau}_1 \cos \beta - \bar{\sigma}_1 \sin \beta, \quad D_1 = \bar{\sigma}_1 \cos \beta - \bar{\tau}_1 \sin \beta, \\ C_2 = -\frac{c+b}{2} C_1 - \beta_1 D_1, \quad D_2 = \beta_1 C_1 - \frac{c+a}{2} D_1, \quad \alpha = \frac{(\gamma_1+1)}{4\gamma_1}, \\ \bar{\sigma}_j = \frac{1}{1+\gamma_j} (\sigma^\infty + m_{j5} B^\infty), \quad \bar{\tau}_j = -m_{j1} \tau^\infty / (1+\gamma_j), \quad j=1,3,5.$$

Для случая магнитноизолированной трещины формулы (19) – (22) не дают возможности найти все необходимые характеристики на линии раздела материалов. Используем для этого выражения (17), (18) еще и для  $j=5$ . Принимая во внимание, что  $m_{51} = n_{51} = 0$ ,  $\gamma_5 = 1$ , и удовлетворяя с помощью представлений (17) для  $j=5$  условию (11) на интерфейсе, приходим к следующей задаче линейного сопряжения:

$$\Theta_5^+(x_1) + \Theta_5^-(x_1) = 0 \quad \text{для } x_1 \in L_1$$

для функции  $\Theta_5(z)$ , аналитической во всей плоскости, разрезанной только вдоль  $L_1$ . Решение этой задачи получено методом [4] в следующей форме:

$$\Theta_5(z) = \frac{\Sigma_5}{2} \left( z - \frac{c+a}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(z-c)(z-a)}}, \quad (23)$$

где  $\Sigma_5 = \sigma^\infty + m_{55} B^\infty$ .

С использованием формулы (23) из уравнений (17), (18) для  $j=5$  получаем:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{55} B_3^{(1)}(x_1, 0) = \Sigma_5 \left( x_1 - \frac{c+a}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}} \quad \text{для } x_1 > a, \quad (24)$$

$$n_{53} [u'_3(x_1, 0)] + n_{55} [\varphi'(x_1, 0)] = -\Sigma_5 \left( x_1 - \frac{c+a}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(x_1-c)(a-x_1)}} \quad \text{для } x_1 \in L_1. \quad (25)$$

Напряжение  $\sigma_{33}^{(1)}$  и магнитная индукция  $B_3^{(1)}$  могут быть легко найдены из уравнений (19) и (24) для  $x_1 > b$  и из уравнений (20) и (24) для  $x_1 \in L_2$ .

**Нахождение коэффициентов интенсивности и скорости освобождения энергии.** Введем следующие коэффициенты интенсивности:

$$k_1 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2(x_1-a)} \sigma_{33}(x_1, 0), \quad k_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2(x_1-b)} \sigma_{13}(x_1, 0), \quad (26)$$

$$k_4 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2(x_1-a)} D_3(x_1, 0), \quad k_5 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2(x_1-a)} B_3(x_1, 0). \quad (27)$$

Из выражений (24), (25) коэффициенты интенсивности, введенные формулами (26), (27), могут быть найдены в виде.



$$k_1 = \frac{1}{m_{55} - m_{15}} \sqrt{\frac{\pi l}{2\alpha}} \left[ m_{55}\omega - m_{15}\Sigma_5 \sqrt{\alpha(1-\lambda)} \right], \quad (28)$$

$$k_2 = -\frac{1}{m_{11}} \sqrt{\frac{\pi l}{2}} \left[ \omega_2 + 2\varepsilon_1 \sqrt{1-\lambda} \omega_1 \right],$$

$$k_5 = -\frac{1}{m_{55} - m_{15}} \sqrt{\frac{\pi l}{2\alpha}} \left[ \omega - \Sigma_5 \sqrt{\alpha(1-\lambda)} \right],$$

где  $\omega_1 = \Sigma_1 \cos \beta + m_{11}\tau \sin \beta$ ,  $\omega_2 = \Sigma_1 \sin \beta - m_{11}\tau \cos \beta$ ,  $\omega = \sqrt{1-\lambda} \omega_1 - 2\varepsilon \omega_2$ ,  
 $\Sigma_1 = \sigma^\infty + m_{15} B^\infty$ .

Использование уравнений (22) и (25) приводит к выражениям для  $[u'_3]$  и  $[\varphi']$ , которые для  $x_1 \rightarrow a - 0$  имеют вид:

$$[u'_3(x_1, 0)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi(a-x_1)}} (\Theta_{11}k_1 + \Theta_{15}k_5), \quad (29)$$

$$[\varphi'(x_1, 0)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi(a-x_1)}} (\Theta_{51}k_1 + \Theta_{55}k_5), \quad (30)$$

где  $\Theta_{11} = (n_{55}\sqrt{\alpha/\gamma_1} - n_{15})/\Delta_n$ ,  $\Theta_{15} = (m_{15}n_{55}\sqrt{\alpha/\gamma_1} - m_{55}n_{15})/\Delta_n$ ,  
 $\Theta_{51} = (n_{13} - n_{53}\sqrt{\alpha/\gamma_1})/\Delta_n$ ;  $\Theta_{55} = (m_{55}n_{13} - m_{15}n_{43}\sqrt{\alpha/\gamma_1})/\Delta_n$ ,  
 $\Delta_n = n_{13}n_{55} - n_{53}n_{15}$ .

Кроме того, формула (21) для  $x_1 \rightarrow b - 0$  приводит к выражению

$$[u'_1(x_1, 0)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi(b-x_1)}} \Theta_{22}k_2, \quad (31)$$

где  $\Theta_{22} = -\frac{2m_{11}}{n_{11}(1+\gamma_1)}$ .

Введем далее скорости освобождения энергии (СОЭ) для точек  $a$  и  $b$  формулами:

$$G_1 = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_a^{a+\Delta l} \left\{ \sigma_{33}^{(1)'}(x_1, 0) [u_3(x_1 - \Delta l, 0)] + B_3^{(1)'}(x_1, 0) [\varphi(x_1 - \Delta l, 0)] \right\} dx_1, \quad (32)$$

$$G_2 = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_b^{b+\Delta l} \sigma_{31}^{(1)'}(x_1, 0) [u_1(x_1 - \Delta l, 0)] dx_1. \quad (33)$$

Подставляя выражения для  $\sigma_{33}^{(1)'}(x_1, 0)$ ,  $B_3^{(1)'}(x_1, 0)$ ,  $\sigma_{31}^{(1)'}(x_1, 0)$  из уравнений (19), (20), (24) и интегрируя выражения (29) – (31), после вычисления интегралов (32), (33) получаем следующие выражения:

$$G_1 = [\Theta_{11}k_1^2 + \Theta_{55}k_5^2 + (\Theta_{15} + \Theta_{51})k_1k_5] / 4, G_2 = \Theta_{22}k_2^2 / 4. \quad (34)$$

Полная величина СОЭ  $G$  может быть найдена как сумма  $G_1$  и  $G_2$ .

Рассмотрим теперь нахождение  $D_3^{(1)}(x_1, 0)$ . Принимая во внимание, что  $[u_1'(x_1)] = W_1^+(x_1) - W_1^-(x_1)$ , третья, четвертая и пятая компоненты уравнения (10) могут быть записаны в виде

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{33}^{(1)} \\ D_3^{(1)} \\ B_3^{(1)} \end{Bmatrix} (x_1, 0) = \begin{Bmatrix} g_{31} \\ g_{41} \\ g_{51} \end{Bmatrix} u_1'(x_1) + i \begin{bmatrix} g_{33} & g_{34} & g_{35} \\ g_{43} & g_{44} & g_{45} \\ g_{53} & g_{54} & g_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1) \\ 2W_{40} \\ W_5^+(x_1) + W_5^-(x_1) \end{Bmatrix}. \quad (35)$$

Нахождение  $W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1)$  и  $W_5^+(x_1) + W_5^-(x_1)$  из первого и третьего уравнений (35) соответственно, и подстановка во второе уравнение дает выражение для  $D_3^{(1)}(x_1, 0)$  через  $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ ,  $B_3^{(1)}(x_1, 0)$  и  $[u_1'(x_1)]$ . На основе этого выражения получаем следующую формулу для коэффициента интенсивности электрической индукции (27):

$$k_4 = l_1 k_1 + l_5 k_5,$$

где

$$l_1 = (g_{41} - p_3)\gamma_0 + p_1, \quad l_5 = (g_{41} - p_3)\gamma_0 m_{14} + p_2, \quad \gamma_0 = (\gamma_1 - 1) / (2m_{11}\gamma_1),$$

$$p_1 = (g_{43}g_{55} - g_{45}g_{53}) / \Delta_0, \quad p_2 = (g_{45}g_{33} - g_{43}g_{35}) / \Delta_0,$$

$$p_3 = (g_{43}g_{55}g_{31} - g_{43}g_{35}g_{51} - g_{45}g_{53}g_{31} + g_{45}g_{33}g_{51}) / \Delta_0, \quad \Delta_0 = g_{55}g_{33} - g_{53}g_{35}.$$

Следует отметить, что нормальное напряжение, а также электрическая и магнитная индукции сингулярны в левой окрестности вершины трещины. Вводя следующие коэффициенты интенсивности:

$$k_1^b = \lim_{x_1 \rightarrow b-0} \sqrt{2\pi(b-x_1)} \sigma_{33}(x_1, 0),$$

$$k_4^b = \lim_{x_1 \rightarrow b-0} \sqrt{2\pi(b-x_1)} D_3(x_1, 0), \quad k_5^b = \lim_{x_1 \rightarrow b-0} \sqrt{2\pi(b-x_1)} B_3(x_1, 0)$$

и используя формулы (20), (21), (24), а также выражения для  $D_3^{(1)}(x_1, 0)$  через  $\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)$ ,  $B_3^{(1)}(x_1, 0)$  и  $[u_1'(x_1)]$ , получаем:

$$k_1^b = \frac{m_{11}m_{44}}{m_{44} - m_{14}} \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} k_2, \quad k_5^b = -m_{44}^{-1} k_1^b, \quad k_4^b = (g_{41} - p_3) \frac{2m_{11}}{m_{11}(1 + \gamma_1)} k_2 + p_1 k_1^b + p_2 k_5^b.$$

Из последних формул легко видеть, что коэффициенты интенсивности в точке  $b$  полностью определяются коэффициентами интенсивности сдвигового напряжения  $k_2$ .

**Нахождение реальной длины зоны контакта.** Рассмотрим теперь нахождение реальной длины зоны контакта. Полученное решение будет физически корректным, если выполняются следующие неравенства

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \leq 0 \text{ для } x_1 \in (a, b), \quad [u_3] \geq 0 \text{ для } x_1 \in (c, a). \quad (36)$$

Необходимым условием для выполнения этих неравенств является выполнение равенства

$$k_1 = 0 \tag{37}$$

Для произвольных значений  $\lambda$  это уравнение может быть сформулировано с помощью представления (28) Для малых же значений  $\lambda$  указанное уравнение может быть записано в виде

$$Re\{e^{i\beta} (1 + 2i\varepsilon_1) [\chi_1 - i\chi_2]\} = \sqrt{\alpha} m_{14} m_{44}^{-1} \chi_3, \tag{38}$$

где

$$k = \frac{\tau^\infty}{\sigma^\infty}, \chi_1 = 1 + m_{15} \frac{B^\infty}{\sigma^\infty}, \chi_2 = m_{11} k, \chi_3 = 1 + m_{55} \frac{B^\infty}{\sigma^\infty}.$$

Принимая во внимание, что только  $\beta$  зависит от  $\lambda$  в уравнении (38), точное аналитическое решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$\lambda_0 \approx \tilde{\lambda}_0 = 4 \exp(g_1 / \varepsilon_1), \tag{39}$$

где

$$g_1 = (-1)^n \left[ \sin^{-1} \left( \frac{\chi_1 + 2\varepsilon_1 \chi_2}{\Delta} \right) - \sin^{-1}(\zeta_1) \right] + \pi n,$$

$$\zeta_1 = \sqrt{\alpha} \frac{m_{14}}{\Delta m_{44}} \chi_3, \zeta_2 = \sqrt{\gamma} \frac{n_{14}}{\Delta n_{44}} \chi_3, \Delta^2 = (1 + 4\varepsilon_1^2)(\chi_1^2 + \chi_2^2).$$

Величину  $n$  следует выбрать так, чтобы найденное  $\lambda$  представляло собой максимальный корень уравнения (38) из интервала (0,1) Формулы (39) можно использовать при малых значениях  $\lambda_0$  (в основном для  $\lambda_0 < 0,01$ ) Для больших же значений длины зоны контакта необходимо находить численное решение уравнения (37)

**Анализ результатов и выводы.** Численные результаты для электропроницаемой и магнитоизолированной трещины получены для биматериала BaTiO<sub>3</sub>-CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> Константы этого материала для различных значений объемного содержания (V<sub>f</sub>) BaTiO<sub>3</sub> в композите взяты из [18] и приведены в таблице 1 Указанный материал является одним из наиболее характерных представителей пьезоэлектрических/пьезомагнитных материалов

Таблица 1

Физические характеристики материалов

Константы материала	V <sub>f</sub> = 0,1	V <sub>f</sub> = 0,9	Константы материала	V <sub>f</sub> = 0,1	V <sub>f</sub> = 0,9
c <sub>11</sub> , ГПа	274	178,0	α <sub>11</sub> (×10 <sup>10</sup> ), Кл <sup>2</sup> /Н м <sup>2</sup>	11,9	100,9
c <sub>13</sub> , ГПа	161	87,2	α <sub>33</sub> (×10 <sup>10</sup> ), Кл <sup>2</sup> /Н м <sup>2</sup>	13,4	113,5
c <sub>33</sub> , ГПа	259	172,8	h <sub>31</sub> , Н/А м	522,3	58,03
c <sub>44</sub> , ГПа	45	43,2	h <sub>33</sub> , Н/А м	629,7	69,97
e <sub>31</sub> , Кл/м <sup>2</sup>	-4,4	-3,96	h <sub>15</sub> , Н/А м	495,0	55,00
e <sub>33</sub> , Кл/м <sup>2</sup>	1,86	16,74	γ <sub>11</sub> (×10 <sup>6</sup> ), Н с <sup>2</sup> /К м <sup>2</sup>	531,5	63,5
e <sub>15</sub> , Кл/м	1,16	10,44	γ <sub>33</sub> (×10 <sup>6</sup> ), Н с <sup>2</sup> /К м <sup>2</sup>	142,3	24,7

На бесконечности задавалось равномерное растяжение напряжением  $\sigma^\infty = 1 \text{ МПа}$  и длина трещины считалась равной  $l = 2 \text{ мм}$

Изменение относительной длины зоны контакта в зависимости от отношения интенсивностей магнитного потока и нормального напряжения на бесконечности показано на рис. 2. Кривые 1, 2 и 3 построены для отношения касательного и нормального напряжений на бесконечности  $k$ , равного 1, 2 и 5, соответственно

На рис. 3 показано изменение нормированного КИН  $k_{2n} = k_2 / (\sigma \sqrt{l})$  в зависимости от  $B^\infty / \sigma^\infty$  и тех же значений  $k$ , что и на рис. 2. Легко видеть, что величина  $k_2$  существенно зависит от  $k$ , а его зависимость от интенсивности магнитного потока достаточно незначительна. Видно также, что для меньших величин  $\sqrt{(\sigma^x)^2 + (\tau^x)^2}$  (кривая 1) зависимость  $k_2$  от  $B^\infty / \sigma^\infty$  является более существенной, чем для больших значений этой величины

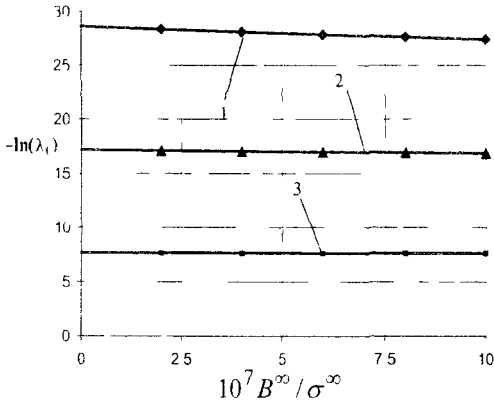


Рис. 2. Относительная длина зоны контакта

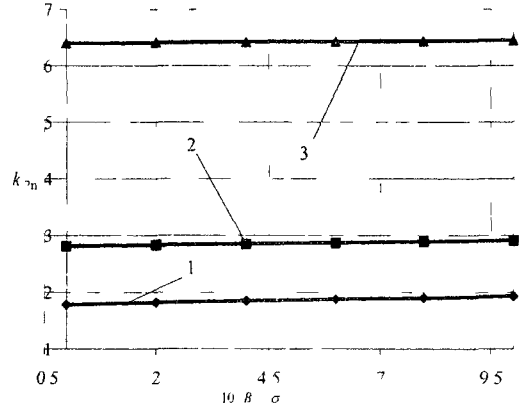


Рис. 3. Нормированный коэффициент интенсивности напряжения

Изменение СОЭ в зависимости от отношения интенсивностей магнитного потока и нормального напряжения на бесконечности показано на рис. 4. Кривые 1, 2 построены для отношения касательного и нормального напряжений на бесконечности  $k$  равного 5 и 2 соответственно. Пунктирные линии соответствуют механической части  $G_2$  (34), а сплошные — суммарной СОЭ  $G$ . Кривая 3 соответствует  $G_1$  и является практически одинаковой для обоих значений  $k$

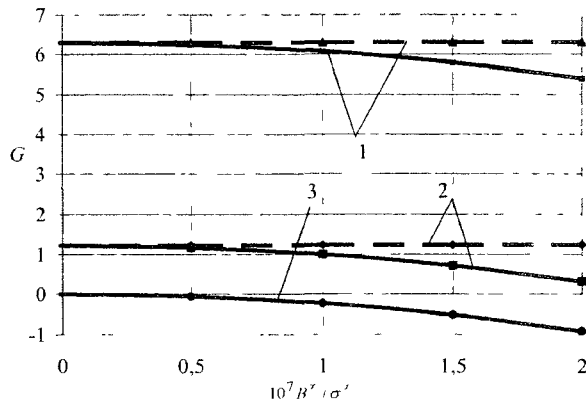


Рис. 4. Швидкість звільнення енергії

Из полученных результатов следует, что рост интенсивности магнитного потока приводит к уменьшению суммарной скорости освобождения энергии, то есть, магнитный поток оказывает влияние, подобное влиянию электрического потока, сдерживая рост трещины.

**Висновок.** Рассмотрена плоская задача для биматериальной пьезоэлектрического/пьезомагнитного пространства с трещиной в области раздела материалов под действием удаленной механической нагрузки, а также электрических и магнитных потоков. С использованием аппарата теории функции комплексного переменного получено аналитическое решение в рамках модели, учитывающей контакт берегов трещины. Графическим путем продемонстрировано влияние интенсивности магнитного потока на длину зоны контакта, коэффициент интенсивности напряжений и скорость освобождения энергии.

### Бібліографічні посилання

1. **Баева А.И.** Магнитоупругое состояние многосвязного полупространства и полуплоскости с отверстиями и трещинами / А. И. Баева, О.И. Бороненко // Теорет и прикладная механика. - 2006. - Вып. 42. - С. 63-72.
2. **Калоеров С.А.** Двумерные задачи электро- и магнитоупругости для многосвязных областей / С.А. Калоеров, А.И. Баева, О.И. Бороненко – Донецк, 2007 – 268 с.
3. **Лобода В.В.** Межфазная трещина в пьезоэлектромагнитном биматериале под действием механической нагрузки, электрического и магнитного потоков / В.В. Лобода, Т.В. Ходаен // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2007 – Вип 11, т 2. – С 117–129.
4. **Мухелишвили Н.И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили – М., 1966. – 707 с.
5. **Партон В.З.** Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел / В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. – М., 1988. – 471 с.
6. **Савельев И.В.** Электричество (Курс общей физики; т. 2) / И.В. Савельев – М., 1970. – 432 с.
7. **Черепанов Г.П.** О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами / Г.П. Черепанов. // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение – 1962. – № 1. – С 131–137.
8. **Eshelby J.D.** Anisotropic elasticity with application to dislocation theory / J.D. Eshelby, W.T. Read, W. Shockley // Acta Metall. – 1953 – 1. – P. 251–259.
9. **Gao C.-F.** Effects of magnetic fields on cracks in a soft ferromagnetic material / C.-F. Gao, Y.-W. Mai, B.-L. Wang // Engin. Fracture Mech. – 2008. – 75. - P 4863-4875.



- 10 Gao C.-F. Fracture mechanics for a mode III crack in a magneto-electroelastic solid / C.-F. Gao, P. Tong, T.-Y. Zhang // Int. J. Solids and Structures. – 2004. – 41. – P. 6613–6629.
- 11 Gao C.-F. Crack problems in magneto-electroelastic solids Part I: exact solution of a crack / C.-F. Gao, H. Kessler, H. Balke // Int. J. Engineering Science. – 2003. – 41. – P. 969–981.
- 12 Gao C.-F. Crack problems in magneto-electroelastic solids. Part II: general solution of collinear cracks / C.-F. Gao, H. Kessler, H. Balke // Int. J. Engineering Science. – 2003. – 41. – P. 983–994.
- 13 Gao C.-F. Interfacial crack problems in magneto-electroelastic solids / C.-F. Gao, P. Tong, T.-Y. Zhang // Int. J. Engineering Science. – 2003. – 41. – P. 2105–2121
- 14 Herrmann K.P. Fracture mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimetals by consideration of various contact zone models / K.P. Herrmann, V.V. Loboda // Arch. Appl. Mech. – 2000. – 70. – P. 127–143.
- 15 Liu J.X. A moving dislocation in a magneto-electro-elastic solid / J.X. Liu, A.K. Soh, D. N. Fang // Mechanics Research Communications. – 2005. – 32. – P. 504–513.
- 16 Rao B.N. Interaction integrals for fracture analysis of functionally graded magneto-electroelastic materials / B.N. Rao, M. Kuna // Int. J. Fract. – 2008. – 153. – P. 15–37.
- 17 Sih G.C. Piezomagnetic and piezoelectric poling effects on mode I and II crack initiation behavior of magneto-electroelastic materials / G.C. Sih, R. Jones, Z.F. Song // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2003. – 40. – P. 161–186
- 18 Sih G.C. Magnetic and electric poling effects associated with crack growth in BaTiO<sub>3</sub>-CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> composite / G.C. Sih, Z.F. Song // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2003. – 39. – P. 209–227.
- 19 Zhou Z.-G. Two collinear interface cracks in magneto-electro-elastic composites / Z.-G. Zhou, B. Wang, Yu-G. Sun // Int. J. Engineering Science. – 2004. – 42. – P. 1155–1167.
- 20 Zhou Z.-G. The closed form solution of a Mode-I crack in the piezoelectric/piezomagnetic materials / Z.-G. Zhou, P.-W. Zhang, L.-Z. Wu // Int. J. Solids and Structures. – 2007. – 44. – P. 419–435.

Надійшла до редколеги 15 02 10

УДК 539.3

Н.Ю. Швайко

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **ЭФФЕКТ ФЕЙГЕНА И ЕГО ОПИСАНИЕ ТЕОРИЕЙ ПЛАСТИЧНОСТИ, ОСНОВАННОЙ НА КОНЦЕПЦИИ СКОЛЬЖЕНИЯ**

С использованием варианта теории пластичности [4], основанной на концепции скольжения, дано физическое объяснение и показана возможность аналитического описания установленного в эксперименте эффекта Фейгена [10]. Его сущность заключается в следующем. Закрученный за пределы упругости тонкостенный трубчатый образец после разгрузки с последующим приложением растягивающей силы в значительной степени раскручивается. Тривиальный при конечной деформации указанный результат требует специального рассмотрения и объяснения при малых упругопластических деформациях в геометрически линейной постановке задачи.

*Ключевые слова* теория пластичности, эффект Фейгена концепция скольжения

В царині теорії пластичності [4], заснованої на концепції ковзання, дано тлумачення та з'ясована можливість аналітичного опису встановленого в експерименті ефекту Фейгена [10], сенс якого полягає в наступному. Тонкостінний трубчастий стрижень після попереднього закруту за межі пружності і розвантаження під дією прикладеної осьової сили розтягується з частковим розкрутом. Указаний результат, тривіальний при скінчених деформаціях, потребує спе-

ціального вивчення і пояснення при малих пружнопластичних деформаціях в геометрично лінійній постановці задачі.

*Ключові слова* теорія пластичності, ефект Фейгена, концепція ковзання

Using the version [4] of plasticity theory the physical explanation and the analytical description are given for the effect established experimentally by M. Feigen [10]. The essence of Feigen effect is following: thin-walled tube, which was twisted outside the limit of elasticity, unloaded and then subjected to the tension load, untwists substantially. This result is trivial considering deformation to be finite, but it requires special explanation when deformation is small elastoplastic and the problem is linear geometrically.

*Keywords* plasticity theory Feigen effect, sliding conception

**Введення.** Для обґрунтування коректності варіанта теорії пластичності [4] показано [5–7], що він задовольняє постулату Друккера, принципу макродетермінізму (устойчивости процесса деформирования), дифференціальної потенціальності визначаючих рівнянь зв'язи  $\varepsilon_{mn} \sim \sigma_{mn}$ , описує ефект Баушингера і інші явища вторинного плану, установлені в експерименті при складному навантаженні конструкційних матеріалів. Наявне дослідження присвячене вивченню можливості аналітичного опису ефекту Фейгена [10] в межах теорії пластичності [4], заснованої на концепції скользяння [9].

**Процес навантаження.** Розглянемо процес навантаження елемента тіла, який в площині  $OS_1S_3$  п'ятимерного простору Ільюшина [1] характеризується траєкторією  $OAОВ$  (рис.1). В межах моделі плоскопластическої середовища [4] задача визначення деформації при довільному в площині  $OS_1S_3$  навантаженні зводиться до визначення швидкості інтенсивності скользянь  $\varphi'_i(\theta, t)$  і границь  $-\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  множини напрямів скользянь із системи інтегральних рівнянь

$$\int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} R[\varepsilon_i^{(p)}(t), \lambda_k^*(t), |\theta - \theta_0|] \varphi'_i(\theta, t) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos[\vartheta(t) - 2\theta_0 - 2\phi_0], \quad (1)$$

$$\tau_s + \int_{t_0}^t \int_{-\alpha_1(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} R[\varepsilon_i^{(p)}(\xi), \lambda_k^*(\xi), |\theta - \theta_0|] \varphi'_i(\theta, \xi) d\theta d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\theta_0 - \phi(t)],$$

$$\theta \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)]. \quad (2)$$

Здесь используются принятые ранее [8] обозначения, в частности:  $\omega = |\theta - \theta_0|$  – угол между направлением сдвига  $\mathbf{n}(\theta)$  и произвольным направлением  $\mathbf{m}(\theta_0)$  в плоскости деформации;  $t_0, t$  – начальный и произвольный моменты пластического деформирования; за параметр времени берется длина дуги траектории нагружения.

$$S(t) = [S_1^2(t) + S_3^2(t)]^{1/2}, \quad S_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} [\sigma_\lambda(t) - \sigma_\nu(t)], \quad S_3(t) = \sqrt{2} \tau_{\nu\lambda}(t),$$

$$\phi(t) = \phi_1(t) - \phi_1(t_0), \quad 2\phi_1(t) = \arctg[S_3(t) / S_1(t)], \quad \phi_0 = \phi_1(t_0),$$

$$\vartheta(t) = \arctg(dS_3 / dS_1), \quad dt = [dS_1^2 + dS_3^2]^{1/2}. \quad (3)$$

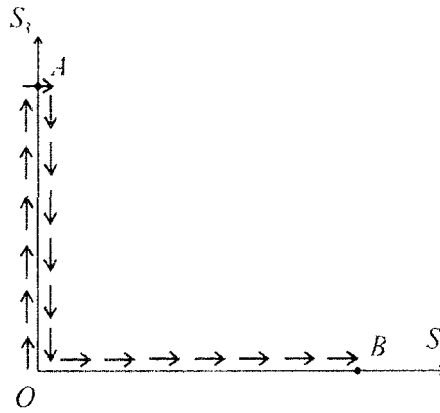


Рис.1. Траектория нагруження *ОАОВ* образца при исследовании эффекта Фейгена

Универсальная функция материала  $R[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*, \omega]$  представляется в виде произведения двух функций

$$R[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*, \omega] = \Pi[\varepsilon_i^{(p)}, \lambda_k^*] F(\omega), \tag{4}$$

одна из которых ( $F$ ) учитывает перекрестное взаимодействие систем скольжения и формирует деформационную анизотропию материала, а вторая ( $\Pi$ ) – влияние на это взаимодействие интенсивности пластической деформации  $\varepsilon_i^{(p)}(t)$  и ее экстремальных значений  $\lambda_k^*$ , соответствующих изменению знака скорости  $\dot{\varepsilon}_i^{(p)}(t)$  на противоположный. Если  $\varepsilon_i^{(p)}$  неубывающая функция времени ( $\dot{\varepsilon}_i^{(p)} \geq 0$ ), то вместо (4) принимаем  $R = \Pi_0(\varepsilon_i^{(p)}) F(\omega)$ .

При известных  $\varphi'_i(\theta, t)$ ,  $\alpha_{12}(t)$  компоненты вектора скорости плоскопластической деформации

$$\dot{\Gamma}^{(p)} = \mathbf{i}_1 \dot{\Gamma}_1^{(p)} + \mathbf{i}_3 \dot{\Gamma}_3^{(p)}, \left( \dot{\Gamma}_1^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\dot{\varepsilon}_x^{(p)} - \varepsilon_y^{(p)}), \dot{\Gamma}_3^{(p)} = \sqrt{2} \dot{\varepsilon}_{xy} \equiv \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma_{xy} \right)$$

определяются формулами:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_1^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi'_1(\theta, t) \cos 2(\theta + \phi_0) d\theta, \\ \dot{\Gamma}_3^{(p)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi'_1(\theta, t) \sin 2(\theta + \phi_0) d\theta. \end{aligned} \tag{5}$$

Дальнейшее исследование проведем для функции упрочнения

$$F(\omega) = a_0 + a_2 \cos 2\omega + a_3 \delta(\omega) + a_4 \delta(\pi / 2 - \omega), \tag{6}$$

где  $\delta(\omega)$  – дельта-функция Дирака,  $a_i \sim const$ . Методика решения системы интегральных уравнений (1) и (2) с использованием функции упрочнения  $F(\omega)$  (6) из-

ложена, в частности, в работе [8]. На первом этапе нагружения  $OA$  ( $S_1(t) \equiv 0$ ,  $S_3(t) = \sqrt{2}\tau_{xy}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_A]$ ) максимальные касательные напряжения  $\tau_{max}^{(1)}(t) \equiv \tau_{xy}(t) = \tau_{yx}(t)$  действуют по площадкам, ортогональным к координатным осям  $Ox$  и  $Oy$  (рис. 2). Параметры отрезка  $OA$  траектории нагружения соответственно равны  $\vartheta(t) = \pi/2$ ,  $\phi_1(t) \equiv \phi_0 = \pi/4$ ,  $\phi(t) \equiv 0$ ,  $t \in [t_0, t_A]$ . При этом для скорости интенсивности скольжений  $\phi'_i(\theta, t)$  из уравнения (1) получаем

$$\phi'_i(\theta, t) = \psi(\theta, t) / \Pi_0 \left[ \varepsilon_i^{(p)}(t) \right], \quad \psi(\theta, t) = A_1 \cos 2\theta + C_1, \quad (7)$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a_3 + 2a_0\alpha}{[a_3 + a_2(\alpha + 0,25 \sin 4\alpha)](2a_0\alpha + a_3) - a_0a_2 \sin^2 2\alpha},$$

$$C_1 = -A_1 \frac{a_0 \sin 2\alpha}{a_3 + 2a_0\alpha}, \quad 2\alpha = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)$$

Границы множества направлений скольжения  $-\alpha_1(t), \alpha_2(t)$  определяются уравнением (2), на основании которого можем записать [8]

$$\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \alpha(t), \quad \frac{a_3 + a_2(\alpha - 0,25 \sin 4\alpha)}{(a_3 + 2a_0\alpha) \cos 2\alpha - a_0 \sin 2\alpha} = \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_s},$$

$$(\sigma_1(t) = \sqrt{3}\tau_{xy}(t), \quad \sigma_s = \sqrt{3}\tau_s, \quad t \in [t_0, t_A]). \quad (8)$$

С учётом формул (5) и (7) для компонент вектора скорости плоскопластической деформации получаем

$$\Pi_0 \Gamma_1^{(p)} \equiv 0, \quad \Pi_0 \Gamma_3^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{2} A_1 \left[ (\alpha + 0,25 \sin 4\alpha) - \frac{a_0 \sin^2 2\alpha}{a_3 + 2a_0\alpha} \right], \quad t \in [t_0, t_A] \quad (9)$$

Суммарная составляющая пластической деформации сдвига определяется формулой

$$\gamma_{xy}^{(p)} = \sqrt{2} A_1 \int_{t_0}^{t_A} \left[ \alpha(t) + 0,25 \sin 4\alpha(t) - \frac{a_0 \sin^2 2\alpha(t)}{a_3 + 2a_0\alpha} \right] \frac{dt}{\Pi_0 \left[ \varepsilon_i^{(p)}(t) \right]}. \quad (10)$$

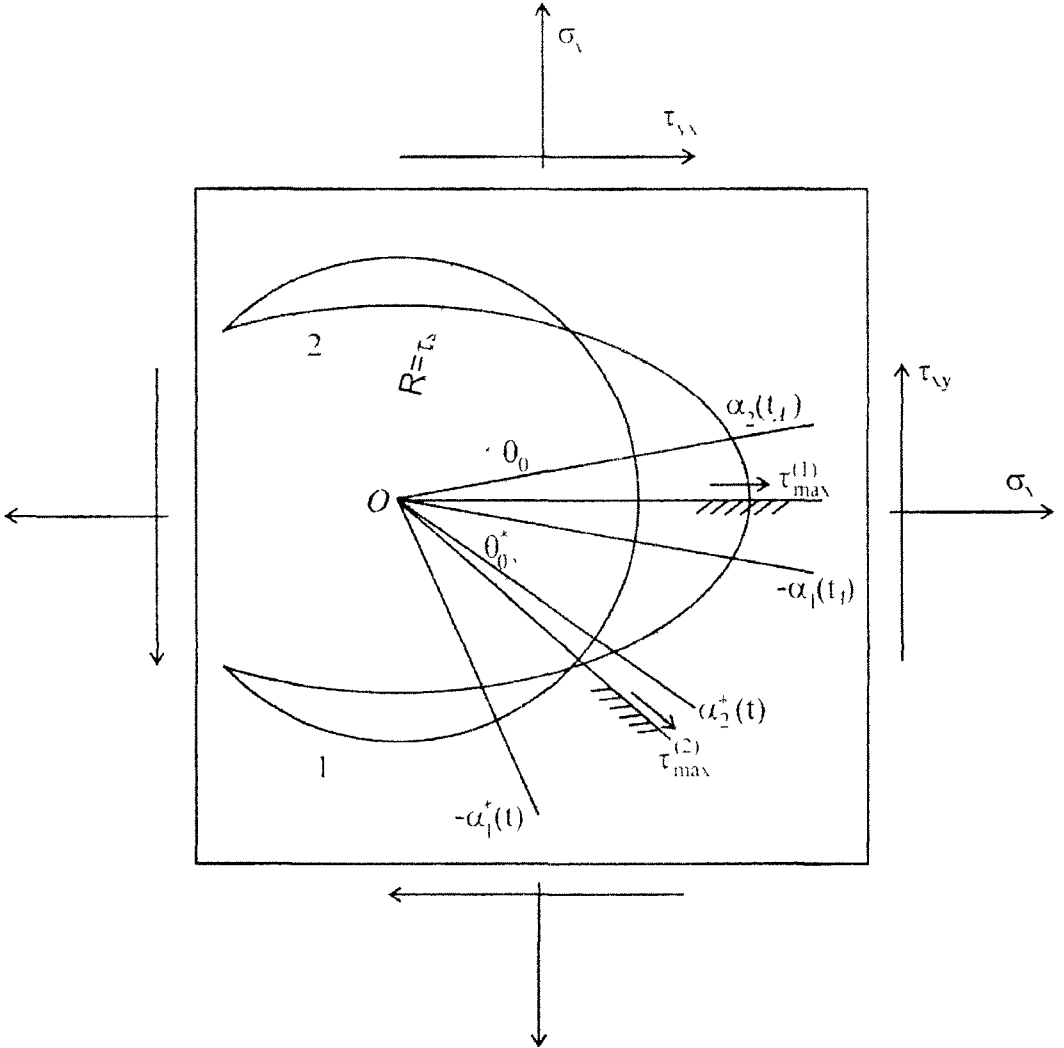
В соответствии с законом парности касательных напряжений она является результатом скольжений в направлениях  $\mathbf{m}(\pi/2 + \theta_0)$  ( $\theta_0 \in [-\alpha(t), \alpha(t)]$ ) и  $\mathbf{m}(\theta_0)$ , симметричных относительно направлений действия максимальных касательных напряжений  $\tau_{max}^{(1)}$ .

**Сопротивление сдвигу.** Пластическая деформация первоначально изотропного материала приводит к возникновению деформационной анизотропии. В рамках модели плоскопластической среды [4;7] прочностной характеристикой, изменяющейся по-разному в различных в плоскости деформации направлениях  $\mathbf{m}(\theta_0)$ , является сопротивление сдвигу  $R_m(\theta_0, t)$ , под которым понимается отнесенная к единице площади сила сопротивления скольжению по данной площадке в заданном направлении. В общем случае плоскопластической деформации величина  $R_m$  зависит от истории нагружения и в произвольный момент времени  $t$  определяется формулой [8]

$$R_m(\theta_0, t) = \tau_s + \int_{t_0 - \alpha_1(\xi)}^t \int_{-\alpha_1(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} \Pi \left[ \varepsilon_i^{(p)}(\xi), \lambda_k^*(\xi) \right] F(|\theta - \theta_0|) \varphi'_\xi(\theta, \xi) d\theta d\xi, \quad (11)$$

$$\theta_0 \in [-\pi, \pi],$$

где  $\tau_s$  – сопротивление сдвигу первоначально изотропного материала. В условиях рассмотренного чистого сдвига ( $S_1(t) \equiv 0, S_3(t) = \sqrt{2}\tau_{xy}(t) \geq 0$ ) на основании формулы (11) окончательно можем получить



**Рис.2.** Развитие систем скольжений при кручении с разгрузкой и последующим растяжением образца

$$R_m(\theta_0, t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} S_3(t) \cos 2\theta_0, & \theta_0 \in [-\alpha(t), \alpha(t)]; \\ Q_1(\theta_0, t) & \theta_0 \in [\alpha(t), \pi/2 - \alpha(t)], \\ Q_2(\theta_0, t), & \theta_0 \in [\pi/2 - \alpha(t), \pi/2 + \alpha(t)], \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Q_1(\theta_0, t) &= \tau_s \{ 1 + A [ a_0 (\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha) + a_2 (\alpha - 0,25 \sin 4\alpha) \cos 2\theta_0 ] \}, \\ Q_2(\theta_0, t) &= Q_1(\theta_0, t) - A \tau_s a_4 (\cos 2\theta_0 - \cos 2\alpha), \\ (A &= [(a_3 + 2a_0\alpha) \cos 2\alpha - a_0 \sin 2\alpha]^{-1}), \quad (t \in [t_0, t_1]). \end{aligned} \quad (13)$$

Для определения сопротивления сдвигу  $R_{m'}(\theta_0 \pm \pi, t)$  в направлении  $\mathbf{m}'(\theta_0 \pm \pi)$ , а также в направлении  $-\mathbf{m}(\theta_0)$ , прогивоположном  $\mathbf{m}(\theta_0)$ , можно воспользоваться формулами [8]

$$R_{m'}(\theta_0 \pm \pi, t) = R(\theta_0, t), \quad R_{-m}(\theta_0, t) = R_m(\pi/2 + \theta_0, t) \quad (14)$$

В частности, для эффекта Баушингера имеем

$$\tau_s^- = Q_2(\pi/2, t) \quad (15)$$

Качественная картина изменения сопротивления сдвигу  $R_m \sim \theta_0$  после первого этапа нагружения ( $S_1(t) \equiv 0, S_3(t) = \sqrt{2} \tau_{xy}(t) \geq 0 \quad t \leq t_A$ ) и разгрузки показана на рис 2 линией 2. Окружность радиуса  $\tau_s$  (линия 1) — сопротивление сдвигу первоначально изотропного материала.

**Второй этап нагружения.** Рассмотрим теперь второй этап нагружения *OB* (рис 1), который при плоскопластической деформации характеризуется компонентами

$$S_1(t) = [\sigma_x(t) - \sigma_y(t)] / \sqrt{2}, \quad S_3(t) = \sqrt{2} \tau_{xy}(t) \equiv 0$$

вектора нагружения **S**. При этом максимальные касательные напряжения ( $\tau_{max}^{(2)}(t)$ ) действуют по косым площадкам, наклонённым под углами  $\pm \pi/4$  к координатным осям *Oxy* (рис.2). Кроме этого, здесь следует учесть деформационную анизотропию (12), созданную первым этапом нагружения. В связи с этим исходные интегральные уравнения (1) и (2) следует переписать как

$$\int_{-\alpha_1^*(t)}^{\alpha_2^*(t)} \Pi \left[ \varepsilon_i^{(p)}(t) \right] F(\theta^* - \theta_0^* | \varphi_i'(\theta^*, t)) d\theta^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\theta^*, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} R_m(\theta_0^*, t_A) &+ \int_{t_1}^t \int_{-\alpha_1^*(\xi)}^{\alpha_2^*(\xi)} \Pi_0^* \left[ \varepsilon_i^{(p)}(\xi), \lambda_k^*(\xi) \right] F(\theta^* - \theta_0^* | \varphi_\xi'(\theta^*, \xi)) d\theta^* d\xi = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} S_1(t) \cos 2\theta_0^*, \quad \theta_0^* \in [-\alpha_1^*(t), \alpha_2^*(t)], \quad t > t_1. \end{aligned} \quad (17)$$



Здесь углы  $\theta^* = \theta + \pi / 4$ ,  $\theta_0^* = \theta_0 + \pi / 4$ ,  $\alpha_{1,2}^*(t)$  отсчитываются от направления действия максимального касательного напряжения  $\tau_{max}^{(2)}(t)$  на втором этапе нагружения (рис. 2)

$$R_m(\theta_0^*, t_1) \equiv Q_1(\theta_0 + \pi / 2, t_1) = \tau_s(b_0 + b_1 \sin 2\theta_0^*),$$

$$b_0 = 1 + Aa_0[\sin 2\alpha_A - 2\alpha_A \cos 2\alpha_A], \quad b_1 = Aa_2(\alpha_A - 0,25 \sin 4\alpha_A) \quad (18)$$

Системы уравнений (16), (17) и (1), (2) идентичны и методы их решений совпадают. Пропуская промежуточные выкладки, приведем окончательные результаты решения системы (16), (17)

Для скорости интенсивности скольжений  $\phi'_i(\theta, t)$  на втором этапе нагружения получаем:

$$\phi'_i[\eta, t] = \psi[\eta, t] / \Pi_0[\varepsilon_0^{(p)}], \quad \phi'_i[\eta, t] = \phi'_i(\theta - \kappa, t),$$

$$\psi[\eta, t] = D_1 \cos 2\kappa \cos 2\eta + D_2 \sin 2\kappa \sin 2\eta - D_0, \quad (19)$$

где (здесь и далее индекс «\*» при величинах  $\alpha_{1,2}^*$ ,  $\alpha^*$ ,  $\kappa^*$ ,  $\theta^*$ ,  $\theta_0^*$  опущен)

$$D_0 = \frac{D_1 a_0 \sin 2\sigma}{a_3 + 2a_0 \alpha},$$

$$D_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(a_3 + 2a_0 \alpha) \cos 2\kappa}{[a_3 + a_2(\alpha + 0,25 \sin 4\alpha)](a_3 + 2a_0 \alpha) - a_0 a_2 \sin 2\alpha},$$

$$D_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sin 2\kappa}{a_3 + a_2(\alpha - 0,25 \sin 4\alpha)},$$

$$2\alpha = \alpha_2 + \alpha_1, \quad 2\kappa = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \eta = \theta - \kappa, \quad \eta_0 = \theta_0 - \kappa \quad (20)$$

Границы множества направлений скольжений  $\alpha_2(t) = \alpha(t) + \kappa(t)$ ,  $-\alpha_1 = -\alpha(t) + \kappa(t)$  определяются равенствами

$$\kappa = \frac{1}{2} \arcsin \left[ k(\alpha_A) \frac{(a_3 + 2a_0 \alpha) v(\alpha)}{a_2 v(\alpha) \sin 2\alpha - u(\alpha)} \right], \quad (21)$$

$$\frac{\sigma_i(t)}{\sigma_s} = a_2(\alpha_A - 0,25 \sin 4\alpha_A) / v(\alpha_A) \cdot \operatorname{tg} 2\kappa. \quad (22)$$

Здесь

$$u(\alpha) = (a_3 + 2a_0 \alpha)[a_3 + a_2(\alpha + 0,25 \sin 4\alpha)] - a_2 a_0 \sin^2 2\alpha,$$

$$v(\alpha) = (a_3 + 2a_0 \alpha) \cos 2\alpha - a_0 \sin 2\alpha, \quad k(\alpha_A) = b_1 / b_0.$$

Для практического построения функций  $\alpha_{1,2}(t)$  можно воспользоваться такой последовательностью вычислений. При заданном первом этапе нагружения OA и следовательно, известных  $\alpha_A$  и  $(\sigma_i / \sigma_s)_A$ , задаемся последовательностью значений  $\alpha(t_k) = \alpha^{(k)}$  ( $k=1,2, \dots$ ) на втором этапе нагружения OB (рис. 1). Затем на основании формулы (21) определяем соответствующую последовательность значений  $\kappa(t_k)$ . Уравнение (22) устанавливает зависимость между значениями функций

$\alpha(t)$ ,  $\kappa(t)$  и соответствующими величинами отношений  $(\sigma_1(t_k) / \sigma_s)$  второго этапа нагружения.

При известных  $\varphi'_i(\theta, t)$ ,  $\alpha_{1,2}(t)$  компоненты скорости плоскопластической деформации, как и ранее, определяются формулами (5). После вычисления интегралов окончательно можем записать:

$$\begin{aligned} \Pi_0 \dot{\Gamma}_1^{(p)} &= B_{11}(\alpha) \cos^2 2\kappa + B_{12}(\alpha) \sin^2 2\kappa, \\ \Pi_0 \dot{\Gamma}_3^{(p)} &= \frac{1}{2} [B_{11}(\alpha) - B_{12}(\alpha)] \sin 4\alpha, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} B_{11}(\alpha) &= \frac{1}{2} \frac{r(\alpha)}{a_3(a_3 + 2a_0\alpha) + a_2r(\alpha)}, \quad B_{12}(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\alpha - 0,25 \sin 4\alpha}{a_3 + a_2(\alpha - 0,25 \sin 4\alpha)}, \\ r(\alpha) &= (a_3 + 2a_0\alpha)(\alpha + 0,25 \sin 4\alpha) - a_0 \sin^2 2\alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

Полученные для плоскопластической деформации результаты на основании постулата изотропии Ильюшина [1] легко распространяются на случай обобщенного плоского напряженного состояния, в частности, на кручение с растяжением тонкостенной трубки. Для этого достаточно в выше записанных формулах заменить компоненту вектора нагружения  $S_1$  на  $S_2 = \sqrt{2/3} \sigma_\tau$  и скорость плоскопластической деформации  $\dot{\Gamma}_1^{(p)}$  на  $\dot{\Gamma}_2^{(p)} = (\sqrt{3}/2) \dot{\epsilon}_z$ . Далее процесс нагружения и пластического деформирования будем рассматривать в двух координатных плоскостях  $S_1S_3$  и  $S_2S_3$  пятимерного пространства Ильюшина.

**Пример функции упрочнения.** Для иллюстрации полученных выше результатов рассмотрим частный случай функции упрочнения

$$F(\omega) = \delta(\omega) + a_2 \cos 2\omega + a_4 \delta(\pi/2 - \omega). \quad (25)$$

Она получена из  $F(\omega)$  (6) при  $a_0 = 0$  и  $a_3 = 1$ . Так как функция упрочнения  $F(\omega)$  определяется с точностью до аддитивной постоянной, которая может быть включена в функцию пластичности  $\Pi_0 \left[ \epsilon_1^{(p)} \right]$ , то равенство  $a_3 = 1$  является несущественным, т.е. таким, что не влияет на результаты решения рассматриваемой задачи. Коэффициент  $a_4$  при заданной траектории нагружения  $OAОВ$  (рис.1) не влияет на компоненты плоскопластической деформации, но является одним из основных при определении эффекта Баушингера.

Заметим, что частный вид функции  $F(\omega)$  (25) при дополнительном условии  $a_4 = 0$  приводит ко второму варианту упрочнения в теории пластичности Кадашевича-Новожилова [2]. На основании формул (8) и (9) для компонент скорости пластической деформации и границ множества направлений скольжений на первом этапе нагружения, как частный случай, получаем:

$$\dot{\Gamma}_{1,2}^{(p)} = 0, \quad 2\Pi_0 \dot{\Gamma}_3^{(p)} = \frac{\alpha + 0,25 \sin 4\alpha}{1 + a_2(\alpha + 0,25 \sin 4\alpha)}, \quad (26)$$

$$\frac{1 + a_2(\alpha - 0,25 \sin 4\alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{\sigma_1}{\sigma_s}, \quad \alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \alpha(t) \quad t \in [t_0, t_A]. \quad (27)$$

Аналогично, для второго этапа нагружения с учетом равенств (21)–(24) можем записать:

$$2\Pi_0 \dot{\Gamma}_k^{(p)} = B_{11}^0(\alpha) \cos^2 2\kappa + B_{12}^0 \sin^2 2\kappa, \quad 2\Pi_0 \dot{\Gamma}_3^{(p)} = [B_{11}^0(\alpha) - B_{12}^0(\alpha)] \sin 4\kappa; \quad (28)$$

$$\kappa = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{a_2 m(\alpha_A)}{n(\alpha) - a_2 \sin 2\alpha}, \quad \frac{\sigma_t}{\sigma_s} = -a_2 m(\alpha_A) \operatorname{ctg} 2\kappa \quad (29)$$

где

$$B_{11}^0(\alpha) = \frac{\alpha + 0,25 \sin 4\alpha}{1 + a_2(\alpha + 0,25 \sin 4\alpha)}, \quad B_{12}^0 = \frac{\alpha - 0,25 \sin 4\alpha}{1 + a_2(\alpha - 0,25 \sin 4\alpha)},$$

$$n(\alpha) = \frac{1 + a_2(\alpha + 0,25 \sin 4\alpha)}{\cos 2\alpha}, \quad m(\alpha_A) = \frac{\alpha_A - 0,25 \sin 4\alpha_A}{\cos 2\alpha_A}. \quad (30)$$

Алгоритм построения на основании формул (28) – (30) зависимостей  $\dot{\Gamma}_{1,2}^{(p)}, \dot{\Gamma}_3^{(p)} \sim \sigma_t / \sigma_s$  при  $F(\omega)$  (25) аналогичен алгоритму, изложенному выше для более общей функции упрочнения  $F(\omega)$  (6).

Анализ полученных выше результатов (26)–(30) позволяет сделать следующий вывод. В связи с наличием деформационной анизотропии первые скольжения на втором этапе нагружения происходят при  $\tau_{max}^{(2)} / \tau_s < 1$  по площадкам, несколько отклоненным от площадок действия  $\tau_{max}^{(2)}$  (рис.2) в сторону уменьшения сопротивления сдвигу  $R_m(\theta, t_A)$ . В целом вектор скольжений  $\theta \in [-\alpha(t), \alpha_2(t)]$  ( $t^\circ \leq t \leq t_B$ ) не симметричен относительно направления действия максимального касательного напряжения. Это в конечном итоге приводит к раскручиванию при растяжении предварительно закрученного за пределы упругости тонкостенного трубчатого образца. Отсюда следует, что эффект Фейгена есть прямое следствие деформационной анизотропии материала.

На рис. 3 приведены графики зависимости  $h \sim p$  ( $h = |\dot{\Gamma}_3^{(p)} / \dot{\Gamma}_2^{(p)}| \cdot 100 \%$ ,  $p = \sigma_t / \sigma_s$ ) на втором этапе нагружения.

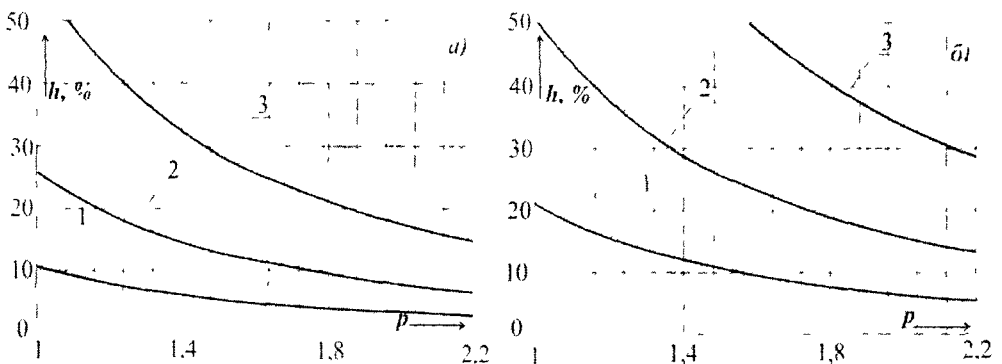


Рис. 3. Графики изменения относительных скоростей раскручивания при растяжении предварительно закрученной за пределы упругости тонкостенной трубки

Линии 1; 2; 3 на рис. 3,а построены для  $a_2 = 1$  и величин отношений  $\sigma_t / \sigma_s = 1,21; 1,44; 1,85$ . Графики 1; 2; 3 на рис. 3, б соответствуют значениям  $a_2 = 2$  и  $\sigma_t / \sigma_s = 1,26; 1,57; 2,10$ . Из приведенных графиков следует, что отнесен-

ная к  $\dot{\Gamma}_2^{(p)}$  скорость раскручивания  $|\dot{\Gamma}_3^{(p)}|$  образца значительно увеличивается с ростом предварительной деформации закручивания  $\gamma_1^{(p)}(10)$  на первом этапе нагружения. Она также увеличивается с увеличением параметра  $a_2$  функции упрочнения  $F(\omega)$ , который характеризует степень нарастания деформационной анизотропии материала. Возможности варианта теории скольжения [4] значительно увеличиваются при использовании более общих функций упрочнения, в частности  $F(\omega)$  (6).

Отметим, что с несколько иных позиций, с использованием упрощенной модели скольжения Леонова-Рычкова, эффект Фейгена изучался также в работе [3].

**Построение функции пластичности.** Рассмотрим теперь задачу построения функции пластичности  $\Pi = \Pi_0[\varepsilon_1^{(p)}]$  при  $\varepsilon_1^{(p)} \geq 0$  для материалов, обладающих универсальной зависимостью  $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_1)$  при простом нагружении. Указанная функция  $\Pi_0[\varepsilon_1^{(p)}]$  входит во все приведенные выше формулы для компонент вектора скорости пластической деформации. Представим  $d\varepsilon_1 = d\varepsilon_1^{(e)} + d\varepsilon_1^{(p)}$ , где

$$d\varepsilon_1 = \frac{d\sigma_1}{E_1}, \quad d\varepsilon_1^{(e)} = \frac{d\sigma_1}{E}, \quad d\varepsilon_1^{(p)} = d\varepsilon_1 - d\varepsilon_1^{(e)} = \left( \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_1 \quad (31)$$

— полная, упругая и пластическая составляющие приращения интенсивности деформаций  $\varepsilon_1$ ;  $E = 3G$ ,  $E_1 = d\sigma_1 / d\varepsilon_1$  — упругий и касательный модули диаграммы  $\sigma_1 \sim \varepsilon_1$ . С другой стороны, учитывая, что при пропорциональном нагружении

$$dS \equiv dt = \sqrt{2/3} d\sigma_1, \quad d\Gamma^{(p)} \equiv \dot{\Gamma}^{(p)} dt = \sqrt{2/3} \Gamma^{(p)} d\sigma_1,$$

на основании формул (9) можем записать

$$d\varepsilon_1^{(p)} = 2B_{11}(\alpha) d\sigma_1 / 3\Pi_0[\varepsilon_1^{(p)}], \quad (32)$$

$$B_{11}(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{r(\alpha)}{a_3(a_3 + 2a_0\alpha) + a_2r(\alpha)}. \quad (33)$$

Сравнивая формулы (31) и (32), для функции пластичности получим

$$\Pi_0[\varepsilon_1^{(p)}] = \frac{2}{3} \frac{EE_1}{E - E_1} B_{11}[\sigma_1 / \sigma_s], \quad (34)$$

где  $B_{11}[\sigma_1 / \sigma_s] \equiv B_{11}(q[\sigma_1 / \sigma_s])$  и  $\alpha = q[\sigma_1 / \sigma_s]$  — решение уравнения (8) относительно  $\alpha$ . В частности, удовлетворительную аппроксимацию функции пластичности, построенную для стали 45 на основании равенств (8), (33), (34), можно получить [8] на основании формулы

$$\Pi[\varepsilon_1^{(p)}] = d_1 + d_2 \cdot (\varepsilon_1^{(p)})^{-r}, \quad (d_1 = -0.56 \text{ МПа}, \quad d_2 = 3.15 \text{ МПа}, \quad r = 0.29). \quad (35)$$

Ее график показан на рис.4. Сингулярность функции  $\Pi_0[\varepsilon_1^{(p)}]$  в нуле обеспечивает непрерывность касательного модуля  $E_1 = d\sigma_1 / d\varepsilon_1$  на границе текучести.

**Заключение.** Эффект Фейгена при малых упругопластических деформациях есть прямое следствие деформационной анизотропии материалов. Для его аналити-

ческого описания может быть использована теория пластичности, основанная на концепции скольжения.

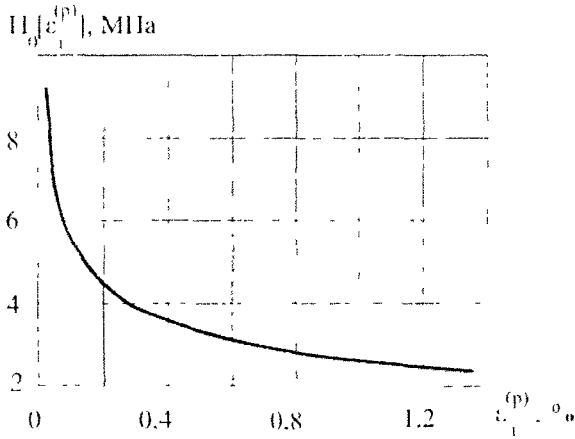


Рис. 4. Функция пластичности  $\Pi_0[\varepsilon_1^{(p)}]$  для стали 45

### Библиографические ссылки

1. **Ильюшин А.А.** Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин – М., – 1963. – 271 с
2. **Кадашевич Ю.И.** О предельных вариантах теории пластичности, учитывающей начальные микронапряжения / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов // Прикл. механика и математика. – 1980 №3. – С. 93–99
3. **Комарцов Н.М.** Кинематика пластической деформации при переходе от кручения к растяжению трубчатых образцов стали 45 / Н.М. Комарцов, Т.А. Лужанская, Б.А. Рычков // XVII Зимняя школа по механике сплошных сред: Механика сплошных сред как основа современных технологий: тезисы докладов. – Пермь – Екатеринбург. – 2009. – С. 210.
4. **Швайко Н.Ю.** К теории пластичности, основанной на концепции скольжения / Н.Ю. Швайко // Прикл. механика. – 1976. – Т. XII, №11. – С. 12–24.
5. **Швайко М.Ю.** Про коректність теорій пластичності, які враховують взаємний вплив механізмів непружного деформування / М.Ю. Швайко // Фіз.-хім. механіка матеріалів – 2001. – №2. – С. 54-62.
6. **Швайко М.Ю.** Про стійкість процесу деформування і диференціальну потенціальність визначальних рівнянь теорії пластичності / М.Ю. Швайко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – №3. – С. 42-55.
7. **Швайко М.Ю.** Теорія ковзання та її застосування / М.Ю. Швайко // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002 – №4. – С. 107-120.
8. **Швайко М.Ю.** Аналітичне та експериментальне дослідження деформації сталі-45 при складному навантаженні / М.Ю. Швайко, М.М. Фількевич // Мат. методи та фіз.-мех. Поля. – 2006. – 49, №1.
9. **Batdorf S.B. and Budiansky B.A.** A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip / S.B. Batdorf, B.A. Budiansky // NACA Technical Note. 17, April, 1949.
10. **Feigen M.** Inelastic behavior under combine tension and torsion / M. Feigen // Proceedings of the second U.S. National Congress of Applied Mechanics, P. 469–476 (1954).

Надійшла до редколеги 8 02 10

УДК 539.3

А.И. Александров

*Запорожский национальный университет*

## МЕТОД НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ

Предложен метод приближенного решения задачи о контактном взаимодействии линейно-упругих тел при наличии кулонова трения между ними и неизвестной поверхности контакта. Метод заключается в использовании нелинейных интегральных уравнений для моделирования контактного взаимодействия тел, регуляризации этих уравнений, дискретизации регуляризованных уравнений и построении сходящихся итерационных процессов для решения дискретного аналога регуляризованных уравнений. Приведены результаты численного решения задачи о вдавливании упругого шара в упругое полупространство.

*Ключевые слова* линейно-упругие тела, контактное взаимодействие, кулоново трение, нелинейные интегральные уравнения

Запропоновано метод наближеного розв'язування задачі про контактну взаємодію лінійно-пружних тіл за наявності кулонового тертя між ними та невідомій поверхні контакту. Метод полягає у використанні нелінійних інтегральних рівнянь для моделювання контактної взаємодії тіл, регуляризації цих рівнянь, дискретизації регуляризованих рівнянь та побудові збіжних ітераційних процесів для розв'язування дискретного аналогу регуляризованих рівнянь. Наведено результати чисельного розв'язку задачі про вдавлювання пружної кулі в пружний напівпростір.

*Ключові слова* лінійно-пружні тіла, контактна взаємодія, кулонове тертя, нелінійні інтегральні рівняння

The method of the approximate solution of the contact problem, connected with the interaction between the linearly elastic bodies, where possible the Coulomb friction between them and unknown contact surface, has been proposed. The method consist of the use of nonlinear integral equations for the simulation of the contact interaction between bodies, the regularization of this equations, the discretization of the regularized equations and the construction of the convergent iteration processes for the solution of a discrete analog of the regularized equations. The numerical results for a problem on indentation of the elastic ball in the elastic half-space is demonstrated.

*Keywords* linearly elastic bodies, contact interaction, Coulomb friction, nonlinear integral equations

**Введение.** Использование нелинейных интегральных уравнений для моделирования контактного взаимодействия упругих тел позволяет избавиться от основной трудности реализации вариационных методов при решении контактных задач, заключающейся в необходимости рассматривать задачи нелинейного программирования. Большинство известных попыток использования таких уравнений [1–5] ограничивается рассмотрением контактных задач без учета трения либо задач, в которых учет трения осуществляется при упрощенных граничных условиях, соответствующих полному проскальзыванию тел [4; 5]. Нелинейные интегральные уравнения, использованные в [6; 7], позволяют учитывать трение Кулона в общем виде и могут быть основой для создания эффективного численного метода решения соответствующих контактных задач. Цель данной статьи заключается в разработке такого метода.

**Операторное уравнение контактной задачи.** Рассмотрим трехмерную статическую контактную задачу о взаимодействии двух линейно-упругих тел с учетом



трения Кулона при неизвестной поверхности контакта и неизвестной границе раздела зон проскальзывания и сцепления на этой поверхности. При определенных допущениях [6] эта задача сводится к решению операторного уравнения [6; 7]

$$p = G_\mu(p - E(A(p) - f)), \quad (1)$$

где  $p = (p_1, p_2, p_3)$  есть неизвестная вектор-функция, отыскиваемая в гильбертовом пространстве  $L_2^3(\Omega)$  [7] вектор-функций, каждая из трех компонент которых является элементом пространства  $L_2(\Omega)$ ;  $f = (f_1, f_2, f_3)$  – заданный элемент  $L_2^3(\Omega)$ , который характеризует конфигурацию взаимодействующих тел и условия их нагружения;  $\mu$  – коэффициент трения;  $E$  – произвольная положительная константа, значение которой не влияет на множество решений уравнения (1) [7];  $\Omega$  – заданная ограниченная плоская область, содержащая в себе неизвестную заранее зону контакта тел. Входящий в правую часть уравнения (1) линейный ограниченный оператор влияния  $A: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  определен соотношениями:

$$\begin{cases} \tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3), \quad p = (p_1, p_2, p_3) \in L_2^3(\Omega); \\ \tilde{p} = A(p): \quad \tilde{p}_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij}(p_j) \quad \forall i = \overline{1,3}; \end{cases} \quad (2)$$

где  $A_{ij}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$  есть заданные линейные ограниченные операторы. Непрерывный нелинейный оператор  $G_\mu: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ , входящий в правую часть уравнения (1), задан равенствами

$$\begin{cases} y = (y_1, y_2, y_3), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in L_2^3(\Omega); \\ y = G_\mu(x); \\ y_1(s) = h(x_1(s)), \\ y_2(s) = q(x_2(s), x_3(s), \mu \cdot h(x_1(s))), \\ y_3(s) = q(x_3(s), x_2(s), \mu \cdot h(x_1(s))). \quad s \in \Omega; \end{cases}$$

в которых  $\mu$  есть коэффициент трения, а функции  $h$  и  $q$  имеют вид

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0; \\ 0, & \text{если } x < 0; \end{cases}$$

$$q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z; \\ x \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{если } \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases}$$

В [8] показано, что подобная рассмотренной выше контактная задача в квазистатической постановке при дискретном характере процесса нагружения сводится к решению нескольких уравнений вида (1)

$$p^{(i)} = G_{\mu} \left( p^{(i)} - E \left( A \left( p^{(i)} \right) - f^{(i)} \right) \right), \quad i = \overline{1, l}; \quad (3)$$

соответствующих различным шагам нагружения. Каждое из уравнений (3) характеризуется своим элементом  $f = f^{(i)} \in L_2^3(\Omega)$ , который может быть получен после отыскания решений  $p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(i-1)} \in L_2^3(\Omega)$  предшествующих ему уравнений. Решением квазистатической задачи (3) естественно считать элемент  $p^{(i)} \in L_2^3(\Omega)$ , удовлетворяющий последнему из уравнений (3).

Если входящие в соотношения (2) линейные ограниченные операторы  $A_{ij} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$  допускают интегральное представление, то операторное уравнение (1) и каждое из операторных уравнений (3) представляют собой системы трех нелинейных интегральных уравнений относительно трех неизвестных функций, описывающих распределение по области  $\Omega$  передаваемой от одного тела к другому контактной нагрузки.

**Регуляризирующее уравнение.** Предположим, что линейный оператор влияния  $A : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  является вполне непрерывным [9] и имеет непустой союзный спектр  $US(A)$  [10]. Первое предположение приводит к тому, что задача отыскания неизвестного элемента  $p \in L_2^3(\Omega)$  по известному элементу  $f \in L_2^3(\Omega)$  из решения уравнения (1) является некорректной. Второе предположение вместе с условием  $\mu \in US(A)$  гарантирует единственность в  $L_2^3(\Omega)$  решения  $p^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*)$  уравнения (1), если это уравнение в этом пространстве имеет хотя бы одно решение [10].

Если  $\mu \in US(A)$  и для некоторого фиксированного элемента  $f \in L_2^3(\Omega)$  уравнение (1) имеет решение  $p^* \in L_2^3(\Omega)$ , то в случае, когда известна функция  $u(s) \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющая условию

$$p_1^*(s) \leq u(s) \text{ почти всюду на } \Omega.$$

можно для уравнения (1) предложить регуляризирующий аналог [11]

$$p = G_{\mu}^u \left( p - E \left( \varepsilon \cdot p + A(p) - f \right) \right). \quad (4)$$

В уравнении (4)  $\varepsilon > 0$  есть параметр регуляризации,  $E$  - произвольное положительное число и непрерывный нелинейный оператор  $G_{\mu}^u : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  задан равенствами:

$$\begin{cases} v = (v_1, v_2, v_3), \quad \tilde{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3) \in L_2^3(\Omega); \\ \tilde{v} = G_{\mu}^u(v); \\ \tilde{v}_1(s) = h_{u(s)}(v_1(s)), \\ \tilde{v}_2(s) = q(v_2(s), v_3(s), \mu \cdot h_{u(s)}(v_1(s))), \\ \tilde{v}_3(s) = q(v_3(s), v_2(s), \mu \cdot h_{u(s)}(v_1(s))), \quad s \in \Omega; \end{cases}$$

в которых  $\mu$  есть коэффициент трения, а функция  $h_\sigma$  имеет вид

$$h_\sigma(x) = \begin{cases} h(x), & \text{если } x \leq \sigma; \\ \sigma, & \text{если } x > \sigma. \end{cases}$$

В [11] доказано, что при любом положительном значении  $\varepsilon$  решение  $p_\varepsilon \in L_2^3(\Omega)$  уравнении (4) существует, является единственным и слабо сходится к  $p^*$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для построения устойчивого численного алгоритма приближенного решения уравнения (4) запишем это уравнение в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} p_I = G^u(p_I, p_T), \\ p_T = G^\mu(p_T, p_I), \end{cases} \quad (5)$$

где  $p_I = (p_2, p_3) \in L_2^2(\Omega)$  [7] и отображения  $G^u : L_2(\Omega) \times L_2^2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ ,  $G^\mu : L_2^2(\Omega) \times L_2(\Omega) \rightarrow L_2^2(\Omega)$  заданы соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_I, v_I \in L_2(\Omega) ; \quad p_T = (p_2, p_3), \quad v_T = (v_2, v_3) \in L_2^2(\Omega); \\ v_I = G^u(p_I, p_T) ; \quad v_T = G^\mu(p_T, p_I); \\ v_1(s) = h_{u(s)} \left( p_1(s) - E \left( \varepsilon p_1(s) + \sum_{j=1}^3 A_{1j}(p_j)_s - f_1(s) \right) \right); \\ v_2(s) = q \left( p_2(s) - E \left( \varepsilon p_2(s) + \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_j)_s - f_2(s) \right), \right. \\ \left. p_3(s) - E \left( \varepsilon p_3(s) + \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_j)_s - f_3(s) \right), \quad \mu h(p_1(s)) \right); \\ v_3(s) = q \left( p_3(s) - E \left( \varepsilon p_3(s) + \sum_{j=1}^3 A_{3j}(p_j)_s - f_3(s) \right), \right. \\ \left. p_2(s) - E \left( \varepsilon p_2(s) + \sum_{j=1}^3 A_{2j}(p_j)_s - f_2(s) \right), \quad \mu h(p_1(s)) \right); \quad s \in \Omega. \end{array} \right.$$

**Дискретизация регуляризирующего уравнения.** Обозначим символами  $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_3$  нормы элементов гильбертовых пространств  $L_2(\Omega), L_2^2(\Omega), L_2^3(\Omega)$  [7] соответственно, а символами  $\|A\|_{*1}, \|A\|_{*2}, \|A\|_{*3}$  – нормы линейных ограниченных операторов, действующих в пространствах

$L_2(\Omega)$ ,  $L_2^2(\Omega)$ ,  $L_2^3(\Omega)$  соответственно. Символ  $(x, y)$  будем использовать для обозначения скалярного произведения элементов  $x, y \in L_2^3(\Omega)$ .

Для последовательности  $\{A_n\}$  линейных ограниченных операторов, действующих из  $L_2^3(\Omega)$  в  $L_2^3(\Omega)$ , последовательности  $\{f^{(n)}\}$  элементов  $f^{(n)} = (f_{1n}, f_{2n}, f_{3n})$  пространства  $L_2^3(\Omega)$  и последовательности  $\{u_n\}$  почти всюду на  $\Omega$  неотрицательных функций пространства  $L_2(\Omega)$  рассмотрим соответствующую последовательность уравнений:

$$p = G_\mu^{u_n} \left( p - E \left( \varepsilon \cdot p + A_n(p) - f^{(n)} \right) \right), \quad n \in N; \quad (6)$$

получающихся из (4) заменой  $A$  на  $A_n$ ,  $u$  на  $u_n$ ,  $f$  на  $f^{(n)}$ . Справедлива следующая теорема о близости решений уравнения (4) и уравнений (6).

**Теорема.** Пусть  $\mu \in US(A)$  и линейный оператор  $A: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  является вполне непрерывным, удовлетворяя при этом условиям самосопряженности и неотрицательности:

$$\begin{cases} (A(x), y) = (x, A(y)) \quad \forall x, y \in L_2^3(\Omega); \\ (A(x), x) \geq 0 \quad \forall x \in L_2^3(\Omega). \end{cases} \quad (7)$$

Пусть  $\varepsilon$  есть произвольное фиксированное положительное число и последовательности  $\{A_n\}$  линейных вполне непрерывных операторов, действующих из  $L_2^3(\Omega)$  в  $L_2^3(\Omega)$ ,  $\{f^{(n)}\}$  элементов  $L_2^3(\Omega)$ , а также  $\{u_n\}$  почти всюду на  $\Omega$  неотрицательных функций пространства  $L_2(\Omega)$  удовлетворяют условиям:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\|_3 = 0. \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f^{(n)}\|_3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_1 = 0 \quad (9)$$

Тогда каждое из уравнений (6) имеет хотя бы одно решение в  $L_2^3(\Omega)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_\varepsilon - p_n\|_3 = 0$ , где  $p_\varepsilon$  есть решение уравнения (4) в пространстве  $L_2^3(\Omega)$  и элемент  $p_n \in L_2^3(\Omega)$  представляет собой любое из решений уравнения (6), полученное при данном натуральном значении  $n$ .

**Доказательство.** Полагая в уравнении (6)  $E = 1/\varepsilon$ , запишем это уравнение в эквивалентной форме

$$p = G_\mu^{u_n} \left( -\frac{1}{\varepsilon} \left( A_n(p) - f^{(n)} \right) \right) \quad (10)$$

Поскольку оператор  $F_\varepsilon^n: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ , для которого элемент  $F_\varepsilon^n(p)$  совпадает с правой частью уравнения (10), является вполне непрерывным на  $L_2^3(\Omega)$  и преоб-

разует ограниченное замкнутое выпуклое множество

$$D_n = \left\{ (p_1, p_2, p_3) \in L_2^3(\Omega) \mid 0 \leq p_1(s) \leq u_n(s), \sqrt{p_2^2(s) + p_3^2(s)} \leq \mu \cdot p_1(s) \text{ почти}$$

всюду на  $\Omega$  \} в  $D_n$ , то, согласно второму принципу Шаудера [12], существует элемент  $p_n = (p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}) \in D_n$ , который удовлетворяет уравнению (10) и, следовательно, уравнению (6). Таким образом, каждое из уравнений (6) разрешимо в  $L_2^3(\Omega)$  и все члены последовательности  $\{p_n\}$  решений уравнений (6) содержатся в некотором шаре пространства  $L_2^3(\Omega)$ .

Покажем, что из любой подпоследовательности  $\{p_{n_k}\}$  последовательности  $\{p_n\}$  можно извлечь подпоследовательность  $\{p_{n_{k_j}}\}$ , которая сильно в  $L_2^3(\Omega)$  сходится к  $p_\varepsilon$ . Это будет означать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_\varepsilon - p_n\|_3 = 0$ .

Пусть  $\{p_{n_k}\}$  есть произвольно выбранная подпоследовательность последовательности  $\{p_n\}$ . Так как все члены последовательности  $\{p_{n_k}\}$  лежат в ограниченном шаре пространства  $L_2^3(\Omega)$ , то существует подпоследовательность  $\{p_{n_{k_j}}\}$ , слабо сходящаяся к некоторому элементу  $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$ . Покажем, что  $\{p_{n_{k_j}}\}$  сильно сходится к  $\tilde{p}$  и  $\tilde{p} = p_\varepsilon$ .

Используя условия (7), выберем входящее в уравнения (5) число  $E$  так, чтобы выполнялись неравенства [7]:

$$\begin{aligned} \|I_1 - E(\varepsilon \cdot I_1 + A_{11})\|_{*1} &< 1, \\ \|I_2 - E(\varepsilon \cdot I_2 + A^T)\|_{*2} &< 1, \end{aligned}$$

в которых  $I_1, I_2$  есть тождественные операторы, действующие в пространствах  $L_2(\Omega)$  и  $L_2^2(\Omega)$  соответственно, и линейный оператор  $A^T : L_2^2(\Omega) \rightarrow L_2^2(\Omega)$  задан соотношениями:

$$\begin{cases} u = (u_2, u_3), v = (v_2, v_3) \in L_2^2(\Omega); \\ v = A^T(u); v_i = \sum_{k=2}^3 A_{ik}(u_k) \forall i = \overline{2,3}. \end{cases}$$

Тогда для сжимающего оператора  $F_1 : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ , задаваемого соотношениями

$$\begin{cases} F_1(x) = G^u(x, \tilde{p}_T) \quad \forall x \in L_2(\Omega); \\ \tilde{p}_T = (\tilde{p}_2, \tilde{p}_3), \end{cases}$$

будет выполнено равенство  $\lim_{n_{k_j} \rightarrow \infty} \left\| p_{1n_{k_j}} - F_1 \left( p_{1n_{k_j}} \right) \right\|_1 = 0$ , означающее (см. лемму на стр. 19 в [13]), что последовательность  $\left\{ p_{1n_{k_j}} \right\}$  сильно в  $L_2(\Omega)$  сходится к неподвижной точке  $x^* \in L_2(\Omega)$  оператора  $F_1$ . Но так как  $\left\{ p_{1n_{k_j}} \right\}$  слабо сходится в  $L_2(\Omega)$  к  $\tilde{p}_1$ , то  $\tilde{p}_1 = x^*$ ,  $\lim_{n_{k_j} \rightarrow \infty} \left\| p_{1n_{k_j}} - \tilde{p}_1 \right\|_1 = 0$  и справедливо равенство  $\tilde{p}_1 = F_1(\tilde{p}_1)$ , которое можно записать в виде:

$$\tilde{p}_1 = G^u(\tilde{p}_1, \tilde{p}_I). \tag{11}$$

Очевидно также, что для сжимающего оператора  $F_2: L_2^2(\Omega) \rightarrow L_2^2(\Omega)$ , задаваемого соотношением

$$F_2(u_I) = G^u(u_T, \tilde{p}_1) \quad \forall u_I = (u_2, u_3) \in L_2^2(\Omega),$$

будет выполнено равенство  $\lim_{n_{k_j} \rightarrow \infty} \left\| p_{I n_{k_j}} - F_2 \left( p_{I n_{k_j}} \right) \right\|_2 = 0$ , в котором

$$p_{I n_{k_j}} = \left( p_{2n_{k_j}}, p_{3n_{k_j}} \right). \text{ Это равенство означает, что последовательность } \left\{ p_{I n_{k_j}} \right\}$$

сильно в  $L_2^2(\Omega)$  сходится к неподвижной точке  $x_I^* \in L_2^2(\Omega)$  оператора  $F_2$ . Но так как  $\left\{ p_{I n_{k_j}} \right\}$  слабо сходится в  $L_2^2(\Omega)$  к  $\tilde{p}_I = (\tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$ , то  $\tilde{p}_I = x_I^*$ ,

$$\lim_{n_{k_j} \rightarrow \infty} \left\| p_{I n_{k_j}} - \tilde{p}_I \right\|_2 = 0 \text{ и справедливо равенство } \tilde{p}_I = F_2(\tilde{p}_I), \text{ которое можно за-}$$

писать в виде

$$\tilde{p}_I = G^u(\tilde{p}_T, \tilde{p}_1). \tag{12}$$

Равенства (11) и (12) означают, что элемент  $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_I)$  удовлетворяет системе (5) и, следовательно, уравнению (4). Но так как уравнение (4) при выполнении условий доказываемой теоремы имеет единственное решение в  $L_2^3(\Omega)$  [11], то  $\tilde{p} = p_c$  и последовательность  $\left\{ p_{n_{k_j}} \right\}$  сильно в  $L_2^3(\Omega)$  сходится к  $p_c$ . Теорема доказана.

Построим такие, удовлетворяющие условиям (8)–(9) аппроксимирующие последовательности  $\{A_n\}$ ,  $\{f^{(n)}\}$  и  $\{u_n\}$ , для которых операторное уравнение (6) можно решить численно с любой степенью точности. Для этого зададим область  $\Omega$  в виде открытого квадрата площади  $d$ , ограниченного отрезками прямых, параллельных координатным осям некоторой декартовой системы координат, введенной на общей для взаимодействующих тел касательной плоскости. Для каждого натурального числа  $n$  разобьем  $\Omega$  на  $n^2$  непересекающихся квадратных областей  $\omega_1^n, \omega_2^n, \dots, \omega_{n^2}^n$  равной площади, ориентированных подобно квадрату  $\Omega$ . Полагая,

что в выражениях (2) линейные ограниченные операторы  $A_{ij} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$  допускают интегральное представление

$$A_{ij}(x)_t = \int_{\Omega} K_{ij}(t,s)x(s)ds, \quad t \in \Omega; \quad i, j = \overline{1,3}$$

и являются вполне непрерывными. зададим линейный ограниченный оператор  $A_n : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  в виде

$$\begin{cases} u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in L_2^3(\Omega); \\ v = A_n(u); v_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij}^{(n)}(u_j), \quad i = \overline{1,3}; \\ A_{ij}^{(n)}(u_j)_t = \int_{\Omega} K_{ij}^{(n)}(t,s)u_j(s)ds, \quad t \in \Omega; \quad i, j = \overline{1,3}; \end{cases} \quad (13)$$

где функции  $K_{ij}^{(n)}(t,s)$  определяются из соотношений

$$\begin{cases} K_{ij}^{(n)}(t,s) = \frac{1}{mes(\omega_l^n) \cdot mes(\omega_k^n)} \int_{\omega_l^n} \left( \int_{\omega_k^n} K_{ij}(t,s)ds \right) dt, \\ \text{если } t \in \omega_l^n, \quad s \in \omega_k^n; \quad k, l = \overline{1, n^2}; \quad (i, j = \overline{1,3}), \end{cases} \quad (14)$$

в которых символ  $mes(\omega_l^n)$  обозначает лебегову меру множества  $\omega_l^n$ . Элементы  $f^{(n)}$  и  $u_n$  зададим в виде

$$f^{(n)} = (P_n(f_1), P_n(f_2), P_n(f_3)), \quad u_n = P_n(u),$$

где оператор  $P_n : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$  определяется соотношением

$$P_n(x)_t = \frac{1}{mes(\omega_k^n)} \int_{\omega_k^n} x(s)ds, \quad \text{если } t \in \omega_k^n; \quad (k = \overline{1, n^2}).$$

Очевидно, что построенные аппроксимирующие последовательности  $\{A_n\}$ ,  $\{f^{(n)}\}$ ,  $\{u_n\}$  удовлетворяют условиям (8)-(9) и заданы так, что оператор  $F_n : L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$ , определенный правой частью уравнения (6), отображает конечномерное подпространство  $H_n = P_n(L_2(\Omega)) \times P_n(L_2(\Omega)) \times P_n(L_2(\Omega))$  пространства  $L_2^3(\Omega)$  в  $H_n$ . Следовательно, каждое решение  $p_n \in H_n$  уравнения (6) удовлетворяет следующей системе  $3k$  скалярных уравнений с  $3k$  неизвестными ( $k = n^2$ ):



$$\left\{ \begin{array}{l} x_{3i-2} = h_{\sigma_i} \left( x_{3i-2} - E \left( \sum_{j=1}^{3k} a_{3i-2, j} x_j - b_{3i-2} \right) \right); \\ x_{3i-1} = q \left( x_{3i-1} - E \left( \sum_{j=1}^{3k} a_{3i-1, j} x_j - b_{3i-1} \right) \right); \\ x_{3i} - E \left( \sum_{j=1}^{3k} a_{3i, j} x_j - b_{3i} \right) \cdot \mu \cdot x_{3i-2}; \\ x_{3i} = q \left( x_{3i} - E \left( \sum_{j=1}^{3k} a_{3i, j} x_j - b_{3i} \right) \right); \\ x_{3i-1} - E \left( \sum_{j=1}^{3k} a_{3i-1, j} x_j - b_{3i-1} \right) \cdot \mu \cdot x_{3i-2} \end{array} \right. \quad (15), \quad i = \overline{1, k}.$$

Связь между неизвестными  $x_1, x_2, \dots, x_{3k}$  данной системы и вектор-функцией  $p_n = (p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}) \in H_n$ , удовлетворяющей уравнению (6), такова, что  $p_{1n}(s) = x_{3i-2}$ ,  $p_{2n}(s) = x_{3i-1}$ ,  $p_{3n}(s) = x_{3i}$ , при  $s \in \omega_i^n$  (для всех  $i = \overline{1, k}$ ). Входящие в систему (15) параметры  $a_{ij}, b_i, \sigma_i$  определяются из очевидных соотношений, полученных с учетом (13) и (14):

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{3i-2} = \frac{1}{\text{mes}(\omega_i^n)} \int_{\omega_i^n} f_1(s) ds, \quad b_{3i-1} = \frac{1}{\text{mes}(\omega_i^n)} \int_{\omega_i^n} f_2(s) ds, \\ b_{3i} = \frac{1}{\text{mes}(\omega_i^n)} \int_{\omega_i^n} f_3(s) ds, \quad \sigma_i = \frac{1}{\text{mes}(\omega_i^n)} \int_{\omega_i^n} u(s) ds, \quad i = \overline{1, k}, \\ a_{3i-g, 3j-l} = \frac{1}{\text{mes}(\omega_i^n)} \int_{\omega_i^n} \left( \int_{\omega_j^n} K_{3-g, 3-l}(t, s) ds \right) dt + \varepsilon \delta_{3i-g, 3j-l}, \\ i, j = \overline{1, k}, \quad g, l = \overline{0, 2} \end{array} \right. \quad (16)$$

В этих соотношениях  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$  и  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$ .

Как следует из теоремы Брауэра [12], система уравнений (15) всегда совместна. Это означает, что одно из решений уравнения (6) в пространстве  $L_2^3(\Omega)$  (при использовании аппроксимирующих последовательностей  $\{A_n\}$ ,  $\{f^{(n)}\}$ ,  $\{u_n\}$  рассмотренного типа) всегда может быть найдено из решения системы уравнений (15).

Отметим, что для случая аппроксимации взаимодействующих тел упругими полупространствами [7] при построении аппроксимирующей последовательности  $\{A_n\}$  вида (13) можно вместо формул (14) использовать более простые соотношения:

$$K_{gl}^{(n)}(t,s) = \begin{cases} K_{gl}(s_i^n, s_j^n) & \text{при } t \in \omega_i^n, s \in \omega_j^n, i \neq j; \\ \frac{1}{\text{mes}(\omega_i^n)} \int_{\omega_i^n} K_{gl}(s_i^n, s) ds & \text{при } t, s \in \omega_i^n, \end{cases} \quad (17)$$

$$i, j = \overline{1, k}, \quad g, l = \overline{1, 3}$$

В соотношениях (17) точка  $s_i^n$  есть центр квадрата  $\omega_i^n$ .

В [7] показано, что для последовательности  $\{A_n\}$  вида (13), (17) и для оператора влияния  $A: L_2^3(\Omega) \rightarrow L_2^3(\Omega)$  системы двух упругих полупространств выполнено условие (8). Это означает, что при решении задачи о контакте двух упругих полупространств в системе уравнений (15) коэффициенты  $a_{ij}$  можно вычислять без использования соотношений (16) следующим упрощенным способом

$$\begin{cases} a_{3l-1 \ 3l-1} = \varepsilon + \int_{\omega_i^n} K_{3-l \ 3-l}(s_i^n, s) ds \quad (\forall l = \overline{0, 2}), \\ a_{3l-2 \ 3l-1} = a_{3l-2 \ 3l} = a_{3l-1 \ 3l-2} = a_{3l-1 \ 3l} = a_{3l \ 3l-2} = a_{3l \ 3l-1} = 0 \quad \forall l = \overline{1, k}, \\ a_{3l-g \ 3j-l} = \text{mes}(\omega_j^n) \cdot K_{3-g \ 3-l}(s_i^n, s_j^n) \quad \forall l, j = \overline{1, k} \quad (l \neq j) \\ g, l = \overline{0, 2} \end{cases} \quad (18)$$

**Итерационный процесс для решения дискретного аналога уравнения.**

Приближенное решение операторного уравнения (1) и каждого из операторных уравнений системы (3) сводится к решению системы скалярных уравнений (15) при достаточно малом положительном  $\varepsilon$  и достаточно большом натуральном  $k$ . Эту систему можно записать в следующей эквивалентной форме

$$\begin{cases} x_{3l-2} = h_{\sigma_l} \left( x_{3l-2} - E_1 \left( \sum_{j=1}^{3k} a_{3l-2 \ j} x_j - b_{3l-2} \right) \right), \\ x_{3l-1} = q \left( x_{3l-1} - E_2 \left( \sum_{j=1}^{3k} a_{3l-1 \ j} x_j - b_{3l-1} \right) \right), \\ x_{3l} = E_3 \left( \sum_{j=1}^{3k} a_{3l \ j} x_j - b_{3l} \right), \quad \mu \cdot x_{3l-2}; \\ x_{3l} = q \left( x_{3l} - E_3 \left( \sum_{j=1}^{3k} a_{3l \ j} x_j - b_{3l} \right) \right), \\ x_{3l-1} = E_2 \left( \sum_{j=1}^{3k} a_{3l-1 \ j} x_j - b_{3l-1} \right), \quad \mu \cdot x_{3l-2}; \\ i = \overline{1, k}; \end{cases} \quad (19)$$

где  $k$  есть количество граничных элементов равной площади, на которые разбивается область  $\Omega$ , а  $E_1, E_2, E_3$  есть произвольные положительные константы. Если положить  $E_1 = 1/a_{3i-2, 3i-2}$ ,  $E_2 = 1/a_{3i-1, 3i-1}$ ,  $E_3 = 1/a_{3i, 3i}$  в (19), то для решения этой системы можно предложить итерационный процесс

$$\begin{cases} \left( x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{3k}^{(0)} \right) \in R^{3k}; \\ x_{3i-2}^{(m+1)} = h_{\sigma_i} \left( \gamma_i^{(m)} \right), \\ x_{3i-1}^{(m+1)} = q \left( \alpha_i^{(m)}, \beta_i^{(m)}, \mu \cdot x_{3i-2}^{(m)} \right), \\ x_{3i}^{(m+1)} = q \left( \beta_i^{(m)}, \alpha_i^{(m)}, \mu \cdot x_{3i-2}^{(m)} \right), \quad i = \overline{1, k}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (20)$$

где  $R^{3k}$  есть  $3k$ -мерное евклидово пространство и величины  $\gamma_i^{(m)}, \alpha_i^{(m)}, \beta_i^{(m)}$  определяются равенствами:

$$\begin{cases} \gamma_i^{(m)} = \frac{1}{a_{3i-2, 3i-2}} \left( - \sum_{j=1}^{3i-3} a_{3i-2, j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i-1}^{3k} a_{3i-2, j} x_j^{(m)} + b_{3i-2} \right), \\ \alpha_i^{(m)} = \frac{1}{a_{3i-1, 3i-1}} \left( - \sum_{j=1}^{3i-2} a_{3i-1, j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i}^{3k} a_{3i-1, j} x_j^{(m)} + b_{3i-1} \right), \\ \beta_i^{(m)} = \frac{1}{a_{3i, 3i}} \left( - \sum_{j=1}^{3i-1} a_{3i, j} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i+1}^{3k} a_{3i, j} x_j^{(m)} + b_{3i} \right) \end{cases} \quad (21)$$

Очевидно что итерационный процесс (20) – (21), который построен по аналогии с процессом Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений, может сходиться в пространстве  $R^{3k}$  лишь к такому элементу этого пространства, который является решением системы уравнений (19). Хотя обосновать сходимость итерационного процесса (20) – (21) весьма сложно, но при многократном его использовании для решения различных контактных задач [6; 8] не выявлено случаев, в которых бы не удалось получить приближенное решение задачи

**Численные результаты.** Предложенным методом было получено численное решение пространственной квазистатической контактной задачи о вдавливании упругого шара радиуса 0.3 м в упругое полупространство нормальной к поверхности полупространства силой  $P$ , медленно возрастающей от нуля до некоторого предельного значения. Модули упругости  $E_1, E_2$  и коэффициенты Пуассона  $\nu_1, \nu_2$  шара и полупространства таковы:  $E_1 = 3 \cdot 10^5$  МПа,  $E_2 = 10^5$  МПа,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,2$ . Коэффициент трения  $\mu = 0,12375$ . Значение безразмерного параметра  $\beta$ , определяемого согласно [14] формулой

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_1(1-2\nu_2)(1+\nu_2) - E_2(1-2\nu_1)(1+\nu_1)}{E_1(1-\nu_2)^2 + E_2(1-\nu_1)^2},$$

составляет для рассматриваемой контактной задачи 0,1875. Отношение  $\mu / \beta = 0,66$ .

Решение задачи получено с использованием декартовой системы координат  $xuz$ , начало которой расположено в точке начального касания тел, а ось  $z$  направлена внутрь шара ортогонально плоской поверхности полупространства. Процесс нагружения тел был осуществлен за десять шагов так, что величина  $\Delta_{z1}$  жесткого сближения тел в направлении оси  $z$  на  $i$ -ом шаге нагружения задавалась линейным соотношением

$$\Delta_{z1} = 0,000007 \cdot i,$$

где номер шага  $i$  изменялся от 0 до 10 (при отсутствии относительных жестких смещений тел в направлении осей  $x$  и  $y$ ).

Численные результаты получены с использованием поверхностной сетки, содержащей в себе  $25 \times 25 = 625$  квадратных граничных элементов одинаковой площади ( $k = 625$ ). Для вычисления элементов  $a_{ij}$  матрицы влияния использовались соотношения (18), в которых функции  $K_{ij}(s, t)$  задавались при помощи формул Буссинеска-Черутти [7], а значение  $\varepsilon$  определялось соотношением:

$$\varepsilon = 10^{-7} \int_{\omega_i^n} K_{11}(s_i^n, s) ds.$$

Все значения параметров  $\sigma_i$  приняты равными  $10^7$  МПа. Распределение контактной нагрузки по граничным элементам сетки для квазистатической задачи найдено при помощи итерационного процесса (20) – (21). С целью оценки погрешности, вызванной предположением о статичности рассматриваемой контактной задачи, было получено также численное решение соответствующей статической контактной задачи, для которой жесткое сближение  $\Delta_z$  тел в направлении оси  $z$  принято равным 0,00007 (что соответствует десятому шагу нагружения в квазистатической постановке).

Полученные на десятом шаге нагружения значения напряжений  $\tau_{zy}$ , действующих в точках поверхности шара, соприкасающихся с полупространством по оси  $y$ , сопоставлялись с результатами решения соответствующей осесимметричной контактной задачи, приведенными в работе [14] для случая  $\mu / \beta = 0,66$ . В табл. 1 показана зависимость величины  $\tau_{zy} / (\beta \cdot p_{max})$  от параметра  $y / a$  (первая строка таблицы соответствует решению [14], вторая – полученному численному решению квазистатической задачи на десятом шаге нагружения, третья – полученному численному решению соответствующей статической задачи). Здесь символ  $p_{max}$  обозначает максимальное значение нормального контактного давления, а символ  $a$  – радиус площадки контакта.

Таблица 1

Зависимость касательного напряжения от расстояния

$y / a$	0 000	0 095	0 190	0 285	0 380	0 475	0 570	0 665	0 760	0 855	0.950
1	0 00	-0 16	-0 27	-0 33	-0 40	-0 42	-0 45	-0 43	-0 37	-0 27	-0 10
2	0 00	-0 16	-0 25	-0 35	-0 41	-0 44	-0 46	0 41	-0 35	-0 27	-0 09
3	0 00	-0 11	-0 30	-0 53	-0 59	-0 58	-0 53	-0 46	-0 37	-0 27	-0 10

**Заключення.** Данніе, представленніе в таблиці, свідечать о хороше́м соответствіи полученных результатов численного решения квазистатической контактной задачи с ее приближенным аналитическим решением [14]. Эти данные свидетельствуют ещё и о том, что пренебрежение квазистатичностью рассмотренной контактной задачи приводит к заметному уменьшению радиуса зоны сцепления и к увеличению наибольшего значения  $\left| \tau_{xy} \right|$  примерно на 30 % по сравнению с квазистатическим решением.

### Бібліографічні посилання

1. **Галанов Б.А.** Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта / Б.А. Галаганов // ПММ. - 1985. - Т. 49, вып. 5. - С. 827 - 835.
2. **Галанов Б.А.** О приближенном решении некоторых задач упругого контакта двух тел / Б.А. Галаганов // Изв. АН СССР, МТТ. - 1981 - № 5. - С. 61-67
3. **Александров В.М.** Пространственная контактная задача для двухслойного упругого основания с заранее неизвестной областью контакта / В.М. Александров, И.И. Калкер, Д.А. Пожарский // Изв. РАН, МТТ. - 1999 - № 4. - С. 51 - 55.
4. **Чебаков М.И.** Трёхмерная контактная задача для слоя с учетом сил трения в области контакта / М.И. Чебаков // Изв. РАН, МТТ - 2002. № 6. - С. 59 - 68
5. **Александров В.М.** Трёхмерные контактные задачи при учете трения и нелинейной шероховатости / В.М. Александров, Д.А. Пожарский // ПММ. - 2004. - Т. 68, вып. 3. - С. 516 - 527.
6. **Александров А.И.** Решение задач контактного взаимодействия упругих тел с использованием нелинейных операторных уравнений / А.И. Александров - Д. 1989. 74 с. (Препринт / АН УССР, Институт технической механики; 89-2).
7. **Александров А.И.** Вопросы существования решений некоторых нелинейных интегральных уравнений / А.И. Александров - Д., - 1991. - 48 с.
8. **Александров А.И.** Решение задачи о контактном взаимодействии упругих тел с кулоновым трением / А.И. Александров, И.Б. Бокий // Вопросы механики деформирования и разрушения твердых тел. Д., - 1995. - С. 115 - 120.
9. **Колмогоров А.Н.** Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин - М., - 1981. - 544 с.
10. **Александров А.И.** О единственности решения задачи контактного взаимодействия упругих тел при наличии кулонова трения / А.И. Александров. // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. - 2009. - Вип. 14, т. 1. - С. 3 - 11
11. **Александров А.И.** Регуляризирующий алгоритм для нелинейных интегральных уравнений контактной задачи о взаимодействии упругих тел при наличии кулонова трения / А.И. Александров // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. - 2009. - 1. - С. 5 - 9.
12. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов - М., - 1984. - 752 с.
13. **Александров А.И.** Метод последовательных приближений: учебное пособие / А.И. Александров - Д., - 1995. - 36 с.
14. **Джонсон К.** Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон - М., - 1989. - 510 с.

*Надійшла до редколегії 02 02 10*

УДК 539.3

Н. М. Антоненко, І. Г. Величко  
*Запорізький національний університет*

## УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДУ ФУНКЦІЙ ПОДАТЛИВОСТІ НА ВИПАДОК ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ ПРИ НАЯВНОСТІ ДОТИЧНИХ І НОРМАЛЬНИХ ПРУЖНИХ ЗВ'ЯЗКІВ МІЖ ШАРАМИ

Пропонується спосіб точного розв'язання першої граничної задачі теорії пружності для багат шарових основ при наявності пружного контакту між шарами у випадку плоскої деформації. Даний спосіб є узагальненням методу функцій податливості, який раніше використовувався для основ з повним або гладким контактами між шарами. Досліджено вплив коефіцієнтів, які характеризують пружні зв'язки, на розподіл напружень і перемішень у шарах двошарової основи.

*Ключові слова* теорія пружності багат шарових основ, функції податливості, дотичні та нормальні зв'язки між шарами

Предложен способ точного решения первой граничной задачи теории упругости для многослойного основания при наличии упругого контакта между слоями в случае плоской деформации. Данный способ является обобщением метода функций податливости, который раньше использовался для оснований с полным или гладким контактами между слоями. Исследовано влияние коэффициентов, которые характеризуют упругие связи, на распределение напряжений и перемещений в слоях двухслойного основания.

*Ключевые слова* теория упругости многослойного основания, функции податливости, касательные и нормальные связи между слоями

The method of exact solution of the first boundary problem of the elasticity theory for multilayer base with elastic contact between the layers for the case of two-dimensional deformations is presented. The given method provides generalization of the flexibility function method, which was previously used for the basis with full or smooth contact between the layers. The influence of above mentioned loads on relative length of contact zone, stress, intensity coefficient and the rate of discharged energy is estimated.

*Keywords* The theory of elasticity, multiplayer basis flexibility functions, circumferential and normal bumping relation

**Постановка задачі і огляд публікацій.** При розрахунку на міцність конструкцій, які мають шарувату структуру, часто використовується модель багат шарової основи. Сучасний стан механіки багат шарових середовищ відображений в оглядах В.Г. Піскунова і А.О. Рассказова [5], Carrera Erasmo [8], О.М. Гузя і В.М. Чехова [4].

Одним із ефективних способів розв'язку задач теорії пружності для багат шарових основ є метод функцій податливості, описаний, наприклад, в [6]. Як правило, він застосовувався для розрахунку НДС багат шарових основ з повним або гладким контактами між шарами. Існують лише окремі публікації присвячені дослідженню напружено-деформованого стану багат шарових основ з пружним типом контакту між шарами. Наприклад, у статті Ю.Я. Годеса [3] розглянута задача про просторову деформацію багат шарової основи з дотичними пружними зв'язками між шарами і отримано її аналітичний розв'язок. С.І. Вільданова [2] розповсюдила метод функцій податливості на динамічні задачі про усталений рух навантаження по поверхні багат шарової основи з довільним чергуванням однорідних та неперервно неоднорідних по глибині шарів з пружними зв'язками. Випадок плоскої деформації багат шарової основи при наявності дотичних і нормальних пружних зв'язків між шарами не розглядався.

Розглянемо пакет із  $n$  шарів, які лежать на півпросторі (пружному чи абсолютно жорсткому). Таку конструкцію, зображену на рис. 1, будемо називати багатошаровою основою. Кожний шар вважатимемо невагомим, однорідним і ізотропним. Кожний шар характеризується товщиною  $h$ , модулем зсуву  $\mu$  і коефіцієнтом Пуассона  $\nu$ . Між сусідніми шарами має місце клейове з'єднання, яке будемо моделювати пружним контактом. Деформація багатошарової основи плоска. Ставиться задача знаходження переміщень і напружень у шарах основи, якщо на поверхні основи відомі напруження.

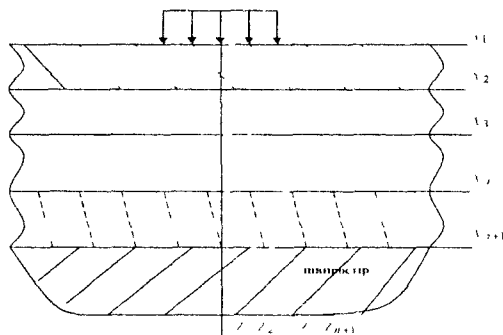


Рис. 1. Багатошарова основа

**Деформація багатошарової основи.** Нумерацію шарів будемо проводити зверху вниз, починаючи з одиниці. Півплощині присвоїмо номер  $n+1$ . Усі величини, які відносяться до  $k$ -го шару, будемо позначати нижнім індексом  $k$ . Якщо індекс відсутній, то це означає що величина відноситься до  $k$ -го шару. У кожному шарі введемо прямокутну декартову систему координат  $O_k X_k Z_k$  з початком на верхній границі шару так, щоб вісі  $Z_k$  усіх систем координат збігалися і були напрямлені углиб шару. Всі вісі  $X_k$  паралельні  $X_1$  і лежать на верхніх площинах відповідних шарів.

Умови того, що між  $k$ -м і  $k+1$ -м шарами має місце пружний контакт, мають вигляд:

$$\begin{cases} u_{k+1}(x,0) = u_k(x,h_k) + m_k \tau_{xz}(x,h_k), \\ w_{k+1}(x,0) = w_k(x,h_k) + r_k \sigma_{zk}(x,h_k), w_{k+1}(x,0) \geq w_k(x,h_k); \\ \sigma_{zk+1}(x,0) = \sigma_{zk}(x,h_k); \\ \tau_{xz+1}(x,0) = \tau_{xz}(x,h_k) \end{cases} \quad (1)$$

Тут  $m_k \geq 0$ ,  $r_k \geq 0$  – коефіцієнти пружних зв'язків (вони мають розмірність  $\mu/Па$ ). У другому із цих співвідношень записана додаткова умова, яка виключає взаємне проникнення сусідніх шарів.

Зауважимо, що з умов сумісності деформації для пружного контакту при  $m_k = r_k = 0$  одержимо умови того, що між  $k$ -м і  $k+1$ -м шарами основи має місце повний контакт, а при  $m_k \rightarrow \infty$  і  $r_k = 0$  – гладкий контакт.

Уведемо допоміжні функції, які пов'язані з трансформантами напружень і переміщень на верхній границі шару формулами:

$$\alpha_k = \bar{\sigma}_{zk}(\xi,0), \beta_k = \mu_k p w_k(\xi,0), \gamma_k = -\mu_k i \xi u_k(\xi,0), \delta_k = -\frac{i \xi}{p} \bar{\tau}_{xz}(\xi,0) \quad (2)$$

Тоді напруження і переміщення в одному шарі повністю визначаються заданням четвірки допоміжних функцій  $\alpha_k(\xi), \beta_k(\xi), \gamma_k(\xi), \delta_k(\xi)$  [7]

$$\begin{aligned}
 W_k(\xi, z) &= \frac{1}{2\mu_k} [((2 - \omega_k)shpz - \omega_k pzchpz)\alpha_k + 2(-\omega_k pzshpz + chpz)\beta_k + \\
 &\quad + 2((1 - \omega_k)shpz - \omega_k pzchpz)\gamma_k - \omega_k pzshpz\delta_k], \\
 S_k(\xi, z) &= \frac{1}{2\mu_k} [\omega_k pzshpz\alpha_k + 2((1 - \omega_k)shpz + pz\omega_k chpz)\beta_k + 2(\omega_k pzshpz + \\
 &\quad + chpz)\gamma_k + ((2 - \omega_k)shpz + \omega_k pzchpz)\delta_k], \\
 \bar{\sigma}_k(\xi, z) &= (chpz - \omega_k pzshpz)\alpha_k + 2\omega_k(shpz - pzchpz)\beta_k - 2\omega_k pzshpz\gamma_k - \\
 &\quad - ((1 - \omega_k)shpz + \omega_k pzchpz)\delta_k, \\
 \bar{\sigma}_{\alpha k}(\xi, z) &= ((2\omega_k - 1)chpz + \omega_k pzshpz)\alpha_k + 2\omega_k(shpz + pzchpz)\beta_k + \\
 &\quad + 2\omega_k(pzshpz + 2chpz)\gamma_k + ((1 + \omega_k)shpz + \omega_k pzchpz)\delta_k, \\
 -\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{\alpha k}(\xi, z) &= (-(1 - \omega_k)shpz + \omega_k pzchpz)\alpha_k + 2\omega_k pzshpz\beta_k + \\
 &\quad + 2\omega_k(shpz + pzchpz)\gamma_k + (chpz + \omega_k pzshpz)\delta_k
 \end{aligned} \tag{3}$$

Таким чином, для визначення напружено-деформованого стану основи необхідно знайти  $4n$  допоміжних функцій.

Застосуємо до співвідношень (1) пряме перетворення Фур'є. Отримані співвідношення можна привести до вигляду:

$$\begin{cases}
 -i\xi\bar{u}_{k+1}(\xi, 0) = -i\xi\bar{u}_k(\xi, h_k) + m_k p(-\frac{i\xi}{p})\bar{\tau}_{\alpha k}(\xi, h_k), \\
 p\bar{w}_{k+1}(\xi, 0) = p\bar{w}_k(\xi, h_k) + r_k p\bar{\sigma}_{\alpha k}(\xi, h_k), \\
 \bar{\sigma}_{\alpha k+1}(\xi, 0) = \bar{\sigma}_{\alpha k}(\xi, h_k), \\
 -\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{\alpha k+1}(\xi, 0) = -\frac{i\xi}{p}\bar{\tau}_{\alpha k}(\xi, h_k)
 \end{cases} \tag{4}$$

Підставляючи (3) до(4), одержимо рекурентні формули, які пов'язують допоміжні функції сусідніх шарів. Дані співвідношення можна представити в матричному вигляді:

$$\bar{\alpha}_{k+1} = T_{11k}\bar{\alpha}_k + T_{12k}\bar{\beta}_k, \tag{5}$$

$$\bar{\beta}_{k+1} = (T_{21k} + NT_{11k})\bar{\alpha}_k + (T_{22k} + NT_{12k})\bar{\beta}_k, \tag{6}$$

де 
$$N = \begin{pmatrix} r_k p\mu_{k+1} & 0 \\ 0 & m_k p\mu_{k+1} \end{pmatrix}, \Delta_k = \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}},$$

$$T_{11k} = \begin{pmatrix} chph_k - \omega_k ph_k shph_k & -(1 - \omega_k)shph_k - \omega_k ph_k chph_k \\ -(1 - \omega_k)shph_k + \omega_k ph_k chph_k & chph_k + \omega_k ph_k shph_k \end{pmatrix},$$

$$T_{12k} = \begin{pmatrix} 2\omega_k(shph_k - ph_k chph_k) & -2\omega_k ph_k shph_k \\ 2\omega_k ph_k shph_k & 2\omega_k(shph_k + ph_k chph_k) \end{pmatrix},$$

$$T_{21k} = \frac{1}{2\Delta_k} \begin{pmatrix} (2 - \omega_k)shph_k - \omega_k ph_k chph_k & -\omega_k ph_k shph_k \\ \omega_k ph_k shph_k & (2 - \omega_k)shph_k + \omega_k ph_k chph_k \end{pmatrix},$$



$$T_{22k} = \frac{1}{2\Delta_k} \begin{pmatrix} -\omega_k ph_k shph_k + chph_k & (1-\omega_k) shph_k - \omega_k ph_k chph_k \\ (1-\omega_k) shph_k + ph_k \omega_k chph_k & \omega_k ph_k shph_k + chph_k \end{pmatrix},$$

$$\bar{\alpha}_k = (\alpha_k, \delta_k)^t, \quad \bar{\beta}_k = (\beta_k, \gamma_k)^t.$$

Отже, розв'язок основної граничної задачі теорії пружності для багат шарової основи зводиться до знаходження четвірки допоміжних функцій одного із шарів, наприклад, першого. Дві з чотирьох допоміжних функцій можна знайти із граничних умов. Для знаходження інших функцій використовують функції податливості. Використовуючи міркування застосовані для основ із зчепленими шарами викладені в [1], можна показати, що четвірка допоміжних функцій шару лінійно-залежна. Ця залежність може бути представлена у вигляді

$$\bar{\beta}_k = A_k \bar{\alpha}_k, \quad (7)$$

де  $A_k$  – матриця податливості  $k$ -го шару, а матриці податливості сусідніх шарів пов'язані співвідношеннями

$$A_k = (A_{k+1} T_{12k} - T_{22k} - N T_{12k})^{-1} (T_{21k} + N T_{11k} - A_{k+1} T_{11k}). \quad (8)$$

Елементи матриць податливості не залежать від напружено-деформованого стану основи. Вони залежать від модулів пружності, товщин шарів, які лежать нижче  $k$ -го, коефіцієнтів пружних зв'язків  $r$ ,  $m$  та змінної  $p = |\xi|$ .

Знайдемо матрицю податливості абсолютно жорсткого півпростору. Відомо, що в цьому випадку переміщення точок верхньої границі півпростору будуть нульовими. Це рівносильно рівностям  $\beta_{n+1}(\xi) = \gamma_{n+1}(\xi) = 0$ . Таким чином, матриця податливості абсолютно жорсткого півпростору буде нульовою:  $A_{n+1} = \theta$ .

Розглянемо шар, який лежить на абсолютно жорсткому півпросторі. З (8) слідує, що його матриця податливості буде обчислюватися за формулою

$$A_1 = (-T_{221} - N T_{121})^{-1} (T_{211} + N T_{111}). \quad (9)$$

Щоб знайти матрицю податливості пружного півпростору, перейдемо в (9) до границі при  $h_1 \rightarrow \infty$ . Отже, матриця податливості пружного півпростору прийме вигляд

$$A_{n+1} = \frac{1}{2\omega_{n+1}} \begin{pmatrix} -1 & 1 - \omega_{n+1} \\ 1 - \omega_{n+1} & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Зауважимо, що елементи матриці податливості пружного півпростору не залежать від коефіцієнтів пружних зв'язків  $m_k$  і  $r_k$ . Наявність формул для обчислення матриць податливості абсолютно жорсткого й пружного півпросторів дає можливість використовувати формули (8) для обчислення всіх матриць податливості багат шарової основи.

**Дослідження впливу нормального навантаження на розподіл напружень і переміщень у шарах двошарової основи з пружними зв'язками між шарами.** Наведемо результати розв'язку першої граничної задачі для двошарової основи, яка лежить на абсолютно жорсткому півпросторі (випадок плоскої деформації). Кожен із шарів характеризується наступними параметрами: модулем зсуву  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , коефіцієнтом Пуасона  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$  і товщиною  $h_1 = h_2 = h$ . Між шарами – пружний контакт. На верхній границі шару дотичне навантаження відсутнє, а на початку координат прикладена нормальна зосереджена розтягуюча сила величиною  $Q$ , тобто

$$\sigma_z(x, 0) = Q\delta(x), \quad \tau_{xz}(x, 0) = 0.$$

На рис. 2(5), 3(6) і 4(7) наведені графіки нормальних (дотичних) напружень на нижній границі другого шару для значень коефіцієнтів пружних зв'язків, вказаних у табл. 1. Помери графіків на рисунках відповідають номерам, вказаним у першому стовпці табл. 1

Таблиця 1

Коефіцієнти пружних зв'язків шарів

№ графіка	Значення коефіцієнтів пружних зв'язків до рис. 2, рис 5, рис 8. $\mu / \text{Па}$				Значення коефіцієнтів пружних зв'язків до рис 3, рис. 6, рис. 9. $\mu / \text{Па}$				Значення коефіцієнтів пружних зв'язків до рис 4, рис 7, рис 10. $\mu / \text{Па}$			
	$m_1$	$r_1$	$m_2$	$r_2$	$m_1$	$r_1$	$m_2$	$r_2$	$m_1$	$r_1$	$m_2$	$r_2$
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	10	10
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10
3	10	10	10	10	1	1	10	10	10	10	10	10
4	100	100	100	100	1	1	100	100	100	100	10	10

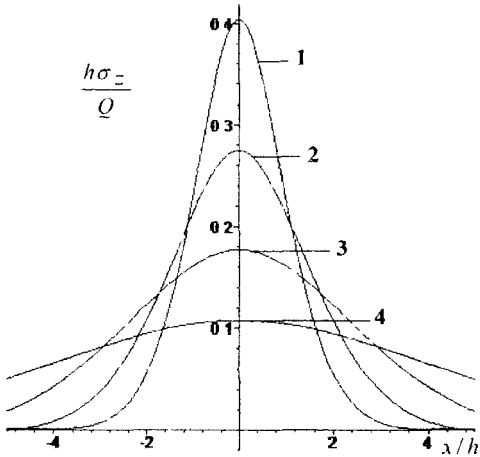


Рис. 2. Нормальні напруження на нижній границі другого шару

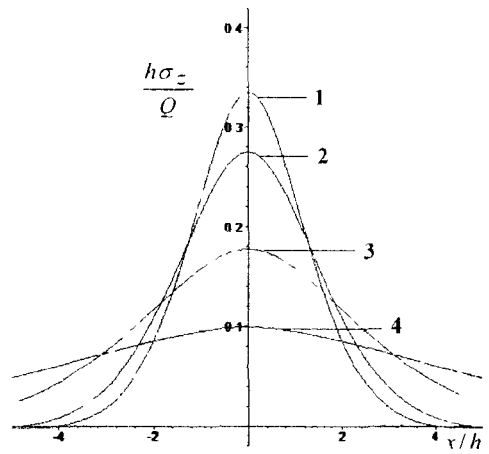


Рис. 3. Нормальні напруження на нижній границі другого шару

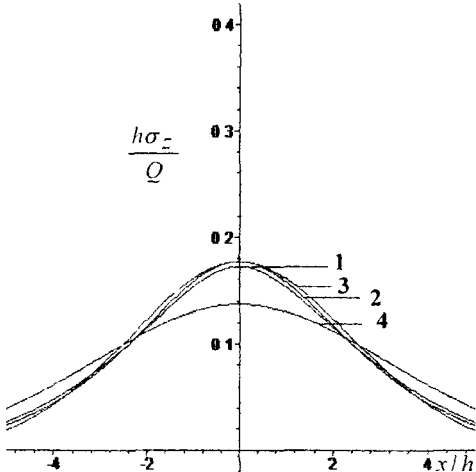


Рис. 4. Нормальні напруження на нижній границі другого шару

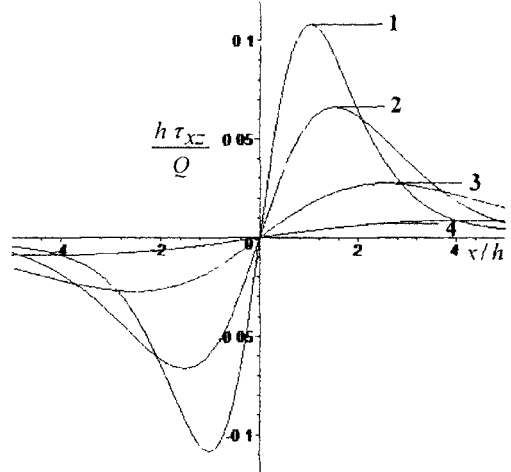


Рис. 5. Дотичні напруження на нижній границі другого шару

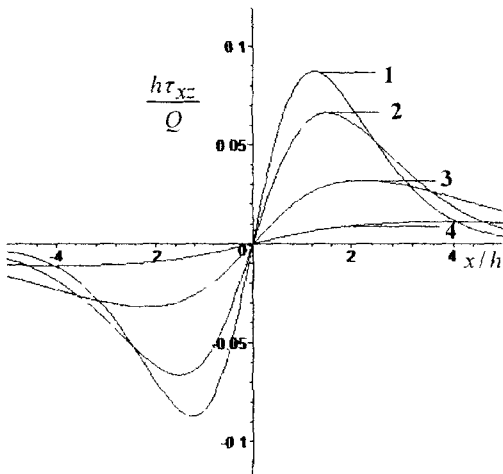


Рис. 6. Дотичні напруження на нижній границі другого шару

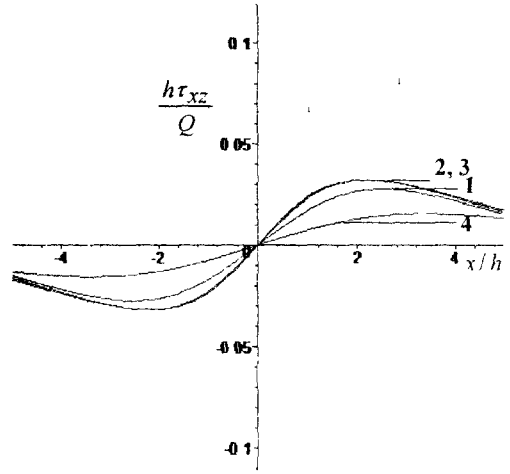


Рис. 7. Дотичні напруження на нижній границі другого шару

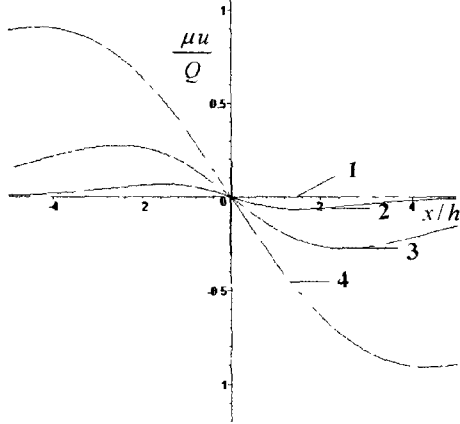


Рис. 8. Горизонтальні переміщення

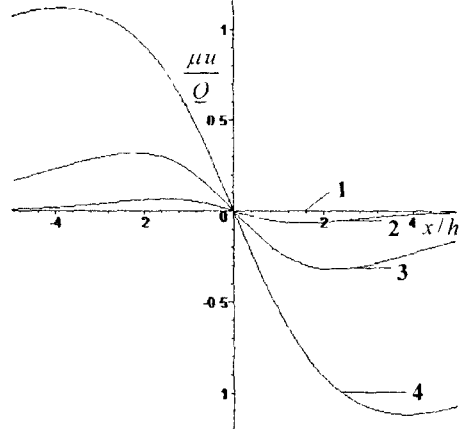


Рис. 9. Горизонтальні переміщення

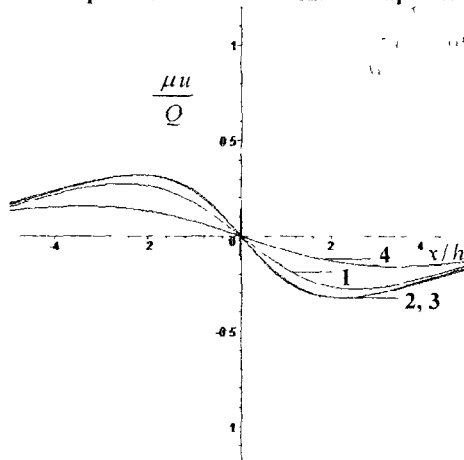


Рис. 10. Горизонтальні переміщення

Аналіз проведених чисельних досліджень дозволив зробити деякі висновки відносно впливу коефіцієнтів пружних зв'язків на розподіл напружень у двошаровій основі, яка навантажена зосередженою силою, прикладеною до її верхньої межі.

На рис. 2 графіки нормальних напружень  $\sigma_z$ , які обчислюються на нижній межі другого шару, побудовані для випадків, коли всі чотири коефіцієнта пружних зв'язків основи є однаковими між собою. Можна побачити, що при одночасному збільшенні коефіцієнтів пружних зв'язків спостерігається зменшення максимальних значень для напружень  $\sigma_z$ , і їх розподіл стає ближчим до рівномірного. Якщо порівняти між собою рисунки 3 та 4, в яких зафіксовані модулі пружних зв'язків на нижній межі першого і другого шару відповідно, а змінюються два інших коефіцієнта, то можна помітити, що зміна коефіцієнтів  $m_1$  і  $\eta_1$  менш суттєво впливає на розподіл нормальних напружень, ніж коефіцієнтів  $m_2$  і  $r_2$ .

Для дотичних напружень  $\tau_{xz}$  на нижній межі другого шару, зображених на рис. 5, 6 та 7, також можна зробити висновок про суттєву їх залежність від коефіцієнтів пружних зв'язків на нижній межі нижнього і відносно малу залежність від таких же коефіцієнтів на верхній межі цього шару.

На рис. 8, 9 та 10 зображені графіки горизонтальних переміщень. З них видно, що переміщення змінюються пропорційно дотичним напруженням, хоча і обчислюються за іншими формулами, проте мають протилежний знак, що узгоджується з умовами (1) і додатково свідчить про вірогідність розрахунків.

**Висновок.** Таким чином, проведений чисельний аналіз дозволяє висунути гіпотезу, що у пружних багатошарових основах при наявності пружного контакту між шарами суттєвий вплив на розподіл напружень поблизу деякої спільної межі двох сусідніх шарів мають лише пружні зв'язки на цій межі. При інженерних розрахунках, у разі підтвердження цієї гіпотези, інші шари можна вважати зчепленими між собою, що спрощує реалізацію розв'язків цієї задачі.

### Бібліографічні посилання

1. Величко И.Г. Матричный формализм метода функций податливости / И.Г. Величко // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка. — 2000. — Т.2, вип.3. — С. 12–19.
2. Вильданова С.И. Критическая скорость движения нагрузки по упругому многослойному основанию / С.И. Вильданова // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А.: Природничі науки, Вип. 2. — 2002.— С. 212–216.
3. Годес Ю.Я. Функции податливости многослойного основания с упругими связями между слоями / Ю. Я. Годес // Нелинейные задачи гидроаэромеханики и теории упругости. — 1987. — С. 92–97.
4. Гузь А.Н. Задачи складкообразования в слоистой толще земной коры / А.Н. Гузь, В.Н. Чехов // Прикл. мех. — 2007. — Т.43(53), №2. — С. 3–44.
5. Пискунов В.Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В.Г. Пискунов, А.О. Рассказов // Прикл. мех. — 2002. — 38, №2. — С. 22–56.
6. Приварников А. К. Пространственная деформация многослойного основания / А. К. Приварников // Устойчивость и прочность элементов конструкций. — Д., — 1973. — С. 27–45.
7. Ткаченко І.Г. Двомірна мішана задача термопружності для багатошарової основи / І.Г. Ткаченко // Прикладні проблеми механіки і математики. — 2005 — Вип. 3 — С. 70–78.
8. Carrera Erasmo. Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells / Erasmo Carrera // Appl. Mech. Rev. — 2003. — 56, №3. — С. 287–308.

УДК 539.376

Ю.А. Черняков, Д.К. Тесленко, В.П. Шнейдер, А.В. Гончаренко  
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара**УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХМЕРНЫХ  
УПРУГО-ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ**

Разработана методика определения точек бифуркации для трехмерных упруго-вязкопластических тел. Упруго-вязкопластическое поведение среды описывается теорией ползучести, учитывающей микродеформации. Исследована устойчивость толстой прямоугольной плиты при сложном нагружении.

*Ключевые слова* теория ползучести, микродеформации, устойчивость, трехмерные тела

Розроблена методика визначення точок бифуркації для тривимірних пружно-в'язкопластичних тіл. Пружно-в'язкопластична поведінка середовища описується теорією повзучості, що враховує мікродеформації. Досліджено стійкість товстої прямокутної плити при складному навантаженні.

*Ключові слова* теорія повзучості, мікродеформації, стійкість тривимірні тіла

The method of the definition of bifurcation point of three-dimensional elastic-viscoplastic bodies was developed. The elastic-viscoplastic behaviour of continuum is described by the creeping theory, which includes micro strains. The stability of thick rectangular plate under complex loading was examined.

*Keywords* creeping theory, micro strains, stability, three-dimensional bodies

**Исследование бифуркации процесса деформирования в вязкоупругопластических средах.** Рассмотрим произвольное вязкопластическое тело, занимающее в недеформированном состоянии область  $V_0$  с границей  $S_0$ . На части  $S_\sigma$  поверхности будем предполагать, что заданы номинальные поверхностные нагрузки  $p_i(t)$ , на оставшейся части  $S_u$  – заданы скорости перемещений  $v_i(t)$ . Пусть в произвольный момент времени  $t_0$  напряженно-деформированное состояние в теле характеризуется тензором напряжений Кирхгофа  $\tau^{ij}$  и метрическим тензором деформированной конфигурации  $G^{ij}$ . Соответствующая задача устойчивости сводится к нахождению нетривиального решения следующей системы дифференциальных уравнений для разностей [1]

$$\Delta \dot{\pi}_{ij} = 0 \text{ для } \bar{x} \in V_0 \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$N_i \Delta \pi_{ij} = 0 \text{ для } \bar{x} \in S_\sigma, \quad (2)$$

$$\Delta v_i = 0 \text{ для } \bar{x} \in S_u. \quad (3)$$

Выше обозначено:  $\dot{\pi}_{ij}$  – компоненты скорости изменения тензора Пиола-Кирхгоффа 1-го рода,  $N_i$  – компоненты внешней нормали к поверхности  $S_0$ , запятая обозначает ковариантную производную по соответствующему индексу.

Записанная выше система уравнений должна быть дополнена соответствующими определяющими соотношениями теории упруго-вязкопластичности. Боднер [6] предложил приближенный метод определения вязкопластической бифуркационной точки. Суть этого метода состоит в том, что скорость пластической деформации

$\dot{\varepsilon}_p$  вважається постійною при диференціюванні вязкопластического визначального співвідношення по пластическій деформації  $\varepsilon_p$ . Використання цього підходу має то перевагу над повним чисельним аналізом, що він дає швидку оцінку біфуркаційної навантаження. В [7] запропонована модифікація підходу Боднера, в якій уже закладено напрямлення виходу системи із точки біфуркації. Цей варіант к тому ж є більш простим і універсальним. Використовуючи запропоновані в [6–7] методики, визначаючі співвідношення для еластичко-вязкопластического матеріалу нетрудно привести к виду, формально збігаючомуся з еластическими

$$\dot{\sigma}_{ij} = G_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (4)$$

і використовувати для отримання точки біфуркації процесу деформування добре розроблені методики [1].

**Визначаючі співвідношення теорії ползучості, улічуючої мікродоформации.** Як уже неодноразово відзначалося во багатьох дослідженнях стійкості деформуваного тіла, біфуркація процесу деформування супроводжується зломом траєкторії навантаження. Крім того, складні процеси навантаження можуть передувати безпосередньо самій точці біфуркації. Отже, для дослідження стійкості еластичко-вязкопластических тіл, необхідно використовувати відповідну диференціально-нелінійну теорію. Нижче приведемо алгоритм побудови визначальних співвідношень теорії еластичко-вязкопластическості, улічуючої мікродоформации [3].

В основу теорії мікродоформаций закладається представлення о тому, що представительний макрооб'єм є деякою сукупністю взаємопов'язаних мікрочастиць, напружено-деформуваного стану яких визначається мікронапруженнями і мікродоформациями відповідно. Таким чином, приймається існування, по крайній мірі, двох рівнів характерних розмірів: макрорівень, визначений розмірами представительного макрооб'єму, і мікрорівень, характерний розмір якого визначається розмірами мікрочастиці. В теорії мікродоформаций мікрорівень звичайно знаходиться в діапазоні від рівня монокристалла до рівня зерна полікристаллического матеріалу. В основному [2–3] саме рівень зерна виступає як мікрорівень, що і прийнято в нинішній роботі.

Слідуючи [3], будемо вважати, що кожна мікрочастиця знаходиться в однорідному напружено-деформуваному стані. При цьому її відносний об'єм (відношення об'єму мікрочастиці к об'єму представительного макрооб'єму) дорівнює  $\Delta v_n$  ( $n = 1 \dots N$ ). Кожна мікрочастиця має наступні властивості: її межу текучості дорівнює  $\tau_n \in T$  і однорідна в межах цього об'єму еластическа деформація характеризується деяким тензорним напрямленням  $\hat{\mu}_n \in \Omega$ . Оскільки матеріал вважається початково ізотропним, то ми вважаємо, що всі можливі напрямлення мікроеластического деформування розподілені рівномірно в  $\Omega$ , і для кожного фіксованого напрямлення локальні межі текучості розподілені однаково.

Для спрощення викладу будемо розглядати випадок малих деформаций. Отже при побудові локального закону деформування  $n$ -ї мікрочастиці тензор мікродоформации  $\hat{\varepsilon}_n$  представимо в вигляді сумми еластическої  $\hat{\varepsilon}_{en}$  і пластическої  $\hat{\varepsilon}_{pn}$  складових

$$\hat{\varepsilon}_n = \hat{\varepsilon}_{en} + \hat{\varepsilon}_{pn}. \quad (1)$$

В предположении, что пластические деформации не влияют на упругость среды закон упругости принимается в следующем виде

$$\hat{\sigma}_n = \tilde{G} \hat{\varepsilon}_{pn}, \quad (2)$$

где  $\hat{\sigma}_n$  – тензор микронапряжений,  $\tilde{G}$  – тензор четвертого ранга (матрица упругой жесткости), который записывается

$$\tilde{G} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \tilde{I} + \frac{\nu}{1-2\nu} \hat{i}\hat{i} \right], \quad (3)$$

где  $E$  и  $\nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона частицы соответственно,  $\tilde{I}$ ,  $\hat{i}$  – единичные тензоры четвертого и второго ранга. При этом считается, что упругая матрица жесткости микрочастицы совпадает с упругой матрицей жесткости макрообъема.

Макропластическая деформация получается осреднением по всему представительному макрообъему микровязкопластической деформации

$$\hat{\varepsilon}_p = \sum_{n=1}^N \hat{\varepsilon}_{pn} \Delta v_n, \quad \text{где} \quad \sum_{n=1}^N \Delta v_n = 1. \quad (4)$$

Девииатор напряжений  $\hat{s}_n$  представим в виде

$$\hat{s}_n = \hat{\tau}_n + \hat{\rho}_n, \quad (5)$$

подразумевая, как и в [4], под девиаторами  $\hat{\tau}_n$  и  $\hat{\rho}_n$  диссипативную и упругую составляющие сопротивления пластическим деформациям. Такое представление связано с тем, что при деформировании по замкнутому циклу часть работы пластических деформаций всегда обратима, что обуславливается существованием микроупругих сил, оказывающих сопротивление остаточным сдвигам. Механизм возникновения этих микроупругих сил, как отмечалось в [4], состоит в том, что условиям совместности деформации подчиняются не упругие и пластические деформации порознь, а их сумма. Отсюда неоднородной пластической деформации всегда соответствует и неоднородная упругая деформация, сопровождающаяся возникновением внутренних упругих сил, оказывающих сопротивление пластическому деформированию (а в некоторых случаях, например, при разгрузке и противоположном нагружении, наоборот, ему помогающих).

Следуя [3], тензор диссипативных сил  $\hat{\tau}_n$  задается законом пластического течения

$$\hat{\tau}_n = \tau_n \hat{\mu}_n, \quad \hat{\mu}_n = \dot{\hat{\varepsilon}}_{pn} / \dot{\lambda}_n, \quad (6)$$

где  $\tau_n$  – локальный предел текучести  $n$ -й микрочастицы,  $\hat{\mu}_n$  – как уже сказано было выше, направляющий тензор ( $\hat{\mu}_n \cdot \hat{\mu}_n = 1$ ), определяющий направление скорости микровязкопластической деформации  $n$ -й микрочастицы,  $\dot{\lambda}_n$  ( $\dot{\lambda}_n = \sqrt{\dot{\hat{\varepsilon}}_{pn} \cdot \dot{\hat{\varepsilon}}_{pn}}$ ) – интенсивность скорости микровязкопластической деформации.

Примем, как это обычно принято при формулировке теорий ползучести, что локальный предел текучести  $\tau_n$  зависит от интенсивности скорости микровязкопластической деформации  $\dot{\lambda}_n$

$$\tau_n = \tau_{n0} + \tau_{n1} \cdot (\lambda_n)^m. \tag{7}$$

Такой подход позволяет описать рост локального предела текучести с ростом скорости нагружения. Параметр  $\tau_{n0}$  определяется как предел текучести при квазистатическом нагружении.

Отметим, что, вообще говоря, локальный предел текучести (предел текучести отдельного зерна) зависит, например, от размеров и формы конкретного зерна. В [5] было показано, что учет реального распределения размеров зерен в образце материала (а соответственно, и распределение пределов текучести различных зерен) позволяет существенно улучшить описание пластического деформирования поликристаллических материалов. Таким образом, в реальном материале всегда наблюдается некоторый разброс (распределение) параметров материала, относящихся к определению локального предела текучести. Поэтому, в данной работе, принято, что параметры  $\tau_{n0}$  и  $\tau_{n1}$  меняются от частицы к частице, и их общее распределение задается линейным законом (вообще говоря, такое распределение в реальных материалах обычно бывает логнормальным, но в данной работе принципиальным моментом является именно наличие такого распределения, а не его характер).

Записанные выше соотношения (6) выполняются при активном микроразрывко-пластическом деформировании, которое имеет место, когда

$$\sqrt{\hat{\tau}_n : \hat{\tau}_n} = \tau_n \text{ и } \lambda_n > 0. \tag{8}$$

Когда записанное условие (8) не выполняется, то имеет место разгрузка по упругому закону (2).

Примем, с учетом [3; 5], изменение девиатора внутренних микронапряжений  $n$ -й микрочастицы в следующем обобщенном виде:

$$\hat{\rho}_n = \begin{cases} R_{1n} \hat{\epsilon}_{pn} + R_{2n} \hat{\epsilon}_p : \hat{\mu}_n \hat{\mu}_n + R_{3n} \langle \lambda_n \rangle \hat{\mu}_n & \hat{\mu}_n = \hat{\mu}_n' \text{ и } \tau_n = \tau_n' \\ R_{2n} \hat{\epsilon}_p : \hat{\mu}_n \hat{\mu}_n + R_{3n} \langle \lambda_n \rangle \hat{\mu}_n & \hat{\mu}_n \neq \hat{\mu}_n' \text{ или } \tau_n \neq \tau_n' \\ -R_{4n} (R_{1n} + A_n) \hat{\epsilon}_{pn} + R_{2n} \hat{\epsilon}_p : \hat{\mu}_n \hat{\mu}_n + R_{3n} \langle \lambda_n \rangle \hat{\mu}_n & \hat{\mu}_n = -\hat{\mu}_n' \text{ и } \tau_n = \tau_n' \end{cases} \tag{9}$$

где  $\hat{\mu}_n'$  и  $\tau_n'$  – соответственно направление пластического деформирования и предел текучести микрочастицы, деформирующейся активно,  $R_{1n}$ ,  $R_{2n}$ ,  $R_{3n}$ ,  $R_{4n}$ ,  $A_n$  – константы материала.

В данном соотношении, как показано в [4], можно выделить отдельные части, отвечающие за различные механизмы упрочнения. В частности, слагаемое с коэффициентом  $R_{1n}$  отвечает за сингулярность поверхности текучести, слагаемое с  $R_{2n}$  отвечает за поступательное перемещение (трансляцию) регулярной части поверхности текучести, слагаемое с  $R_{3n}$  – за расширение регулярной части поверхности текучести (изотропное упрочнение). В соотношении (9) последняя строчка отвечает за поведение тыльной части поверхности текучести. В частности, при  $R_{4n} = 1$  теория будет описывать идеальный эффект Баушингера (принцип Мазинга) (как показано в [4]). При  $R_{4n} \neq 1$  становится возможным учет неидеального эффекта Баушингера, таким образом, теория в состоянии описывать и циклически нестабильные материалы (циклически упрочняющиеся и разупрочняющиеся).



Для установления связи локальных законов микро- и макроскопического деформирования воспользуемся соотношениями типа соотношения Кренера

$$\hat{s} - \hat{s}_n = \tilde{A}_n : (\hat{\varepsilon}_{pn} - \hat{\varepsilon}_p), \quad (10)$$

где  $\tilde{A}_n$  – тензорная функция четвертого ранга микро- и макроскопического состояния материала.

**Влияние истории добифуркационного нагружения на устойчивость упруго-вязкопластической плиты.** С использованием предложенного алгоритма рассмотрим задачу об устойчивости прямоугольной упруго-вязкопластической плиты. Рассмотрим плиту, шарнирно закрепленную по боковым поверхностям, занимающую в недеформированном состоянии область:

$$0 \leq x_1 \leq a, \quad 0 \leq x_2 \leq b, \quad -\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2}.$$

На боковых поверхностях пластины предположим известными значения сжимающих усилий  $p(t)$  и  $q(t)$ .

Представим форму потери устойчивости для плиты в виде

$$\begin{cases} \Delta v_1 = h \cdot f_1 \left( \frac{x_3}{h} \right) \cdot \cos \left( \frac{m \cdot \pi \cdot x_1}{a} \right) \cdot \sin \left( \frac{n \cdot \pi \cdot x_2}{b} \right), \\ \Delta v_2 = h \cdot f_2 \left( \frac{x_3}{h} \right) \cdot \sin \left( \frac{m \cdot \pi \cdot x_1}{a} \right) \cdot \cos \left( \frac{n \cdot \pi \cdot x_2}{b} \right), \\ \Delta v_3 = h \cdot f_1 \left( \frac{x_3}{h} \right) \cdot \sin \left( \frac{m \cdot \pi \cdot x_1}{a} \right) \cdot \sin \left( \frac{n \cdot \pi \cdot x_2}{b} \right), \end{cases} \quad (11)$$

где  $m$  и  $n$  – параметры волнообразования.

Данный выбор формы потери устойчивости удовлетворяет граничным условиям шарнирного опирания в интегральном смысле на боковых поверхностях плиты. Подставляя форму потери устойчивости (11) в (1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций  $f_i$ . Решение данной системы можно представить в виде

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^6 C_i \cdot \vec{\alpha}_i \cdot \exp \left( \frac{\lambda_i \cdot x_3}{h} \right),$$

где  $C_i$  – произвольные константы интегрирования,  $\vec{\alpha}_i$  и  $\lambda_i$  – собственные вектора и характеристические корни системы.

Удовлетворяя граничным условиям (2) на верхней и нижней поверхностях пластины ( $x_3 = \pm \frac{h}{2}$ ), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений для констант интегрирования  $C_i$ . Условием для существования ненулевого решения для данной системы, а соответственно и для нахождения критического времени, будет равенство нулю определителя

$$\text{Det}(m_{ij}) = 0.$$

Используя описанный выше алгоритм, исследуем устойчивость квадратной плиты, под действием боковых сжимающих усилий. Отличительной особенностью для упруго-вязкопластических сред является тот факт, что сложные процессы могут не

сопровождаться изломом траектории нагружения, а быть следствием скачкообразного изменения скорости. В качестве примера рассмотрим одноосное сжатие плиты с различными скоростями увеличения внешней нагрузки

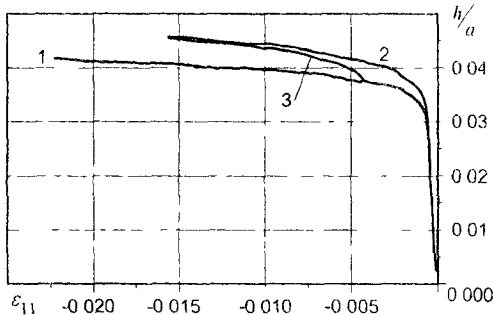


Рис. 1. Критическая толщина плиты при различных скоростях нагружения

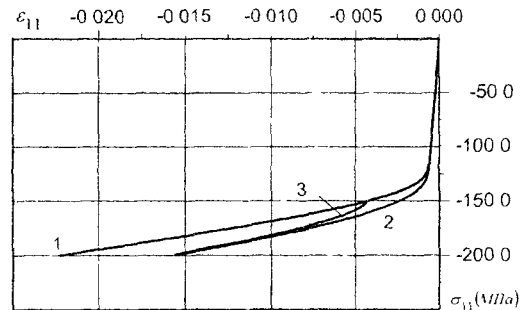


Рис. 2. Диаграммы деформирования упруго-вязкопластического материала при различных скоростях нагружения

Результаты расчетов приведены на рис. 1. Кривая 1 на нем соответствует нагружению с постоянной скоростью  $v_1 = 0.1 \frac{\text{МПа}}{\text{час}}$ , кривая 2 –  $v_2 = 1.0 \frac{\text{МПа}}{\text{час}}$ , а кривая 3 соответствует скачкообразному изменению скорости при  $\sigma_1 = -150 \text{ МПа}$  от значения  $v_1$  до значения  $v_2$ . Соответствующие диаграммы деформирования материалов приведены на рис. 2.

### Библиографические ссылки

1. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / А.Н. Гузь. – К. 1986. 511с
2. Кадашевич Ю.И. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения / Ю.И. Кадашевич, В.В. Новожилов // ПММ. – 1958. – Т. 2, №1. – С. 78-89.
3. Черняков Ю.А. Описание сложного циклического нагружения в теории пластичности, учитывающей микродеформации / Ю.А. Черняков, В.П. Шнейдер // Доповіді АН України. – 2006. – №6. – С.56–59.
4. Kadashevich Yu.I. Theory of plasticity, taking into account micro stresses / Yu.I. Kadashevich, Yu.A. Chernyakov // Advances in Mechanics. – 1992. – 15(№3-4) – P. 3-39.
5. Shneider V.P. The development of micro deformations theory: the account of polycrystalline material grain sizes / V.P. Shneider, Yu.A. Chernyakov // Proceedings of third international conference «Multiscale Material Modeling». – Freiburg (Germany), 2006. – P. 530–533.
6. Bodner S.R. Deformation and buckling of axisymmetric viscoplastic shells under thermomechanical loading / S.R. Bodner, M. Naveh, M. Merzer // Int. J. Solids Structures. 1991. 27. P. 1915–1924.
7. Гончаренко А.В. Бифуркационный критерий в теории устойчивости упруго-вязкопластических тел / А.В. Гончаренко, Ю.А. Черняков // Теоретическая и прикладная механика – 2003. – Вып. 38. – С.12.

Надійшла до редколеги 02 02 10

УДК 517.2

В.А. Остапенко

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара***ПОЛЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТЕРЖНЕ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ,  
ВОЗМУЩАЕМОМ ИНЕРЦИЕЙ ГРУЗА**

Рассматривается задача об отыскании поля перемещений в стержне переменной длины, возбуждаемом инерцией груза с подвижного нижнего конца. Разработан метод решения такой задачи и получено ее точное решение. Этот метод является обобщением метода отражений, применяемого для сред с неподвижной границей. Рассматриваются варианты движения подвижного конца с дозвуковой, звуковой, сверхзвуковой, а также произвольной скоростью

*Ключевые слова* поле перемещений стержень переменной длины

Розглядається задача про пошук поля зміщень у стержні змінної довжини, який збуджується інерцією кінцевого вантажу. Розроблено метод розв'язування такої задачі і отримано точний її розв'язок. Він є узагальненням методу відбиття для середовищ з нерухомою границею. Розглянуто варіанти руху рухомого кінця з дозвуковою, звуковою, надзвуковою та будь якою швидкістю.

*Ключові слова* поле зміщень, стержень змінної довжини

The problem about search of a displacement field in the rod of variable length excited by inertia of a cargo from the mobile bottom end is considered. The method of the solution of such problem is developed and its exact solution is obtained. This method is generalization of a method of the reflections used for environments with motionless border. Variants of movement of the mobile end with subsonic, sound, supersonic, and also with arbitrary speed are considered.

*Keywords* displacement field rod of variable length

**Введение.** В инженерной практике нередко возникают краевые задачи, связанные с динамическим нагружением стержней переменной длины. В частности, при определении напряженно-деформированного состояния в канатах шахтных и лифтовых подъемников приходится иметь дело с такого рода задачами. Даже в предположении, что сила трения между намоточным барабаном и наматываемым на него канатом настолько велика, что проскальзывание каната по барабану исключается, краевые условия задачи продолжают оставаться сложными. Существенная особенность краевых задач для стержней переменной длины состоит в том, что различные типы краевых условий требуют разных подходов к решению таких задач. Поэтому в этих задачах используется принцип суперпозиции, позволяющий разделять основную краевую задачу на несколько вспомогательных. Такой подход существенно упрощает решение основной задачи в целом. В то же время, в каждой из вспомогательных задач удается проследить за характером распространения упругих волн вдоль стержня, что способствует построению методов решения вспомогательных задач и получению собственно решений.

В [1] рассмотрена редукция основной краевой задачи об упругих перемещениях в канате при навивке его на барабан. Показано, что движение каната с грузом удобно представить в виде суммы переносного и относительного движений. Здесь будет рассмотрен такой вариант этой задачи, в котором до начала вращения барабана груз висит на канате и приходит в движение из состояния равновесия и покоя. В переносном движении канат движется как абсолютно твердое тело со скоростью  $v'(t)$  его намотки на барабан. Здесь функция  $v(t)$  – траектория движения точек каната как абсолютно твердого тела. Принято, что  $v(0) = 0$ . При этом учитываются

статические напряжения в канате, возникающие вследствие действия веса каната и груза. Суммарные перемещения, возникающие в переносном движении с учетом действия статических напряжений, оказываются равными [1]

$$w(\xi, t) = \frac{G\xi}{ES} + \frac{g\xi}{a^2} - \frac{g\xi^2}{2a^2} + v(t), \quad (1)$$

где  $\xi$  – абсолютная координата, направленная вдоль каната от точки его контакта с барабаном,  $G$  – вес груза,  $E$  – модуль упругости каната,  $S$  – площадь поперечного сечения каната,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $a$  – скорость звука в канате, то есть  $a^2 = \frac{E}{\rho}$ ,  $\rho$  – объемная плотность каната,  $l$  – длина каната до начала движения.

Относительное движение рассматривается как движение точки контакта каната с барабаном вдоль каната со скоростью  $-v'(t)$  вдоль подвижной оси  $x$ . Начало оси  $x$  при  $t = 0$  также расположено в точке контакта каната с барабаном. Поэтому в относительном движении для упругих перемещений в канате возникает следующая краевая задача. в области  $v(t) < x < l$ ,  $t > 0$  найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

удовлетворяющее начальным и краевым условиям:

$$w(x, 0) = \varphi(x); \quad w_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

$$w(v(t), t) = -w_1(v(t)); \quad w_x(l, t) = \gamma [w_x(l, t) - R\beta(t)H(t)], \quad t > 0, \quad (4)$$

где  $m = \frac{G}{g}$ ,  $\gamma = \frac{m}{ES}$ ,  $R$  – радиус барабана,  $\beta(t)$  – угловое ускорение барабана,  $H$  –

функция Хевисайда. Здесь функция Хевисайда учитывает, что ускорение  $R\beta(t)$  на нижнем конце каната возникает, только начиная от момента пуска намоточного барабана. Значения функций  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  конкретизируются ниже.

С точки зрения построения метода решения данной задачи удобно, используя принцип суперпозиции, представлять ее решение в виде суммы трех функций [1]

$$w(x, t) = w_2(x, t) + w_3(x, t) + u(x, t). \quad (5)$$

Все три функции в правой части равенства (5) должны в области  $v(t) < x < l$ ,  $t > 0$  удовлетворять волновому уравнению (2). Функция  $w_2(x, t)$ , кроме того, должна удовлетворять начальным условиям:

$$w_2(x, 0) = -w_1(x, 0); \quad w_{2,t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l; \quad (6)$$

и однородным краевым условиям:

$$w_2(v(t), t) = 0; \quad w_{2,x}(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (7)$$

Функция  $w_3(x, t)$  должна дополнительно удовлетворять однородным начальным условиям:

$$w_3(x, 0) = 0; \quad w_{3,t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (8)$$

и краевым условиям:

$$w_3(v(t), t) = -w_1(v(t), t); \quad w_{3,x}(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (9)$$

Функция  $u(x, t)$  должна удовлетворять также начальным условиям типа (8) и краевым условиям:

$$u(v(t), t) = 0; \quad u_x(l, t) = \gamma [u_x(l, t) + h(at)]H(at), \quad t > 0, \quad (10)$$

где обозначено

$$h(at) = -R\beta(t) + \frac{\partial^2 w_2(l,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_3(l,t)}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Так как решения краевых задач для функций  $w_2(x,t)$  и  $w_3(x,t)$  получены и опубликованы ранее [2–6], функцию  $h(at)$  можно считать известной.

Целью настоящей статьи является получение решения краевой задачи для функции  $u(x,t)$ .

**Постановка задачи.** В связи с изложенным выше, краевая задача для функции  $u(x,t)$  поставлена следующим образом: в области  $v(t) < x < l$ ,  $t > 0$  найти решение волнового уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (12)$$

и краевым условиям (10). Относительно функции  $v(t)$ , описывающей перемещение верхнего конца стержня, предполагается, что  $v(0) = 0$  и из условия сохранения области интегрирования краевой задачи следует, что  $v(t) < l$  при  $t > 0$ . Особенность второго краевого условия (10) состоит в том, что при  $t < 0$  правая его часть становится равной нулю, так как до начального момента времени стержень и груз неподвижны.

Учитывая то обстоятельство, что единственным источником возмущения в рассматриваемой краевой задаче является нижний конец груза, решение задачи на начальном интервале времени естественно искать в виде

$$u(x,t) = \chi(x + at - l) \quad (13)$$

Подстановка формы решения (13) во второе краевое условие (10) приводит к равенству

$$\chi'(at) = \gamma[a^2\chi''(at) + h(at)H(at)],$$

откуда после введения преобразования  $z = at$  получается дифференциальное уравнение

$$\chi''(z) - \frac{1}{\gamma a^2} \chi'(z) = -\frac{1}{a^2} h(z)H(z) \quad (14)$$

Общим решением дифференциального уравнения (14) является функция

$$\begin{aligned} \chi(z) = & \gamma a^2 \chi'(0) \left[ \exp\left(-\frac{z}{\gamma a^2}\right) - 1 \right] + \chi(0) - \\ & - \int_0^z \exp\left(-\frac{s}{\gamma a^2}\right) \int_0^s \frac{1}{a^2} h(\zeta) \exp\left(-\frac{\zeta}{\gamma a^2}\right) H(\zeta) d\zeta ds \end{aligned} \quad (15)$$

Из (15) следует, что единственным решением уравнения (14), **обращающимся** тождественно в нуль при отрицательных  $z$  будет функция

$$\chi(z) = - \int_0^z \exp\left(-\frac{s}{\gamma a^2}\right) \int_0^s \frac{1}{a^2} h(\zeta) \exp\left(-\frac{\zeta}{\gamma a^2}\right) H(\zeta) d\zeta ds \quad (16)$$

Из равенства (13) теперь следует, что на начальном интервале времени решением краевой задачи будет функция

$$u(x,t) = - \int_0^{x+at-l} \exp\left(-\frac{s}{\gamma a^2}\right) \int_0^s \frac{1}{a^2} h(\zeta) \exp\left(-\frac{\zeta}{\gamma a^2}\right) H(\zeta) d\zeta ds \quad (17)$$

Действительно, процесс построения функции (17) свидетельствует, что эта функция при всех  $t$  будет удовлетворять второму краевому условию (10) **будучи** функцией

распространяющихся волн, функция (17) будет удовлетворять уравнению (2). В силу значений функции Хевисайда, при  $0 < x < l$  и  $t = 0$  эта функция тождественно равна нулю вместе со своей производной по  $t$ , то есть удовлетворяет начальным условиям (12). При  $t < \frac{l-v(t)}{a}$  функция  $u(v(t), t) = 0$ , то есть первое краевое условие

(10) также будет удовлетворено. При  $t > \frac{l-v(t)}{a}$  первое краевое условие (10) функцией (17) не будет удовлетворяться, поэтому возникает необходимость построения волны, отраженной от подвижного верхнего конца стержня.

Для этого используется метод, разработанный в [7–9]. Этот метод заключается в следующем. Пусть  $\tau_1$  – наименьший положительный корень уравнения

$$v(t) + at = l, \quad (18)$$

то есть момент вступления переднего фронта волны (17) в контакт с подвижным концом. Поставим следующую вспомогательную краевую задачу: в области  $v(t) < x < l$ ,  $t > \tau_1$  найти решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным и краевым условиям:

$$u_n(x, \tau_1) = 0 : u_{e,t}(x, \tau_1) = 0, \quad v(\tau_1) < x < l, \quad (19)$$

$$u_e(v(t), t) = f(t), \quad u_{e,t}(l, t) = 0, \quad t > \tau_1, \quad (20)$$

где, в данном случае

$$f(t) = -u(v(t), t), \quad (21)$$

причем  $u(v(t), t)$  – это значение функции (17) при  $x = v(t)$ .

**Решение задачи.** Вопрос о разрешимости уравнения (18) относительно  $t$  и построения решения вспомогательной задачи существенно зависит от поведения функции  $v(t)$ . С этой точки зрения появляется необходимость рассмотрения вариантов поведения функции  $v(t)$ .

**I-й вариант.** Перемещение верхнего конца стержня в любой момент времени  $t > 0$  осуществляется с дозвуковой скоростью, то есть выполняется условие

$$|v'(t)| < a, \quad t > 0. \quad (22)$$

В этом случае уравнение (18) имеет решение, так как при  $t = 0$  правая часть этого уравнения больше левой, в то же время при  $t > 0$  левая часть непрерывно возрастает. Решение вспомогательной задачи будем искать в виде

$$u_n(x, t) = \chi_1(x - at). \quad (23)$$

Заметим, что в этом варианте функция  $f(t)$  определена при всех  $t$ , причем, так как функция  $v(t) + at$  возрастает, то  $v(t) + at < l$  при  $t < \tau_1$ , поэтому  $f(t) = 0$  при  $t < \tau_1$ . Подставив форму решения (23) в первое краевое условие (20), получим

$$\chi_1(v(t) - at) = f(t) \quad \text{при } t > \tau_1. \quad (24)$$

Введем в последнем равенстве преобразование

$$z = v(t) - at. \quad (25)$$

Из (25) следует, что  $z'(t) < 0$  при  $t > 0$ . А так как при  $t = 0$   $v(0) = 0$  и  $z(0) = 0$ , то  $z(t) < 0$  при  $t > 0$ . Таким образом, в данном варианте функция  $z(t)$  строго монотонно убывает и поэтому существует обратная к ней функция  $t_0(z)$ , также строго монотонно убывающая и непрерывно дифференцируемая. Из  $z'(t) < 0$  и  $z(0) = 0$  следует, что  $t_0(0) = 0$  и  $t_0(z) > 0$  при  $z < 0$ .

Обобщенный метод отражений, применяемый для решения рассматриваемой задачи [7–9], требует доопределения функции  $t_0(z)$  при  $z > 0$ , что, в свою очередь, требует доопределения функции  $z(t)$  (25), а потому и функции  $v(t)$  при  $t < 0$ . Оказывается, что продолжение функции  $v(t)$  на всю ось  $t$  можно выполнить достаточно произвольно, потребовав лишь существования производной этого продолжения на всей оси  $t$  и выполнения на всей оси  $t$  условия (22). Обозначим это продолжение функции  $v(t)$  через  $v_1(t)$ , причем мы требуем, чтобы выполнялось неравенство

$$|v_1'(t)| < a, \quad t < 0 \quad (26)$$

Тогда на всей оси  $t$  будет определена функция

$$N(t) = \begin{cases} v(t), & t > 0, \\ v_1(t), & t < 0 \end{cases} \quad (27)$$

Продолженную на всю ось  $t$  функцию  $z(t)$  обозначим  $Z(t)$  и определим выражением

$$Z(t) = N(t) - at \quad (28)$$

Из этого выражения ясно, что при  $t > 0$   $Z(t) = z(t)$ . Так как по условию функция  $N(t)$  удовлетворяет неравенству

$$|N'(t)| < a, \quad (29)$$

при всех  $t$ , функция  $Z(t)$  будет строго монотонно убывающей, и так как  $z(0) = 0$ , при  $t < 0$  будет справедливо  $Z(t) > 0$ .

В силу того, что функция  $Z(t)$  является строго монотонной при всех  $t$ , для нее существует обратная функция  $T_0(Z)$ , причем при  $Z \leq 0$   $T_0(Z) = t_0(z)$  и  $T_0(Z)$  будет строго монотонно убывающей функцией. Таким образом, функция  $T_0(Z)$  удовлетворяет условию

$$T_0'(Z) = \begin{cases} t_0'(z), & Z < 0, \\ 0, & Z = 0 \\ < 0, & Z > 0 \end{cases} \quad (30)$$

Отметим, что при  $z < 0$  и  $t > 0$  справедливы следующие тождества:

$$z \equiv v(t_0(z)) - at_0(z), \quad t \equiv t_0(v(t) - at) \quad (31)$$

Заметим также, что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $v(t) < x < l$ , очевидно, справедливо также неравенство  $v(t) - at < x - at$ , из которого в силу строго монотонного убывания функции  $T_0(z)$  и тождеств (31) следует, что при  $t > 0$

$$t - t_0(v(t) - at) > T_0(x - at) \quad (32)$$

Выполнив теперь в равенстве (24) преобразование (28), получим

$$\chi_1(z) = f(T_0(z)) \quad (33)$$

Отсюда, из равенства (23) и определения (21) функции  $f(t)$ , а также представления функции  $u(\chi, t)$  в виде (13), где функция  $\chi(z)$  определяется равенством (16), следует, что решением вспомогательной задачи будет функция

$$u(\chi, t) = -\chi(v(T_0(x - at)) + at_0(x - at) - l) \quad (34)$$

Действительно, будучи функцией распространяющейся волны, функция (34) удовлетворяет уравнению (2). Так как в силу условия (22)  $v(t) - at < 0$ , то  $T_0(v(t) - at) = t$ , и поэтому функция (34) удовлетворяет первому краевому условию (20). Функция (34) удовлетворяет также второму краевому условию (20) при  $at < 2(l - v(\tau_1))$ . Действительно, в этом случае справедлива цепочка неравенств

$$l - at > l - 2(l - v(\tau_1)) = v(\tau_1) - at_1$$

поэтому  $T_0(l - at) < T_0(v(\tau_1) - a\tau_1)$  и как как функция  $v(t) + at$  возрастает, то

$$v(T_0(l-at)) + aT_0(l-at) < v(\tau_1) + a\tau_1 = l$$

Поэтому при таких  $t$  и  $x = l$  аргументы функций Хевисайда будут отрицательны и функция (34) будет равна нулю. При  $t = \tau_1$  и  $v(t) < x < l$  справедливо  $x - at > v(\tau_1) - a\tau_1$ , поэтому  $T_0(x-at) < T_0(v(\tau_1) - a\tau_1) = \tau_1$ , следовательно,  $v(T_0(x - t)) + aT_0(x - at) < l$ . Значит, при  $t = \tau_1$  функция (34) тождественно равна нулю вместе со своей производной по  $t$ , то есть начальные условия (19) функцией (34) удовлетворяются.

Поэтому при  $at < 2(l - v(\tau_1))$  решением основной краевой задачи будет функция

$$u(x, t) = \chi(x + at - l) - \chi(v(T_0(x - at)) + aT_0(x - at) - l), \tag{35}$$

где функция  $\chi$  имеет вид (16)

При  $at > 2(l - v(\tau_1))$  функция (35) не будет удовлетворять второму краевому условию (10), так как при  $t = \frac{2(l - v(\tau_1))}{a}$  передний фронт волны, отраженной от подвижного конца стержня, дойдет до его нижнего конца и возникнет необходимость построения волны, отраженной от нижнего конца. Учитывая тот факт, что первое слагаемое в формуле (35) удовлетворяет второму краевому условию (10) при всех  $t$ , необходимо строить отраженную от нижнего конца волну только для второго слагаемого в формуле (35), то есть для функции

$$\chi_1(x - at) = -\chi(v(T_0(x - at)) + aT_0(x - at) - l) \tag{36}$$

Таким образом, если отраженную волну строить в виде  $\chi_2(x + at)$ , то необходимо, чтобы функция

$$v(x, t) = \chi_1(x - at) + \chi_2(x + at) \tag{37}$$

удовлетворяла краевому условию

$$v_x(l, t) = \gamma v_{tt}(l, t) \tag{38}$$

Подставляя в (38) форму решения (37), получим

$$\chi_1'(x - at) + \chi_2'(x + at) = \gamma a^2 (\chi_1''(x - at) + \chi_2''(x + at)),$$

откуда после введения преобразования  $z = l + at$  с учетом того, что  $l - at = 2l - (l + at)$ , следует дифференциальное уравнение

$$\chi_2''(z) - \frac{1}{\gamma a^2} \chi_2'(z) = -\chi_1''(2l - z) + \frac{1}{\gamma a^2} \chi_1'(2l - z). \tag{39}$$

Общим решением дифференциального уравнения (39) есть функция

$$\begin{aligned} \chi_2(z) = & C_1 \gamma a^2 \left( \exp\left(\frac{z}{\gamma a^2}\right) - 1 \right) - \\ & - \int_0^z \exp\left(\frac{s}{\gamma a^2}\right) \int_0^s \exp\left(-\frac{\zeta}{\gamma a^2}\right) [\chi_1''(2l - \zeta) - \\ & - \frac{1}{\gamma a^2} \chi_1'(2l - \zeta)] d\zeta ds + \chi_2(0) \end{aligned} \tag{40}$$

Следует обратить внимание на важную особенность функции  $\chi_2(z)$ . В выражении (37) аргумент  $z$  этой функции принимает значение  $x + at$ , поэтому наибольшим значением аргумента производных функции  $\chi_1$  под знаками интегралов в формуле (40) будет величина  $2l - (x + at)$ , которая в силу условия  $v < l$  будет больше, чем  $l - at$ . Поэтому при  $at < 2(l - v(\tau_1)) = l - v(\tau_1) + a\tau_1$  справедливо соотношение



$$2l - (x + at) > l - at > l - (l - v(\tau_1) + at) = v(\tau_1) - at.$$

А так как функция  $\chi_1$  аргумента  $2l - (x + at)$  с помощью формулы (38) выражается через функцию  $\chi$ , в которой на такого рода аргумент действует обратная функция  $T_0$ , то с учетом убывания функции  $T_0$  и тождества (31) получаем что  $T_0(2l - (x + at)) < T_0(v(\tau_1) - at) = \tau_1$ . А поскольку при  $t < \tau_1$   $v(t) - at - l < 0$ , функция  $\chi_1$  под знаками интегралов при  $at < 2(l - v(\tau_1))$  будет тождественно равна нулю вместе со всеми своими производными, ибо функция  $\chi$  содержит в качестве множителя функцию Хевисайда. Это очень важно, так как отраженная от нижнего конца волна должна начинать принимать ненулевые значения, начиная от  $t = \frac{2(l - v(\tau_1))}{a}$ . Внеинтегральные слагаемые

в формуле (47) этим свойством не обладают, то есть не удовлетворяют условию построения отраженной волны. Поэтому в этой формуле необходимо принять  $C_1 = 0$ ,  $\chi_2(0) = 0$ . Таким образом, отраженная от нижнего конца волна будет иметь вид

$$\begin{aligned} \chi_2(x + at) = & - \int_0^{x+at} \exp\left(-\frac{s}{\gamma a^2}\right) \int_0^s \exp\left(-\frac{\zeta}{\gamma a^2}\right) [ \chi_1''(2l - \zeta) - \\ & - \frac{1}{\gamma a^2} \chi_1'(2l - \zeta) ] d\zeta ds, \end{aligned} \quad (41)$$

а решение основной краевой задачи на этом интервале времени будет представляться формой

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \chi(x + at - l) - \chi(v(T_0(x - at)) + \\ & + aT_0(x - at) - l) + \chi_2(x + at), \end{aligned} \quad (42)$$

в которой функция  $\chi$  определяется формулой (17), а функция  $\chi_2$  – формулой (41)

Функция (42) будет решением основной краевой задачи при  $at < 2l - 2v(\tau_1) - v(t)$ , то есть до тех пор, пока передний фронт волны, излученной нижним концом, не отразится по одному разу от верхнего и нижнего концов и вновь не подойдет к верхнему концу. Это событие произойдет в момент времени  $t = \tau_2$ , где  $\tau_2$  – наименьший положительный корень уравнения

$$at = 3l - 2v(\tau_1) - v(t), \quad (43)$$

не превосходящий  $\tau_1$

Так как первые два слагаемых в формуле (42) удовлетворяют первому краевому условию (10) при любых  $t$ , отраженную от верхнего конца волну достаточно построить лишь для последнего слагаемого в формуле (42). Для построения отраженной волны аналогично тому, как это сделано на интервале  $\tau_1 < t < \tau_2$ , необходимо вновь рассмотреть вспомогательную краевую задачу (2), (19), (20), заменив в ее постановке лишь  $\tau_1$  на  $\tau_2$  и приняв функцию  $f(t)$  в виде

$$f(t) = -\chi_2(v(t) + at) \quad (44)$$

Тогда, по-прежнему разыскивая решение этой вспомогательной задачи в виде

$$u(x, t) = \chi_3(x - at), \quad (45)$$

получим, что функция  $\chi_3$  будет иметь вид, подобный (33), то есть

$$\chi_3(z) = f(T_0(z)). \quad (46)$$

Поэтому решение вспомогательной задачи в данном случае будет иметь вид

$$u(x, t) = -\chi_2(v(T_0(x - at)) + aT_0(x - at)), \quad (47)$$

где функция  $\chi_2$  определяется равенством (41). Решением же основной задачи на этом интервале времени будет функция

$$u(x, t) = \chi(x + at - l) - \chi(v(T_0(x - at) + aT_0(x - at) - l) + \chi_2(x + at) - \chi_2(v(T_0(x - at)) + aT_0(x - at))) , \quad (48)$$

в которой функция  $\chi$  определяется формулой (16), а функция  $\chi_2$  – формулой (41).

Функция (48) будет решением основной краевой задачи при  $t < \frac{4l - 2v(\tau_1) - 2v(\tau_2)}{a}$ , то есть до такого момента времени, в который передний фронт волны, генерируемой нижним концом стержня, дважды отразившись от

верхнего конца и один раз – от нижнего, вновь не подойдет к нижнему концу. При больших  $t$  снова возникает необходимость построения волны, отраженной от нижнего конца. Учитывая, что первые три слагаемых в формуле (48) удовлетворяют второму краевому условию (10), для построения отраженной волны в виде  $\chi_4(x + at)$ , то необходимо добиться, чтобы функция

$$v(x, t) = \chi_3(x - at) + \chi_4(x + at) \quad (49)$$

удовлетворяла краевому условию

$$v_x(l, t) = \gamma v_n(l, t) . \quad (50)$$

Подставляя в (50) форму решения (49), получим

$$\chi_3'(l - at) + \chi_4'(l + at) = \gamma a^2 [ \chi_3''(l - at) + \chi_4''(l + at) ] ,$$

откуда после введения преобразования  $z = l + at$  с учетом того, что  $l - at = 2l - (l + at)$  следует дифференциальное уравнение

$$\chi_4''(z) - \frac{1}{\gamma a^2} \chi_4'(z) = -\chi_3''(2l - z) + \frac{1}{\gamma a^2} \chi_3'(2l - z) \quad (51)$$

По соображениям, аналогичным рассуждениям при построении функции  $\chi_2$ , то есть, исходя из условия того, чтобы функция  $\chi_4$  принимала ненулевые значения только при  $t > \frac{4l - 2v(\tau_1) - 2v(\tau_2)}{a}$ , необходимо ограничиться частным решением

уравнения (51), приняв функцию  $\chi_4$  в виде

$$\chi_4(x + at) = - \int_0^{x+at} \exp\left(\frac{s}{\gamma a^2}\right) \int_0^s \exp\left(-\frac{\zeta}{\gamma a^2}\right) [ \chi_3''(2l - \zeta) - \frac{1}{\gamma a^2} \chi_3'(2l - \zeta) ] d\zeta ds , \quad (52)$$

где, как показано ранее, функция  $\chi_3$  имеет вид

$$\chi_3(z) = -\chi_2(v(T_0(z)) + aT_0(z)) . \quad (53)$$

Тогда на рассматриваемом интервале времени решением краевой задачи будет функция

$$u(x, t) = \chi(x + at - l) - \chi(v(T_0(x - at) + aT_0(x - at) - l) + \chi_2(x + at) - \chi_2(v(T_0(x - at)) + aT_0(x - at))) + \chi_4(x + at) , \quad (54)$$

в которой функция  $\chi$  определяется формулой (16), функция  $\chi_2$  – формулой (41), а функция  $\chi_4$  – формулой (52).

При  $t > \tau_3$ , где  $\tau_3$  – наибольший положительный корень уравнения

$$at = 5l - 2v(\tau_1) - 2v(\tau_2) - v(t), \quad (55)$$

не превосходящий  $\tau_2$ , функция (54) не будет удовлетворять первому краевому условию (10). Поэтому для последнего слагаемого в формуле (54) необходимо строить отраженную от подвижного конца волну. Построение этой отраженной волны, как и прежде, осуществляется путем решения вспомогательной задачи (2), (19), (20) с заменой в ней  $\tau_1$  на  $\tau_3$  и с функцией  $f(t)$ , равной

$$f(t) = -\chi_4(v(t) + at). \quad (56)$$

Как показано ранее, решением этой задачи будет функция

$$u(x, t) = -\chi_4(v(T_0(x - at)) + aT_0(x - at)), \quad (57)$$

где функция  $\chi_4$  определяется равенством (52). Решением же основной задачи на этом интервале времени будет функция

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \chi(x + at - l) - \chi(v(T_0(x - at)) + aT_0(x - at) - l) + \\ & + \chi_2(x + at) - \chi_2(v(T_0(x - at)) + aT_0(x - at)) + \chi_4(x + at) - \\ & - \chi_4(v(T_0(x - at)) + aT_0(x - at)), \end{aligned} \quad (58)$$

в которой функция  $\chi$  определяется формулой (16), функция  $\chi_2$  – формулой (41), а функция  $\chi_4$  – формулой (52)

Продолжая этот процесс построения решения краевой задачи, получим, что для произвольного  $t$  ее решение будет иметь вид

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \chi(x + at - l) - \chi(v(T_0(x - at)) + aT_0(x - at) - l) + \\ & + \sum_{k=1}^n [\chi_{2k}(x + at) - \chi_{2k}(v(T_0(x - at)) + aT_0(x - at))] . \end{aligned} \quad (59)$$

Каждая из функций  $\chi_{2k}$  в формуле (59) строится следующим образом. На предыдущем этапе построена функция  $\chi_{2(k-1)}$ . По этой функции, как результат отражения от подвижного верхнего конца, строится функция  $\chi_{2k}$  по формуле, подобной (53)

$$\chi_{2k-1}(z) = -\chi_{2(k-1)}(v(T_0(z)) + aT_0(z)). \quad (60)$$

Затем рассматривается дифференциальное уравнение, подобное (51)

$$\chi''_{2k}(z) - \frac{1}{\gamma a^2} \chi'_{2k}(z) = -\chi''_{2(k-1)}(2l - z) + \frac{1}{\gamma a^2} \chi'_{2(k-1)}(2l - z), \quad (61)$$

и в качестве функции  $\chi_{2k}$  берется его частное решение, то есть

$$\begin{aligned} \chi_{2k}(x + at) = & - \int_0^{x+at} \exp\left(-\frac{s}{\gamma a^2}\right) \int_0^s \exp\left(-\frac{\zeta}{\gamma a^2}\right) [\chi''_{2(k-1)}(2l - \zeta) - \\ & - \frac{1}{\gamma a^2} \chi'_{2(k-1)}(2l - \zeta)] d\zeta ds \end{aligned} \quad (62)$$

Следует также заметить, что для каждого конечного  $t$  функция (59) будет содержать только конечное число слагаемых. В самом деле, пусть  $\tau_n$ ,  $n=1, 2, \dots$  есть наименьший положительный корень уравнения

$$at = 2(n-1)l - 2 \sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k) + l - v(t), \quad (63)$$

где  $\tau_0 = 0$ , или, что то же самое, уравнения

$$at = 3l + a\tau_{n-1} - v(\tau_{n-1}) - v(t) . \quad (64)$$

Тогда, если  $t$  удовлетворяет неравенству

$$\tau_{n-1} < t < \tau_n - \frac{l - v(\tau_n)}{a}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

то на основании алгоритма построения волн, огражденных от нижнего конца, суммирование в формуле (59) достаточно осуществлять до  $k = n - 1$ , так как члены ряда с большими значениями  $k$  будут равны нулю. По этой же причине, если  $t$  удовлетворяет неравенству  $\tau_{n-1} < t < \tau_n$ , где  $n=1, 2, \dots$ , то, кроме того, функция  $\chi_{2(n-1)}(v(T_0(x-at)) + a T_0(x-at))$  будет равна нулю.

**II-й вариант.** Перемещение верхнего конца стержня в любой момент времени  $t > 0$  осуществляется со скоростью звука или сверхзвуковой скоростью, то есть выполняется условие

$$|v'(t)| \geq a, \quad t > 0 \quad (65)$$

Здесь по-прежнему предполагается непрерывность функции  $v(t)$  при всех  $t > 0$ . Однако из условия (65) следует, что в общем случае  $v'(t)$  не может быть непрерывной. Поэтому здесь предполагается только, что  $v'(t)$  определена почти всюду на положительной полуоси  $t$ . Предполагается также, что положительная полуось  $t$  может быть покрыта не более чем счетным множеством чередующихся подинтервалов, на каждом из которых выполняется одно из неравенств

$$v'(t) \geq a, \quad (66)$$

или

$$v'(t) \leq -a. \quad (67)$$

В данной задаче единственным источником возмущения является нижний конец стержня, который генерирует волну (17). Эта волна в рассматриваемом варианте не может отражаться от подвижного верхнего конца, так как, если выполнено условие (67), то волна, двигаясь со звуковой скоростью, не может догнать этот конец, а, если выполнено условие (66), то верхний конец не может излучать волны. Поэтому в данном варианте может только происходить поглощение волны (17) подвижным верхним концом. Для того чтобы такое поглощение произошло, необходимо, чтобы верхний конец вступил в контакт с передним фронтом волны (17). Такое событие может произойти только при условии, что выполнено условие (66), то есть верхний конец движется навстречу волне. До возникновения контакта переднего фронта волны (17) с верхним концом может существовать несколько под-интервалов, на которых поочередно выполняется одно из неравенств (66) или (67). Однако, если данный контакт не возник ни на одном из этих интервалов, то движение верхнего конца будет приводить лишь к изменению области, в которой отыскивается решение задачи, но само решение будет по-прежнему иметь вид (17). С этой точки зрения достаточно начать рассмотрение задачи с такого подинтервала времени, на котором, с одной стороны, выполнено неравенство (66), а, с другой стороны, произошло поглощение волны (17) верхним концом. Поэтому разбиение полуоси  $t$  на подинтервалы осуществляется следующим образом: для интервала  $0 < t < T_1$  выполнено неравенство (66), для  $T_1 < t < T_2$  - неравенство (67), для  $T_2 < t < T_3$  - неравенство (66) и так далее.

Условие вступления в контакт верхнего конца с передним фронтом волны (17) имеет вид

$$l - v(t) = at . \quad (68)$$

Пусть  $\tau_1$  – наименьший положительный корень уравнения (68). Для того чтобы поглощение волны (17) верхним концом действительно произошло, необходимо, чтобы на интервале времени  $\tau_1 < t < T_1$  было выполнено неравенство

$$l - v(t) < at. \quad (69)$$

В этом случае волна (17) будет срезана на длине  $aT_1 + v(T_1) - l$ , и при  $t = T_1$  отличные от нуля волны сохраняются лишь на интервале  $v(T_1) < x < l$ . Учесть такого рода срезку можно, сдвинув в формуле (17) функции Хевисайда на величину, равную длине этой срезки. Таким образом, после срезки функция (17) приобретет вид

$$u(x, t) = - \int_0^{x+at-l} \exp\left(-\frac{s}{\gamma a^2}\right) \int_0^s \frac{1}{a^2} h(\zeta) \exp\left(-\frac{\zeta}{\gamma a^2}\right) \times \\ \times H(\zeta - (aT_1 + v(T_1) - l)) d\zeta ds \quad (70)$$

Функция (70) учитывает описанную срезку, то есть будет решением задачи при  $t > T_1$ .

При  $t > T_1$  может существовать несколько подинтервалов  $[T_s, T_{s+1}]$ ,  $s = 1, 2, \dots$ , на которых передний фронт волны (70) не вступит в контакт с подвижным верхним концом. На таких подинтервалах решением задачи будет оставаться функция (70), поэтому данные подинтервалы можно пропустить и полагать, что следующий контакт переднего фронта волны (70) с верхним концом происходит на подинтервале, который обозначим  $[T_2, T_3]$ . Новое условие вступления в контакт верхнего конца с передним фронтом волны (70) имеет вид

$$l - v(t) = at - (aT_1 + v(T_1) - l). \quad (71)$$

Пусть  $\tau_2$  – наименьший положительный корень уравнения (68), не превосходящий  $\tau_1$ . Для того чтобы поглощение волны (70) верхним концом действительно произошло, необходимо, чтобы на интервале времени  $\tau_2 < t < T_3$  было выполнено неравенство

$$l - v(t) < at - (aT_1 + v(T_1) - l). \quad (72)$$

В этом случае волна (70) будет срезана на длине  $aT_3 + v(T_3) - l - (aT_1 + v(T_1) - l)$ , и при  $t = T_3$  отличные от нуля волны сохраняются лишь на интервале  $v(T_3) < x < l$ . Учесть такого рода срезку можно так же, как это сделано на интервале  $[0, T_1]$ , то есть сдвинув в (70) функции Хевисайда на величину  $aT_3 + v(T_3) - (aT_1 + v(T_1))$ . Таким образом, на интервале  $[T_3, T_4]$  и, возможно, некоторых последующих подинтервалах, решением задачи будет функция

$$u(x, t) = - \int_0^{x+at-l} \exp\left(-\frac{s}{\gamma a^2}\right) \int_0^s \frac{1}{a^2} h(\zeta) \exp\left(-\frac{\zeta}{\gamma a^2}\right) \times \\ \times H(\zeta - (aT_3 + v(T_3) - (aT_1 + v(T_1)))) d\zeta ds. \quad (73)$$

Аналогичным образом процесс построения поглощения волн верхним концом может быть распространен на следующие подинтервалы времени, на которых такое поглощение действительно происходит. Если предположить, что срезка волны, излученной нижним концом происходит на каждом подинтервале  $[T_{2k}, T_{2k+1}]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , то на интервалах  $[T_{2k+1}, T_{2(k+1)}]$  решением задачи будет функция

$$u(x, t) = - \int_0^{x+at-l} \exp\left(-\frac{s}{\gamma a^2}\right) \int_0^s \frac{1}{a^2} h(\zeta) \exp\left(-\frac{\zeta}{\gamma a^2}\right) H(\zeta - \\ - \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} [aT_{2k+1} + v(T_{2k+1}) - l]) d\zeta ds \quad (74)$$

**III-й вариант.** Функция  $v(t)$  изменяется произвольно, являясь непрерывно дифференцируемой при всех  $t > 0$ . Для решения поставленной задачи положительную полуось  $t$  разобьем на подинтервалы, на каждом из которых выполняется одно из трех неравенств

$$v'(t) \leq -a, \quad (75)$$

$$-a < v'(t) < a, \quad (76)$$

или

$$v'(t) \geq a. \quad (77)$$

Ясно, что границы каждого из таких подинтервалов будут определяться положительными корнями одного из следующих уравнений. Граница между подинтервалами, на одном из которых справедливо неравенство (75), а на другом – неравенство (76) – из уравнения

$$v'(t) + at = 0, \quad (78)$$

а граница между подинтервалами, на одном из которых справедливо неравенство (76), а на другом – неравенство (77) – из уравнения

$$v'(t) - at = 0, \quad (79)$$

причем интервалы, на которых будет выполняться неравенство (76) будут открытыми, а интервалы, на которых будет выполняться неравенство (75) или (77) – замкнутыми.

Как показал анализ первых двух вариантов, волна (17), излученная нижним концом стержня, может отражаться от верхнего конца только в случае выполнения на рассматриваемом подинтервале неравенства (76). Если на подинтервале выполняется неравенство (77), происходит только поглощение волны (17) подвижным верхним концом. Если же на подинтервале выполняется неравенство (75), то изменение решения, полученного на предыдущих подинтервалах, на этом подинтервале не происходит. Таким образом, в зависимости от порядка чередования подинтервалов процесс построения решения будет различным. Однако при произвольном чередовании подинтервалов для решения задачи на подинтервале, на котором выполнено неравенство (76) следует применять технику, изложенную в варианте I, а для решения задачи на подинтервале, на котором выполнено неравенство (77) – технику, изложенную в варианте II.

Продemonстрируем такого рода процесс решения задачи на следующем примере. Пусть на подинтервале  $[0, T_1]$  выполнено неравенство (76), а на подинтервале  $[T_1, T_2]$  – неравенство (77), причем на последнем подинтервале происходит поглощение волн верхним концом.

В этом случае функция  $z = v(t) - at$ , очевидно, уже не будет строго монотонной при любых  $t$ . Однако на интервале  $[0, T_1]$ , благодаря условию (76), эта функция будет строго монотонно убывающей. Поэтому на интервале  $(z_1, z_0)$ , где  $z_i = v(T_i) - aT_i$ ,  $i = 0, 1$ , будет существовать обратная к функции  $z(t)$  функция  $\xi_1(z)$ , непрерывно дифференцируемая и строго монотонно убывающая на этом интервале. Продолжим каждую из функций  $\xi_1(z)$  на всю ось  $z$  как непрерывно дифференцируемую и строго монотонно убывающую. Обозначим такое продолжение через  $E_1(z)$ . Ясно, что для функции  $E_1(z)$  на интервале  $(z_1, z_0)$ , или, что то же самое, на интервале  $0 < t < T_1$ , будет справедливо тождество

$$E_1(v(t) - at) \equiv t. \quad (80)$$

Вне интервала  $[0, T_1]$  тождество (80) в общем случае не будет справедливым.

Тогда на интервале  $[0, T_1]$  в силу существования на этом интервале обратной к (31) функции решение будет иметь принципиально такой же вид, как и в варианте I, с заменой в нем функции  $T_0$  на функцию  $E_1$ , то есть

$$u(x, t) = \chi(x + at - l) - \chi(v(E_1(x - at) + aE_1(x - at) - l) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} [\chi_{2k}(x + at) - \chi_{2k}(v(E_1(x - at) + aE_1(x - at)))] , \quad (81)$$

где  $\chi(z)$  имеет вид (16),  $N$  – натуральное число, для которого справедливо неравенство  $\tau_{N-1} < T_1 \leq \tau_N$ , в котором  $\tau_{N-1}, \tau_N$  – наименьшие положительные корни уравнения (63) при  $n = N - 1$  и  $n = N$  соответственно. Заметим, что если бы на интервале  $[T_1, T_2]$  выполнялось неравенство (75), то решение задачи на этом интервале по-прежнему было бы представлено формулой (81).

Далее на интервале  $[T_1, T_2]$  произойдет поглощение части волн (81) подвижным верхним концом. Учтя это поглощение точно так же, как это сделано в варианте II, получим, что в начале интервала  $[T_2, T_3]$  решением задачи также будет функция (81), однако в ней функцию  $\chi(z)$  следует подставлять в виде

$$\chi(z) = - \int_0^z \exp\left(-\frac{s}{\gamma a^2}\right) \int_0^s \frac{1}{a^2} h(\zeta) \exp\left(-\frac{\zeta}{\gamma a^2}\right) \times \\ \times H\left(\zeta - (v(T_2) + aT_2 - l)\right) d\zeta ds$$

При ином чередовании подинтервалов решение задачи получается аналогично.

**Выводы.** Получено точное решение краевой задачи об упругих перемещениях в стержнях переменной длины при их нагружении инерцией груза. Построение решения основано на анализе распространения упругих волн и их отражения от границ области. Удалось построить метод анализа отражения волн от подвижной границы. Показано, что при набегании конца каната на область интегрирования, происходит срезка волн, существовавших в канате ранее. Вычислены значения такого рода срезов.

Полученное здесь решение краевой задачи позволяет решить общую задачу о динамических нагрузках, возникающих в подъемных канатах и, тем самым, произвести расчет канатов на прочность.

### Библиографические ссылки

1. **Остапенко В.А.** Варианты постановки краевых задач о движении волн в канатах переменной длины /В.А. Остапенко // Дифференциальные уравнения и их приложения. Дн., 2006 С. 23-30.
2. **Остапенко В.А.** Динамика волн в канатах переменной длины /В.А. Остапенко // Сборник научных работ Полтавского национального технического университета. - 2005. Вып. 16. - С. 216-220.
3. **Ostapenko V.A.** Dynamic field of displacements in rods of variable length /V.A. Ostapenko // Proceedings of 8<sup>th</sup> International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz, Poland, 2005. - P. 316-323.
4. **Остапенко В.А.** Краевая задача для стержня переменной длины, возмущаемого с подвижного верхнего конца /В.А. Остапенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. - 2006. №2/1. - С. 182-198.
5. **Ostapenko V.A.** Dynamic displacement in ropes of variable length at perturbation of nonzero initial conditions /V.A. Ostapenko, N.V. Polyakov // Proceedings of 9<sup>th</sup> International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz, Poland, 2007. - P. 347-354.

6. **Ostapenko V.A.** Exact solution of the problem for dynamic field of displacements in rods of variable length /V.A. Ostapenko // Archives of Applied Mechanics, Hamburg, Springer-Verlag, 77, 2007. – P. 313–324.
7. **Остапенко В.А.** Первая краевая задача для области с подвижной границей /В.А. Остапенко // Дифференциальные уравнения и их приложения в физике. – Дн., 1989. – С. 4–14.
8. **Остапенко В.А.** Вторая краевая задача для области с подвижной границей /В.А. Остапенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика, – 1997. Вип.1. – С. 3–21.
9. **Остапенко В.А.** Третья краевая задача для области с подвижной границей /В.А. Остапенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика, – 1996. Вип.2. – С. 4–23.

*Надійшла до редколеги 29 01 10*

**УДК 621.744.35**

**С.Р. Рахманов**

*Национальная металлургическая академия Украины*

## **ДИНАМИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ОЧАГЕ ДЕФОРМАЦИИ В ПРОЦЕССЕ ПРОШИВКИ ТРУБНОЙ ЗАГОТОВКИ НА ПРОШИВНОМ ПРЕССЕ**

Разработана динамическая модель очага деформации при процессе прошивки трубной заготовки, представляющая область возмущений в виде пластической и упругой взаимодействующих зон. Установлены параметры распространения фронта пластической волны при процессе прошивки заготовки в зависимости от расширения границы оправки в очаге деформации.

*Ключевые слова* прошивка трубных заготовок, математическая модель прошивки, автомодельная задача

Розроблено динамічну модель осередку деформації для процесу прошивки трубної заготовки, що являє область збуджень у вигляді пластичної та пружної зон, котрі між собою взаємодіють. Визначені параметри розповсюдження фронту пластичної хвилі у процесі прошивки заготовки в залежності від розширення границі оправки в осередку деформації.

*Ключові слова* прошивка трубних заготовок, математична модель прошивки, автомодельна задача

The mathematical model of the deformation region under piercing pipe shell process, which presents perturbed region in the shape of plastic and elastic zones of interaction was formulated. The parameters of the front edge of the distribution plastic wave under process of piercing shell that is depending on the range expansion arbor in deformation region were determined.

*Keywords*: piercing process of pipe shell, mathematical model of the piercing process, automodel problem

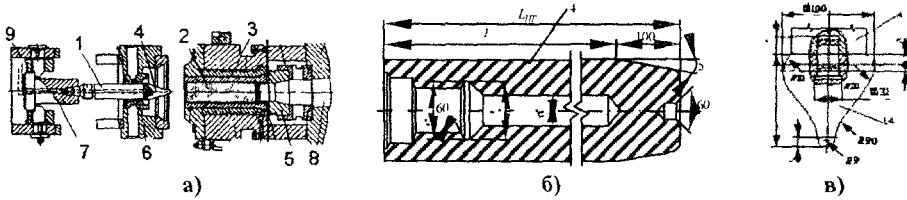
**Введение.** Процессы горячего прессования при производстве бесшовных труб из малопластичных и труднодеформируемых материалов находят широкое применение в мировой практике. При этом повышение эффективности процесса прошивки (экспандирования) на прошивном прессе выдвигает ряд актуальных задач по совершенствованию технологии производства и модернизации оборудования [1; 2].

Совершенствование существующих и разработка новых технологий требует кардинально нового подхода к задаче оптимизации качества бесшовных труб, что, непосредственно, связано с отработкой режимов деформации, прогнозированием показателей стойкости технологического инструмента и надежности функционирования оборудования [3].

Установление возможностей существующих и разработка новых технологических процессов производства труб требует создания математических моделей,



адекватно отражающих условия прошивки трубных заготовок или при незначительных допущениях экспандирования гильз на современных прошивных прессах, схема которого приведена на рис. 1.

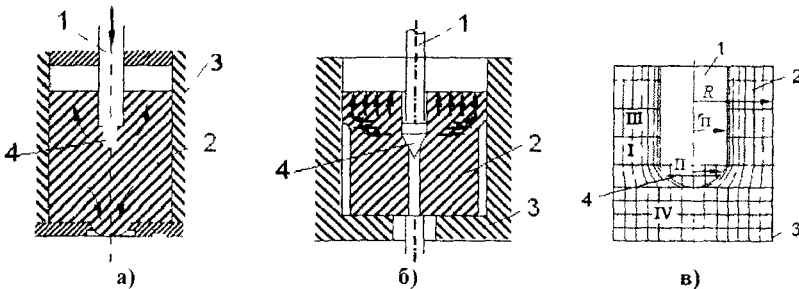


**Рис. 1.** Вертикальный прошивной пресс и схема расположения технологического инструмента на прессе: а) – прошивной пресс (схема пресса повернута); б) – прошивной инструмент (игла); в) – экспандер

**Постановка задачи.** Рассмотрим следующую постановку задачи о прошивке предварительно нагретой трубной заготовки оправкой, выполненной в виде тела вращения и движущейся с определенной скоростью.

Оправка, используемая в качестве рабочего инструмента, представляет собой абсолютно твердое осесимметричное тело с заостренным наконечником, которая внедряется в однородную полубесконечную среду, занимающую некоторое пространство  $x \leq 0$ , нормально к его свободной поверхности  $x = 0$ . Возмущенное движение прошиваемого металла (сплошной среды), вызванное оправкой в процессе прошивки, считаем осесимметричным (рис. 2).

Решение указанной задачи о движении сплошной среды (металла), основанное на использовании, достаточно, строгих нелинейных дифференциальных уравнений движения прошиваемого металла, в силу имеющих место больших деформаций, в настоящее время является затруднительным из-за недостатка развития математического аппарата. Поэтому, на данной стадии исследования, наиболее приемлемы приближенные методы, которые, тем не менее, позволяют получить достоверное решение задачи. Следует отметить, что данные методы, хотя и обладают определенной погрешностью, но в основном охватывают физическую суть явлений, происходящих в процессе прошивки сплошной цилиндрической трубной заготовки в гильзы заданных размеров.



**Рис. 2.** Осесимметричный процесс прошивки и экспандирования трубной заготовки: 1 – иглодержатель (стержень); 2 – трубная заготовка; 3 – контейнер; 4 – игла (оправка) или экспандер; (а) – модель процесса прошивки заготовки; б) – процесс экспандирования гильзы; в) – зоны деформации заготовки при прошивке инструментом

Выберем цилиндрическую систему координат с началом в точке соприкосновения оправки с прошиваемой заготовкой; ось  $\gamma$  направим вдоль оси прошиваемой заготовки, время прошивки отсчитываем от момента соприкосновения оправки с

металлом. Пусть  $H(t)$  -- есть глубина внедрения оправки в металл в момент времени  $t$  (рис. 3).

Если уравнение поверхности оправки задано в виде

$$r = f(x), (x \geq 0), \tag{1}$$

то положение оправки в выбранной системе координат в момент времени  $t \geq 0$  определяется уравнением

$$r = f[x + H(t)]. \tag{2}$$

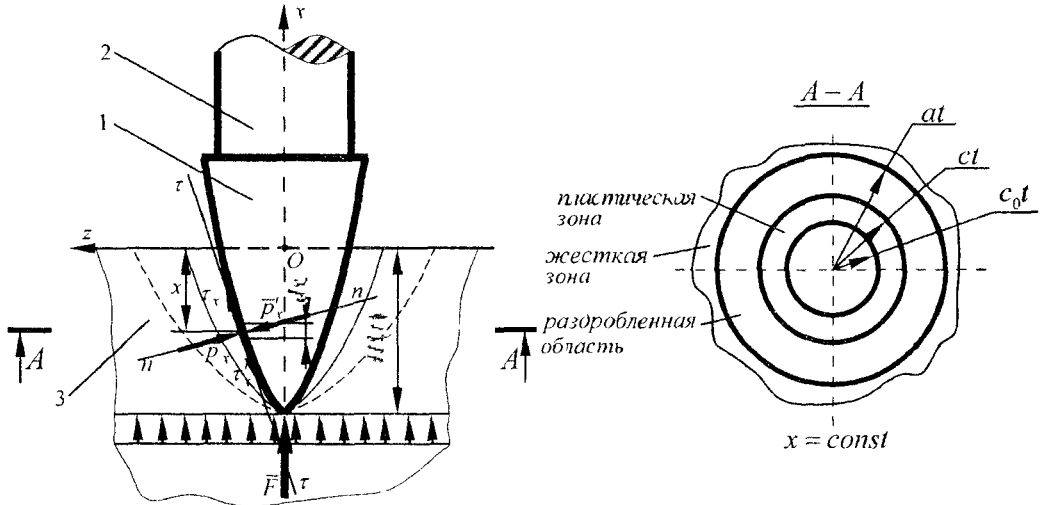


Рис. 3. Расчетная схема динамических процессов при прошивке трубной заготовки на прошивном прессе: 1 – оправка; 2 – стержень оправки; 3 – трубная заготовка

В некоторой фиксированной плоскости  $x = const$  сечение движущейся оправки представляет собой окружность переменного радиуса  $r_0(t) = f[x + H(t)]$ , изменяющуюся в радиальном направлении со скоростью

$$c_0(t) = \dot{r}_0(t) = \frac{d}{dt} f(x + H(t)) = f'(x + H(t))u_0(t), \tag{3}$$

где  $u_0(t) = H(t)$  – скорость прошивки,  $f'(x + H(t))$  – тангенс угла наклона образующей оправки к оси  $x$  на некоторой заданной глубине  $x = const$ .

Если оправка, удерживаемая стержнем, выполнена в виде эквивалентного конуса с углом полураствора  $\theta_s$ , то

$$f(x) = x \operatorname{tg} \theta_s, \tag{4}$$

и скорость расширения поперечного сечения оправки в плоскости  $x = const$  будет одинакова

$$c_0(t) = u_0(t) \operatorname{tg} \theta_s. \tag{5}$$

Отбрасывая некоторые особенности реализации существующего технологического процесса, будем считать, что процесс прошивки ведется в установившемся режиме и с постоянной скоростью. Поэтому в первом приближении можно принять, что

$u_0(t) = u_0 = const$ . При этом каждое поперечное сечение металла при перемещении расширяется с постоянной скоростью

$$c_0 = u_0 \operatorname{tg} \theta_s = const, \quad (6)$$

и движение в фиксированной плоскости можно рассматривать, как автомодельное.

Предлагаемый приближенный подход к решению рассматриваемой задачи прошивки состоит в следующем: считается, что каждый слой металла трубной заготовки, в некоторой фиксированной плоскости  $x = const$ , движется независимо от других слоев, причем движение начинается с того момента времени, когда носик оправки достигает данной плоскости. При этом, исходная задача сводится к задаче о расширении цилиндрической каверны в сплошной среде (заготовке). Такая задача представляет собой задачу о распространении одномерных радиальных волн в слое, перпендикулярном направлению движения оправки в процессе прошивки металла. Таким образом, можно сказать, что предлагаемый подход к решению задачи базируется на методе плоских сечений и развивает теоретические положения процессов прошивки заготовки осесимметричным инструментом (оправкой).

Анализ напряженно-деформированного состояния металла показывает, что, при существующих скоростях прошивки в сплошной цилиндрической заготовке, кроме зоны упругого состояния, преимущественно, возникает зона пластического состояния, а в некоторых случаях и зона разрушения металла. Поэтому, первоначально рассмотрим отдельно указанные зоны и дадим приближенное решение динамической задачи для каждой из них. Результаты ряда экспериментальных исследований [6; 11] указывают на необходимость поэтапного исследования деформированного состояния прошиваемого металла в стесненном очаге деформации и управления напряженно-деформированным состоянием в процессе реализации технологических операций.

Принимаем во внимание то, что пластическая область расположена в зоне контакта с оправкой. Следовательно, в рамках выбранной динамической модели в каждом сечении очага деформации  $x = const$  пластическая зона представляет собой концентрическую область, ограниченную окружностью радиусом  $r_0(t)$ . Пластическая зона расширяется со скоростью  $c_0(t)$  – скоростью расширения поперечного сечения оправки. Окружность радиуса  $R(t)$ , которая определяет границы пластической области со стороны внешней области, расширяется с неизвестной заранее скоростью

$$c = \dot{R}(t). \quad (7)$$

Область, примыкающая к пластической зоне по окружности  $r = R(t)$ , как будет показано в дальнейшем, иногда может рассматриваться как упругая область. Для радиального перемещения металла в рассматриваемом слое очага деформации  $x = const$  законы сохранения массы и количества движения сплошной среды, в выбранной цилиндрической системе координат, имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\rho \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (9)$$

где  $\rho(r, t)$  – плотность металла;  $v(r, t)$  – радиальная скорость частиц металла (положительная в сторону возрастания геометрических размеров оправки);  $\sigma_r, \sigma_\theta$  –

соответственно радиальная и окружная компоненты напряжения (положительные при сжатии).

Уравнения (8) и (9) пригодны как для пластической зоны, так и для упругой зоны. Пластичность рабочей среды (металла) при рассматриваемом подходе наиболее удобно описывать критерием текучести по Треску, который в нашем случае имеет вид

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \tau_0, \quad (10)$$

где  $\tau_0$  – предел текучести прошиваемого металла ( $\tau_0 = const$ ).

Кроме того, необходимо отметить, что относительное изменение объема, как известно из [8, 9] является упругой деформацией, которая обычно в теории пластичности считается пропорциональной давлению металла в очаге деформации

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_x). \quad (11)$$

Предполагаем, что между давлением  $p$  и изменением объема существует линейная зависимость, которую представим в виде

$$p = K \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right), \quad (12)$$

где  $\rho_0, \rho$  – соответственно начальная и текущая плотность металла при прошивке;  $K$  – объемный модуль упругости прошиваемого материала.

Система уравнений (8), (9), (11) и (12) не является замкнутой, так как содержит пять неизвестных функций:  $v, \rho, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_x$ .

Классическая теория пластичности при рассмотрении движения рабочей среды с цилиндрической симметрией использует различные гипотезы и предположения относительно взаимосвязи напряжения  $\sigma_x$  с другими компонентами полного напряжения и деформаций. Одним из таких предположений в теории пластичности является предположение о линейности связи между девиатором тензора напряжений и девиатором тензора деформаций. Совместно с условием об отсутствии осевой деформации указанное предположение приводит к связи между напряжениями

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - G\varepsilon, \quad (13)$$

где  $\varepsilon$  – объемная деформация металла.

Поскольку  $\varepsilon$  величина достаточно малая, то в уравнении (13) часто пренебрегают последним членом, в результате чего получаем равенство

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta), \quad (14)$$

рекомендуемое Хиллом в [10].

Результаты исследования [11] говорят о том, что кроме условия (14), в ряде случаев, применимо условие

$$\sigma_x = \sigma_\theta. \quad (15)$$

Оба условия (14) и (15) принадлежат к классу более общего параметрического условия согласно [12; 13; 14]

$$\sigma_x = s\sigma_\theta + (1-s)\sigma_r. \quad (16)$$

Соответственно, при значениях параметра  $s = 1/2$  и  $s = 1$ .

Если использовать условие (16), то для давления металла в очаге деформации получим выражение

$$p = \frac{1}{3}[(2-s)\sigma_r + (1+s)\sigma_\theta]. \quad (17)$$

В силу записанного, уравнение (12) примет вид

$$1 - \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1}{3K}[(2-s)\sigma_r + (1+s)\tau_0], \quad (18)$$

или, с учетом условия текучести (10) будем иметь

$$1 - \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1}{K} \left[ \sigma_r - \frac{1}{3}(1+s)\sigma_\theta \right]. \quad (19)$$

Исключив из уравнений (8) и (9)  $\sigma_\theta$  при помощи условия (10), и  $\rho$ , при помощи равенства (19), получаем:

$$\left( \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\tau_0}{r} \right) \left( K - \sigma_r + \frac{1+s}{3} \tau_0 \right) = -\rho_0 K \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (20)$$

$$\left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \left( K - \sigma_r + \frac{1+s}{3} \tau_0 \right) = - \left( \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \right). \quad (21)$$

Именно эти два уравнения определяют пластическое движение материала в области очага деформации

$$r_0(t) \leq r \leq R(t),$$

для оправки с произвольной, криволинейной образующей  $r = f(x)$  и произвольным законом движения  $u_0(t)$ .

Если оправка принудительно внедряется в металл с постоянной скоростью  $u_0$  и имеет конический наконечник (носик), то граница контакта пластической зоны с оправкой движется с постоянной скоростью  $c_0 = u_0 t g \theta_s$  (6), и задача (20), (21) оказывается автомодельной, поскольку не имеет характерного размера. В этом случае скорость распространения пластической зоны  $c$  также постоянна и согласно (7)

$$R(t) = ct. \quad (22)$$

Перейдя в уравнениях (20) и (21) к безразмерным величинам

$$\bar{v} = \frac{v}{c}; \bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{K}; \bar{\tau}_0 = \frac{\tau_0}{K}, \quad (23)$$

которые являются функциями только автомодельной переменной, которую удобно взять в виде

$$\xi = \frac{r}{ct}, \quad (24)$$

получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left[ 1 - \bar{\sigma}_r + \frac{1}{3}(1+s)\bar{\tau}_0 \right] \left( \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\xi} + \frac{\bar{\tau}_0}{\xi} \right) = \beta^2 \frac{d\bar{v}}{d\xi} (\xi - \bar{v}); \quad (25)$$

$$\left[ 1 - \bar{\sigma}_r + \frac{1}{3}(1+s)\bar{\tau}_0 \right] \left( \frac{d\bar{v}}{d\xi} + \frac{\bar{v}}{\xi} \right) = \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\xi} (\xi - \bar{v}), \quad (26)$$

где

$$\beta = \frac{c}{c_p}, \quad c_p = \frac{K}{\rho_0}. \quad (27)$$

Система уравнений (25) и (26) описывает пластическое течение металла в области  $c_0 t < r < ct$ , очага деформации которая в автомодельных переменных является интервалом

$$\xi_0 \leq \xi \leq 1,$$

где  $\xi_0$  – нижний предел автомодельной переменной  $\xi_0 = \frac{c_0}{c} \leq 1$ , соответствующий границе контакта металла с оправкой в процессе прошивки заготовки.

Обратим внимание на тот факт, что граница  $r = R(t)$  заранее неизвестна, и в автомодельной задаче (из-за выбора в качестве характерной скорости величины  $c$ ) неизвестным оказывается значение  $\xi_0$  на границе с оправкой.

Для осесимметричной оправки с произвольной криволинейной образующей решение задачи в пластической зоне, приводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных (20) и (21) в подвижной области  $r_0(t) < r < R(t)$  с заранее неизвестной границей  $R(t)$ . Для некоторых условий внедрения оправки, выполненной строго в виде конического тела вращения, с постоянной скоростью  $u_0$ , задача в конечном итоге, сводится к упрощенному решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (25) и (26) в области с фиксированными границами  $\xi = \xi_0 < 1$  и  $\xi = 1$  с заранее неизвестной величиной  $\xi_0$ .

Из граничных условий при  $\xi = \xi_0$  известно значение скорости  $v = c_0$  или

$$\bar{v} \Big|_{\xi=\xi_0} = \frac{c_0}{c} = \xi_0,$$

условия на границе  $\xi = 1$  должны определяться из условия стыковки решения в пластической зоне с решением в той зоне, которая примыкает к пластической.

Линеаризованная задача для пластической области базируется на основных предположениях линейной теории сплошной среды [12].

Численные результаты показывают, что хотя изменение плотности прошиваемой заготовки происходит, но величина  $\rho_0/\rho$  отличается от единицы незначительно.

Кроме того величины  $v \frac{\partial \rho}{\partial r}$  и  $v \frac{\partial v}{\partial r}$  имеют второй порядок, поэтому в линейном приближении задачи вместо уравнений (8) и (9) воспользуемся дифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = 0; \quad (28)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\tau_0}{r} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (29)$$

Исключив из уравнений (28) и (29) плотность металла  $\rho$  при помощи уравнения (19), приходим к следующей системе уравнений

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\tau_0}{r} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + K \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = 0, \quad (31)$$

являється лінеаризованим варіантом системи (8) і (9).

Для оправки з конічним наконечником (носиком) при постійній швидкості введення  $u_0$  задача (30) і (31) являється автомодельною і в змінних (23) і (24) приводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\bar{\sigma}_r}{d\xi} + \frac{\bar{\tau}_0}{\xi} = \beta^2 \xi \frac{d\bar{v}}{d\xi}, \quad (32)$$

$$\frac{d\bar{v}}{d\xi} + \frac{\bar{v}}{\xi} = \xi \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\xi}. \quad (33)$$

на інтервалі змінної  $\xi_0 \leq \xi \leq 1$ .

В подальшому обмежимося тільки рішенням лінеаризованої системи рівнянь (32) і (33), яка, як показує порівняння з чисельним рішенням нелінійної системи (25) і (26), має задовільну точність, але має перевагу, що лінеаризована система допускає замкнуте аналітичне рішення задачі.

З (32) і (33) маємо самостійне рівняння для визначення функції  $\bar{v}(\xi)$

$$\left(1 - \beta^2 \xi^2\right) \frac{d\bar{v}}{d\xi} + \frac{\bar{v}}{\xi} = -\bar{\tau}_0, \quad (34)$$

яка при  $\xi = \xi_0$  повинна задовольняти граничному умову  $\bar{v}|_{\xi=\xi_0} = \xi_0$ . Рішення рівняння (34), задовольняє останньому умову, має вигляд

$$\bar{v}(\xi) = D_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2 \xi^2}}{\beta^2 \xi} - \frac{\bar{\tau}_0}{\beta^2 \xi}, \quad (35)$$

де  $D_0 = \frac{\beta^2 \xi_0^2 + \bar{\tau}_0}{\sqrt{1 - \beta^2 \xi_0^2}}$

Тепер з (32) отримуємо вираження для визначення  $\bar{\sigma}_r(\xi)$

$$\bar{\sigma}_r(\xi) = D_0 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2 \xi^2}}{\beta \xi} + D_1, \quad (36)$$

де  $D_1$  – довільна константа.

Константа  $D_1$  і безрозмірна швидкість поширення пластичної зони  $\beta = c/c_p$  повинні бути визначені з умови сопряження пластичної зони з зовнішньою зоною, примикаючою до пластичної. Для зовнішньої зони можуть застосовуватися різні математичні і фізичні моделі, тут використані дві найбільш поширені: модель пружної зони осередку деформації і модель зони, руйнованої радіальними тріщинами.

Упругая область очага деформации (в силу особенностей реализации технологического процесса прошивки) ограничена некоторой «жесткой» областью технологических инструментов (границы контейнера). В упругой области очага деформации имеем известные уравнения теории упругости, которые для радиального движения металла имеют вид (рис.3):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (37)$$

$$-\sigma_r = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (38)$$

$$-\sigma_\theta = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + 2G \frac{u}{r}, \quad (39)$$

$$-\sigma_\nu = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \quad (40)$$

где  $u(r, t)$  – радиальное смещение частиц металла;  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ,  $E, G$  – соответственно, модуль упругости Юнга и модуль сдвига прошиваемого металла;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Напряжение, по-прежнему, считается положительным для сжатия, и в выражении (40) учтено, что в рамках рассматриваемого подхода осевое удлинение прошиваемой заготовки сравнительно мало.

Исключив из уравнения (37) напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ , получим следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (41)$$

Из уравнения (41) следует, что скорость распространения упругой цилиндрической волны в прошиваемой трубной заготовке равна скорости распространения продольных возмущений  $a$ . Если некоторый момент времени, когда носик оправки достигает рассматриваемого сечения  $x = const$ , считать нулевым, то, к моменту времени  $t$ , упругая волна, в данном слое очага деформации, захватит область радиусом  $r = at$ . Отметим, что если упругая зона очага деформации по исходному предположению соседствует с пластической, то она расположена в кольце

$$R(t) < r < at \quad (42)$$

В случае, если носик оправки является коническим и движется в обтекающем потоке металла с постоянной скоростью, то упругая зона расположена в кольце  $ct < r < at$ . Необходимо отметить, что, в последнем случае, упругое поле является автомодельным, и в переменных

$$\xi = \frac{r}{ct}; \quad \bar{u} = \frac{u}{ct},$$

уравнение (41) принимает вид:

$$\xi^2 (1 - \gamma^2 \beta^2) \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} + \xi \frac{d\bar{u}}{d\xi} - \bar{u} = 0, \quad (43)$$



где  $\gamma = c/a$ . Область изменения переменной  $\xi$  в данном случае такова

$$1 < \xi < 1/\gamma. \quad (44)$$

Поскольку при  $r > at$  рабочая среда (прошиваемый металл) предполагается невозмущенной, то на фронте упругой волны  $r = at$  ( $\xi = 1/\gamma$ ) смещение  $u = 0$ , то есть, решение дифференциального уравнения (43) должно удовлетворять граничному условию

$$\bar{u} \Big|_{\xi=1/\gamma} = 0. \quad (45)$$

Уравнение (43) имеет замкнутое аналитическое решение, которое получим, введя новую переменную  $q = \bar{u}/\xi$ . Для переменной  $q$  будем иметь уравнение

$$\xi(1 - \gamma^2 \xi^2)q'' + (3 - 2\gamma^2 \xi^2)q' = 0. \quad (46)$$

Заметим, что, в силу (44), во всей упругой области очага деформации  $1 - \gamma^2 \xi^2 \geq 3 - 2\gamma^2 \xi^2 > 0$ , поскольку  $\gamma = \frac{c}{a} < 1$ . После замены  $q' = \psi$ , приведем (46) к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{d\psi}{\psi} = -2 \frac{\frac{3}{2\gamma^2} - \xi^2}{\xi \left( \frac{1}{\gamma^2} - \xi^2 \right)} d\xi,$$

решение которого представим в виде

$$\psi = A \frac{\sqrt{\gamma^{-2} - \xi^2}}{\xi^3},$$

где  $A$  – произвольная постоянная.

Отсюда, после преобразований получаем

$$q = B + A \left[ \frac{\gamma}{2} \ln \frac{\frac{1}{\gamma} + \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - \xi^2}}{\xi} - \frac{\sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - \xi^2}}{2\xi^2} \right],$$

и значит,

$$\bar{u}(\xi) = \xi \left[ B + A \left[ \frac{\gamma}{2} \ln \frac{\frac{1}{\gamma} + \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - \xi^2}}{\xi} - \frac{\sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - \xi^2}}{2\xi^2} \right] \right], \quad (47)$$

где  $B$  – произвольная постоянная, которая, в силу условия (45), оказывается равной нулю.

Таким образом, после преобразований, окончательно в упругой области имеем

$$\bar{u}(\xi) = \frac{A}{2} \left( \gamma \xi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma^2 \xi^2}}{\gamma \xi} - \frac{\sqrt{1 - \gamma^2 \xi^2}}{\gamma \xi} \right). \quad (48)$$

Согласно (38) и (39) для напряжений соответственно запишем

$$\sigma_r(\xi) = -AG \left( \frac{\gamma(\lambda + G)}{G} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma^2 \xi^2}}{\gamma \xi} + \frac{\sqrt{1 - \gamma^2 \xi^2}}{\gamma \xi^2} \right), \quad (49)$$

$$\sigma_\theta(\xi) = AG \left( \frac{\sqrt{1 - \gamma^2 \xi^2}}{\gamma \xi^2} + \frac{\gamma(\lambda + G)}{G} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \gamma^2 \xi^2}}{\gamma \xi} \right), \quad (50)$$

где

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad K = \lambda + \frac{2}{3}G = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (51)$$

Выражения (49)–(50) содержат произвольную постоянную  $A$  и неизвестный параметр  $\gamma$ , которые могут быть определены из условий стыковки решения с пластической зоной на границе очага деформации  $r = ct$  ( $\xi = 1$ ).

Замкнутое решение задачи можно реализовать путем конструирования области возмущения очага деформации, состоящей из внутренней пластической и внешней упругой зоны, или из внутренней пластической в сочетании с внешней разрушенной зоной.

Поэтому схема решения задачи предлагается следующей: Сначала рассматривается задача в предположении, что возмущенная область состоит из пластической зоны и зоны упругости. При этом, сначала, решается уравнение для определения параметра  $\beta$  (относительной скорости волны пластичности), а затем, по формулам (8) и (9), восстанавливаются поля напряжений и скоростей. Далее проверяется выполнение условия  $\sigma_\theta > -\sigma_0$  во всей возмущенной области. Если это условие выполняется, то указанным решением ограничиваемся.

Технологический процесс прошивки трубных заготовок в полые гильзы из различных марок сталей и их сплавов на прошивном прессе по рассматриваемой схеме корректно описывается вышеприведенной математической моделью. Полученные результаты определенно расширяют возможности анализа динамических явлений в очаге деформации и заметно уточняют содержание функционала осевого сопротивления оправки.

Необходимо отметить, что решение задачи по определению напряженно-деформированного состояния очага деформации при прошивке в динамической постановке, как видно из выбранной модели, требует реализации стандартного математического аппарата. Для определения силы сопротивления осесимметричной оправки потоку прошиваемого металла, предварительно нагретого до заданной технологическим процессом температуры, нетрудно получить функцию осевого сопротивления согласно [3; 4].

Динамические особенности очага деформации существенно дополняют имеющиеся представления о напряженно-деформированном состоянии металла в процессе прошивки. Это позволяет наметить пути совершенствования процесса прошивки и разработать рациональную форму технологического инструмента.

Необходимо подчеркнуть, что, поскольку, процессы прошивки, в рамках выбранной динамической модели очага деформации, представляют волновые процес-

сы, то путем введения внешних управляющих воздействий, например, высокочастотных колебаний, возможно добиться повышения эффективности процесса прошивки.

### **Выводы.**

1. Разработана математическая модель процесса прошивки (экспандирования) осесимметричной трубной заготовки на прошивном прессе.
1. Для принятых расчетной схемы и динамической модели процесса прошивки трубной заготовки получены уравнения для расширения границ соответствующих пластической и упругой зонам в очаге деформации.
2. Получена аналитическая зависимость, характеризующая скорости распространения фронта пластической деформации от скорости внедрения осесимметричной оправки.
3. Определены динамические характеристики возникновения волновых явлений в прошиваемом металле в условиях воздействия со стороны оправки, что, существенно, дополняет ранее известные представления о напряженно-деформированном состоянии очага деформации процесса прошивки.
4. Установлены поля напряжения и деформаций во всех зонах возмущенной области очага деформации.
5. Выбором рациональных параметров инструмента и процесса прошивки, на соответствующих этапах технологического проектирования и эксплуатации, может быть достигнуто повышение эффективности процесса прессования труб.

### **Библиографические ссылки**

1. Данилов Ф.А. Горячая прокатка и прессование труб / Ф.А. Данилов, А.З. Глейберг, В.Г. Балакин – М., – 1972. – 576 с.
2. Медведев М.И. Совершенствование процесса прессования труб / М.И. Медведев, Ю.Г. Гуляев, С.А. Чукмасов. – М., – 1986. – 151 с.
3. Перлин И.Л. Теория прессования металлов / И.Л. Перлин – М., – 1964. – 344 с.
4. Гуляев Г.И. Прессование стальных труб и профилей / Г.И. Гуляев, А.Е. Притоманов, О.П. Дробич и др. – М., – 1973. – 192 с.
5. Данченко В.Н. Технология трубного производства. Учебник для вузов / В.Н. Данченко, А.П. Коликов, Б.А. Романцев, С.В. Самусев – М., – 2002. – 640 с.
6. Коликов А.П. Новые процессы деформации металлов и сплавов / А.П. Коликов, П.И. Полухин, А.В. Крупин и др. – М., – 1986. – 351 с.
7. Ильюшин А.А. Пластичность / А.А. Ильюшин – М., 1948. – 271 с.
8. Соколовский В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский – М., 1950. – 340 с.
9. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н.И. Безухов – М., 1968. – 512 с.
10. Томленов А.Д. Теория пластических деформации металлов / А.Д. Томленов – М., 1951 – 200 с.
11. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов – М., 1969. – 420 с.
12. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин – М., 1975. – 400 с.
13. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили – М., 1949. – 250 с.
14. Михлин С.Г. Основные уравнения математической теории пластичности / С.Г. Михлин – Л., 1934. – 171 с.
15. Ландау Л.Д. Теоретическая физика Т. 7. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М., 1987. – 248 с.

*Надійшла до редакції 08.12.09*

УДК 539.3

В.А. Куземко, М.О. Дедик

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

## РАЗРУШЕНИЕ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА, ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

С помощью энергетического критерия локального разрушения получена зависимость предельной нагрузки, приложенной к пластине, от длины трещины. Проведен анализ, получены интервалы изменений нагрузки, в границах которых развитие трещины осуществляется устойчиво.

*Ключевые слова* трещина, предельная нагрузка, энергетический критерий

За допомогою енергетичного критерію локального руйнування отримано залежність граничного навантаження, прикладеного до пластини, від довжини тріщини. Проведено аналіз, отримано інтервали зміни навантаження, в межах яких розвиток тріщини може відбуватися стійко.

*Ключові слова* тріщина, граничне навантаження, енергетичний критерій

Using the energy criterion of local failure obtained dependence of the limit load of crack length, attached to the plate. The analysis were obtained ranges of load, within which the development of cracks is carried out sustainably.

*Keywords* crack, limit load, energy criteria

**Введение.** При исследовании предельного равновесия хрупких тел, содержащих дефекты типа трещин, требуется определить критическое значение внешней нагрузки, при достижении которой трещина начинает распространяться. Как показывают эксперименты и расчеты, в случае взаимодействия трещины с препятствиями и границами, ее развитие может происходить устойчиво, без окончательного разрушения тела в значительном диапазоне изменения нагрузки. В элементах конструкций, работающих при определенных внешних нагрузках и определенных режимах их изменения, наличие устойчивых трещин не опасно. Их срок службы можно значительно продлить, искусственно усиливая конструкцию.

В представленной работе исследуется прочность подкрепленной ребрами жесткости упругой пластины, с прямолинейной трещиной-разрезом нормального отрыва.

**Постановка задачи.** Чтобы предотвратить лавинообразное, неустойчивое развитие уже имеющейся трещины в пластине, ее часто подкрепляют ребрами жесткости (рис. 1).

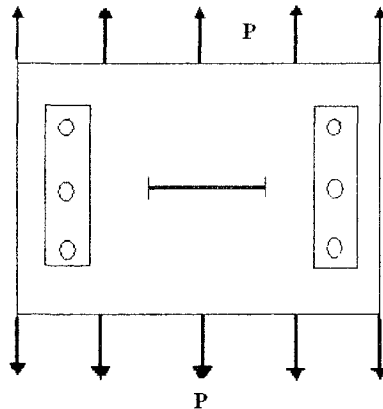


Рис. 1. Физическая схема задачи

Смоделируем эту задачу следующим образом [2]. В расчете обычно принимаются во внимание только ближайшие к линии трещины заклепки, так как влияние более удаленных незначительно. Пара заклепок, препятствующих развитию трещины, представляется в виде двух заданных равных противоположно направленных сжимающим сосредоточенных сил величины  $F$  (рис.2). Предполагается, что длина трещины  $2l$  значительно меньше линейных размеров пластины, поэтому последнюю будем считать бесконечной. Задача симметрична относительно координатных осей  $x, y$ . Пластина на бесконечности находится под действием равномерно распределенных усилий интенсивности  $P$ .

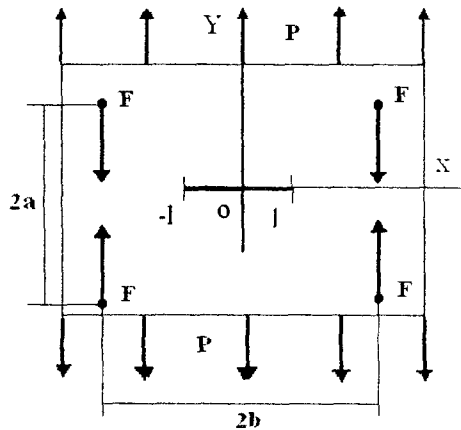


Рис. 2. Математическая схема к постановке задачи

На основании энергетического критерия локального разрушения определим предельную величину усилий  $P$  в зависимости от длины трещины (при фиксированном значении силы  $F$ ).

**Метод решения.** Задача об определении напряженно-деформированного состояния бесконечной упругой плоскости, ослабленной трещиной-разрезом и находящейся под действием распределенных усилий и сосредоточенных сил, численно решена с помощью одного из вариантов метода граничных элементов – метода разрывных смещений [1]. При этом предполагалось, что берега трещины не взаимодействуют и свободны от внешних нагрузок.

Анализ напряженного состояния свидетельствует о том, что напряжения имеют корневую особенность в кончике трещины, а их эпюры – локальные экстремумы в окрестностях точек приложения сосредоточенных сил. В зависимости от соотношения интенсивности  $P$  и величины сосредоточенной силы  $F$  они могут менять здесь знак. Следовательно, при увеличении длины трещины и приближении ее кончика в окрестность этих точек последний может попадать в область сжимающих усилий, препятствующих развитию трещины.

Определение критической нагрузки  $P^*$  проводится на основании энергетического критерия разрушения [3;4]: трещина начинает распространяться, когда инвариантный  $J$  – интеграл достигает предельного значения  $J_c$  (константа материала):

$$J = J_{lc} \text{ при } P = P^*, \quad (1)$$

где

$$J = \int_S \left[ \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} n_\nu \right] dS. \quad (2)$$

Подынтегральная функция в интеграле (2) определяется на основании полученного численного решения задачи теории упругости. Интегрирование ведется по произвольному контуру  $S$ , который охватывает конец трещины и опирается на ее берега. Процедуру численного определения интеграла (2) можно [4] значительно упростить, если представить контур  $S$  в виде прямоугольника (рис. 3), длина которого значительно больше ширины ( $\alpha \gg \delta$ ).

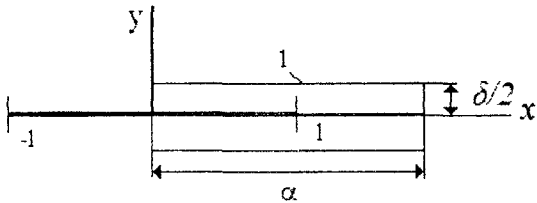


Рис. 3. Схема области интегрирования

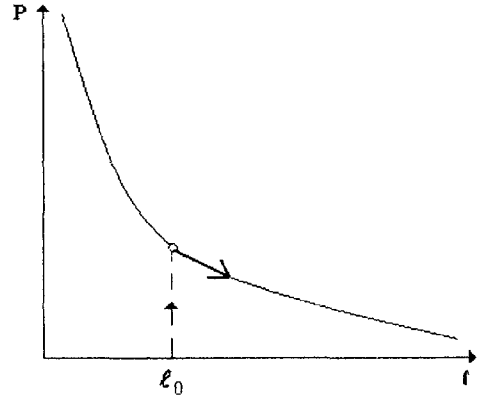


Рис. 4. Зависимость критической нагрузки от длины трещины без подкрепления

С учетом симметрии задачи интегрирование в формуле (2) в этом случае сводится (с достаточной степенью точности) к интегрированию лишь по стороне 1 прямоугольника (рис. 3).

**Результаты расчета.** Анализ результатов свидетельствует о том, что если отношение расстояний между заклепками (рис. 2)  $k = a / b$  превышает 0,45, то кривая зависимости  $P^*(l)$  (рис.4) будет монотонно убывающей и разрушение происходит так же, как и в задаче Гриффитса [3].

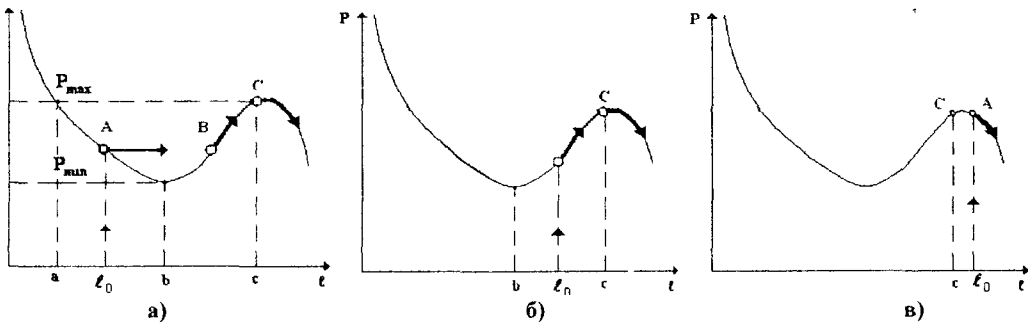


Рис. 5. Зависимость критической нагрузки от длины трещины с подкреплением

С увеличением растягивающей нагрузки длина трещины не меняется, пока растущая нагрузка остается меньше критического значения, соответствующего выбранной длине трещины. По достижении критического значения нагрузки трещина начинает расти неустойчиво, и тело разрушается (рис.4). Однако, если заклепки отстоят друг от друга достаточно близко по вертикали, на кривой появляется участок возрастания (рис. 5, а, б, в).

Отметим на кривой точку локального максимума  $C$ , абсцисса которого  $c$ , локального минимума  $b$  и точку, где высота кривой равна высоте точки локального максимума  $a$ . Рассмотрим вариант, когда значение начальной длины лежит между  $b$

и  $a$  (рис. 5, а). В этом случае размер трещины **не** меняется, пока нагрузка не достигнет критического значения  $A$ . Тогда при малейшем превышении нагрузки трещина увеличивается скачком и переходит в другое, устойчивое состояние, соответствующее тому же значению нагрузки  $AB$ , после чего устойчиво развивается с ростом нагрузки  $BC$  до максимального значения  $C$ . После этого трещина начинает катастрофически расти и тело разрушается. Рассмотрим следующий вариант: значение начальной длины трещины расположено между  $b$  и  $a$  (рис. 5, б). Размер трещины не меняется, пока нагрузка не достигнет критического значения  $A$ ; далее трещина развивается устойчиво, и все идет так же, как в предыдущем случае. Последний вариант: начальная длина трещины больше, чем расстояние между ребрами, и на графике (рис. 5, в) отмечается точкой, лежащей правее  $c$ . Когда достигнет критического значения  $A$ , тело разрушается, как и в первом случае.

Обратим внимание на второй и третий случаи. Здесь, пока нагрузка лежит в промежутке между высотами точек локального минимума и локального максимума кривой, длина трещины есть непрерывная функция приложенной нагрузки. Тело не разрушается и способно воспринять возрастающую нагрузку, несмотря на рост трещины. Предельное значение нагрузки, определяющее прочность рассматриваемой нами конструкции, одинаково для всех значений начальной длины трещины в диапазоне  $ac$ . Этот пример показателен в том отношении, что механика разрушения указывает универсальную характеристику прочности, не зависящую от начальной длины трещины. Такую характеристику желательно вводить при расчетах на прочность.

### Библиографические ссылки

1. Крауч С. Метод граничных элементов в механике разрушения / С. Крауч – М., 1980. – 256 с.
2. Партон В.З. Механика разрушения / В.З. Партон. – М., 1990 – 240 с.
3. Работнов Ю. Н. Введение в механику разрушения / Ю.Н. Работнов – М., 1987 – 80 с.
4. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов – М., 1974. – 640 с.

Надійшло до редколлегу 10.02.10

УДК 622.648.23:621.65:622.271.623

Б.А. Блюсс\*, Е.В. Семеновко\*, С.И. Криль\*\*

\*Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины

\*\*Институт гидромеханики НАН Украины

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ГИДРОМЕХАНИЗАЦИИ

Разработана методика расчета гидравлического уклона и критической скорости гидро-транспортирования полидисперсных россыпей и руд с частицами различной плотности, а также методика оценки интервалов изменения этих параметров в режиме установившихся пульсаций давления и расхода пульпы.

Ключевые слова: гидравлический уклон, критическая скорость, пульпа, турбулентное течение

**Розроблено методику розрахунку гідравлічного ухилу та критичної швидкості гідротранспортування полідисперсних розсіпів і руд із частинками різної густини, методику оцінки інтервалів зміни цих параметрів у режимі усталених пульсацій тиску й витрати пульпи.**

*Ключові слова* гідравлічний ухил критична швидкість, пульпа, турбулентна течія

**The method of analysis of specific hydraulic slope and the critical velocity of the hydrotransportation of polydisperse scattering and ore mineral with the diverse density particles was developed. Also, the elimination procedure of estimation of intervals of changing of such parameters in the regime of steady pressure fluctuation and flow-rate pulp was elaborated**

*Key words* hydraulic slope critical velocity, pulp, turbulent flow

**Введення.** По запасам полиметаллических руд, содержащих минералы титана, циркон, алюмосиликаты и прочие минералы, Украина считается монополистом в Европе и входит в первую десятку стран-поставщиков в мире. Большая часть минерального сырья представлена россыпными месторождениями, разработка которых ведется открытым способом с применением методов гидромеханизации, а обогащение россыпей – осуществляется гравитационными методами. В таких технологиях основными процессами гидромеханизации являются напорное гидротранспортирование и пульпообразование. Анализ условий эксплуатации и режимов работы гидротранспортных комплексов на карьерах полиметаллических россыпных месторождений Украины позволил выделить следующие факторы, приводящие к завышенным расходам воды и электроэнергии [1 – 3]. Во-первых, для материалов, составляющих полиметаллические россыпи, характерны не только полидисперсность, но и существенное различие в плотностях частиц, что недостаточно учитывается известными методиками расчета критической скорости и гидравлического уклона. Во-вторых, существующие методы расчета гидротранспортных систем ориентированы на средние значения параметров при установившемся режиме работы. Однако применение центробежных насосов сопровождается генерированием в трубопроводе установившихся пульсаций давления и подачи, которые провоцируют выпадение транспортируемых частиц на дно потока. В-третьих, при открытой разработке полиметаллических россыпей концентрация и плотность пульпы, фактически, определяются в процессе пульпообразования, которым управляет оператор гидромониторов без учета процесса гидротранспортирования. В современных условиях выбор рациональных параметров процессов гидромеханизации возможен только при комплексном учете всех этих факторов, что сдерживается отсутствием соответствующей научно-методической базы [1 – 3].

**Целью данной статьи** является развитие научных основ гидромеханизации при открытой разработке россыпных месторождений путем учета закономерностей механических процессов, происходящих при пульпообразовании и гидротранспортировании полидисперсных материалов, содержащих частицы различной плотности, в режимах с установившимися пульсациями давления и расхода гидросмеси для минимизации энергоемкости и водопотребления технологий гидромеханизации.

Анализ существующих методик расчета параметров гидротранспорта при течении пульп, а также обобщение результатов экспериментов позволил авторам разработать метод расчета гидравлического уклона и критической скорости гидротранспортирования полидисперсных материалов с частицами различной плотности, а также обосновать диапазоны изменения значений этих величин при установившемся пульсирующем режиме течения пульпы. С учетом того, что природные и техногенные россыпи являются смесью разнородных по плотности и средней крупности твердых частиц и представляют собой совокупность  $n'$  различных твердых материалов, каждый из



котóryх характеризується щільністю  $\bar{\rho}_s^i$ , середнім діаметром частиць  $\delta_i$ , гранулометричним складом і масовою долей .. в сумі твердих матеріалів ( $i = 1, 2 \dots n'$ ), для розрахунку гідравлічного уклону в сверхкритических режимах, а також критическої шкорути гідротранспортування отлучены следующие формулы [4 – 7]:

$$i = \wp \phi i_w + (1 - \sigma_i) i_g \sin \phi + i_z \rho_*; u_{kp} = (1 + \psi_{kp}) Fr_{kp} \sqrt{gD}; \quad (1)$$

$$i_w = \frac{\lambda_w Q_w^2}{2gDF^2}; i_g = \frac{1 + \bar{\rho}_s C (1 - z_0)}{1 + C (1 - z_0)}; \frac{Fr_{kp}}{A_1 \Phi} = \ln(A_2 Fr_{kp}); F = 0.25 \pi D^2; A_2 = \frac{\sqrt{gD}^{3/2}}{10v_w};$$

$$\Phi = C(1 - C) \sqrt{\frac{th(2.38 \psi_{kp}^{0.433})}{1 + A_0 th(11.41 \psi_{kp}^{0.86})}} \sqrt{\frac{(1 + \psi_{kp}) \left( 1 + 0.527 \cos \left( \frac{90 n_{0.01} C}{1 - (1 - n_{0.01}) C} \right) \right)}{C^2 + R_{kp} (1 + \psi_{kp}) (1 - C)^2 \psi_{kp}^2}};$$

$$A_0 = 0.52 lg^{1.65} \left[ \sum_{i=1}^{n'} \theta_i \frac{w'_s \delta_i}{v_w} \right]; n_s = 0.76 - 0.16 th \left( 2.82 lg^2 \left[ \sum_{i=1}^{n'} \theta_i \frac{w'_s \delta_i}{v_w} \right] \right); C = \sum_{i=1}^{n'} C^i;$$

$$\wp \phi = \sigma \wp \cos \phi + (1 - \sigma) \wp' (1 - \cos \phi); A_1 = 1.316 \left( \sum_{i=1}^{n'} \theta_i \frac{\delta^i}{D} \right)^2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n'} \theta_i A_r^i};$$

$$\wp = z_1 \left( 1 - th \left[ 5.33 \left( 1 - Fr_{kp} \frac{\sqrt{gD}}{Q_w} F \right) \right] \right) \varepsilon; \wp' = \frac{1}{(1 - C')^2} \frac{1}{1 + z_0 C'} + Rz_0^2; C' = \sum_{i=1}^{n'} C'^i;$$

$$n_c = 4 \left( 1 - 2.1 \operatorname{sign} \left[ lg \left( \frac{w'_s \delta_i}{5.01 v_w} \right) \right] th \left[ \frac{1}{2} \left| lg \left( \frac{w'_s \delta_i}{5.01 v_w} \right) \right| \right]^4 \right)^3; z_0 = 1 + \frac{w_s F}{Q_w} (1 - C')^{n_c};$$

$$C^i \left[ 1 - \frac{f_p^i}{2.22} \left( 1 - \frac{3.3 C^i}{2 - n_{0.1}^i} \right)^{2.16} \right] = \frac{\psi^i}{1 + \psi^i}; C'^i \left[ 1 - \frac{w'_s}{u_w} (1 - C'^i)^{n_i} \right] = \psi^i; R = \sum_{i=1}^{n'} \frac{\bar{\rho}_s^i \psi^i}{1 + \psi^i};$$

$$f_p^i = 1 + \operatorname{sign} \left[ lg \left( \frac{w'_s \delta_i}{7.59 v_w} \right) \right] th \left[ 0.967 \left| lg \left( \frac{w'_s \delta_i}{7.59 v_w} \right) \right| \right]^{0.6}; \psi^i = \frac{G_s}{\rho_0 Q_w} \frac{\theta_i}{\bar{\rho}_s^i}; \psi = \sum_{i=1}^{n'} \psi^i;$$

$$z_1 = \left[ \frac{1}{(1 + \psi)(1 - C)^2} + R \left( \frac{\psi}{C} \right)^2 \right]; \varepsilon = \frac{lg^{1.65} \left( \sum_{i=1}^{n'} \theta_i \frac{w'_s \delta_i}{v_w} \right) th(11.41 \psi_{kp}^{0.86})}{1.92 + lg^{1.65} \left( \sum_{i=1}^{n'} \theta_i \frac{w'_s \delta_i}{v_w} \right) th(11.41 \psi_{kp}^{0.86})};$$

где  $\bar{\rho}_s$  – средневзвешенная плотность транспортируемого материала;  $\sigma_i$  – доля длины трубопровода, приходящаяся на горизонтальные участки;  $i_z$  – геодезический уклон;  $\rho_*$  – эффективная плотность пульпы,  $Q_w$  – объемный расход жидкой

фазы;  $u_{кр}$  – критическая скорость пульпы;  $D$  – диаметр трубы;  $\nu_w$  – кинематический коэффициент вязкости воды;  $C$  – объемная концентрация;  $w_s$  – средневзвешенная гидравлическая крупность твердой фазы;  $n_{0.01}$  – объемная доля в материале частиц диаметром менее 0.01 мм;  $\psi_{кр}$  – отношение расходов фаз в критическом режиме;  $\phi$  – угол наклона трубопровода к горизонту;  $Ar_i$  – параметр Архимеда для частиц  $i$ -го материала;  $G_s$  – грузопоток;  $\rho_0$  – плотность воды.

Для оценки достоверности разработанного метода расчета использовались данные экспериментов по гидротранспорту россыпи Восточного участка Малышевского месторождения титан-цирконовых песков (рис. 1 и 2). Из рис. 1 и 2 видно, что разница между экспериментальными величинами и рассчитанными по предложенной в настоящей работе методике не превышает 10 %, и она меньше, чем при использовании других методик.

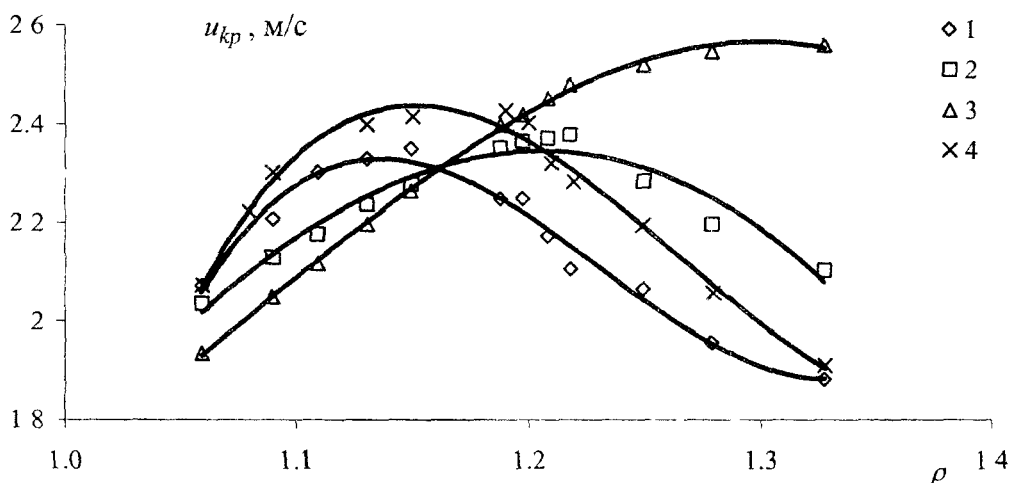


Рис. 1. Сравнение экспериментальных и расчетных зависимостей критической скорости при гидротранспортировке песков карьеров ВГМК по трубопроводу диаметром 150 мм от плотности пульпы: 1 – результаты экспериментов Харьковского отделения ВОДГЕО; 2 – расчет по методике НИИСПа; 3 – расчет по методике П-59-72; 4 – расчет по предлагаемой методике

При установившихся пульсациях давления и расхода гидросмеси в настоящем исследовании предлагается вместо рабочей точки системы определять возможную область ее работы, заключенную между максимально и минимально возможными расходно-напорными характеристиками (РНХ) трубопровода и насоса. С учетом формул (1) рабочие точки гидротранспортной установки, ограничивающие возможную область работы, и значения критических подач пульпы определяются из решения уравнений [8; 9]

$$\gamma - \Delta Z \rho_* - \beta Q - \alpha Q^2 - (1 - \sigma_l) i_g L \sin \phi = (1 \pm \Gamma) \varphi \phi^{\lambda_w} L \pm \delta \Gamma' Q;$$

$$\frac{Fr_{кр}}{A_1 \Phi} = \sqrt{1 \pm \Gamma} \ln(A_2 Fr_{кр}); \quad (2)$$

$$\Gamma = \frac{2\delta\Lambda}{\varphi \phi^{\lambda_w} u} \frac{a D}{L} \sqrt{1 + s^2}; \quad s = \frac{A_k \lambda_w u}{\omega 2D};$$

$$\Gamma' = \beta + \alpha(2 + \delta)Q; \theta = \frac{\omega L}{a}; \Lambda = \left( \operatorname{cth}(2\theta) + \frac{\cos(2s\theta)}{\operatorname{sh}(2\theta)} \right)^{-1},$$

где  $\Delta Z$  – перепад высот на трассе;  $L$  – длина трубопровода;  $\Gamma$  – параметр, учитывающий колебания расхода и давления пульпы;  $\omega$  – частота колебаний параметров потока пульпы;  $a$  – скорость распространения возмущений по трубопроводу;  $Q$  – подача насоса по пульпе;  $\gamma, \beta, \alpha$  – коэффициенты аппроксимации РНХ насоса;  $\delta$  – отношение амплитуды колебания скорости потока к ее стационарному значению;  $u$  – скорость течения воды в трубопроводе;  $A_k$  – параметр, зависящий от характеристик твердой фазы и РНХ магистрали.

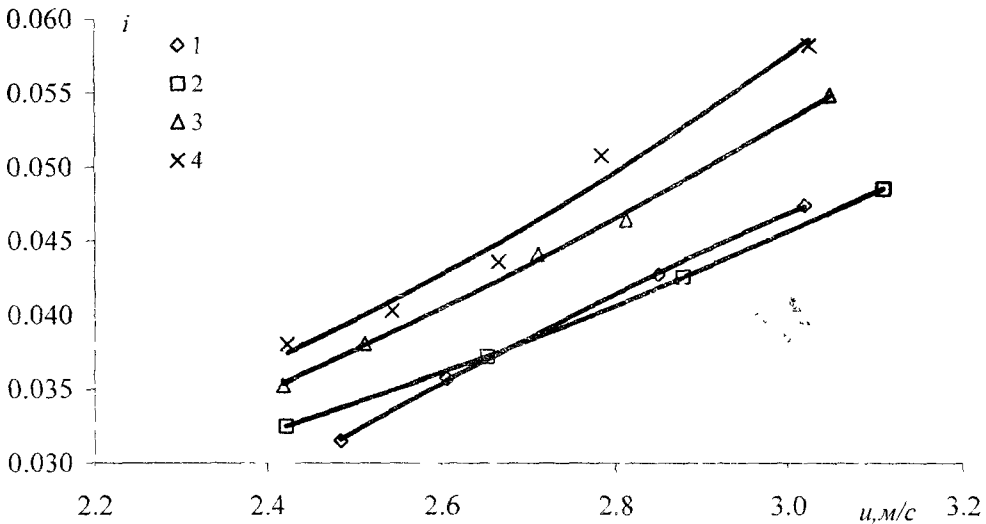


Рис. 2. Сравнение экспериментальных и расчетных зависимостей гидравлического уклона при гидротранспортировке песков карьеров ВГМК по трубопроводу диаметром 150 мм от скорости пульпы при различной относительной плотности: 1 – результаты экспериментов Харьковского отделения ВОДГЕО ( $\rho = 1,06$ ); 2 – расчет по предлагаемой методике ( $\rho = 1,06$ ); 3 – результаты экспериментов Харьковского отделения ВОДГЕО ( $\rho = 1,33$ ); 4 – расчет по предлагаемой методике ( $\rho = 1,33$ )

При этом определяются три значения критической скорости, которые различаются знаком и величиной параметра  $\Gamma$  в уравнениях (2). В первом случае величина  $\Gamma$  положительна, во втором – равна нулю, а в третьем – отрицательна. Из формул следует, что зависимость амплитуды колебаний дополнительного гидравлического уклона от частоты колебаний давления и расхода пульпы определяется величиной  $\Lambda\sqrt{1+s^2}$ . Численные исследования показали, что влияние параметра  $s$  на величину  $\Lambda$  проявляется в ограниченном интервале значений параметра  $\theta$  (рис. 3). При значениях  $\theta$ , превышающих 2,57, величина  $\Lambda$  может считаться равной единице при любых значениях  $s$ . Величина  $s$  определяет количество экстремумов в зависимости  $\Lambda(\theta)$ , а также их величины. При этом наличие экстремумов в рассматриваемой зависимости наблюдается только при значениях  $s$ , больших 1.

Для условий открытой разработки месторождений предложена модель процесса пульпообразования, учитывающая распространенную на карьерах россыпных

месторождений практику применения гидромониторов, а также разработана модель системы водоснабжения гидротранспортных карьерных установок, учитывающая как особенности процесса пульпообразования, так и разветвленность трубопроводов подачи воды. При разработке этих моделей предполагалось, что система водоснабжения карьерного гидротранспортного комплекса имеет одну водозаборную станцию, состоит из  $m$  забойных установок, на каждой из которых процесс пульпообразования обеспечивают  $k$  гидромониторов, а подача воды в зумпф осуществляется по  $n$  трубопроводам. В общем случае для расчета величин расходов в этой трубопроводной сети необходимо решить систему из  $2(k+n)m$  нелинейных алгебраических уравнений. Однако анализ реальных значений расходов воды в трубопроводах, различий в длине этих трубопроводов и в геодезических отметках забойных станций в условиях открытых россыпных месторождений позволил предложить ряд упрощений, с учетом которых режимы работы системы водоснабжения описываются следующими уравнениями [3, 10, 11]:

$$\left(z_g + (a_g + \alpha)k^2\right)Q_g^2 + n^2\alpha Q_z^2 + 2kn\alpha Q_g Q_z + k(b_g + \beta)Q_g + n\beta Q_z - \gamma_g = 0;$$

$$b_m = \frac{I_m B_m}{K_m};$$

$$k^2\alpha Q_g^2 + (z_z + n^2\alpha)Q_z^2 + 2kn\alpha Q_g Q_z + k\beta Q_g + n\beta Q_z - \gamma_z = 0;$$

$$a_m = \frac{I_m A_m}{K_m^2}; c_m = I_m C_m;$$

$$\beta = k(b_R + mb_m); \alpha = z_R + a_R + (z_m + a_m)m^2;$$

$$\gamma_g = \Delta H_g + \gamma^*; \gamma_z = \Delta H_z + \gamma^*; \gamma^* = c_m + c_R + c_g,$$

где  $\Delta H_g$  – перепад геодезических отметок точки водозабора и сопла гидромонитора;  $\Delta H_z$  – перепад геодезических отметок точек водозабора и подачи воды в зумпф;  $Q_g$  – расход воды через сопла гидромонитора;  $Q_z$  – расход воды через трубопровод, подающий воду в зумпф;  $z_z$  – гидравлическое сопротивление трубопровода, подающего воду в зумпф;  $z_g$  – гидравлическое сопротивление трубопровода, подводящего воду к гидромонитору;  $z_R$  – гидравлическое сопротивление трубопровода, подающего воду с междрудного целика на узел пульпообразования;  $z_m$  – гидравлическое сопротивление трубопровода, подающего воду по междрудному целику;  $c_R, b_R, a_R$  – коэффициенты аппроксимации РНХ насосов на промежуточной станции, размещенной на междрудном целике;  $c_g, b_g, a_g$  – коэффициенты аппроксимации РНХ насосов на бустерной насосной станции перед гидромонитором;  $c_m, b_m, a_m$  – коэффициенты аппроксимации РНХ насосов водозаборной станции;  $I_m$  – количество последовательных подъемов давления;  $K_m$  – количество параллельно работающих насосов;  $C_m, B_m, A_m$  – коэффициенты аппроксимации РНХ насосных станций, оборудованных несколькими насосами.

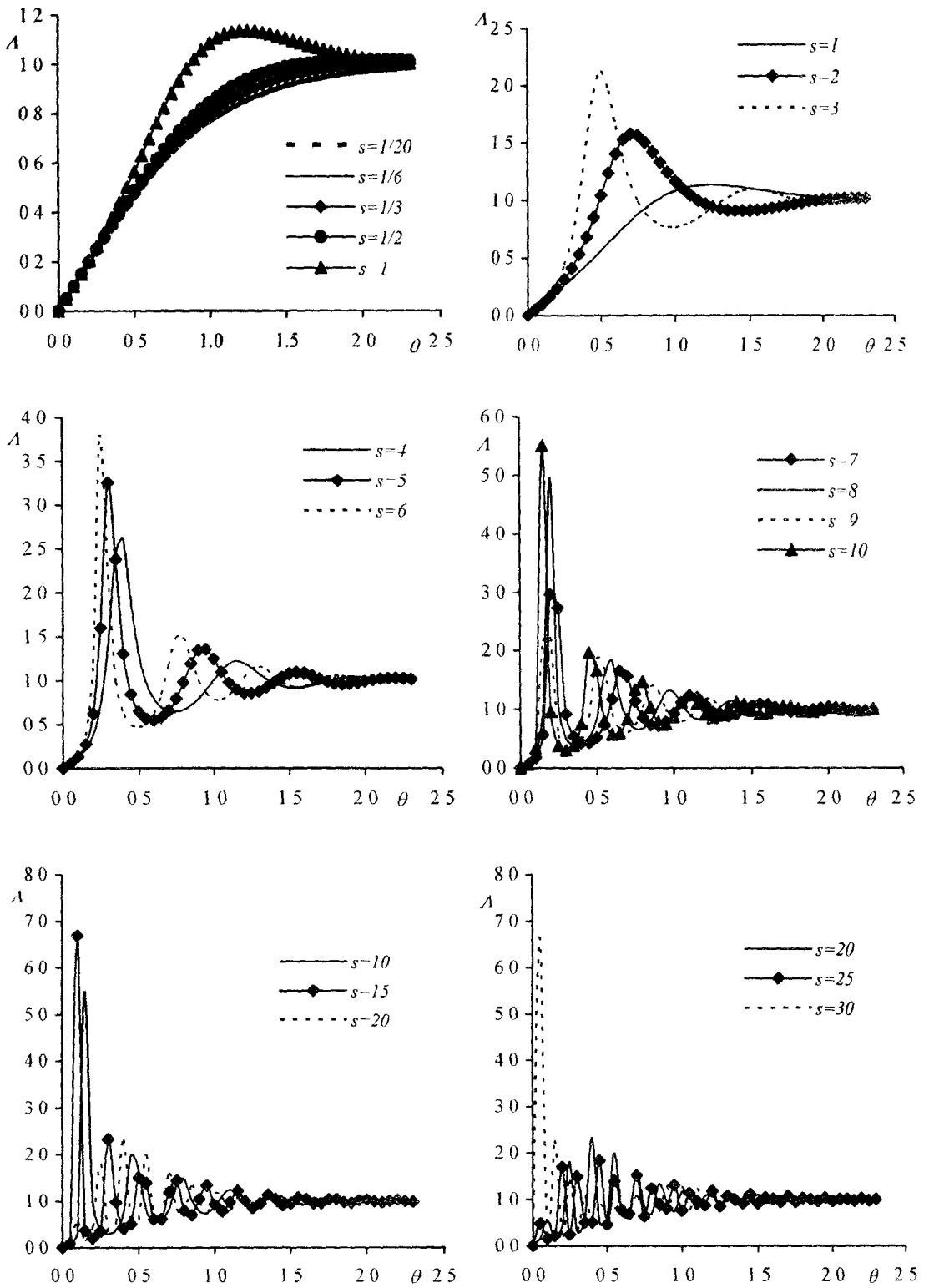


Рис. 3. Зависимость величины  $\Delta$  от  $\theta$  при различных значениях  $s$

Разработанная модель процесса пульпообразования учитывает зависимость параметров гидросмеси в зумпфе от расхода воды, подаваемой на гидромониторы и в зумпф, и количества гидромониторов, используемых для размыва горной массы. При этом концентрацию, плотность и массовый расход гидросмеси предлагается определять так [3, 10, 11]:

$$C_z = \frac{Y}{1+E+Y}, \rho_z = 1 + \frac{ArY}{1+E+Y}; \psi_z = \frac{Y}{1+E}, E = \frac{n}{k} q_z; Y = \frac{k_z}{k} A_g; q_z = \frac{Q_z}{Q_g}, \quad (4)$$

где  $C_z$  – концентрация гидросмеси в зумпфе, д. ед.;  $q_z$  – параметр пульпообразования;  $\rho_z$  – относительная плотность гидросмеси в зумпфе;  $E$  – показатель процесса пульпообразования,  $Y$  – показатель производительности гидромонитора;  $k_z$  – количество гидромониторов, работающих на забой,  $A_g$  – удельная производительность гидромонитора.

Обработка данных наблюдений, проведенных в условиях карьеров ВГМК (табл. 1), позволила получить эмпирические зависимости между параметрами процесса пульпообразования (рис. 4), сравнить их с теоретическими и подтвердить достоверность уравнений (4), а также установить зависимость параметров пульпы в грубопроводе от параметров процесса пульпообразования (рис. 5). Анализ графиков на рис. 5 позволил установить, что процесс пульпообразования на гидротранспортном комплексе ВГМК осуществляется в основном в двух диапазонах значений  $q_z$  (табл. 2).

Таблица 1

Характеристика режимов пульпообразования

Параметр	Режим пульпообразования				
	№1	№2	№3	№4	№5
Расход пульпы, м <sup>3</sup> /ч	3478	3352	3416	3481	3453
Расход воды, м <sup>3</sup> /ч	3217	2845	2923	3112	3019
Расход твердого, м <sup>3</sup> /ч	261	507	493	370	435
Плотность пульпы, т/м <sup>3</sup>	1,14	1,26	1,25	1,18	1,22
Производительность по твердому, т/ч	734	1425	1387	1038	1222
Удельный расход твердого, м <sup>3</sup> тв / м <sup>3</sup> в	0,082	0,178	0,169	0,119	0,145
Удельный расход воды, м <sup>3</sup> в / м <sup>3</sup> тв	13,16	5,67	5,93	8,44	7,18
Истинная концентрация пульпы, дол. ед.	0,079	0,144	0,138	0,101	0,120
Расходная концентрация пульпы, дол. ед.	0,075	0,151	0,145	0,106	0,126

Таблица 2

Параметры диапазонов изменения значений  $q_z$  в процессе пульпообразования

Область №	Диапазон изменения $q_z$		Среднее значение	Коэффициент вариации %
	От	До		
1	0,343	0,495	0,405	10,04
2	0,572	0,783	0,633	12,86

Совместное рассмотрение моделей системы водоснабжения и процесса пульпообразования и предложенной методики расчета параметров гидротранспорта позволяет при открытой разработке месторождений рассматривать все трубопроводные системы как единый технологический комплекс. Это обеспечивает прогноз параметров процессов гидромеханизации и оценку режимов работы трубопроводных установок.

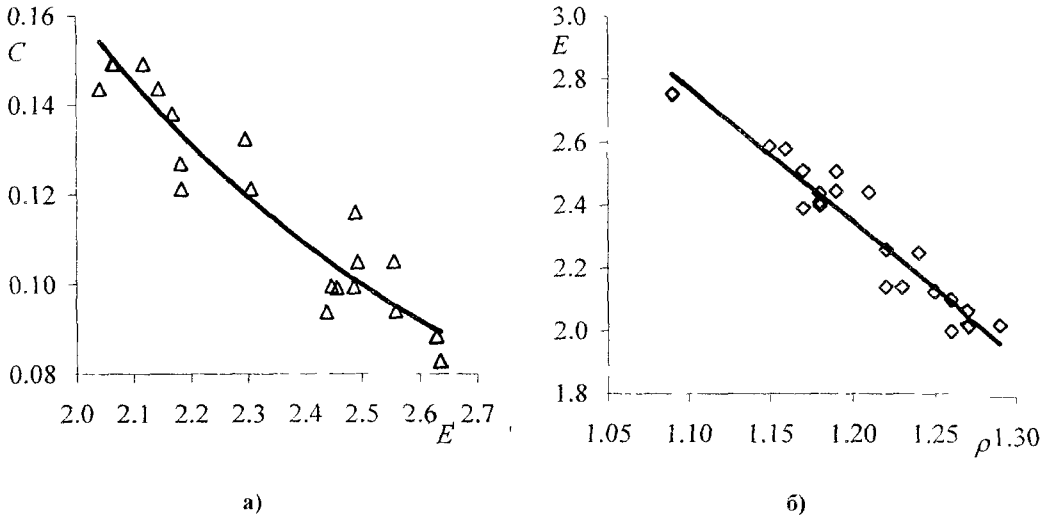


Рис. 4. Сравнение результатов расчетов согласно модели процесса пульпообразования с экспериментальными исследованиями зависимостей: а) объемной концентрации пульпы (дол. ед.) от  $E$  (ошибка не более 14 %); б)  $E$  от относительной плотности пульпы (ошибка не более 17 %).

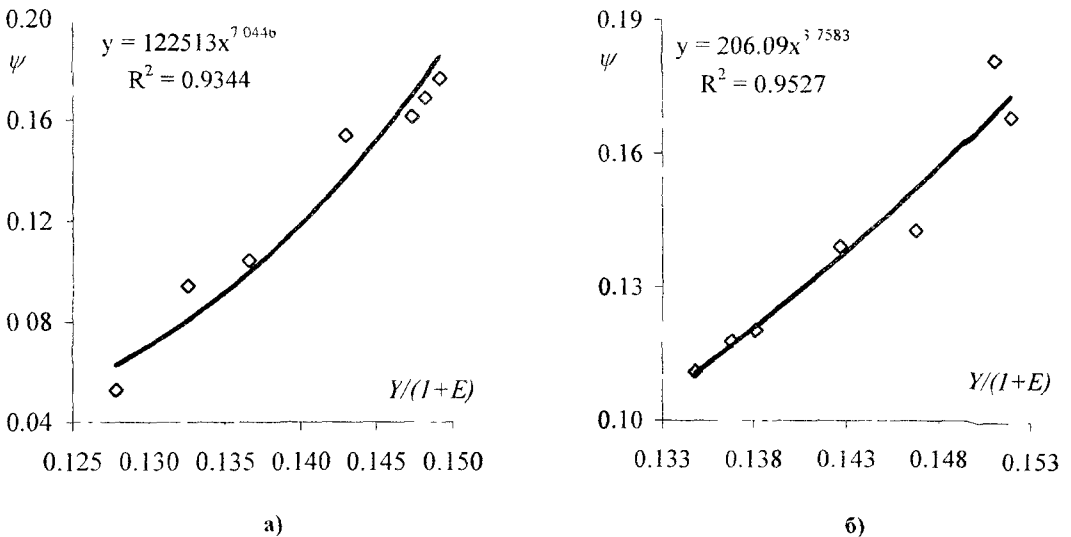


Рис. 5. Аппроксимация зависимости отношения объемных расходов твердой и жидкой фаз пульпы в трубопроводе от параметров процесса пульпообразования: а) режимы №1 и №3; б) режимы №2 и №4.

**Выводы.** Приведенные выше научные разработки прошли апробацию в промышленных условиях ВГМК в период с 2001 по 2008 г. Это позволило обосновать

следующие изменения в схеме гидротранспортирования: исключение из магистрали и демонтаж бустерной пульпонасосной станции, находившейся возле обогатительного производства, а также пульпонасосной станции, находившейся возле балки Глубокой; включение в магистраль новой бустерной пульпонасосной станции на межрудном целике; спрямление трубопроводов магистрали в месте предыдущего размещения пульпонасосной станции; оборудование и включение в магистраль новой бустерной пульпонасосной станции в месте спрямления трубопроводов; продвижение вслед за фронтом горных работ забойной пульпонасосной станции второй очереди на 1200 м; установка на всех пульпонасосных станциях второй очереди и на бустерных пульпонасосных станциях первой очереди насосов WBC18×20 (HD) с рабочими колесами диаметром 54"; изменение мест размещения насосов GIW LSA 18×20-44(45) с рабочим колесом диаметром 45" на гидротранспортных установках ВГМК; установка насоса Д2000 на каждой головной пульпонасосной станции непосредственно перед гидромонитором после отбора воды для подачи в зумпф по трубам диаметром 150 мм; исключение из схемы водоснабжения насоса второго подъема Д6300, находившегося в помещении пульпонасосной станции на борту карьера. Реализация этих технических предложений в период с 2005 по 2007 г.г. позволила предотвратить возникновение кавитационных и критических режимов работы; снизить потребление электроэнергии и оборотной воды; продлить срок эксплуатации гидротранспортного комплекса без установки дополнительного четвертого насоса.

### Библиографические ссылки

1. Проблемы разработки россыпных месторождений / [И.Л. Гуменик, А.М. Сокил, Е.В. Семенов, В.Д. Шурыгин]. – Днепропетровск, 2001. – 224 с.
2. Совершенствование режимов работы гидротранспортных установок технологий углеобогащения / [Е.Л. Звягильский, Б.А. Блюсс, Е.И. Назимко, Е.В. Семенов]. – Севастополь, 2002. – 247 с.
3. Обоснование параметров и режимов работы систем гидротранспорта горных предприятий // [Ю.Д. Баранов, Б.А. Блюсс, Е.В. Семенов, В.Д. Шурыгин]. – Д., 2006. – 416 с.
4. **Семенов Е.В.** Метод расчета параметров гидротранспорта отходов и продуктов обогащения / Е.В. Семенов, С.И. Криль // Обогащение полезных ископаемых, 2006. – №25(66)-26(67). – С. 176 – 183.
5. **Криль С.И.** Расчет параметров гидротранспорта песков россыпных и техногенных месторождений / С.И. Криль, Е.В. Семенов // Металлургическая и горнорудная промышленность. – №5. – 2006. – С. 77 – 80
6. **Криль С.И.** Расчет параметров гидротранспорта разноплотностных полидисперсных материалов / С.И. Криль, Е.В. Семенов // Промышленная гидравлика и пневматика. – 2006. – №3(13). – С. 38 – 43.
7. **Блюсс Б.А.** Расчет параметров трубопроводных систем для транспортирования технологических пульп / Б.А. Блюсс, Е.В. Семенов, М.Н. Лившиц // Физико-технические проблемы разработки месторождений полезных ископаемых. – 2009. – №1. – С. 29 – 34.
8. **Блюсс Б.А.** Моделирование пульсационных процессов при нестационарном течении гидросмеси в круглом трубопроводе / Б.А. Блюсс, Е.В. Семенов // Вибрации в технике и технологиях. – 2007. – №3(48). – С. 93 – 96.
9. **Блюсс Б.А.** Расчет параметров трубопроводных систем для транспортирования технологических пульп / Б.А. Блюсс, Е.В. Семенов // Обогащение руд. – 2008. – №1. – С. 29–34.
10. **Блюсс Б.А.** Обеспечение эффективной работы карьерных гидротранспортных комплексов с учетом процесса пульпообразования / Б.А. Блюсс, Е.В. Семенов, В.Д. Шурыгин // Разработка рудных месторождений. – 2005. – Вып. 89. – С. 15 – 19.



11. Блюсс Б.А. Расчет термогидромеханических параметров трубопроводного транспорта полидисперсных материалов / Б.А. Блюсс, Е.В. Семенов // *Металлургическая и горнорудная промышленность*. – №1. – 2005. – С. 85 – 89.

Надійшла до редколегії 15.02.10

УДК 502: 519.6

Е.Р. Абрамовский

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

## **АЭРОЛОГИЯ ОБЪЕКТОВ ГОРОДСКОЙ ЗАСТРОЙКИ В РАСЧЕТАХ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОЗДУШНОЙ СРЕДЫ**

Выполнен анализ поля воздушных потоков вокруг наиболее типовых городских сооружений. На основе выполненных расчетов и использования экспериментальных данных получены полумпирические соотношения, позволяющие определить коэффициенты сопротивления и боковых сил, которые действуют на городские сооружения при различных скоростях и направлениях ветра. Наличие таких данных позволяет определить характер потоков загрязненной воздуха в нижнем слое городской атмосферы.

*Ключевые слова:* ветровой поток, городские объекты, аэродинамические силы, загрязнение воздуха

Проведено аналіз поля повітряних потоків біля найбільш типових міських споруд. На основі проведених розрахунків і використання експериментальних даних отримано напівемпіричні співвідношення, які дозволяють визначити коефіцієнти опору і бокових сил, що діють на міські споруди при різних швидкостях і напрямках вітру. Наявність таких даних дозволяє визначити характер потоків забрудненого повітря в нижньому шарі міської атмосфери.

*Ключові слова:* вітровий потік, міські об'єкти, аеродинамічні сили, забруднення повітря

The wind flow field near the typical city structures is studied and analyzed. Semi empirical relations, which make it possible to determine aerodynamic forces, acting on buildings and structures, are obtained on the basis of calculations and the use of experimental dates. Such relations can be used in analysis of polluted air flow within the lower layer of city atmosphere.

*Keywords:* wind flow, city buildings and structures, aerodynamic forces, air pollutions

**Введение.** Характер распространения загрязнений в рамках застроенной территории, существенным образом, зависит от высоты над поверхностью земли, на которой рассматривается ветровое течение. Ветровой поток над городской территорией можно условно разделить по высоте на три слоя. Первый, околосредний, имеет толщину, обусловленную средней высотой зданий и других объектов. Второй – расположен над околосредним и имеет такую толщину (высоту), на которой сохраняется влияние поверхностной структуры. Третий слой начинается на высоте, где влияние этой структуры отсутствует. Благодаря турбулентному характеру ветрового потока и вертикальному перемешиванию загрязнение поступает во все три слоя, но распространяется с различной скоростью. Наиболее важным с точки зрения оценки вредного воздействия загрязнений на жителей города есть нижний слой и, особенно, пешеходные зоны с высотой примерно 2 м над поверхностью земли. Для анализа ветровых потоков в околосреднем слое необходимо исследовать аэрологию городских объектов, таких как отдельные здания, сооружения, уличные каньоны и т. п. Речь идет в определении давления на поверхности зданий и сооружений, их лобовом сопротивлении, а также о характере потоков непосредственно возле этих объектов. Следует заметить, что задачи определения

этих параметров для отдельных сооружений и их взаимного влияния в зависимости от вида застройки являются очень сложными [1; 2]. Приближенные решения получены только для наиболее простых задач. Наиболее надежными методами исследований остаются продувки моделей в аэродинамических трубах, гидравлических лотках, а также измерения параметров полномасштабного потока вокруг реальных объектов.

Для расчета течений около плохо обтекаемых тел довольно широко применяются приближенные, полуэмпирические методы. Использованию их для исследования взаимодействия типовых городских объектов с ветровым потоком и посвящена предлагаемая работа.

Рассмотрим физическую картину течения, реализующуюся в окрестности объекта. Упрощенным вариантом является, так называемое, двумерное течение. Имеется в виду поток вокруг строения, которое имеет большой (бесконечный) размер по длине  $l$  по отношению к высоте  $h$  и ширине  $b$  (рис.1). Предполагается, что ветровой поток направлен перпендикулярно к передней стене здания и рассматривается в плоскости  $xOz$ . Здание имеет форму параллелепипеда.

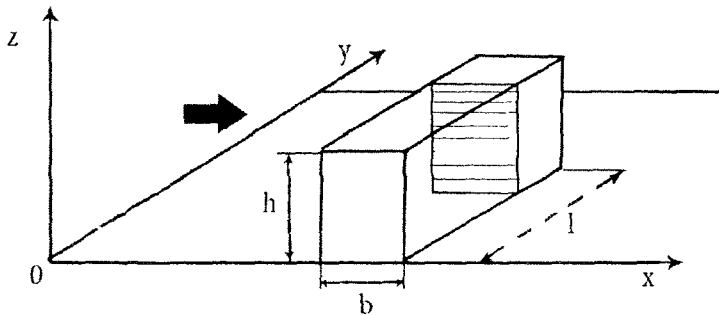


Рис. 1. Двумерный поток возле здания большой длины (в плоскости заштрихованного сечения)

Если длина здания существенно превышает его высоту и ширину то в центральном сечении, показанном на рис.1, реализуется картина течения, которое можно считать двумерным. В данном случае параметры этого течения являются функциями лишь координат  $x$  и  $z$ . Направление векторов скорости в поле ветрового потока условно изображено на рис. 2.

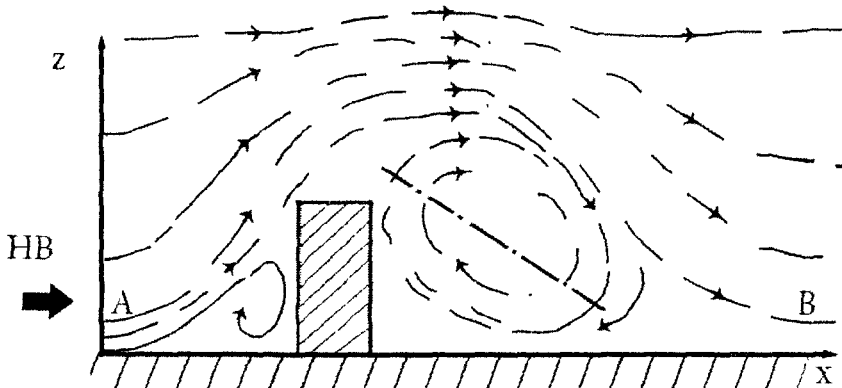


Рис. 2. Общая картина ветрового течения вокруг здания в двумерном приближении ( $HB$  – направление ветра)

Когда поток воздуха встречает на своем пути здание в форме параллелепипеда, то он, еще не достигая передней стенки на расстоянии приблизительно  $2h$ , начинает подниматься вверх и при этом достигает высоты тоже равной  $2h$  приблизительно на расстоянии  $1,5h$  от задней стенки. В дальнейшем, поток опускается вниз и достигает поверхности земли уже на расстоянии  $5 \div 6h$ . При этом возникают две вихревые зоны – одна, более мощная, позади здания, и вторая, значительно меньшая – перед ней. Вихревая зона позади здания ограничена сверху так называемой «нулевой линией» потока. Начало и конец ее обозначены буквами  $A$  и  $B$ . Можно отметить, что теневая вихревая зона имеет циркуляционную форму, а линии тока образуют своеобразные эллипсы. Большая ось эллипса показана штрих-пунктиром и наклонена под углом к оси  $x$  приблизительно на  $6^\circ - 7^\circ$ . Обозначенная картина течения соответствует данным экспериментов, которые проводились в аэродинамических трубах в гидроротках и при натурных измерениях ветрового погока возле зданий [2].

Если высота здания  $h$  значительно превышает ее ширину  $b$  (при значительной длине  $l$ , то приземной поток можно рассматривать как двухмерный уже в новой плоскости  $xu$  (рис. 3).

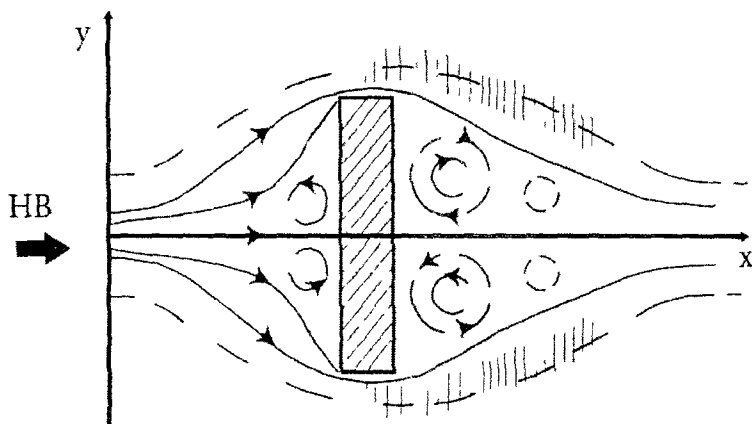


Рис. 3. Картина течения возле высокого и длинного здания ( $HV$  – направление ветра). Вертикальной штриховкой обозначены зоны высоких скоростей

Из рисунка видно, что в этом случае циркуляционные звенья возникают в горизонтальной плоскости как непосредственно перед зданием, так и за ним. Такую картину течения можно зафиксировать на незначительной высоте (приблизительно 2 м над поверхностью земли). Следует отметить, что рассмотренные модели течения являются достаточно упрощенными. Вихревые зоны, показанные на рис. 2 и рис. 3, возникают возле сооружения одновременно и взаимодействуют между собой, то есть течение будет пространственным, трехмерным. Каждое из сооружений может быть произвольно ориентированным по отношению к направлению ветра. Картина течения зависит от типа расположения зеленых насаждений, топографии местности и других факторов. Сюда нужно добавить также тот фактор, что скорость ветра в пограничном слое изменяется с высотой. Более того, течение вокруг сооружения является также нестационарным, поскольку вихри срываются из острых кромок здания с определенным интервалом. Таким образом, в данном случае для анализа кроме числа Рейнольдса нужно использовать и параметр Струхала, который определяет периодические явления в потоке

При этом

$$Re = \frac{Vl}{\nu}, \quad (1)$$

$$Sh = \frac{Nl}{V}, \quad (2)$$

Здесь  $N = 1/T$ ,  $T$  – период колебания,  $l$  – характерный размер,  $V$  – скорость,  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости.

Для расчета течения воздуха с использованием приближенных моделей применяются разные методы. Метод конформных отображений позволяет построить линии потока, подобные тому, что возникают при обтекании профиля Жуковского (рис. 4).

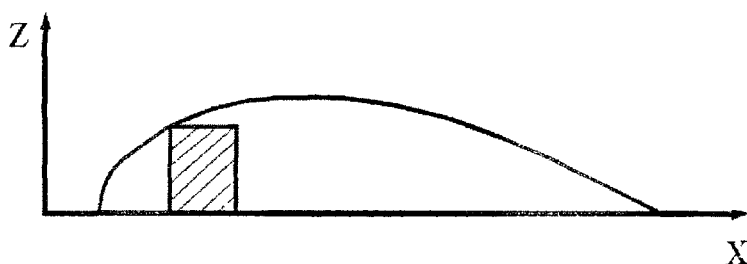


Рис. 4. Нулевая линия тока при обтекании здания в соответствии с конформным отображением

Детальное описание построения можно найти, например, в [2]. Здесь приводятся все основные расчетные соотношения, дается метод элементарных источников и стоков, которые необходимо расположить определенным образом в фиксированных точках геометрической фигуры, отображающей поле течения. Если задаться интенсивностью сосредоточенных источников и стоков, то можно построить линии тока вокруг сооружения, определить скорости течения, а также построить форму вихревой зоны. Для расчета течения вокруг сооружений широко используется метод дискретных вихрей, с которым можно ознакомиться в [6; 7] и др.

Как было отмечено ранее, к настоящему времени еще не разработаны надежные математические модели для расчета необходимых параметров таких течений. Задача усложняется тем, что городские сооружения, как правило, расположены на местности в определенном порядке на небольшом расстоянии друг от друга и создают так называемый «городской лабиринт». Течение воздуха в таком лабиринте на высоте 2-х метров над поверхностью земли (высота расположения пешеходов) вызывает наибольший интерес, поскольку именно на этом уровне появляется необходимость определять концентрацию воздушных загрязнений.

Наиболее надежными инструментами исследования пространственных течений вокруг сооружений есть лабораторные эксперименты в аэродинамических трубах, а также натурные измерения параметров ветрового потока. Экспериментальные данные этого типа приведены в [1-4] и др.

Рассмотрим некоторые результаты исследований поля течения вокруг сооружений и данные о силовом действии потока на их поверхность. Пространственная картина течения с наветренной стены здания имеет вид, изображенный на рис. 5.

Распределение коэффициента давления на поверхности сооружений в виде куба и высокого сооружения в виде параллелепипеда, при набегании ветра по нормали к передней стенке, показано на рис. 6. Коэффициент давления получен из выражения

$$\bar{p} = \frac{2(p - p_\infty)}{\rho V_\infty^2} \quad (3)$$

В этом выражении индекс «∞» обозначает параметр набегающего потока.

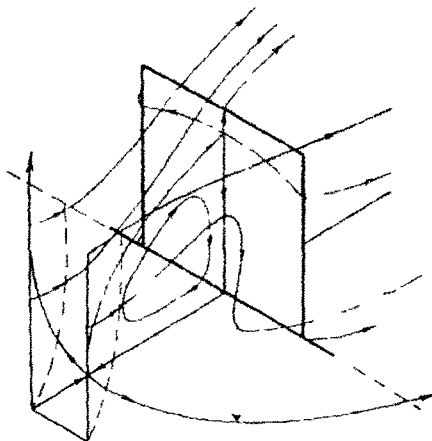


Рис. 5. Поле скоростей при набегаии на переднюю стенку сооружения (с учетом пограничного слоя)

Экспериментальные исследования проводились также для сравнения силового действия на модель (рис. 7) и на натурный объект. При натурном эксперименте бралась во внимание шершавость поверхности  $z_0$  на территории, где расположенное сооружение. При этом было задано  $H / z_0 = 170$ . Результаты этих исследований заимствованы из [3].

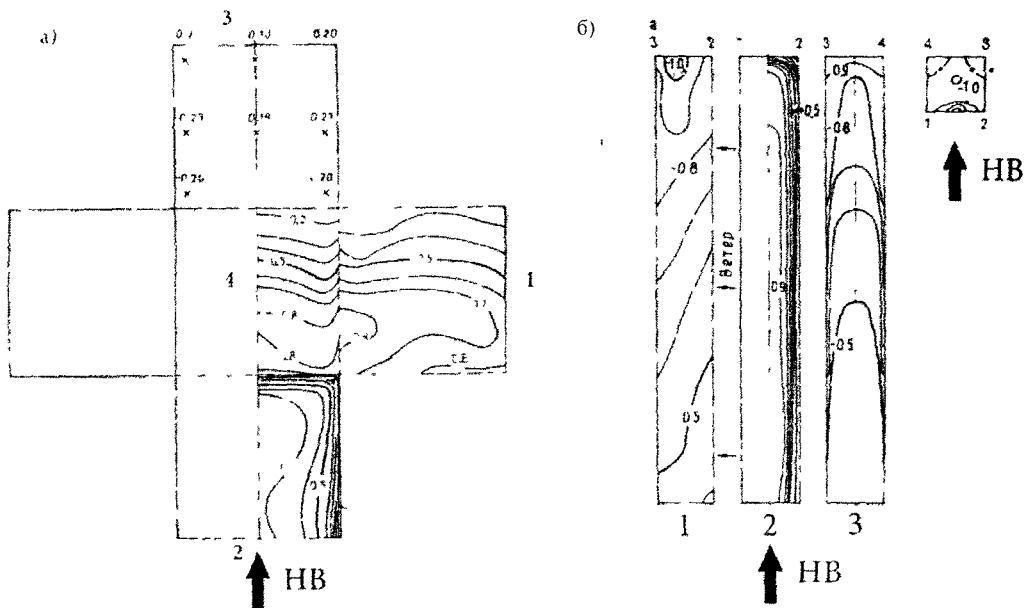


Рис. 6. Распределение коэффициента давления на сооружении в форме куба - (а) и высоком сооружении типа параллелепипеда (б): 1 – боковая сторона; 2 – наветренная сторона; 3 – подветренная сторона; 4 – кровля

Рассмотрев поле скорости и силовое действие ветра на отдельные сооружения, можно перейти к расчету распространения загрязнений в воздушном пространстве городских застроек.

Следует заметить, что приближенные соотношения типа формулы Гаусса для определения концентрации вредного вещества в воздухе можно использовать, если известна форма линии тока вокруг сооружения [5].

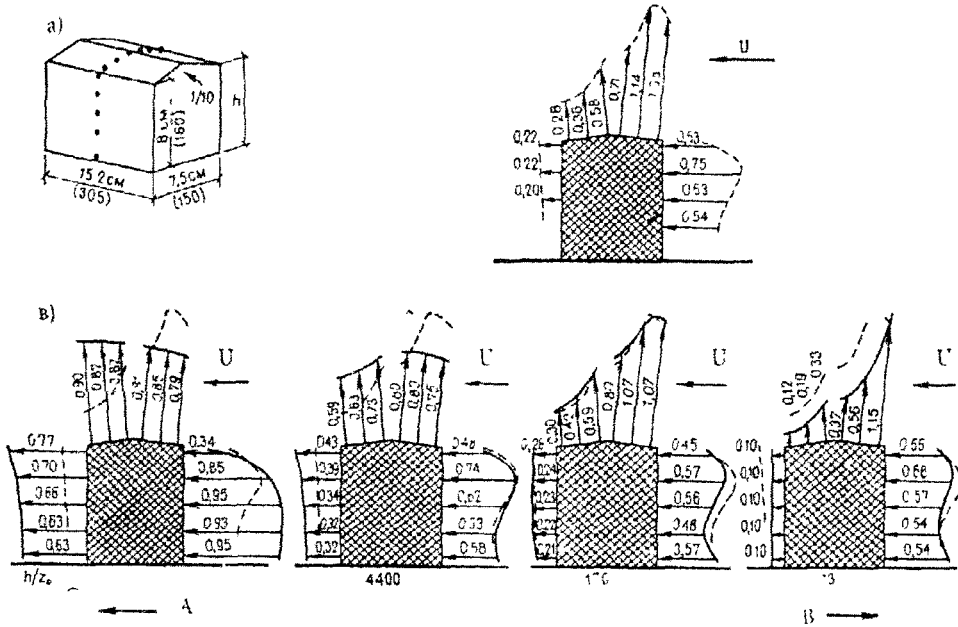


Рис. 7. Распределение коэффициента давления на поверхности натурального объекта (а) и на поверхности его модели (в). Пунктиром обозначено распределение  $\bar{p}$  при повышенной шероховатости (масштаб 1/20)

При плотной застройке территории ветровые потоки в городском лабиринте можно определить, если известно сопротивление отдельных элементов застройки. В связи с этим были проведены дополнительные исследования и получены соотношения, которые позволяют определить коэффициенты сопротивления типичных городских сооружений. Экспериментальные данные заимствованы из [1; 3; 5]. Рассмотрим сооружение, которое изображено на рис. 8.

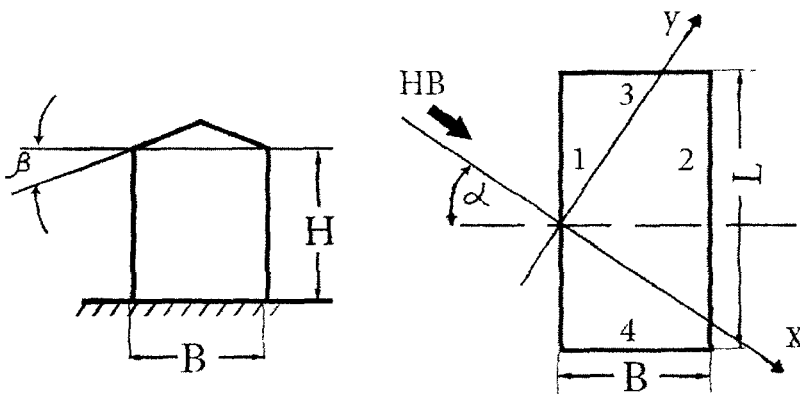


Рис. 8. Типичное городское сооружение, обтекаемое ветровым потоком (вид сбоку и вид в плане)

Лобовое сопротивление здания (без учета сопротивления кровли, которое считается незначительным) можно записать в виде

$$X = q_{\infty} S_M \left[ \bar{S}_1 (\bar{p}_1 - \bar{p}_2) \cos \alpha + \bar{S}_3 (\bar{p}_3 - \bar{p}_4) \sin \alpha \right]. \quad (4)$$

В этом выражении  $q_{\infty}$  есть динамическое давление (скоростной напор)

$$q_{\infty} = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2}{2}, \quad (5)$$

$S_M$  - характерная площадь

$$S_M = L \cdot H \quad (6)$$

$$S_1 = S_2 = L \cdot H; \quad S_3 = S_4 = H \cdot b; \quad \bar{S}_1 = S_1 / S_M; \quad \bar{S}_3 = S_3 / S_M$$

$\bar{p}_i$  - коэффициент давления на соответствующую поверхность, обозначенную цифрами. При этом: 1 - лобовая поверхность, 2 - теневая поверхность, 3, 4 - боковые поверхности.

В табл. 1 представлены коэффициенты лобового сопротивления четырех наиболее типовых городских сооружений при различной ориентации по отношению к направлению ветра. Коэффициенты отнесены к скоростному напору ветра и к площади передней стенки  $S_M = S_1 = H \cdot L$ .

Таблица 1

Коэффициенты лобового сопротивления наиболее типовых городских сооружений.

№п/п	H-B-L $\alpha^{\circ}$	0	15	45	90
1	1-1-1	1.4	1.202	1.414	1.10
2	2,5-2-5	1.4	-	1.030	0.52
3	2-1-2	1.4	-	1.061	0.65
4	1-4-4	1.2	1.166	1.273	1.20

Из таблицы видно, что первое сооружение имеет форму куба, накрытого пологой крышей, второе и третье сооружения моделируют высокие здания, а четвертое - здание небольшой высоты. Значения коэффициентов рассчитаны с помощью эмпирических соотношений, полученных на основе экспериментальных данных, приведенных в [1; 3;4]. Обозначения H-B-L представляют собой отношение размеров высоты сооружения (H), ширины (B) и длины (L).

Заключение. Получены соотношения и данные о лобовом сопротивлении наиболее типовых городских объектов, которые могут быть использованы в расчетах концентрации воздушных загрязнений, распространяющихся в пределах так называемого «городского лабиринта» по фильтрационной модели, в которой данные величины представляют собой сопротивление каркаса. (См. статью Е.В. Егорова и Н.Н. Лычагина «Фильтрационная модель распространения загрязняющих примесей в атмосфере городских лабиринтов» в настоящем Вестнике.)

### Библиографические ссылки

1. **Девнин С.И.** Аэрогидромеханика плохообтекаемых конструкций: Справочник / С.И. Девнин. - Л., - 1983. - 320 с.
2. **Серебровский Ф.Д.** Аэрация жилой застройки / Ф.Д. Серебровский - М., - 1973. - 121 с.
3. **Simiu E.** Wind effects on structures. Second edition / E. Simiu, R.H. Scanlan. New York: A Wiley - Interscience Publication JOHN WILEY & SONS, - 1986. - 589 pp.
4. Wind Forces on Structures Trans. ASCE, - 126(1961) P. 1124 - 1198

5. **Абрамовский Е.Р.** Атмосфера больших городов / Е.Р. Абрамовский, Н.Н. Переметчик – Дн., - 2007. - 187 с.
6. **Белоцерковский С.М.** Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / С.М. Белоцерковский, В.Н. Котовский, - М., - 1988 – 232 с.
7. **Русакова Т.И.** Задача численного расчета обтекания зданий воздушным потоком / Т.И. Русакова В И Карплюк // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка, Т.1, вип.11, 2007. С. 53-59.

Надійшла до редколегії 28 12 09

УДК 532.516

О.Г. Гоман\*, В. И. Давыдов\*, Ю.К. Романовский\*\*, Ю.Т. Шипилов\*\*

\*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

\*\*Производственно-комерческая фирма «Курс»

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ГАЗА В ТРУБОПРОВОДЕ ПРИ ПОМОЩИ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ

Рассмотрена методика определения расходной скорости потока газа в трубопроводе при помощи ультразвуковых измерителей скорости. Способ использования указанных измерителей основан на экспериментальной фиксации промежутков времени движения звукового импульсного сигнала от источника звука к его приемнику вдоль пути, расположенного наискосок по и против потока в некоторой измерительной плоскости, параллельной диаметральной. В работе дается алгоритм вычисления расходной скорости по данным измерения указанных промежутков времени.

*Ключевые слова.* ультразвуковые измерители скорости турбулентные течения, техника измерения скорости потока в трубопроводах.

Розглянуто методику визначення витратної швидкості потоку газу в трубопроводі за допомогою використання ультразвукових вимірювачів швидкості. Ідея використання ультразвукових вимірювачів ґрунтується на експериментальному визначенні проміжків часу руху звукового імпульсного сигналу від джерела до приймача вздовж путі, розташованого навкіс за і проти потоку в деякій вимірювальній площині, паралельній діаметральній. У роботі дається алгоритм розрахунку витратної швидкості за даними вимірювання вказаних проміжків часу.

*Ключові слова* ультразвукові вимірювачі швидкості, турбулентні течії, техніка вимірювання швидкості потоку в трубопроводах

The method of measurement consumables velocity of the gas flow in the pipeline with using ultrasonic velocity devices was considered. The method of specified indexes is based on experimental fixation of periods of movement of sonic pulsed signal from the source of sound to its receiver along the way, which is situated obliquely down- upstream in some metrical plan and paralleled to its diametrical plan. The algorithm of calculation feet velocity according to dimensions of the specified intervals of time was given in this work.

*Keywords.* the ultrasonic velocity devices, turbulent flow, measuring techniques

**Введение.** В последнее время в качестве расходомеров газа все чаще используются ультразвуковые измерители скорости. Идея их использования основана на том факте из гидромеханики, что скорость передачи возмущений в движущейся сжимаемой среде в данном направлении  $\vec{s}$  равна  $a + u_s$ , где  $a$  – скорость звука, а  $u_s$  – проекция скорости газа на данное направление. В связи с этим, скорость движения звукового сигнала, произведенного источником, непосредственно против потока (или под некоторым углом против потока) будет меньше, чем скорость движения сигнала вдоль потока (или под углом вдоль потока).



Измеряя прибором промежутки времени движения сигнала от источника звукового импульса до приемника, расположенного несколько наискосок против потока и наискосок по потоку, можно по разности этих времен и расстоянию между источником и приемником судить о скорости движения потока.

Основная трудность использования этой процедуры (мы здесь не касаемся чисто инструментальных проблем) заключается в том, что вдоль пути акустического луча скорость потока переменна, и связь указанных измеряемых промежутков времени со средней скоростью потока весьма сложна.

Применяемые в настоящее время ультразвуковые измерители скорости работают в автоматическом режиме, вырабатывают довольно узкие импульсы с некоторым заданным шагом по времени и снабжены микрокалькуляторами, которые по встроенной программе могут вычислять расходную скорость потока по результатам фиксации оговоренных промежутков времени, то есть ультразвуковые измерители могут в принципе обеспечить выдачу с определенным временным шагом текущей информации о величине расходной скорости потока, если известен алгоритм расчета этой скорости по данным измерений.

В работе получены аналитические зависимости, позволяющие разработать алгоритм вычисления расходной скорости по результатам замеров указанных промежутков времени.

**Поле скорости газа в трубопроводе.** Особенностью работы ультразвуковых датчиков для измерения скорости потока в трубопроводе является то, что величина скорости в поперечном сечении трубопровода неоднородна, так что вдоль «акустического луча», соединяющего источник звука и приемник и пересекающего трубопровод под некоторым углом к его оси, скорость распространения возмущений является переменной. Поэтому время распространения звукового сигнала от источника к приемнику определяет только среднюю скорость распространения сигнала на этом пути, которая достаточно сложным образом связана с расходной скоростью газа. Для установления взаимосвязи средней скорости вдоль измерительного луча и расходной скорости рассмотрим известные классические аналитические зависимости, принятые в гидродинамике для поля скоростей при стабилизированном течении в поперечном сечении цилиндрического трубопровода, [1; 2].

Для ламинарного течения имеем параболический профиль скорости

$$V_x(r) = V_{max} \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right), \quad (1)$$

где  $V_{max}$  – максимальная скорость на оси,  $R$  – радиус трубопровода,  $r$  – расстояние от оси до точки наблюдения.

При турбулентном режиме течения закон распределения скорости по поперечному сечению, как известно [1; 2], зависит от того, насколько влияет шероховатость внутренней поверхности трубопровода на течение. При любом турбулентном режиме течения в окрестности стенки трубопровода существует вязкий подслой, толщина которого равна

$$\delta_{\eta} = 11.6 \frac{\nu}{u_*}, \quad (2)$$

где  $u_*$  – «динамическая скорость», связанная с напряжением трения на стенке зависимостью  $\tau_0 = \rho u_*^2$ . Величина динамической скорости  $u_*$  связана также с величиной расходной скорости  $V_0$  посредством формулы

$$u_*^2 = \frac{\lambda}{8} V_0^2, \quad (3)$$

где  $\lambda$  – коэффициент гидравлических потерь согласно формуле Вейсбаха-Дарси.

В свою очередь, коэффициент  $\lambda$  в общем случае зависит от числа Рейнольдса  $Re = \frac{DV_0}{\nu}$  и относительной шероховатости поверхности стенок трубопровода.

Согласно формуле (2) относительная толщина вязкого подслоя равна

$$\bar{\delta}_l = \frac{\delta_l}{R} = 11.6 \frac{\nu}{Ru_*} = \frac{11.6}{Re_*}, \quad (4)$$

где  $Re_* = \frac{u_* R}{\nu}$  – «динамическое» число Рейнольдса, так что в развитом турбулентном течении  $Re_* \geq 11.6$ , поскольку в таком течении величина  $\delta_l$  меньше, чем радиус трубопровода  $R$ .

Если  $\Delta$  – средняя высота шероховатостей внутренней поверхности стенки трубопровода, то в случае  $\Delta < \delta_l$  шероховатость, будучи погруженной во вязкий подслой, не оказывает непосредственного влияния на закон распределения скорости по поперечному сечению. Такой режим течения называется гладкостенным, а сам трубопровод – гидравлически гладким. Для гладкостенного режима течения профиль скорости в поперечном сечении имеет двучленный вид:

а) в окрестности стенок, на расстояниях от стенки

$$y = R - r < \delta_l$$

имеет место линейный закон

$$V(r) = \frac{u_*^2}{\nu} y = u_* Re_* \left(1 - \frac{r}{R}\right); \quad (5)$$

б) в ядре потока,  $0 < r < R - \delta_l$  имеет место логарифмический закон

$$V(r) = u_* \left( A \ln \frac{u_* y}{\nu} + B \right) = u_* \left( A \ln Re_* \left(1 - \frac{r}{R}\right) + B \right), \quad (6)$$

где  $A=2,5$ ;  $B=5,5$ .

Логарифмический закон (6) фактически справедлив при условии  $\frac{u_* \Delta}{\nu} \leq 4$ ;

в случае  $\frac{u_* \Delta}{\nu} > 4$  профиль скорости в ядре имеет вид

$$V(r) = u_* \left( A \ln \frac{y}{\Delta} + B_1 \right) = u_* \left( A \ln \frac{R}{\Delta} \left(1 - \frac{r}{R}\right) + B_1 \right), \quad (7)$$

причем в диапазоне  $4 \leq \frac{u_* \Delta}{\nu} \leq 50$  величина  $B_1$  является функцией от параметра

$\frac{u_* \Delta}{\nu}$  ([1–3]), а при  $\frac{u_* \Delta}{\nu} > 50$   $B_1=8,5$ . Последний режим называется квадратичным:

для него коэффициент  $\lambda$  не зависит от числа Рейнольдса  $Re = \frac{DV_0}{\nu}$ , и определяется

только величиной относительной шероховатости  $\frac{\Delta}{D}$ . Для квадратичного режима динамическая скорость пропорциональна средней расходной скорости

$$u_* = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} V_0 .$$

Заметим, что для профиля скорости в ядре течения при турбулентном течении имеются и другие более точные, но и более сложные формулы, чем приведенные выше и используемые нами классические формулы Прандтля-Никурадзе.

**Связь между динамической и расходной скоростью.** При разработке алгоритма вычисления расходной скорости течения через данные замеров ультразвуковых измерителей оказалось удобным в качестве промежуточной переменной между определяемой расходной скоростью и средней скоростью течения вдоль измеряемого луча выбрать «динамическую скорость»  $u_*$ . Установим связь между динамической скоростью и расходной. Эта связь определяется из уравнения расхода

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V_0 = \int_0^R 2\pi r V(r) dr . \quad (8)$$

Для ламинарного течения с квадратичным профилем скорости это равенство приводит к связи

$$V_0 = \frac{u_*}{4} Re_* . \quad (9)$$

Для турбулентного течения в случае гидравлически гладкого трубопровода имеем

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} V_0 = 2\pi u_* Re_* \int_{R-\delta_l}^R r \left(1 - \frac{r}{R}\right) dr + 2\pi u_* \int_0^{R-\delta_l} r \left( A \ln Re_* \left(1 - \frac{r}{R}\right) + B \right) dr . \quad (10)$$

В результате интегрирования получим соотношение

$$V_0 = u_* \left\{ (1 - \bar{\delta}_l)^2 (A \ln Re_* + B) - A \left[ (2\bar{\delta}_l - \bar{\delta}_l^2) \ln \bar{\delta}_l + \frac{1}{2} (3 - 4\bar{\delta}_l + \bar{\delta}_l^2) \right] \right\} + u_* \left( \frac{1}{3} Re_* (3\bar{\delta}_l^2 - 2\bar{\delta}_l^3) \right) . \quad (11)$$

Таким образом, для трубопровода с фиксированным диаметром и заданной вязкостью (то есть с заданным составом газа и температурой) между средней расходной скоростью  $V_0$  и динамической скоростью  $u_*$  имеется взаимно однозначная зависимость, которая может быть представлена в виде (11). Эта зависимость в общем случае может трактоваться как зависимость типа

$$V_0 = u_* f(Re_*),$$

поскольку кинематическая вязкость в неё входит только в комбинации  $Re_* = \frac{u_* R}{\nu}$ .

Для случая турбулентного течения с влиянием шероховатости (то есть при условии  $\frac{u_* \Delta}{\nu} > 4$ ) связь между расходной скоростью  $V_0$  и динамической скоростью  $u_*$  будет выражаться зависимостью

$$V_0 = u_* \left\{ (1 - \bar{\delta}_n)(B_1 - A \ln \bar{\Delta}) - A \left[ (2\bar{\delta}_n - \bar{\delta}_n^2) \ln \bar{\delta}_n + \frac{1}{2}(3 - 4\bar{\delta}_n + \bar{\delta}_n^2) \right] \right\} + u_* Re_* \bar{\delta}_n^2 \left(1 - \frac{2}{3} \bar{\delta}_n\right), \quad (12)$$

где  $\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{R}$  – относительная шероховатость внутренней поверхности трубопровода.

При этом, поскольку  $B_1 = B_1 \left( \frac{u_* \Delta}{\nu} \right) = B_1 (Re_* \bar{\Delta})$ , то предыдущая зависимость имеет принципиально вид

$$V_0 = u_* f(Re_* \bar{\Delta}).$$

Формулы (11) и (12) являются прямым следствием двучленных формул для профиля скорости в турбулентном потоке.

Заметим, что если воспользоваться формулой (3), то на формулы (11) и (12) можно смотреть как на один из вариантов закона гидравлического сопротивления

$$\lambda = F(Re, \bar{\Delta}).$$

Поэтому в качестве зависимости между  $V_0$  и  $u_*$  (кроме указанных формул (11) и (12)), может быть использована совместно с формулой (3) любая известная теоретическая, эмпирическая или полуэмпирическая зависимость от числа Рейнольдса коэффициента  $\lambda = \lambda(Re)$  (если речь идет о гидравлически гладком трубопроводе), или зависимостью  $\lambda = \lambda(Re, \bar{\Delta})$  (если речь идет о трубопроводе шероховатом).

В самом деле, в силу (3) имеем

$$u_* = \sqrt{\frac{1}{8} \lambda(Re, \bar{\Delta})} V_0.$$

Поскольку  $Re = \frac{DV_0}{\nu}$ , то последнее выражение можно рассматривать как функцию, выражающую  $V_0$  явно или неявно через  $u_*$  (а также  $\bar{\Delta}$ ) при заданном диаметре и фиксированной вязкости

Например, для гидравлически гладкого трубопровода в диапазоне  $4 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^5$  в качестве зависимости  $\lambda = \lambda(Re)$  хорошо работает формула Блазиуса

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}},$$

откуда для взаимосвязи между  $V_0$  и  $u_*$  получаем выражение

$$u_* = 0,1989 \left( \frac{\nu}{D} \right)^{1/8} V_0^{7/8}.$$

**Поле скорости в измерительной плоскости ультразвукового измерителя скорости.** Спецификой определения расходной скорости  $V_0$  в трубопроводе при помощи ультразвукового измерителя является не непосредственное измерение этой величины, а косвенное; фактически непосредственно производится измерение средней скорости потока  $V_{cp}(\bar{a})$  вдоль измерительных лучей в некоторой измерительной

плоскості, находящейся на расстоянии  $h$  от диаметральной плоскості, и требуется найти алгоритм пересчета замеренной величины  $V_{cp}(\bar{a})$  на требуемую величину  $V_0$ .

При использовании для определения скорости потока ультразвуковых измерителей измерительная плоскость (продольная плоскость, параллельная оси трубопровода и проходящая через источник и приемник звука) не обязательно совпадает с диаметральной плоскостью трубопровода.

Пусть точка А является источником, а точка В – приемником звукового сигнала. Проведем через эти точки измерительную плоскость П. Расстояние между поперечным сечением трубопровода, в котором находится излучатель и поперечным сечением, в котором находится приемник, обозначим через  $l$  и будем называть базой измерения. Расстояние между источником и приемником звука обозначим через  $L$ . Имеем:  $l = L \cos \alpha$ , где через  $\alpha$  обозначен угол наклона измерительного луча (линии АВ, соединяющей источник звука с приемником) к оси трубопровода. Введем величину  $a$ :

$$a^2 = R^2 - h^2,$$

или

$$\bar{a}^2 = 1 - \bar{h}^2, \quad (13)$$

где  $\bar{a} = \frac{a}{R}, \dots, \bar{h} = \frac{h}{R}$  и  $h$  – расстояние от измерительной плоскості до оси трубопровода.

Выразим поле скоростей в измерительной плоскості, в частности, на луче АВ, через поле скорости в поперечном сечении трубопровода.

Из геометрических соображений следует, что расстояние любой точки  $P(x)$ , расположенной на прямой АВ, до оси равно

$$r = \sqrt{h^2 + \left(a + \frac{2a}{l}(x-l)\right)^2}. \quad (14)$$

где  $x$  – расстояние вдоль оси трубопровода от поперечного сечения, в котором находится источник звука, до текущего поперечного сечения, в котором находится точка  $P(x)$ . Подставив в эту формулу выражение (13), получим зависимость

$$r = R\sqrt{1 + 4\bar{a}^2\bar{x}(\bar{x}-1)}. \quad (15)$$

Таким образом, поскольку в цилиндрическом трубопроводе при стабилизированном ламинарном или турбулентном течении поле скоростей представляет собой функцию только от  $r$ ,  $V = V(r)$ , то в измерительной плоскості П, расположенной на расстоянии  $h$  от оси трубопровода, поле скоростей на луче АВ можно представить как функцию координаты  $\bar{x}$  в виде

$$V = V(R\sqrt{1 + 4\bar{a}^2\bar{x}(\bar{x}-1)}). \quad (16)$$

Обозначим скорость звука через  $c$ . Согласно термодинамическим понятиям

$c = \sqrt{\kappa R_0 T}$ , где  $T$  – статическая температура,  $R_0$  – газовая постоянная,  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$  и  $c_p$

и  $c_v$  – теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме. При адиабатическом процессе имеет место зависимость

$$T_0 = T\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right),$$

где  $M$  – местное значение числа Маха,  $T_0$  – температура торможения потока.

Рассматриваемый класс измерителей рассчитан на диапазон средних скоростей потока от 0,1 до 25 м/сек, так что при скорости звука порядка 300 – 400 м/сек и выше число Маха в потоке составляет не более, чем  $M=0,08$ . Но тогда из выше приведенной формулы следует, что изменением температуры по поперечному сечению за счет неравномерности поля скорости (и вообще эффектом сжимаемости газа в таком диапазоне скоростей) можно пренебречь, поскольку величина  $\frac{\kappa-1}{2}M^2$  составляет не больше, чем 0,001.

Таким образом, скорость звука можно считать величиной, постоянной по поперечному сечению, которая определяется заданным составом газа и заданной внешней температурой.

Вычислим промежуток времени движения звукового сигнала от источника к приемнику. При рассмотрении распространения звукового сигнала будем пользоваться методом геометрической акустики, а именно: будем считать, что звуковой сигнал распространяется прямолинейно по лучу АВ от источника к приемнику. При этом, поскольку скорость звука представляет собой скорость перемещения возмущения от частицы газа к частице, то при движении сигнала от излучателя А к приемнику В, расположенному вверх по потоку наискосок, фактическое перемещение звукового сигнала по отношению к трубе будет происходить со скоростью

$$c_1 = c - V(x)\cos\alpha, \quad (17)$$

где  $V(x)$  – скорость газа в сечении  $x$  на измерительном луче в измерительной плоскости на пути движения от А до В. Эта величина изменяется в зависимости от координаты  $x$  и определяется формулой (16).

Абсолютное перемещение импульса  $ds$  за время  $dt$  равно  $ds = c_1 dt$ , причем  $dx = -ds\cos\alpha$ , так что

$$dt = -\frac{dx}{\cos\alpha(c - V\cos\alpha)}.$$

Полное время движения сигнала от излучателя А к приемнику В, расположенному вверх по потоку, равно

$$t_1 = -\int_l^0 \frac{dx}{\cos\alpha(c - V\cos\alpha)} = \frac{1}{c\cos\alpha} \int_0^l \frac{dx}{1 - \frac{V}{c}\cos\alpha}. \quad (18)$$

Аналогично, если источником сигнала служит точка В, а приемником – точка А, расположенная вниз по потоку, то время движения сигнала от В к А будет равно

$$t_2 = \frac{1}{c\cos\alpha} \int_0^l \frac{dx}{1 + \frac{V}{c}\cos\alpha}. \quad (19)$$

Возможность выноса величины  $c$  в выражениях (18) и (19) за знак интеграла определяется тем, что эта скорость, согласно приведенной выше оценке, не изменяется по поперечному сечению.

Вычисление интегралов (18) и (19) в принципе может быть осуществлено численно (и даже аналитически, например, для ламинарного течения), но для этого необходимо наперед знать величину скорости звука. Причем, при таком подходе алгоритм определения расходной скорости течения по результатам замеров величин  $t_1$  и  $t_2$  становится чрезвычайно сложным.

Указанной сложности можно избежать, если воспользоваться разложением подынтегральных выражений в интегралах (18) и (19) в ряды Тейлора. При этом удается разработать такую процедуру определения скорости  $V_0$ , которая не требует предварительного знания скорости звука; более того, как оказалось, при использовании указанных разложений результаты замеров  $t_1$  и  $t_2$  позволяют одновременно определить и расходную скорость потока  $V_0$  и реальную скорость звука в газе  $c$ .

В самом деле, в исследуемом диапазоне скоростей и температур в диапазоне  $-20 < t^{\circ}C < +40$ , в котором скорость звука имеет порядок 300 – 400 м/сек, в любой точке поперечного сечения потока величина  $\varepsilon = \frac{V}{c} \cos \alpha$  не превышает значения 0.1, в связи с чем подынтегральные функции в выражениях (18) и (19) можно разложить в ряды Тейлора:

$$\frac{1}{1 - \frac{V}{c} \cos \alpha} = 1 + \frac{V \cos \alpha}{c} + \left( \frac{V \cos \alpha}{c} \right)^2 + \left( \frac{V \cos \alpha}{c} \right)^3 + \dots \quad (20)$$

$$\frac{1}{1 + \frac{V}{c} \cos \alpha} = 1 - \frac{V \cos \alpha}{c} + \left( \frac{V \cos \alpha}{c} \right)^2 - \left( \frac{V \cos \alpha}{c} \right)^3 + \dots \quad (21)$$

Подчеркнем, что при использовании указанных отрезков рядов (20) и (21) погрешность имеет порядок  $\varepsilon^4$ , то есть не превышает  $10^{-4}$ .

В результате подстановки указанных рядов в (18) и (19) для промежутков времени движения сигнала вверх и вниз по потоку будем иметь такие выражения:

$$t_1 = \frac{L}{c} \left[ 1 + \frac{\cos \alpha}{c} J_1 + \left( \frac{\cos \alpha}{c} \right)^2 J_2 + \left( \frac{\cos \alpha}{c} \right)^3 J_3 \right], \quad (22)$$

$$t_2 = \frac{L}{c} \left[ 1 - \frac{\cos \alpha}{c} J_1 + \left( \frac{\cos \alpha}{c} \right)^2 J_2 - \left( \frac{\cos \alpha}{c} \right)^3 J_3 \right], \quad (23)$$

где введены обозначения

$$J_1 = \int_0^1 V(\bar{x}) d\bar{x}, \dots J_2 = \int_0^1 V^2(\bar{x}) d\bar{x}, \dots J_3 = \int_0^1 V^3(\bar{x}) d\bar{x} . \quad (24)$$

Величина интеграла

$$J_1 = \int_0^1 V(\bar{x}) d\bar{x} = V_{cp}(\bar{a}),$$

где  $V(\bar{x})$  определяется формулой (16), представляет собой среднюю скорость потока вдоль измерительного луча от источника звука до приемника, которую будем в дальнейшем обозначать как  $V_{cp}$ . Эта величина (кроме всего прочего) зависит от выбранной плоскости измерения, то есть от  $\bar{a}$  (или от  $\bar{h}$ ), так что  $V_{cp} = V_{cp}(\bar{a})$ , но, вообще говоря, величина  $V_{cp}$  не совпадает с расходной скоростью, то есть  $V_{cp} \neq V_0$ .

Времена  $t_1$  и  $t_2$  фиксируются (с некоторой инструментальной погрешностью) системой измерения прибора.

Традиционно в технике измерений скорости газа при помощи ультразвуковых измерителей пользуются обратными временами  $1/t_1$  и  $1/t_2$ . Поэтому рассмотрим методику определения расходной скорости и скорости звука в трубопроводе через обратные величины  $1/t_1$  и  $1/t_2$  при использовании разложений (22) и (23). Обращая разложения (22) и (23), получим следующие представления для обратных величин:

$$\frac{1}{t_1} = \frac{c}{L} \left[ 1 - \xi_1 \frac{\cos \alpha}{c} + \xi_2 \left( \frac{\cos \alpha}{c} \right)^2 - \xi_3 \left( \frac{\cos \alpha}{c} \right)^3 \right], \quad (25)$$

$$\frac{1}{t_2} = \frac{c}{L} \left[ 1 + \xi_1 \frac{\cos \alpha}{c} + \xi_2 \left( \frac{\cos \alpha}{c} \right)^2 + \xi_3 \left( \frac{\cos \alpha}{c} \right)^3 \right], \quad (26)$$

где введены такие обозначения:

$$\xi_1 = J_1, \dots, \xi_2 = J_1^2 - J_2, \dots, \xi_3 = J_3 - 2J_1J_2 + J_1^3. \quad (27)$$

Составим из обратных величин замеренных временных промежутков  $t_1$  и  $t_2$  (для фиксированных параметров  $L$  и  $\alpha$ ) два числа

$$N_1 = \frac{L}{2} \left( \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_1} \right) \quad \text{и} \quad N_2 = \frac{L}{2 \cos \alpha} \left( \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right). \quad (28)$$

Величины  $N_1$  и  $N_2$  – два основных экспериментальных параметра, которыми приходится оперировать, если проводятся замеры обратных времен движения сигнала вверх по потоку и вниз по потоку на одной и той же базе  $l$  при одном и том же угле  $\alpha$ . Комбинируя представления (25) и (26), получим

$$N_1 = c \left[ 1 + \xi_2 \left( \frac{\cos \alpha}{c} \right)^2 \right], \quad (29)$$

$$N_2 = \xi_1 \left[ 1 + \frac{\xi_3}{\xi_1} \left( \frac{\cos \alpha}{c} \right)^2 \right]. \quad (30)$$

Подчеркнем, что формулы (29) и (30) справедливы вплоть до четвертого порядка относительно малого параметра  $\varepsilon$ .

Систему (29) и (30) можно рассматривать как систему двух уравнений для определения динамической скорости  $u^*$  (или расходной скорости  $V_0$ ) и скорости звука  $c$  через два экспериментально определяемых параметра  $N_1$  и  $N_2$ . При этом, как видно из уравнения (29), скорость звука из этой системы можно исключить. Действительно, равенство (29) представляет собой уравнение второго порядка относительно  $c$ , откуда имеем

$$c = \frac{1}{2} \left( N_1 + \sqrt{N_1^2 - 4\xi_2 \cos^2 \alpha} \right). \quad (31)$$

Подставляя это выражение в (30), приходим к уравнению для определения скорости  $u^*$  (или  $V_0$ , поскольку между  $V_0$  и  $u^*$  имеется однозначная взаимосвязь, например, в виде формулы (11) и (12)). Это уравнение принимает вид



$$N_2 = \xi_1 \left[ 1 + \frac{\xi_3}{\xi_1} \frac{4 \cos^2 \alpha}{\left( N_1 + \sqrt{N_1^2 - 4 \xi_2 \cos^2 \alpha} \right)^2} \right]. \quad (32)$$

Уравнение (32), вообще говоря, является трансцендентным. Принципиально для его решения следует применять или метод Ньютона или метод последовательных приближений. После того, как из уравнения (32) определена величина  $u_*$ , по формуле (31) можно произвести вычисление уточненного значения скорости звука.

Таким образом, при указанном подходе (то есть при использовании разложения по Тейлору) знание величины скорости звука не является необходимым для вычисления скорости потока по результатам замеров. Более того, скорость звука сама вычисляется по результатам замеров  $N_1$  и  $N_2$  и может использоваться для контроля состава газа или его температуры.

Отметим еще одно преимущество использования рядов Тейлора для определения величины  $u_*$  и скорости звука по сравнению с использованием исходных формул (18) и (19): при использовании разложений (20) и (21) вычисление интегралов (24) можно провести численно предварительно, не зная фактической величины скорости звука, тогда как использование исходных выражений (18) и (19) не позволяет провести предварительное интегрирование без заблаговременного знания величины скорости звука.

Ниже будет показано, что в исследованном диапазоне скоростей во всех разложениях достаточно ограничиться только первым приближением, благодаря чему процедура определения расходной скорости (или динамической скорости) значительно упрощается.

**Определение расходной скорости потока через среднюю скорость вдоль измерительного луча.** Интегралы  $J_1, J_2, J_3$  удобно представить в виде

$$J_1 = \int_0^1 V(\bar{x}) d\bar{x} = u_* f_1(u_*), \quad J_2 = \int_0^1 V^2(\bar{x}) d\bar{x} = u_*^2 f_2(u_*), \quad J_3 = \int_0^1 V^3(\bar{x}) d\bar{x} = u_*^3 f_3(u_*).$$

Все указанные интегралы могут быть вычислены численно (и даже аналитически) наперед и представлены как функции параметра  $u_*$ , поскольку при фиксированных значениях диаметра трубопровода и кинематической вязкости величины  $f_1, f_2, f_3$  являются функциями только от динамической скорости  $u_*$  (и, в конечном итоге, от скорости  $V_0$ ). Как будет показано ниже, в указанном диапазоне скоростей для определения расходной скорости необходим только интеграл  $J_1$ , который представляет среднюю скорость потока вдоль звукового луча от источника до приемника  $V_{cp} = V_{cp}(\bar{\alpha})$ .

Если ввести еще обозначения:

$$\xi_2 = u_*^2 (f_1^2 - f_2) = u_*^2 f_4(u_*), \quad \xi_3 = u_*^3 (f_3 - 2f_1 f_2 + f_1^3) = u_*^3 f_5(u_*),$$

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = u_*^2 \frac{f_5(u_*)}{f_1(u_*)} = u_*^2 f_6(u_*),$$

то в результате система уравнений (29), (30) сведется к виду

$$N_1 = c \left[ 1 + f_4(u_*) \frac{u_*^2 \cos^2 \alpha}{c^2} \right], \quad N_2 = u_* f_1(u_*) \left[ 1 + f_6(u_*) \frac{u_*^2 \cos^2 \alpha}{c^2} \right]. \quad (33)$$

Были выполнены обширные расчеты всех функций, входящих в уравнения (33). При этом широко варьировался коэффициент кинематической вязкости (на порядок в одну и другую сторону от вязкости метана при нормальных условиях), расходная скорость потока в диапазоне 0.1 – 40 м/сек, диаметр трубопровода  $D = 0.08 - 0.2$  м, и параметр  $\bar{a} = 0.5 - 1.0$ . В результате оказалось, что функция  $f_4$  не превышает величины 20, а функция  $f_6$  не превышает величины 10 (эти функции безразмерные). Кроме того, в рассматриваемом диапазоне скоростей  $V_0$  динамическая скорость не превышает величины  $1,5m / c$ , так что справедливы следующие оценки (даже если выбрать заниженное значение скорости звука  $c \approx 300$  м / с):

$$f_4 \cos^2 \alpha \frac{u_*^2}{c^2} < 2 \cdot 10^{-4}, \quad f_6 \cos^2 \alpha \frac{u_*^2}{c^2} < 10^{-4}.$$

Из приведенных оценок следует, что с погрешностью, не превышающей 0,05 % квадратичными слагаемыми в выражениях (33) можно пренебречь, так что окончательные формулы для определения расходной скорости потока и скорости звука в потоке и принимают вид:

$$V_{cp}(\bar{a}) = u_* f_1(u_*, \bar{a}) = N_2 \tag{34}$$

$$c = N_1. \tag{35}$$

Выражение (34) целесообразно записать в виде

$$u_* = \frac{N_2}{f_1(u_*, \bar{a})}, \tag{36}$$

который удобен для определения величины  $u_*$  через  $N_2$  методом последовательных приближений, поскольку функция  $f_1(u_*, \bar{a})$  может быть определена или численным интегрированием или в аналитическом виде в зависимости от  $u_*$  и  $\bar{a}$ .

**Аналитические выражения для средней скорости потока вдоль измерительного луча.** Теоретическое значение величины  $V_{cp}(\bar{a})$  для ламинарного течения получается путем использования формул (1) и (16) и равно

$$V_{cp}(\bar{a}) = \frac{4}{3} \bar{a}^2 V_0. \tag{37}$$

Точное теоретическое значение средней скорости  $V_{cp}(\bar{a})$  вдоль измерительного луча при турбулентном течении для гидравлически гладкого трубопровода с двучленным полем скорости (5) и (6) имеет следующий вид:

а) в случае, когда  $0 < h < R - \delta_n$ ,

$$\begin{aligned} V_{cp}(\bar{a}) = u_* f_1(Re_*, \bar{a}) = & \frac{u_*}{\bar{a}} \{ (A \ln Re_* + B) \phi(\bar{\delta}_n) + \\ & + A [ \phi(\bar{\delta}_n) (\ln \bar{\delta}_n - 1) + \ln \frac{1 - \bar{\delta}_n - \phi(\bar{\delta}_n)}{\bar{h}} + \bar{a} \ln \frac{\bar{a} \phi(\bar{\delta}_n) + \bar{a}^2 - \bar{\delta}_n}{\bar{\delta}_n \bar{h}} ] + \\ & + \frac{1}{2} Re_* [ \bar{a} - (1 + \bar{\delta}_n) \phi(\bar{\delta}_n) + (1 - \bar{a}^2) \ln \frac{1 - \bar{\delta}_n + \phi(\bar{\delta}_n)}{1 + \bar{a}} ] \}, \end{aligned} \tag{38}$$

где

$$Re_* = \frac{Ru_*}{\nu}, \phi(\bar{\delta}_n) = \sqrt{\bar{\delta}_n^2 - 2\bar{\delta}_n + \bar{a}^2}, \bar{a}^2 = 1 - \bar{h}^2.$$

б) в случае  $\bar{h} = 0$  ( $\bar{a} = 1$ ):

$$V_{cp} \Big|_{\bar{a}=1} = u_* \{ (1 - \bar{\delta}_n) (A \ln Re_* + B) - A(1 - \bar{\delta}_n + \bar{\delta}_n \ln \bar{\delta}_n) + \frac{1}{2} Re_* \bar{\delta}_n^2 \} \quad (39)$$

в) в случае, когда  $\delta_n \geq R - h$

$$V_{cp}(\bar{a}) = \frac{u_* Re_*}{2\bar{a}} \left[ \bar{a} + (1 - \bar{a}^2) \ln \sqrt{\frac{1 - \bar{a}}{1 + \bar{a}}} \right]. \quad (40)$$

Если проявляется шероховатость стенок трубопровода, то выражения для  $V_{cp}(\bar{a})$  имеют следующий вид

а) при  $0 < h < R - \delta_n$ :

$$\begin{aligned} V_{cp}(\bar{a}, \bar{\Delta}) = & u_* f_1(Re_*, \bar{a}, \bar{\Delta}) = \frac{u_*}{\bar{a}} \{ (B_1 - A \ln \bar{\Delta}) \phi(\bar{\delta}_n) + \\ & + A [ \phi(\bar{\delta}_n) (\ln \bar{\delta}_n - 1) + \ln \frac{1 - \bar{\delta}_n - \phi(\bar{\delta}_n)}{\bar{h}} + \bar{a} \ln \frac{\bar{a} \phi(\bar{\delta}_n) + \bar{a}^2 - \bar{\delta}_n}{\bar{\delta}_n \bar{h}} ] + \\ & + \frac{1}{2} Re_* [ \bar{a} - (1 + \bar{\delta}_n) \phi(\bar{\delta}_n) + (1 - \bar{a}^2) \ln \frac{1 - \bar{\delta}_n + \phi(\bar{\delta}_n)}{1 + \bar{a}} ] \}, \end{aligned} \quad (41)$$

б) при  $\bar{h} = 0$  ( $\bar{a} = 1$ ):

$$V_{cp}(\bar{a}, \bar{\Delta}) \Big|_{\bar{a}=1} = u_* \{ (1 - \bar{\delta}_n) (B_1 - A \ln \bar{\Delta}) - A(1 - \bar{\delta}_n + \bar{\delta}_n \ln \bar{\delta}_n) + \frac{1}{2} Re_* \bar{\delta}_n^2 \}. \quad (42)$$

в) в случае  $\delta_n \geq R - h$  выражение  $V_{cp}(\bar{a})$  для шероховатого трубопровода имеет формально тот же самый вид, что и для гладкого, то есть (40).

**Выводы.** Из приведенных оценок следует, что в рассмотренном диапазоне скоростей для определения средней скорости потока  $V_{cp}(\bar{a})$  вдоль измерительного луча ультразвукового измерителя достаточно ограничиться приближением

$$t_1 = \frac{L}{c} \left[ 1 + \frac{\cos \alpha}{c} V_{cp}(\bar{a}) \right], \quad t_2 = \frac{L}{c} \left[ 1 - \frac{\cos \alpha}{c} V_{cp}(\bar{a}) \right]$$

и соответственно

$$\frac{1}{t_1} = \frac{c}{L} \left[ 1 - \frac{\cos \alpha}{c} V_{cp}(\bar{a}) \right], \quad \frac{1}{t_2} = \frac{c}{L} \left[ 1 + \frac{\cos \alpha}{c} V_{cp}(\bar{a}) \right].$$

В этом случае будем иметь:

$$\begin{aligned} c &= N_1, \\ V_{cp}(\bar{a}) &= N_2, \end{aligned} \quad (43)$$

где числа  $N_1$  и  $N_2$  определяются согласно формуле (28).

Для ламинарного течения в соответствии с (37)

$$V_{cp}(\bar{a}) = \frac{4}{3} V_0 \bar{a}^2,$$

так что для ламинарного режима величина расходной скорости  $V_0$  определяется непосредственно через величину  $V_{cp}(\bar{a}) \equiv N_2$ :

$$V_0 = \frac{3N_2}{4\bar{a}^2} = \frac{3N_2}{4(1-\bar{h}^2)},$$

найденную по результатам замеров в любой измерительной плоскости (при любом значении  $\bar{a}$ ), независимо от фактического числа Рейнольдса, лишь бы соблюдался параболический профиль скорости.

В случае турбулентного режима по результатам замера в соответствии с формулой (43) определяется только величина средней скорости  $V_{cp}(\bar{a})$  вдоль измерительного луча (в заданной измерительной плоскости), а для определения расходной скорости  $V_0$  необходимо выполнить следующую процедуру:

а) сначала по экспериментально найденной величине  $V_{cp}(\bar{a}) \equiv N_2$  необходимо разрешить относительно  $u_*$  уравнение (36)

$$u_* f_1(Re_*, \bar{a}) = V_{cp}(\bar{a})$$

при заданных значениях  $R$ ,  $\nu$  и  $\bar{a}$ , воспользовавшись полученными выше выражениями для  $V_{cp}(\bar{a})$ ;

б) затем по найденной величине  $u_*$  из формулы (11) (или, в более общем случае, из формулы типа (12)) определить расходную скорость  $V_0$ .

Подчеркнем, что такой расчет может быть выполнен лишь при том условии, что заранее известно число  $Re_* = \frac{Ru_*}{\nu}$  (то есть, когда при заданном диаметре трубопровода известен коэффициент кинематической вязкости), поскольку функция  $f_1$  зависит от  $u_*$  только через посредство числа  $Re_*$ .

### Библиографические ссылки

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г Шлихтинг – М., 1969 – 742 с.
2. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика / Б.Т. Емцев – М., 1978. – 464 с.
3. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И.Е. Идельчик – М., 1975 – 560 с.

Надійшла до редколеги 02 12 09

УДК 532.5 + 523.9

В.І. Перехрест, М.М. Осипчук

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

## ПРО СТРУКТУРИ ПЛАНЕТАРНИХ ВИХОРІВ І ЗАКОНОМІРНОСТІ ЇХ ОБЕРТАННЯ

На основі аналітичної теорії досліджуються параметри геометрії та обертального руху вихрових структур у планетарному вихорі, що описується окремим розв'язком рівнянь гідромеханіки. Проаналізовано умови біфуркацій систем вихорів та характеристики їх обертання.

*Ключові слова:* планетарний вихор, біфуркації, обертання планет і зрок.

На основе аналитической теории исследуются параметры геометрии и вращательного движения вихревых структур в планетарном вихре, который описывается частным решением уравнений гидромеханики. Анализируются условия бифуркаций систем вихрей и характеристики их вращения.

*Ключевые слова:* планетарный вихрь, бифуркации, вращение планет и звёзд.

On the basis of analytical theory the parameters of geometry and rotatory motion of vortical structures are investigated in a planetary vortex which is described by particular solution of equations of hydromechanics. The conditions of bifurcations of the systems of vortexes and description of their rotation are analysed.

*Keywords:* planetary vortex, bifurcations, rotation of planets and stars.

**Вступ.** Планетарним вихором було названо [1,2] окремий точний розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера у сферичних координатах, який описує складну осесиметричну систему тороїдних вихорів, центральна частина яких знаходиться у замкнутих непроникних сферах, а зовнішні – зовні останньої сфери – вільно «вісять» у просторі й обтікаються наскрізними лініями течії. Центри (центральні кола) тороїдних вихорів лежать у екваторіальній площині, причому всі зовнішні вихори обертаються у один бік на зразок космічних планетарних систем, зокрема, Сонячної системи.

Така вихрова структура утворюється завдяки взаємодії закрученого рухомого простору з диполем на початку координат. Характеристики цих складових рухів – поступальна швидкість простору  $V_\infty$ , інтенсивність його закручування  $C_0$  та момент диполя  $M$  формують один визначальний параметр планетарного вихору  $\alpha = -V_\infty / (2C_0^2 M)$ , варіювання якого дозволяє отримувати планетарні вихори різноманітної структури стосовно кількості внутрішніх і зовнішніх вихорів та характеристик їх обертання.

У [2] детально розглянуто один варіант планетарного вихору з параметром  $\alpha = -0,0076$ , в якому існує 2 внутрішніх і 9 зовнішніх тороїдних вихорів. Застосування характеристик та закономірностей геометрії й руху цього вихору до проблеми утворення Сонячної системи виявилось досить успішним і перспективним. Зокрема, подолано радикальні суперечності гіпотез Канта-Лапласа стосовно кінетичних моментів та теоретично обґрунтовано вихрову гіпотезу Вайцзекера [3] про первинний вихор, який створив Сонячну систему. Вихрову гіпотезу Вайцзекера розвивали Кьойпер [5], Сафронов [6], Тер Хаар [7], Хойл [8; 9] та ін., але ці дослідження ще не склали закінченої стрункої теорії утворення Сонячної системи, яка б пояснила всі закономірності її геометрії й руху.

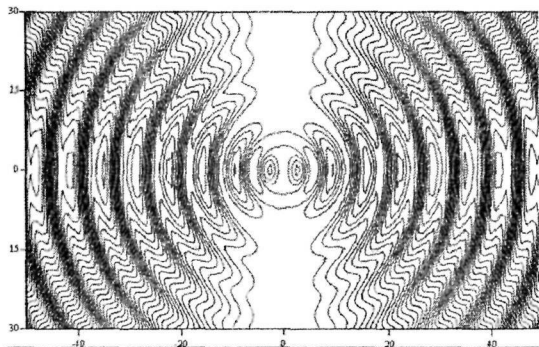
До недавніх часів Сонячна система була єдиним прикладом природних планетарних систем, доступним для спостереження і дослідження наукою. Це значним чином обмежувало можливості всебічного аналізу та виділення закономірностей і особливостей цих систем, тобто створення наукової теорії планетарних систем.

Однак за останні 5–7 років завдяки запуску в космос потужних телескопів «Хабл», «Кеплер», «Subaru» та ін. були відкриті та спостережені нові планетарні системи, наприклад OGLE-2006-BLG-109L; HD 69830; Epsilon Eridani; HAT-P-7b; WASP-17b, [10], в яких спостерігається як пряме – в один бік, так і обернене обертання планет і центральної зірки. І хоча більшість вчених з подивом зустріли встановлений факт оберненого обертання, наприклад, планети HAT-P-7b, такі варіанти планетарних вихорових систем також описуються нашою теорією, що буде показано нижче.

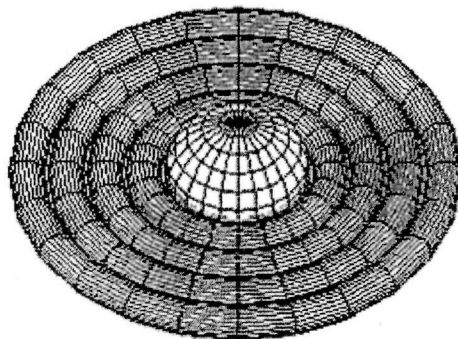
**Різновиди планетарних вихорів.** Розглянемо кілька варіантів окремого розв'язку гідродинамічних рівнянь Ейлера [1; 2], які описують планетарні вихорові структури з різним набором внутрішніх та зовнішніх тороїдних вихорів, починаючи з 1-го внутрішнього та 1-, 2-, 3-х і т. д. зовнішніх. Кожен такий випадок відповідає певному значенню параметра  $\alpha$  у функції течії

$$\Psi = M \left[ \alpha y^2 + \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right] \sin^2 \theta, \quad (1)$$

де  $\alpha$  – параметр, описаний вище,  $y = C_0 r$  – безрозмірна радіальна змінна,  $M$  – амплітудна характеристика диполя, що представлений другим доданком у (1).



а) осьовий переріз



б) просторовий вигляд

Рис. 1. Загальний вигляд планетарного вихору

Швидкості вихрової течії у сферичній системі координат  $(r, \theta, \varphi)$  визначаються через функцію (1) формулами:

$$V_r = -\left(r^2 \sin \theta\right)^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = \left(r \sin \theta\right)^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad V_\varphi = \frac{C_0 \Psi}{r \sin \theta}. \quad (2)$$

Після підстановки функції (1) до виразів (2), отримуємо

$$\begin{aligned} V_r &= -2MC_0^2 \left( \alpha + \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right) \cos \theta, \\ V_\theta &= MC_0^2 \left( 2\alpha - \frac{\sin y}{y} - \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right) \sin \theta, \\ V_\varphi &= MC_0^2 y \left( \alpha + \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Ізолінії функції (1)  $\Psi(y, \theta) = \text{Const}$  зображають у перерізі поверхні ліній течії осесиметричних вихроутворень (рис.1а), які являють собою низку тороїдних вихорів,

кількість і параметри яких залежать від основного визначального параметра  $\alpha$ . Якісна просторова картина структури планетарного вихору подана на рис. 1 б).

На непроникних і нерухомих сферах  $y = y_i$ , що утворюються в течії, очевидно, виконується умова  $V_r(y_i) = 0$ , яка з виразів (3) зводиться до рівняння

$$F(y) = -\alpha, \quad F(y) \equiv \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \Rightarrow y = y_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Очевидно, що на цих сферах одночасно і  $V_\phi(y_i) = 0$ , і ненульовою залишається лише меридіональна швидкість  $V_\theta$ , яка є неперервною при переході через сфери. З цією швидкістю неперервно спрягаються на сферах внутрішній і зовнішній вихори, і тому вони повинні бути протилежними по обертанню.

Особливі точки поля швидкостей (3) у меридіональній площині  $(y, \theta)$  будуть задовольняти умовам

$$V_r(y, \theta) = 0, \quad V_\theta(y, \theta) = 0 \quad (5)$$

і з міркувань симетрії покладемо  $\theta = \pi/2$ . Тоді знаходження цих точок зводиться до знаходження коренів  $y^*$  рівняння

$$f(y) = -\alpha, \quad f(y) \equiv -\frac{\sin y}{2y} - \frac{1}{2y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \Rightarrow y = y_k^*, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6)$$

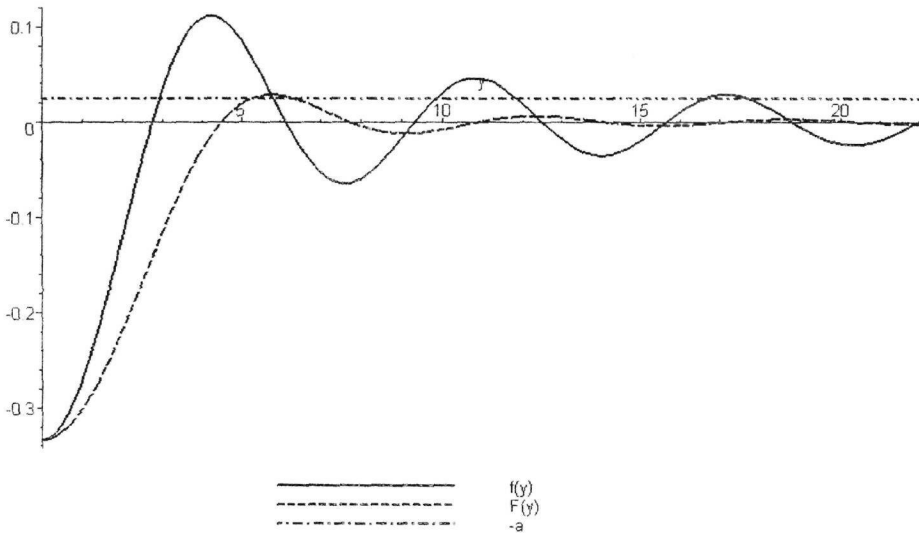


Рис. 2. Геометрична інтерпретація

Графіки функцій  $F(y)$ ,  $f(y)$  та особливості появи коренів рівнянь (4) і (6) можна прослідкувати на рис. 2. Обидві функції  $F(y)$  та  $f(y)$  мають однаковий мінімум,  $F_{min}(0) = f_{min}(0) = -1/3$  і являють собою коливні затухаючі функції, так що

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = 0.$$

У табл. 1 наведено екстремальні значення цих функцій на проміжку  $[0; 41]$ . Отже, областями значень функцій є:  $-1/3 \leq F(y) \leq 0.02872363139$  і  $-1/3 \leq f(y) \leq 0.1118262700$ .

Якщо зафіксувати значення  $\alpha$ , тобто на графіку провести горизонтальну лінію, то вона може або не перетинати графіків (коренів немає), або перетинати один чи обидва графіки в точках, які є коренями рівнянь (4) і (6).

Виконано обчислення коренів рівнянь (4) і (6) у діапазоні значень  $\alpha$ , при яких існують корені як першого, так і другого рівнянь. Орієнтуючись по екстремальних значеннях функцій  $F(y)$  і  $f(y)$ , установлюються діапазони значень цього параметра, яким відповідають течії з кількома внутрішніми та певним числом зовнішніх тороїдів, за мірою їх появи і збільшення. Ці дані наведено в таблицях 2, 3, 4, де вказано також кількість внутрішніх  $n$  та зовнішніх  $m$  вихорів для кожного з указаних діапазонів значень  $\alpha$ .

Таблиця 1

Параметри визначальних функцій

№	$y$	$F(y)$	$y$	$f(y)$
1	0	-1/3	0	-1/3
2	5.763459197	0.02872363139	4.232865876	0.1118262700
3	9.095011330	-0.01186812676	7.589562350	-0.06475488215
4	12.32294097	0.006519887466	10.81027812	0.04585977938
5	15.51460301	-0.004128532090	13.99412180	-0.03554775695
6	18.68903636	0.002850710830	17.16215589	0.02903528750
7	21.85387422	-0.002087251875	20.32189553	-0.02454457026
8	25.01280320	0.001594525787	23.47672792	0.02125911474
9	28.16782971	-0.001257971014	26.62841190	-0.01875049270
10	31.32014171	0.001017858623	29.77795366	0.01677203100
11	34.47048833	-0.0008405357423	32.92597111	-0.01517158654
12	37.61936575	0.0007058562469	36.07286502	0.01385019040
13	40.76711582	-0.0006011567116	39.21890680	-0.01274066974

Таблиця 2

Структури з однією сферою

Інтервали параметра $\alpha$	Кількість вихорів	
	внутр. $n$	зовн. $m$
$1/3 > \alpha > 0.01186812676$	1 непроникна сфера	
$1/3 > \alpha > 0.06475488215$	1	0
$0.06475488215 > \alpha > 0.03554775695$	1	1
$0.03554775695 > \alpha > 0.02454457026$	1	2
$0.02454457026 > \alpha > 0.01875049270$	1	3
$0.01875049270 > \alpha > 0.01517158654$	1	4
$0.01517158654 > \alpha > 0.01274066974$	1	5
$0.01274066974 > \alpha > 0.01186812676$	1	6

Загальною закономірністю планетарних вихорів є те, що в кожній непроникній сфері та кульовому шарі між сферами, існує лише один тороїдний вихор, причому вихори у суміжних шарах обертаються у протилежних напрямках. Усі ж зовнішні вихори обертаються в один бік, і напрям цього обертання є протилежним до обертання останнього внутрішнього вихора.



Далі, внутрішні вихори визначаються тільки однією особливою точкою типу «центр» (рис. 3), яка є розв'язком рівняння (4). Течія та структура особливих точок у зонах зовнішніх вихорів є дещо складнішою.

По-перше, зовнішні вихори обтікаються з обох боків наскрізними незамкнутими лініями течії і відділяються від цієї течії петлею сепаратриси, що має точку самоперетину (рис.3). Тому кожному зовнішньому вихору відповідають 2 кореня рівняння (6) та 2 особливі точки: перша – типу «центр», а друга – типу «сідло» (рис.3).

Таблиця 3

**Структури з трьома сферами**

Інтервали параметра $\alpha$	Кількість вихорів	
	внутр. $n$	зовн. $m$
$0.01186812676 > \alpha > 0.004128532090$	3 непроникні сфери	
	внутр. $n$	зовн. $m$
$0.01186812676 > \alpha > 0.01098150101$	3	5
$0.01098150101 > \alpha > 0.009649348370$	3	6
$0.009649348370 > \alpha > 0.008605519275$	3	7
$0.008605519275 > \alpha > 0.007765529060$	3	8
$0.007765529060 > \alpha > 0.007074969675$	3	9
$0.007074969675 > \alpha > 0.006497217275$	3	10
$0.006497217275 > \alpha > 0.006006713855$	3	11
$0.006006713855 > \alpha > 0.005585080865$	3	12
$0.005585080865 > \alpha > 0.005218763420$	3	13
$0.005218763420 > \alpha > 0.004897545076$	3	14
$0.004897545076 > \alpha > 0.004613579570$	3	15
$0.004613579570 > \alpha > 0.004360741104$	3	16
$0.004360741104 > \alpha > 0.004134177268$	3	17
$0.004134177268 > \alpha > 0.004128532090$	3	18

Таблиця 4

**Структури з двома сферами**

Інтервали параметра $\alpha$	Кількість вихорів	
	внутр. $n$	зовн. $m$
$-0.006519887466 > \alpha > -0.02872363139$	2 непроникні сфери	
	внутр. $n$	зовн. $m$
$-0.02125911474 > \alpha > -0.02872363139$	2	2
$-0.01677203100 > \alpha > -0.02125911474$	2	3
$-0.01385019040 > \alpha > -0.01677203100$	2	4
$-0.01179582142 > \alpha > -0.01385019040$	2	5
$-0.01027239732 > \alpha > -0.01179582142$	2	6
$-0.009097580390 > \alpha > -0.01027239732$	2	7
$-0.008163968675 > \alpha > -0.009097580390$	2	8
$-0.007404179255 > \alpha > -0.008163968675$	2	9
$-0.006773794090 > \alpha > -0.007404179255$	2	10
$-0.006519887466 > \alpha > -0.006773794090$	2	11

Екстремуми функції  $F(y)$  є точками біфуркації вихрової системи, і якщо ці точки проходять неперервно знизу (при  $\alpha > 0$ ), чи зверху (при  $\alpha < 0$ ), то з'являється відразу 2 нових сфери з двома внутрішніми торами в них. Цей феномен було обговорено в [2]. Те ж саме можна сказати про проходження параметром  $\alpha$  точок біфуркації – екстремумів функції  $f(y)$ , але поява відразу 2-х особливих точок відповідає появі лише одного зовнішнього вихора з точками типу «центр» і «сідло» (рис.3).

Очевидно, що при  $\alpha = 0$  ( $V_\infty = 0$ ) простір буде заповнено нескінченною кількістю сфер з такою ж кількістю вихорів між ними.

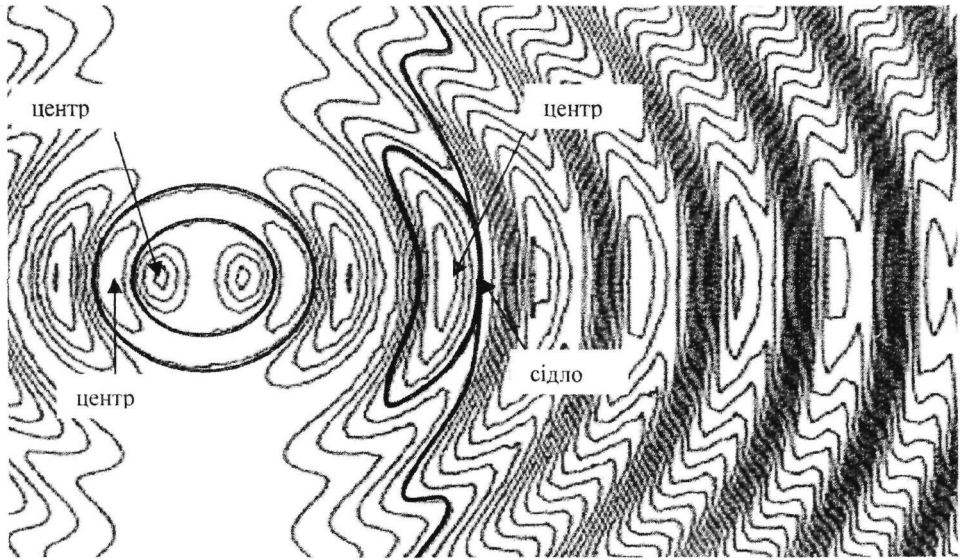


Рис. 3. Типи особливих точок

Розглядаючи послідовно випадки систем з однією, двома та трьома непроникними сферами (таблиці 2, 3, 4), відзначимо наступне. У випадку існування однієї сфери, при  $0,01186812676 \leq \alpha \leq 1/3$  центральний вихор у ній, який треба асоціювати з центральною зіркою, та усі зовнішні, яких може бути від 1-го до 6-и, завжди обертаються у протилежних напрямках (таблиця 5). Саме такими можуть бути планетарні системи HAT-P-7b і WASP-17b, в яких було спостережене таке обертання [10].

Таблиця 5

Параметри трьох різних вихорів

1 непроникна сфера ( $\alpha = 0,017, n = 1, m = 4$ )					
№	1	2	3	4	5
$\omega_{ц} * 10^2$	-13,62624872	4,157617514	2,237080067	1,8962465	1,766144678
$\omega_{с} * 10^2$	-	0,518640326	1,323234756	1,54446871	1,646765369
2 непроникні сфери ( $\alpha = -0,0085, n = 2, m = 8$ )					
№	1	2	3	4	5
$\omega_{ц} * 10^2$	-14,34983089	1,940198061	-1,953996827	-1,230572381	-1,035587353
№	6	7	8	9	10
$\omega_{ц} * 10^2$	-9,555902138	-0,9148154722	-0,8908476834	-0,8749597091	-0,862512298
3 непроникні сфери ( $\alpha = 0,0057, n = 3, m = 12$ )					
№	1	2	3	4	5
$\omega_{ц} * 10^2$	-13,96151825	3,207408385	-0,609166285	1,192122711	0,8403385084
№	6	7	8	9	10
$\omega_{ц} * 10^2$	0,7186244442	0,6624827234	0,6319864147	0,6135442784	0,6014935892
№	11	12	13	14	15
$\omega_{ц} * 10^2$	0,5931261136	0,5870029967	0,5822815265	0,5783918483	0,5747496133

При неперервному зменшенні параметра  $\alpha$  після проходження ним біфуркаційної точки  $\alpha = 0,01186812676$  у центрі формуються 3 внутрішні вихори між трьома сферами, число ж зовнішніх вихорів змінюється від 5 до 18 (таблиця 3). При цьому всі зовнішні вихори обертаються в одному напрямі, який співпадає з напрямом

мом обертання другого внутрішнього вихора (таблиця 5). Як показано в [2], є ґрунтовні підстави вважати, що еволюція внутрішніх вихорів приводить до їх об'єднання і формування центрального світила. Але величина та напрям сумарного кінетичного моменту системи 3-х центральних вихорів залежить від первинного розподілу мас у них, і тому сумарна кутова швидкість обертання може бути як додатною, так і від'ємною. Отже, в цьому випадку центральне тіло і зовнішні вихори-планети можуть обертатися як в одному, так і різних напрямках.

Варіанти планетарних вихорів з парним числом  $n = 2, 4, 6, \dots$  центральних сфер та внутрішніх вихорів виникають при зміні знаку параметра  $\alpha$  з додатного на від'ємний, тобто при зміні напрямку поступальної швидкості  $V_\infty$  простору на протилежний. У випадку двох сфер,  $-0,02872363139 < \alpha < -0,0065198887466$ , число зовнішніх вихорів змінюється від 2 до 11, а взаємне обертання центрального тіла та зовнішніх вихорів-планет також однозначно не визначене, як і у випадку  $n = 3$ .

**Обертання у планетарних вихорах.** Як показано в [2], напрям обертання зовнішніх вихорів завжди збігається з напрямом обертання простору, інтенсивність якого визначається параметром  $C_0$ ; при цьому кутова швидкість центральних кіл тороїдних вихорів знаходиться через колову швидкість (3):

$$\omega^* = \frac{V_\phi(y^*)}{r^*} = MC_0^3 \left( 3\alpha - \frac{\sin y^*}{y^*} \right), \quad \omega_\infty^* = \lim_{y^* \rightarrow \infty} \omega^* = 3MC_0^3 \alpha, \quad (7)$$

де  $r^*, y^*$  – радіальні координати особливих точок торових вихорів.

У відповідності з формулами (3) кутова швидкість у вихорі  $\omega = V_\phi/r$  у горизонтальній площині  $\theta = \pi/2$  дорівнює

$$\omega = MC_0^3 \left( \alpha + \frac{1}{y^2} \left( \cos y - \frac{\sin y}{y} \right) \right), \quad \omega_\infty = \lim_{y \rightarrow \infty} \omega(y) = MC_0^3 \alpha, \quad (8)$$

так що віддалені вихори обертаються у три рази швидше, ніж сам простір.

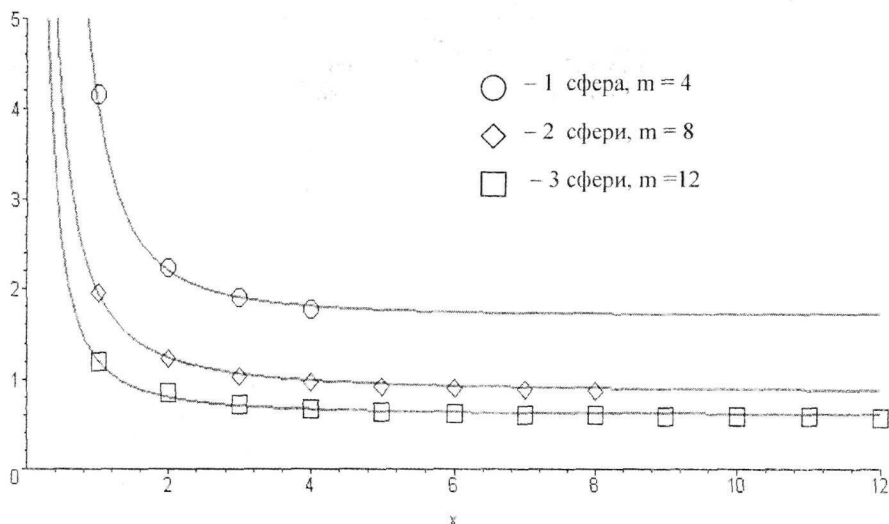


Рис. 4. Кутові швидкості трьох вихорів

На рис.4 подано графік залежності кутових швидкостей центрів зовнішніх торів у варіантах, обчислених в таблиці 5: ( $\alpha = 0,017, n = 1, m = 4$ ); ( $\alpha = -0,0085, n = 2, m = 8$ ) та ( $\alpha = 0,0057, n = 3, m = 12$ ) як функцій номера вихору. При цьому кожна

з 3-х ліній асимптотично наближається до свого граничного значення  $\omega_{\infty}^*$ , яке за (7) залежить від параметра  $\alpha$ .

Як показано в [2], спадні степеневі залежності кутових швидкостей (7) добре узгоджуються з реальним розподілом кутових швидкостей обертання планет у Сонячній системі.

У другому рядку таблиці 5 для  $n = 1$  подано також величини кутових швидкостей  $\omega_c^*$  руху на колах у сідлових точках сепаратрис, які також є коренями рівнянь (6). Як видно, всі такі кола обертаються вгору ж напрямі, що й центральні кола торових вихорів, але їх кутові швидкості є меншими. Така ж закономірність має місце і у випадках  $n = 2$  та  $n = 3$ : обертання «центрів» та «сідел» для вихорів усіх порядків ( $n, m$ ) є одного напрямі і з ростом номера вихору їх кутові швидкості зближуються, прямуючи до величин (7).

Звернемо увагу на процес біфуркаційного переходу структури ( $n = 1, m = 6$ ) у структуру ( $n = 3, m = 5$ ) при переході через значення  $\alpha = 0,01186812676$ . При цьому, очевидно, перший зовнішній тор структури (1,6) попадає в нову 2-у сферу і стає внутрішнім, а до наступної, 3-ї сфери структури (3,5) попадає новоутворений тороїд з оберненим обертанням, що утворюється навколо першої сідлової точки: точка «сідло» переходить у «центр». Зовнішні ж 5 вихорів зберігаються з деякими кількісними змінами параметрів руху. Очевидно, що в новій структурі всі зовнішні вихори зберігають попередній напрям обертання, а загальні закономірності чергування обертань у планетарному вихорі також справджуються.

**Висновки, застосування.** З [2] та поданих тут результатів можна стверджувати, що побудований на основі окремого розв'язку (1) гідродинамічних рівнянь планетарний вихор є прийнятною математичною й фізичною моделлю процесів утворення космічних планетарних систем з первинної газо-пилової хмари за наявності поступального й обертального руху простору. Властивості геометрії й динаміки первинного планетарного вихора також містять у собі важливі передумови й тенденції подальшої еволюції планетарних систем. Ця теоретична модель планетарного вихору є досить адекватним математичним обґрунтуванням вихорової гіпотези Вайцекера [3] про утворення Сонячної системи первинним просторовим вихором.

Наша модель планетарного вихору пояснює також явища оберненого обертання зірки і планет у недавно відкритих планетарних системах на зразок HAT-P-7b [10].

Сподіваємося, що відкриття у Всесвіті нових планетарних систем дасть достатньо експериментальних даних для опробування та застосування нашої моделі до дослідження динаміки реальних космічних утворень.

### Бібліографічні посилання

1. **Перехрест В.І.** Новий розв'язок гідродинамічних рівнянь Ейлера для сферичних вихрових течій / В.І. Перехрест, Р.В. Іванов // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка, вип.6 т.1, 2002 – С. 60-64.
2. **Перехрест В.І.** Планетарний вихор та гіпотези Лапласа і Вайцекера / В.І. Перехрест // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка, вип. 13, т. 2, №5, – 2009 – С. – 113 – 124.
3. **Weizsäcker, von, C.F.Z.** *Astrophys.* **22**, 1944. – P.319–355.
4. **Альфвен Х.** Структура и эволюционная история Солнечной системы / Х. Альфвен, Г. Арениус. – К., 1981, – 332 с.
5. **Kuiper G.P.** In: J.F.Hynek (ed) *Astrophysics* / G.P. Kuiper, McGraw-Hill, – New York, 1951. P. – 104.
6. **Сафронов В.С.** О гипотезе турбулентности в протопланетном облаке / В.С. Сафронов, Е.Л. Рускол // Вопросы космогонии, М., – 5, 1957, – С.22-46.
7. **Ter Haar D.** *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **5**, 1967/ – P.267–278.

8. Hoyle F. Quart. J. Roy. Astron. Soc., 1, 1960. – P.28–55.
9. Hoyle F. In: R. Jastrow and A.J.W. Cameron (eds) Origin of the Solar System. – Academic Press, New York, 1963. – P. 63–71.
10. Стаття ТСН.ua: <http://ru.tsn.ua/ukrayina/v-kosmose-nashli-dve-planety-kotorye-vrashchayutsya-zadom-napereд.html>.

Надійшла до редколегії 29.12.09

УДК 621.793.1:539.23

А.С. Долгов, Н.В. Стеценко

Национальный аэрокосмический университет  
им. Н.Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт»

## КИНЕТИКА ПОВЕРХНОСТНОГО МОНОСЛОЯ

Выполнен анализ кинетики атомов в поверхностном моноатомном слое. Используется одномерная модель миграции атомов на поверхности с учетом межатомного взаимодействия произвольного масштаба. На основе анализа системы кинетических уравнений для вероятностей атомных конфигураций различных видов установлены точные свойства равновесных микрораспределений на поверхности в условиях обмена с внешней средой, либо в отсутствие такового. Обсуждается влияние особенностей микрораспределений на эмиссионные свойства поверхности.

*Ключевые слова:* монослой, диффузия, взаимодействие, кинетика, миграция, поверхность

Виконано аналіз кінетики атомів у поверхневому моноатомному прошарку. Використовується одновимірна модель міграції атомів на поверхні з урахуванням міжатомної взаємодії довільного масштабу. На основі аналізу системи кінетичних рівнянь для ймовірностей атомних конфігурацій різних видів установлені точні властивості рівноважних мікророзподілень на поверхні в умовах обміну із зовнішнім середовищем, або у відсутності такового. Обмірковується вплив особливостей мікророзподілень на емісійні властивості поверхні.

*Ключові слова:* монопрошарок, дифузія, взаємодія, кінетика, міграція, поверхня.

The analysis of atom kinetics in the surface monoatomic layer has been developed. One-dimensional model of surface atom migration has been used subject to the atom interaction within the arbitrary scale. Making use the analysis of kinetic equation systems for the atom configuration possibilities of different types the exact equilibrium distribution features on the surface have been established within environmental conditions or without them. Microdistribution features' influence to the emission surface features have been discussed.

*Keywords:* monolayer, diffusion, interaction, kinetics, migration, surface

**Введение.** Наличие покрытия на поверхности твердого образца (подложки) – весьма распространенное, почти всеобщее свойство реальных систем. Названные поверхностные слои (пленки) либо формируются в тех или иных неконтролируемых процессах, либо являются результатом целенаправленного воздействия на поверхность ради придания ей требуемых свойств.

Технологии нанесения покрытий к настоящему времени преимущественно ориентированы на создание достаточно толстых по атомным масштабам пленок, однако общая тенденция миниатюризации конструктивных элементов различных устройств определяет необходимость изучения свойств весьма тонких пленок, характеристики которых заведомо отличны от соответствующих параметров макроскопических образцов. Отдельного внимания требуют пленки минимальной толщины (моноатомные), где количество слоев покрытия не превышает единицу. Моно-

слои возникают вследствие преобладания связи атомов пленки и подложки по сравнению с масштабом сцепления атомов пленки между собой (в частности, хемадсорбция), а также как результат установившегося равновесия между осаждением и реиспарением атомов при наличии потока частиц на поверхность [1; 2]. Дополнительная мотивация к изучению монослоев возникает в связи с все возрастающим интересом к наноструктурам и нанотехнологиям (например, [3; 4]).

В тех разработках применительно к указанному объекту, которые ориентированы на отыскание значимых в прикладном отношении результатов, как правило, присутствуют априорные аппроксимации макроскопического характера (диффузия атомов и др.).

Однако, чем меньше похож интересующий объект на сплошную безграничную среду, тем меньше оснований для использования макроскопических категорий в качестве инструментария теоретического анализа. Последовательный анализ предполагает микроскопический подход, что и является принципиальной особенностью излагаемых ниже построений. Разумеется, реализация поставленной задачи сопряжена с серьезными трудностями, что предопределяет некоторую дополнительную схематизацию анализа и отдельное рассмотрение специальных вариантов.

**Исходная модель.** Мы ограничиваемся обсуждением одномерных структур. Разумеется, это связано со стремлением к относительной простоте анализа и обеспечением возможности отыскания достаточно прозрачных законченных результатов. Однако, дело не только в этом. Последние годы или даже уже десятилетия – время активизации интереса к низкоразмерным структурам, какие встречаются в ряде случаев и обнаруживают самостоятельный, часто неожиданный комплекс свойств. В частности, имеются публикации ([5; 6] и др.), где экспериментально показывается и теоретически обосновывается сильная анизотропия (фактическая одномерность) процессов миграции атомов. Кроме того, известны ситуации, когда поверхностная миграция реализуется по коридорам, создаваемых примесями или особенностями матрицы. Еще один вариант одномерности: «всасывание» примесей в тонкие нанотрубки [7].

Особенности заполнения монослоя могут быть представлены в терминах вероятностей заполнения тех или иных узлов.

Для одномерной цепи возможных позиций поверхностных атомов уравнения кинетики могут записываться так

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{d\tau}(n) = & \phi_{010}(n-1) + \nu\phi_{110}(n-1) + \phi_{010}(n+1) + \nu\phi_{011}(n+1) - \\ & -\phi_{110}(n) - \phi_{011}(n) - 2\phi_{010}(n), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\tau$  – безразмерное время;  $n$  – номер узла;  $\phi$  – символ вероятности той или иной конфигурации, центрированной на последовательности позиций, обозначенной соответствующим номером;  $\nu$  – фактор взаимодействия.

Каждое из слагаемых (1) представляет вариант механизма изменения числа частиц в позиции  $n$ . Параметр  $\nu$ , в силу стохастического характера перескоков атомов из одной позиции в соседнюю, имеет вид фактора Гиббса

$$\nu = \exp\left(-\frac{U}{KT}\right), \quad (2)$$

где  $U$  – энергия взаимодействия между атомами, находящимися в соседних позициях. Заметим, что  $\nu > 1$ , если атомы отталкиваются и  $\nu < 1$  для случая притяжения.



Дополнительно стоит обратить внимание на то, что в области высоких температур значение  $\nu$  приближается к единице, а в случае  $T \rightarrow 0$  становится несопоставимым с единицей.

Система уравнений (1) незамкнута, так как вероятности заполнения узлов  $\phi_i$  зависят от вероятностей тройных конфигураций. Если же ввести в рассмотрение уравнения для величин  $\phi_{010}$ ,  $\phi_{110}$  и т. д., то это повлечет за собой появление пяти-узельных вероятностей и т. д. Возникающая дважды бесконечная система уравнений не может быть замкнута, что, однако, не исключает возможностей результативного анализа и обращения к более сложным объектам, содержащим усовершенствования исходной схемы.

**Континуальное приближение.** В предположении о достаточной гладкости зависимостей  $\phi = \phi(n)$  совокупность уравнений (1) с учетом слагаемых вплоть до второго порядка малости и с использованием аппроксимаций вида

$$\phi_{110}(n) \approx \phi_1(n-1)\phi_1(n)\phi_1(n+1), \phi_0 \equiv 1 - \phi_1 \quad (3)$$

сводится к уравнению диффузионного типа (индекс опущен)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial n} \left\{ D \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\}, \quad (4)$$

где роль коэффициента диффузии играет величина

$$D = 1 + (\nu - 1)(4\phi - 3\phi^2). \quad (5)$$

Легко видеть, что функция  $D = D(\phi)$  немонотонна, приобретая значения – единица при  $\phi \rightarrow 0$  (отсутствие взаимовлияния мигрирующих атомов вследствие низкой плотности пленки) и  $\nu$ , если  $\phi \rightarrow 1$ . В последнем случае – каждый атом почти гарантированно имеет близких соседей, в силу чего перемещения в структуре имеют вакансионный характер (аналог дырочной проводимости).

Самым примечательным свойством выражения (5) является то, что для достаточно малых значений  $\nu$  величина  $D$  в области значений  $\phi$ , удаленных от краев диапазона – 0 и 1 – переходит в область отрицательных чисел. Это значит, что преобладающее движение адсорбированных атомов в этих условиях соответствует не выравниванию плотности, а, напротив, уплотнению ограниченных сгустков за счет обеднения примыкающих участков. Это вариант восходящей диффузии.

Отрицательные значения  $D$  реализуются только при немалом уровне притяжения между соседствующими атомами (в рамках модели, когда  $\nu < \frac{1}{4}$ ). Однако,

смысл параметра  $\nu$  таков (2), что при достаточно низких температурах значение  $\nu$  понижается вплоть до сколь угодно низких значений при произвольно малом уровне притягивательного взаимодействия. Тем самым выявляется, что достаточно сильное охлаждение ведет к распаду исходного распределения на плотные изолированные сгустки при любых, пусть и весьма слабых уровнях притяжения атомов в соседних позициях.

Провисание  $D(\phi)$  в область отрицательных значений определяет наличие двух значений  $\phi_+, \phi_-$ , когда  $D = 0$ . Нижнее равновесное значение  $\phi_-$  – это точка бифуркации, так как на участках, где  $\phi < \phi_-$ , уравнение (4) определяет обычное

диффузионне вирівнювання, а перевищення  $\phi$  над рівнем  $\phi_*$  задає режим колапсування існуючого розподілу, відповідає сжаттю в цілому до рівня  $\phi_*$ .

Конечно, кількісні характеристики залежності (5) не слід вважати буквальною. В силу наближеності апроксимації (3) і обмежень континуального наближення рівняння (4) разом з (5) гарантує тільки якісні тенденції процесів формування рівноважних розподілів на поверхні.

**Рівноважне стан в відсутності випаровування.** Характерною особливістю рівноважних станів, де немає обміну з оточуючим середовищем, є незмінність середнього рівня заповнення  $\phi$ , який грає роль параметра, чисельне значення якого ( $0 < \phi < 1$ ) задано історією і властивостями матриці. Строгий підхід вимагає використання рівнянь для  $\phi_{11}$ ,  $\phi_{111}$ ,  $\phi_{110}$ ,  $\phi_{1111}$  і т. д. Раніше було показано ([8] і др.), що формувана таким чином нескінченна система рівнянь визначає точну відповідність між ймовірністю заповнення позиції  $\phi_1$  і ймовірністю наявності найближчого сусідства  $\phi_{11}$ . Встановлено, що

$$\phi_{11} = \frac{\nu + 2(1-\nu)\phi - \left\{ \nu \left[ \nu + 4(1-\nu)\phi(1-\phi) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}{2(1-\nu)} \quad (6)$$

Соотношение (6) дозволяє знайти й ймовірності виникнення послідовностей довільної довжини за рекуррентним правилом

$$\phi_{\underbrace{1 \dots 1}_p} = \frac{\phi_{11}}{\phi_1} \phi_{\underbrace{1 \dots 1}_{(p-1)}} \quad (7)$$

Точні співвідношення (6; 7) доповнюють наближені побудови попереднього пункту, визначаючи більш детальну інформацію про особливості виникаючих сгусток і їх розподілу.

**Макроскопічно однорідні розподіли в умовах обміну з примикаючим середовищем.** Більш загальна, ніж у попередніх пунктах, ситуація відповідає наявності обміну атомами з оточуючим середовищем: частинки цікавого виду можуть приходити з примикаючого до поверхні об'єму і, відповідно, йти з поверхні (випаровуватися) в оточуюче простірство. Баланс названих альтернативних процесів задає рівень заповнення поверхневого моношару. Таким чином, в цих умовах величина  $\phi$  не належить до числа параметрів ситуації, а є функцією інтенсивності впливу і в теоретичному аналізі підлягає визначенню.

Рівняння виду (1) і відповідні їм рівняння для багаточастинкових ймовірностей повинні бути доповнені слагаєми, що представляють названі додаткові умови.

Для реалізації макроскопічного рівноважності в шарі повинно бути забезпечено детальне рівноважність між конфігураціями на поверхні, що представляє співвідношення (6), і звернення в нуль згаданих додаткових слагаєми з урахуванням відповідностей виду (7). Останнє вимога визначає рівність

$$g\phi(1-\phi) = \alpha \left[ \nu^2 \phi_{11}^2 + 2\nu\phi_1(\phi - \phi_{11}) + (\phi - \phi_{11})^2 \right], \quad (8)$$



где  $g$  – поток осаждающихся частиц на поверхность в соответствующем масштабе;  $\alpha$  – зависящий от температуры параметр интенсивности реиспарения, слагаемые в квадратных скобках соответствуют набору вариантов ухода с поверхности с учетом их статистического веса.

Требование совместности соотношений (6) и (8) определяет равновесные значения  $\phi$ ,  $\phi_{11}$ , и согласно (7) все особенности размещений атомов на поверхности. Получается

$$\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\frac{g}{\alpha} - \nu}{\left( \left( \frac{g}{\alpha} - \nu \right)^2 + 4 \frac{g}{\alpha} \nu^2 \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (9)$$

Формула (9) задает некоторый набор качественно различающихся вариантов распределения атомов в слое.

Выражение (9) обращается в нуль, когда  $\frac{g}{\alpha} \rightarrow 0$  и в единицу в условиях

$$\frac{g}{\alpha} \rightarrow \infty \text{ и (или) } \nu \rightarrow 0.$$

Общая тенденция уплотнения поверхностного слоя с увеличением интенсивности потока извне  $g$  в некоторых случаях нарушается. Так в области параметров  $\nu \gg \frac{g}{\alpha} \gg 1$  рост потока на поверхность приводит к обеднению поверхностного слоя.

Специальный случай  $\frac{g}{\alpha} = \nu$  определяет возникновение регулярной структуры с правильным чередованием заполненных и пустых позиций.

В общем случае изменение температуры обуславливает соответствующее изменение параметров  $g, \alpha, \nu$ , что отвечает радикальным перестройкам поверхностного монослоя, связанным с изменением средней степени заполнения возможных позиций и перераспределением размеров сгустков.

**Макроскопически неоднородные распределения в условиях осаждения извне.** Здесь продолжается обсуждение физической ситуации, заявленной в предыдущем пункте. Однако, предположение о возможности макроскопической неоднородности пространственного распределения при однородном внешнем воздействии серьезно усложняет анализ. Определенные сведения качественного характера можно получить при использовании континуальной аппроксимации исходных уравнений и операции расщепления вида (3). Стационарному режиму соответствует уравнение

$$\frac{d^2 \phi}{dn^2} = \alpha [1 - (1 - \nu) \phi]^2 \phi - g(1 - \phi). \quad (10)$$

Уравнение (10) – нелинейное дифференциальное уравнение того вида, решение которого находится двумя последовательными квадратурными операциями.

Тривиальний випадок  $\phi = const$  також адекватен рівнянню (10). При цьому отримується вираження, яке фактично є грубленим представленням формули (9). (При  $\nu = 1$  результати збігаються).

Нетривиальні рішення (10) визначають просторово неоднорідні розподілення густоти сгусток двох типів: локалізовані та періодичні. Перший варіант відповідає локальному опусканню концентрації відносно рівня, відповідає однорідному розподіленню. Другий допускає значительний діапазон варіювання кількісних параметрів виникаючої «гребенки» - кроку та амплітуди. Во всіх випадках передбачувані значення густоти плівки не перевищує рівня однорідності.

Використання макроскопічних категорій призводить до втрати ряду деталей розподілення, які виявляє послідовно мікроскопічний аналіз, але не входить в протиріччя з основними передбаченнями якісного характеру. Не претендуючи на деталізм, континуальний підхід доповнює інформацію про особливостях монокристалних покриттів і розширює коло досліджуваних станів.

**Ресурси управління властивостями монослоя.** Варіювання середньої густоти поверхневий монокристалної плівки та її мікроскопічної структури забезпечується впливом на основні фактори, задають названі характеристики. Формула (9) вказує два основні фактори впливу: потік осаджуємих частинок, представлений значенням  $g$ , та температура, неявно присутня во всіх параметрах ситуації. Чітко, що збільшення потоку (тиснення парів у поверхності) можна, як правило (вище згадані виключення), домогтися існування практично щільної поверхневий плівки, яка отримує при цьому трансляційні характеристики твердого тіла зменшеного розміру. Зменшення  $g$  веде до зниженню середньої густоти аж до повного спустошення поверхності при  $g = 0$  (визначення впливу). Структура неповного покриття визначається підстановкою значення  $\phi_1$  в вираження (6) та використанням відповідностей (7), та варіюється від набору ізольованих великих кластерів до сукупності самотніх адатомів.

Другий згаданий вище фактор – температура – впливає на властивості рівноважного монослоя не менше значительно. Для достатньо високих температур (також при слабкому взаємодії адатомів)  $\nu \approx 1$ . При цьому

$$\phi_1 \approx \frac{g}{g + \alpha}, \quad \phi_{11} \approx \frac{g^2}{(g + \alpha)^2}, \dots$$

Так як при помірних, звичайних для практики рівнях впливу величина  $g$  майже сильно поступає  $\alpha$ , то бачимо, що формули (11) відповідають реалізації розрідженого решітчастого газу адатомів.

В загальному випадку варіювання температури змінює співвідношення між  $\frac{g}{\alpha}$  та  $\nu$  неограниченно, причому як зміна середньої густоти  $\phi_1$ , так і структури розподілення  $\phi_1, \phi_{11}, \dots$  дуже гостро відгукуються на помірне змінення температури, що отримує характер стрибка, різкого переходу між станами газу ізольованих атомів та кластеризацією.

Ще одна можливість впливу на монослой пов'язана з динамічними властивостями структурних складових плівки. В загальному випадку поверхнєве

образование представлено фракцией изолированных атомов, мелкими – двухузельными, трехузельными кластерами и более длинными изолированными цепочками. Каждый из этих вариантов обладает некоторым набором собственных частот. Общая форма плотности частот для подобной структуры – это предмет отдельного обсуждения; здесь же достаточно отметить, что наборы частот для кластеров разных размеров различны, причем частичное наложение частотных мод для различающихся цепочек подчиняется некоторым правилам. Например, цепочки, скажем из 8-и и 9-ти атомов, имеют только одну общую частоту, отвечающую колебаниям этих элементов как целого. Таким образом, инфракрасное воздействие на поверхность определенной длины волны возбуждает колебания в некоторых кластерах и не воспринимается иными, внешне весьма сходными. Достаточно интенсивное воздействие приводит к разрушению отдельных, т. е. резонирующих на данной частоте кластеров. Тем самым открываются возможности селективного воздействия только на кластеры определенного вида, что создает предпосылки целенаправленного изменения распределения сгустков по размерам и внутренней структуре.

Можно также указать, что экспериментальное определение интенсивности разных частотных мод (возможно, по эффективности поглощения внешнего вынуждающего воздействия) создает возможности анализа распределения на поверхности и также, в определенной мере, поверхностных характеристик подложки.

**Эмиссионные свойства поверхности с монослоем.** Так как в общем случае монослой представлен набором кластеров разных размеров, начиная с одиночного, то оказывается, что поверхность представлена мозаикой участков двух видов: пятна покрытия и зоны обнажения матрицы. Соответствующим образом на поверхности представлены, по крайней мере, два набора характеристик поверхности – геометрических, динамических, оптических и др. Значительный, возможно преобладающий, прикладной интерес к обсуждаемому объекту связан с эмиссионными свойствами поверхности. В таком направлении были ориентированы и пионерские разработки [9]. В этой связи следует отметить, что представленный выше анализ равновесных состояний в условиях обмена с окружающей средой при определенном переосмыслении используемых параметров может быть распространен и на объекты, где поступление материала (активатора) на поверхность происходит за счет капиллярных сил. При этом роль «внешней среды» играет объем пористой подложки («губки»), пропитанной активирующим эмиссию веществом.

Количественные параметры механизма термоэлектронной эмиссии задаются эффективными геометрическими и материальными характеристиками участков поверхности, размер которых не ниже шага решетки. Таким образом, следует обозначить три различающихся варианта условий эмиттирования: участки, свободные от покрытия, участки плотного покрытия и пограничные, т. е. те, где занятый узел соседствует с незаполненной позицией. Вклады названных составляющих в эмиссионный ток могут быть выяснены только на базе микроскопического анализа, определяющего все особенности относительного размещения адатомов на поверхности.

В терминах использованной выше модели плотность тока эмиссии (макроскопическая однородность) в соответствии с формулой Ричардсона-Дэшмана [10] представляется выражением

$$j = AT^2 \left\{ \phi_{11} e^{-\frac{V_{11}}{KT}} + \phi_{00} e^{-\frac{V_{00}}{KT}} + 2\phi_{10} e^{-\frac{V_{10}}{KT}} \right\}, \quad (12)$$

где символом  $V$  обозначена работа выхода на участке, вид которого обозначен тем же индексом, что и вероятности соответствующих конфигураций. Удвоение последнего слагаемого определяется наличием двух физически идентичных в условиях однородности подвариантов условий эмиттирования, отвечающих размещениям 10 и 01.

В общем случае разброс значений  $V$  может быть значительным, что определяет сколь угодно большое различие соответствующих экспоненциальных множителей. Поэтому каждое из слагаемых (12) может в тех или иных режимах оказаться и преобладающим, и пренебрежимым. Выражение (12) сводится к обычному виду формулы Ричардсона, когда  $\phi_{11} \rightarrow 1, \phi_{00} \rightarrow 1, \phi_{10} \rightarrow \frac{1}{2}$  (предельное значение для этой величины) и когда все значения  $V_{ik}$  одинаковы. (Заметим, что  $\phi_{11} + 2\phi_{10} + \phi_{00} \equiv 1$ ).

Формула (12) указывает на отклонение температурной зависимости эмиттирования с активированной поверхности от предсказаний базисного соотношения вследствие уменьшения  $\phi_{11}$  при повышении температуры, т. е. вследствие расширения области, свободной от активатора.

Результатирующее выражение (12) позволяет также истолковать немонотонность зависимости эффективной работы выхода от степени заполнения поверхности активатором. Это может иметь место, когда особо благоприятен выход электронов в области границ кластеров ( $V_{01} < V_{11} < V_{00}$ ). Заполнение поверхности активатором сопряжено вначале с увеличением как  $\phi_{11}$ , так и  $\phi_{10}$ , что ведет к снижению работы выхода. Однако по достижению уровня заполнения  $\phi_1 > \frac{1}{2}$  дальнейшее увеличение степени покрытия соответствует приближению  $\phi_{11}$  к  $\phi_1$  с соответствующим убыванием  $\phi_{01}$ . Тем самым наиболее благоприятные для эмиссии условия соответствуют неполному покрытию поверхности (ориентировано в диапазоне 0,5...1). При этом в наилучшем режиме эффективная работа выхода может быть ниже этой величины для чистого активатора, что также наблюдается для реальных эмиттеров.

**Заключение.** Выполненные построения дают развернутую информацию о свойствах поверхностного примесного монослоя и его эволюциях. Предсказания количественного характера имеют определенные ограничения, связанные с одномерностью анализа. Однако, некоторые дополнительные проработки, не представленные в данной публикации, показывают, что более сложная двумерная поверхностная структура имеет ряд элементов сходства с одномерным объектом (например, формула (6), имеющая ключевое значение в рамках данной работы, сохраняет свое значение и в двумерном анализе). В работе использованы и операции, вводящие в рассмотрение макроскопические по сути категории (континуальное приближение) и последовательно микроскопический подход. Эта двойственность, возможно, создаст впечатление некоторой эклектичности. Но, по нашему мнению, различие методов анализа – это отражение сложности, многоуровневости изучаемых объектов, что и предполагает целесообразность использования различных приемов анализа.

Изложенные разработки не завершают анализ кинетики монослоев, а, напротив, допускают или даже предполагают значительное развитие в направлении совершенствования модельных представлений, выяснения критериев адекватности формального анализа тем или иным реальным объектам, применения результатов к потребностям прикладного характера.

Выражаем благодарность за проявленный интерес к статье и помощь при подготовке данной статьи к публикации д.т.н., профессора Калинину Наталью Евграфовну.

### Библиографические ссылки

1. Алферов Ж.И. Напряженные субмонослойные гетероструктуры и гетероструктуры с квантовыми точками / Ж.И. Алферов, Д. Бимберг и др. // УФН. – 1995. – № 165.
2. Наумовец А.Г. Субмонослойные пленки на поверхности металлов / А.Г. Наумовец, А.Г. Федорус, А.П. Напартовия, Л.А. Вольтов // УФН. – 1977. – № 1. – Т. 122.
3. Оуэнс Ф. Нанотехнологии / Ф. Оуэнс, Ч. Пул-мл. – М.; 2009. – 336 с.
4. Погребняк А.Д. Структура и свойства твердых и сверхтвердых нанокomпозитных покрытий / А.Д. Погребняк, А.П. Шпак и др. // УФН. – 2009. – № 35. – Т. 179.
5. Koh S.J. Self-Assembly of One-Dimensional Surface: Long-Range Interactions in the Growth of Ir and Pd on W(110) / S.J. Koh, G. Ehrlich // Phys.Rev.Lett. – 2001. – № 87.
6. Tsvilin D.V. Effect of mesoscopic relaxations on diffusion of Co adatoms on Cu(111) / D.V. Tsvilin, V.S. Stepanyuk, W. Hergert, J. Kirschner // Phys.Rev.B. – 2003. – № 68.
7. Елецкий А.В. Транспортные свойства углеродных нанотрубок / А.В. Елецкий // УФН. – 2009. – № 225. – Т. 179.
8. Долгов А.С. Кинетика распределения атомов поверхностного моноатомного слоя / А.С. Долгов // Поверхность. – 1991. – № 2. – С. 20-24.
9. Лэнгмюр И. Силы вблизи поверхности молекул / И. Лэнгмюр // УФН. – 1930. – № 4. – Т. 10.
10. Модинос А. Термо-, авто- и вторичная электронная спектроскопия твердых тел / А. Модинос – М., 1993.

Надійшла до редколегії 18.06.09

УДК 532.516

В.И. Елисеев\*, И.Р. Томасон\*\*

\*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

\*\*Институт транспортных систем и технологий НАН Украины

## МАССООБМЕН В ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКЕ СВИНЦОВОГО АККУМУЛЯТОРА

На основе теории ионообмена рассмотрена задача о массообмене в электрохимической ячейке свинцово-кислотного аккумулятора. Предложен асимптотический метод решения, который позволяет получить численное значение компонентов и потенциалов в ячейке в пределах реального времени. Получены кривые распределения концентраций раствора.

*Ключевые слова:* свинцово-кислотный аккумулятор, массо- и ионообмен, методы решения уравнений ионообмена.

На основі теорії іонообміну розглянуто задачу про масообмін в електрохімічному осередку свинцево-кислотного акумулятора. Запропоновано асимптотичний метод рішення, що дає можливість набуття чисельних значень компонентів і потенціалів в осередку в межах реального часу. Отримано криві розподілу концентрацій розчину.

*Ключові слова:* кислотно-свинцевий акумулятор, масо- та іонообмін, методи розв'язання рівнянь іонообміну.

Based on the theory of the ion exchange, the problem of the mass transfer in the electrochemical cell of the lead-acid accumulator was considered. The asymptotic solution method, which allows to

receive a numerical rating of elements and potentials in the cell within real time was offered. The curves of the distribution of solution's concentration were obtained.

*Keywords:* lead-acid accumulator, mass transfer and ion exchange, the solution methods of ion exchange equations.

**Введение.** Массообмен в электрохимических системах привлекает большое внимание исследователей, что объясняется, во-первых, широким применением электрохимических аппаратов, и, во-вторых, широким спектром научных проблем, относящихся к различным математическим, физико-химическим и биологическим направлениям. В настоящее время ячейка аккумулятора представляет собой объем, заполненный концентрированным электролитом с двумя разнесенными друг от друга пористыми пластинами, например, из свинца  $Pb$  (отрицательный электрод) и двуокиси свинца  $PbO_2$  (положительный электрод). По законам электрохимии на поверхности этих электродов при замыкании цепи, происходят поверхностные реакции, в результате чего по цепи проходит электрический ток. Разработанные методы электрохимии [1;2] позволяют определить важные параметры работы электрохимических ячеек, однако полная картина работы такой ячейки, как рабочий объем свинцового аккумулятора, далека от своего завершения. На пути исследования таких систем стоят очень сложные явления гетерогенного взаимодействия химически активных компонентов на границах фаз с образованием локальных высоконапряженных полей (двойных электрических слоев), влияющих на само взаимодействие. С математических позиций решение системы уравнений, описывающих поведение компонентов в растворе, также представляют большие трудности из-за наличия громадного числа, которое делает численное решение задачи на данном этапе практически бесперспективным. Это связано, главным образом, с очень малым шагом интегрирования. Вследствие этого для рассмотрения задач такого класса представляют интерес асимптотические методы, которые находят широкое применение в этой области, например [3;4]. В [5] была рассмотрена задача о нестационарном массообмене в химической ячейке без учета электродинамической составляющей процесса. В данной работе восполняется недостаток этой работы и рассматривается массообмен с учетом действия электрического потенциала в поровом и межэлектродном пространстве ячейки, но общая схема описания кинетических процессов на электродах остается такой же.

**Постановка задачи.** Исходя из теории электродинамики и ионообмена в растворах [6-8], общие уравнения массообмена для пористого тела можно записать в следующем виде

$$\frac{\partial(\alpha c_j)}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha c_j \vec{u}) + \operatorname{div} \vec{g}_j = j_j^S + j_j^V, \quad (1)$$

$$\vec{g}_j = -\alpha \left( D_j^{\text{eff}} \operatorname{grad} c_j + z_j w_j^{\text{eff}} c_j \operatorname{grad} \phi \right), \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \left( \varepsilon^{\text{eff}} \alpha \varepsilon_0 \operatorname{grad} \phi \right) = \alpha \rho F \sum_j \frac{c_j}{M_j}, \quad (3)$$

где  $t$  – время;  $\alpha$  – порозность;  $c_j$  – массовая концентрация  $j$ -го компонента;  $u$  – скорость среды;  $\rho$  – плотность раствора;  $g_j$  – массовый поток;  $j_j^S, j_j^V$  – источники и стоки, характеризующие химическое взаимодействие компонентов соответ-



венно на поверхні електродів і в об'ємі;  $D_j^{eff}$  – ефективний коефіцієнт дифузії;  $w_j^{eff} = D_j^{ef} F/RT$  – ефективна подвижність;  $z_j$  – валентність  $j$ -го компонента;  $F$  – число Фарадея;  $R$  – газова постійна;  $T$  – температура;  $\phi$  – потенціал;  $\epsilon_0$  – діелектрична постійна вакуума;  $\epsilon^{eff}$  – ефективний коефіцієнт діелектричної постійної розчинителя;  $M_j$  – мольна маса компонента. Складаючи рівняння (1) по всім компонентам, улічуючи що  $\sum_j j_j = 0$ , по-лучим рівняння нерозривності для всієї середовища в цілому

$$\frac{\partial(\alpha)}{\partial t} + \text{div}(\alpha \vec{u}) = j^S. \quad (4)$$

Отбрасуючи гідродинамічну швидкість, використовуючи представлення порового простору в вигляді каналу і інтегруючи виписані рівняння поперек цього каналу, можна отримати наступні одномерні рівняння:

$$\frac{\partial(\alpha c_j)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha D_{jef} \frac{\partial c_j}{\partial x} + \alpha z_j w \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = s \frac{M_i}{\rho} g_j + \alpha j_j^V, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon^{eff} \alpha \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + s \phi_n = \alpha \rho F \sum_j \frac{c_j}{M_j}, \quad (6)$$

де  $\phi_n = \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_s$  – похідна від потенціалу по нормалі на гетерогенній поверхні,  $s$  – внутрішня об'ємна поверхня. З граничних умов можна отримати, що

$$\phi_n = \frac{\epsilon_{el}^{eff}}{\epsilon^{eff}} \frac{F \sum_j g_j}{\sigma_{el}^{eff}}. \quad (7)$$

Введемо наступні величини:  $\tau = l/T$ ,  $\xi = x/H$ ,  $d_j = D_j/D_{H_2O}$ ,  $T = H^2/D_{H_2O}$  – масштаб часу,  $H$  – лінійний масштаб, і переписемо рівняння в безрозмірному вигляді

$$\frac{\partial \alpha^{-,+} c_i^{-,+}}{\partial \tau} = \frac{\alpha^{-,+} d_j}{l^{-,+}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial c_i^{-,+}}{\partial \xi} + z_i \chi c_i^{-,+} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + T (1 - \theta^{-,+}) \frac{M_i}{\rho} s^{-,+} g_i^{-,+}, \quad (8)$$

$$s^{-,+} = 3 \frac{1 - \alpha}{r_{ec}^{-,+}},$$

$$\frac{\partial^2 \phi^{-,+}}{\partial \xi^2} = -\Phi \sum_k z_k \frac{c_k^{-,+}}{m_k} - (1 - \theta^{-,+}) s^{-,+} \phi_n^{-,+}, \quad \Phi = \frac{\rho F H^2}{\epsilon^{eff} \epsilon_0 M_{H_2O}}, \quad (9)$$

де знаки «-» і «+» зверху вказують на індекси і визначають, до якого електроду відноситься та чи інша величина.

**Асимптотический метод решения.** Для решения задач, содержащих большие числа, существует хорошо развитый аппарат асимптотических методов, которые, в общем, можно разделить на регулярные и сингулярные методы. Данная задача по своим формальным признакам относится к сингулярной задаче, поскольку образуемый малый параметр  $\varepsilon = 1/\Phi$  находится в уравнении (6) при старшей производной. Однако, по своим физическим особенностям, она должна относиться к регулярной задаче.

Предварительно проинтегрируем систему (5), (6) по  $\xi$  в пределах шага интегрирования  $h$ , тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \int_0^h \alpha^{-,+} c_i^{-,+} d\xi \right) = \frac{\alpha^{-,+} d_j}{l^{-,+}} \left[ \left( \frac{\partial c_i^{-,+}}{\partial \xi} + z_i \chi c_i^{-,+} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} - \left( \frac{\partial c_i^{-,+}}{\partial \xi} + z_i \chi c_i^{-,+} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_{\xi=h} \right] + T \int_0^h (1 - \theta^{-,+}) \frac{M_i}{\rho} s^{-,+} g_i^{-,+} d\xi \quad (10)$$

$$\left( \frac{\partial \phi^{-,+}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} - \left( \frac{\partial \phi^{-,+}}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} = -\Phi \int_0^h z_k \frac{c_k^{-,+}}{m_k} d\xi - \int_0^h (1 - \theta^{-,+}) s^{-,+} \phi_n^{-,+} d\xi. \quad (11)$$

Будем считать, что в пределах шага  $h$  параметры под интегралом постоянны; кроме того, примем, что в выражении (10)  $(c_j^{-,+})_0 = (c_j^{-,+})_1$ , тогда уравнения (10) упростятся и перейдут в систему

$$\varepsilon h \frac{\partial (\alpha^{-,+} c_j^{-,+})}{\partial \tau} = \frac{\alpha^{-,+} d_j}{l^{-,+}} \left[ (q_{jp} - q_{jl}) - z_j \chi c_j^{-,+} h \sum_k z_k \frac{c_j^{-,+}}{m_k} - \varepsilon z_j \chi c_j^{-,+} h (1 - \theta^{-,+}) s^{-,+} \phi_n^{-,+} \right] + \varepsilon T (1 - \theta^{-,+}) \frac{M_j}{\rho} s^{-,+} g_j^{-,+} h \quad (12)$$

Принимая во внимание уравнение (4), которое после интегрирования можно переписать в виде  $h \frac{\partial (\alpha^{-,+})}{\partial \tau} = T \frac{1 - \theta^{-,+}}{\rho} s^{-,+} h \sum_i M_i g_j^{-,+}$ , окончательно можно записать

$$\varepsilon h \alpha^{-,+} \frac{\partial (c_j^{-,+})}{\partial \tau} = \frac{\alpha^{-,+} d_j}{l^{-,+}} \left[ (q_{jp} - q_{jl}) - z_j \chi c_j^{-,+} h \sum_k z_k \frac{c_j^{-,+}}{m_k} - \varepsilon z_j \chi c_j^{-,+} h (1 - \theta^{-,+}) s^{-,+} \phi_n^{-,+} \right] + \varepsilon T \frac{(1 - \theta^{-,+})}{\rho} s^{-,+} h \left[ M_j g_j^{-,+} - c_j^{-,+} \sum_i M_i g_i^{-,+} \right] \quad (13)$$

Принимая, что в растворе серной кислоты в объеме и в пристеночных областях имеются четыре компоненты  $H_2O$ ,  $HSO_4$ ,  $H_3O$ , и  $PbSO_4$ , запишем уравнения для этих составляющих, ограничиваясь нулевым приближением. В результате преобразований системы (13) будем иметь следующую систему уравнений



$$\alpha^{-,+} h \frac{\partial c_0^{-,+H_2O}}{\partial \tau} = \frac{\alpha^{-,+}}{l^{-,+}} (q_{p0}^{-,+H_2O} - q_{l0}^{-,+H_2O}) - T \frac{(1-\theta^{-,+})}{\rho} s^{-,+} h \{ [M_{H_2O} + c_0^{-,+H_2O} (M_{H_3O} + M_{PbSO_4} - M_{H_2O} - M_{HSO_4})] g_{1,0}^{-,+} - M_{PbSO_4} c_0^{-,+H_2O} g_{ad,0}^{-,+} - \gamma^{-,+} [6M_{H_2O} - c_0^{-,+H_2O} (6M_{H_2O} - 4M_{H_3O})] g_{2,0}^{-,+} \} \quad (14)$$

$$\alpha^{+,+} h \frac{\partial c_0^{+,+PbSO_4}}{\partial \tau} = \frac{\alpha^{+,+} d_{PbSO_4}}{l^{+,+}} (q_{p0}^{+,+PbSO_4} - q_{l0}^{+,+PbSO_4}) + T \frac{(1-\theta^{+,+})}{\rho} s^{+,+} h \{ [M_{PbSO_4} - c_0^{+,+PbSO_4} (M_{H_3O} + M_{PbSO_4} - M_{H_2O} - M_{HSO_4})] g_{1,0}^{+,+} - M_{PbSO_4} (1 - c_0^{+,+PbSO_4}) g_{ad,0}^{+,+} - \gamma^{-,+} c_0^{+,+PbSO_4} (6M_{H_2O} - 4M_{H_3O}) g_{2,0}^{+,+} \} \quad (15)$$

$$\alpha^{-,+} h P^{-,+} \frac{\partial c_0^{-,+HSO_4}}{\partial \tau} = m_{HSO_4} d_{HSO_4} d_{H_3O} \frac{\alpha^{-,+}}{l^{-,+}} \cdot [c_0^{-,+H_3O} (q_{p0}^{-,+HSO_4} - q_{l0}^{-,+HSO_4}) + c_0^{HSO_4} (q_{p0}^{-,+H_3O} - q_{l0}^{-,+H_3O})] - T \frac{(1-\theta^{-,+})}{\rho} s^{-,+} h m_{HSO_4} \{ [d_{H_3O} M_{HSO_4} c_0^{-,+H_3O} - d_{HSO_4} M_{H_3O} c_0^{-,+HSO_4} + (d_{H_3O} + d_{HSO_4}) c_0^{-,+H_3O} c_0^{-,+HSO_4} (M_{H_3O} + M_{PbSO_4} - M_{H_2O} - M_{HSO_4})] g_{1,0}^{-,+} + \gamma^{-,+} [4d_{HSO_4} c_0^{-,+HSO_4} M_{H_3O} + (d_{H_3O} + d_{HSO_4}) c_0^{-,+HSO_4} c_0^{-,+H_3O} (6M_{H_2O} - 4M_{H_3O})] \cdot g_{2,0}^{-,+} - (d_{H_3O} + d_{HSO_4}) c_0^{-,+H_3O} c_0^{-,+HSO_4} M_{PbSO_4} g_{ad,0}^{-,+} \} ,$$

где  $P^{-,+} = (m_{HSO_4} d_{H_3O} c_0^{-,+H_3O} + m_{H_3O} d_{HSO_4} c_0^{-,+HSO_4})$ , коэффициент  $\gamma^{-} = 0$ ,

$\gamma^{+} = 1$ . К уравнению (16) необходимо добавить равенство

$$m_{HSO_4} c_0^{-,+H_3O} = m_{H_3O} c_0^{-,+HSO_4} \quad (17)$$

В нулевом приближении это соотношение является условием электронейтральности, являющееся фундаментальной основой в изучении ионопереноса в растворах электролита. Следующее приближение, хотя и вносит дополнительные вычислительные трудности, но с математических позиций оно вписывается в общую схему теории. Однако с физических позиций имеются важные принципиальные положения. Во-первых, первое приближение показывает отход системы от электронейтральности и дает возможность вычислить потенциалы в поровом пространстве электродов и в межэлектродном объеме. Однако важным условием для расчета в первом приближении является равенство (7), которое в данном виде записано формально. При определении этой величины необходимо рассматривать внутрипоровые двойные электрические слои на фазовых границах. В данной работе, ограничиваясь рассмотрением нулевого приближения необходимо указать, что для определения потенциала данный асимптотический метод дает уравнение, которое

может быть использовано без вычислений градиента  $\phi_n^{-,+}$ , вследствие этого дальнейшее построение теории разряда может принципиально быть продолжено. Выпишем это уравнение

$$\begin{aligned} \chi h P^{-,+} \frac{\alpha^{-,+}}{\Gamma^{-,+}} \frac{\partial \phi_0^{-,+}}{\partial \xi} &= \chi h P^{-,+} \frac{\alpha^{-,+}}{\Gamma^{-,+}} \left( \frac{c_1^{-,+,HSO4}}{m_{HSO4}} - \frac{c_1^{-,+,H3O}}{m_{H3O}} + (1 - \theta^{-,+}) s^{-,+} \phi_{0n}^{-,+} \right) = \\ &= \frac{\alpha^{-,+}}{\Gamma^{-,+}} \left[ \frac{m_{H3O} d_{HSO4} (q_{p0}^{-,+,HSO4} - q_{l0}^{-,+,HSO4})}{m_{HSO4} d_{H3O} (q_{p0}^{-,+,H3O} - q_{l0}^{-,+,H3O})} - \right. \\ &\left. - T \frac{(1 - \theta^{-,+})}{\rho} s^{-,+} h \left\{ \frac{(m_{HSO4} M_{H3O} + m_{H3O} M_{HSO4}) g_{1,0}^{-,+}}{\gamma^{-,+} 4 m_{HSO4} M_{H3O} g_{2,0}^{-,+}} - \right\} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Таким образом, в нулевом приближении можно рассчитать поля концентраций и потенциалов в электрохимической ячейке аккумулятора. Однако здесь имеется еще одна особенность. Известно, что массообмен в ячейке является самоорганизационным процессом. Для аккумулятора он заключается в том, что токи, вырабатываемые в результате химических реакций на поверхностях двух электродов равны между собой. Это обстоятельство указывает на то, что с позиций теории массообмена скорости гетерогенных химических реакций должны быть согласованы. Так как в данной работе рассматривается массообмен, а не разряд аккумулятора, то условия согласования выполняются мягко, то есть устанавливается некоторая релаксационная функция, которая подгоняет токи двух электродов.

**Результаты расчетов.** В расчетах принимается, что лимитирующим электродом, согласно [4], является положительный, а лимитирующей реакцией на положительном электроде  $4HO_3^+ + PbO_2 + 2e = Pb^{2+} + 6H_2O$ . Задаваясь скоростью этой реакции, остальные с той или иной степенью точности подгоняются таким образом, чтобы выполнить условия равенства токов. Результаты расчетов показаны на рис. 1–6. На первом и втором рисунках показано распределение концентраций компонент  $HSO_4$  и  $H_3O$  в электрохимической ячейке в зависимости от времени ее работы. Из рисунков видно, что концентрации токообразующих ионов по мере работы ячейки падают, что и должно происходить. При этом характер изменения этих компонент примерно одинаков. Это говорит о том, что во всем объеме ячейки выполняется условие электронейтральности раствора, которое и было принято в нулевом приближении. На рис. 3 приведены кривые, характеризующие изменение  $PbSO_4$  в объеме ячейки и во времени. На рисунке видно, что даже при высокой степени адсорбции, которая заложена в модели, часть этой компоненты попадает в межэлектродное пространство. По мере уменьшения  $PbSO_4$  на электродах образуется пассивирующая пленка, которая препятствует прохождению электрического тока. На рис. 4 показаны кривые, определяющие степень пассивации поверхности электродов. Из рисунка следует, что со временем степень пассивации увеличивается, при этом пассивирующая пленка при небольших временах равномерна (даже в начальных точках электродов она немного меньше, вследствие диффузионных процессов), а затем постепенно она начинает в этих точках становиться больше. В данную математическую модель заложена довольно простая однослойная модель адсорбции  $PbSO_4$ , которую при необходимости

адсорбції  $PbSO_4$ , которую при необходимости можно усложнять. На следующем рис. 5 показано изменение концентрационного параметра

$$C_1 = - \left[ \frac{c_1^{-, +HSO4}}{m_{HSO4}} - \frac{c_1^{-, +H3O}}{m_{H3O}} + (1 - \theta^{-, +}) s^{-, +} \phi_{0n}^{-, +} \right],$$

который служит для вычисления

напряженности и потенциала в поровом и межэлектродном пространстве. Получение этих кривых уже связано со следующим приближением, которое отмечает отход от электронейтральности. Как следует из рисунка, в поровых пространствах электродов возникают градиенты потенциалов. Даже в межэлектродном пространстве наблюдается небольшое отклонение от электронейтральности. Характерной особенностью на этом рисунке является резкие перепады этого параметра при переходе из межэлектродной области в поровое пространство электродов. Это указывает на то, что на этих границах возникают двойные электрические слои.

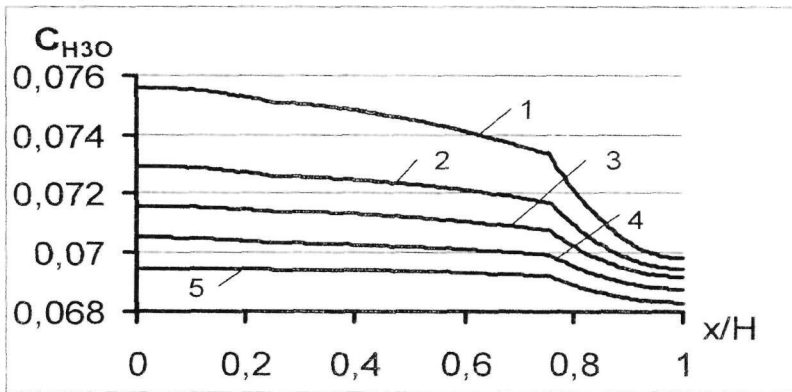


Рис. 1. Распределение концентрации  $C_{H3O}$  в ячейке:  
1 –  $t = 40$  мин; 2 – 80; 3 – 120; 4 – 160; 5 – 200

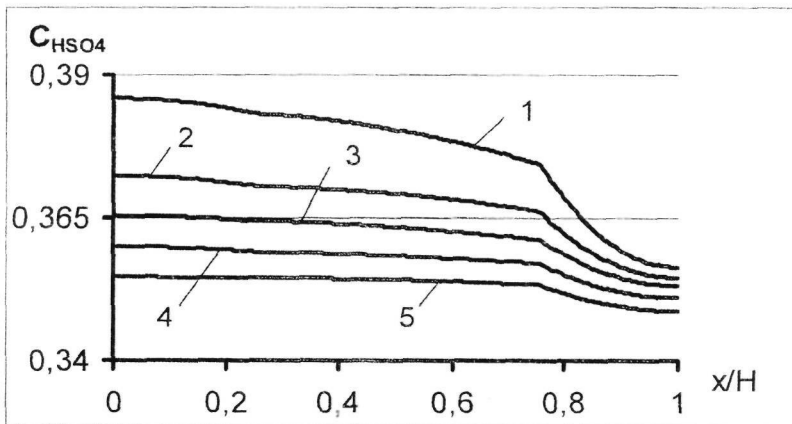


Рис. 2. Распределение концентрации  $C_{HSO4}$  в ячейке:  
1 –  $t = 40$  мин; 2 – 80; 3 – 120; 4 – 160; 5 – 200

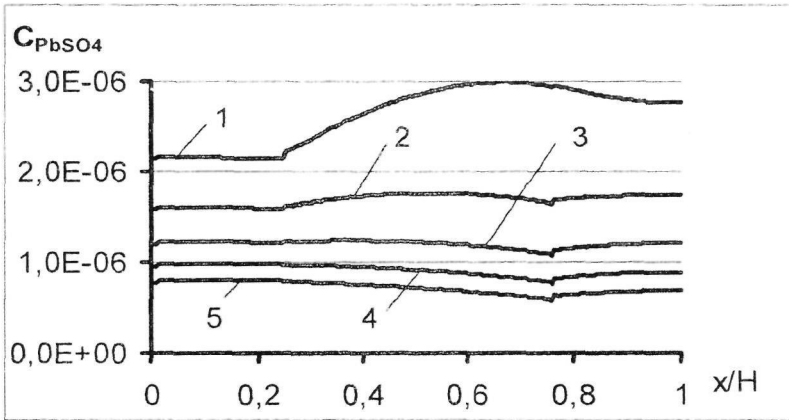


Рис. 3. Распределение концентрации  $C_{H_2SO_4}$  в ячейке:  
1 –  $t = 40$  мин; 2 – 80; 3 – 120; 4 – 160; 5 – 200

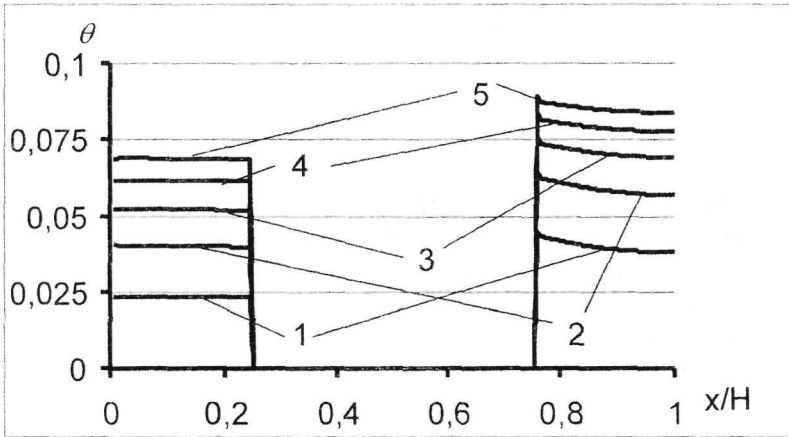


Рис. 4. Распределение  $\theta$  по поверхности электродов:  
1 –  $t = 40$  мин; 2 – 80; 3 – 120; 4 – 160; 5 – 200

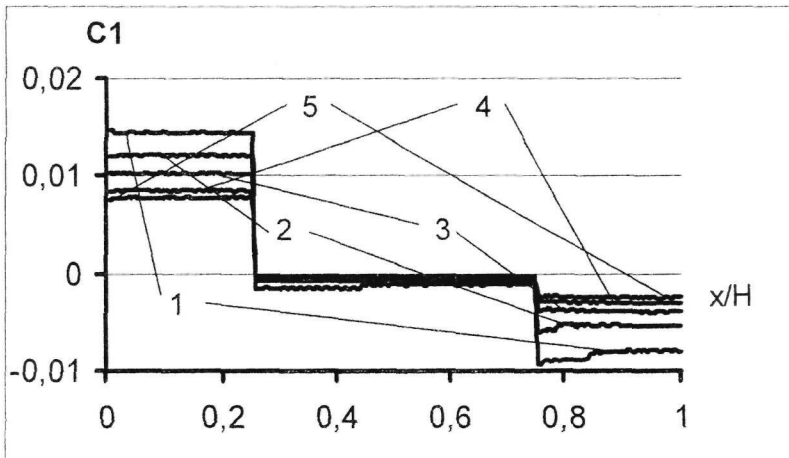


Рис. 5. Изменение параметра  $C_1$  (нарушение электронейтральности) в ячейке: 1 –  $t = 40$  мин; 2 – 80; 3 – 120; 4 – 160; 5 – 200

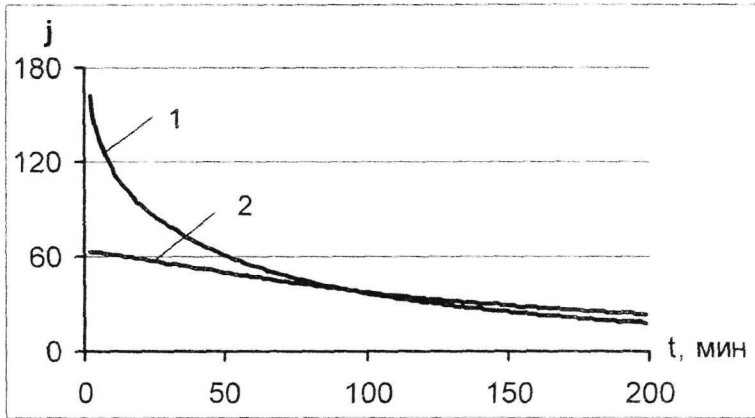


Рис. 6. Изменение токов по времени:  
1 – положительный электрод; 2 – отрицательный электрод

Наконец, на последнем рисунке б показано, каким образом токи  $j = Fs \int \left( \sum_j g_j \right) d\xi$

положительного и отрицательного электродов удастся свести к близким величинам. Из рисунку видно, что сведение этих токов также представляет непростую задачу для данной постановки. Как уже отмечалось для массообмена с постоянным коэффициентом приведенной выше реакции (к нему делалась привязка) примененный метод все-таки дает возможность приблизить друг к другу рассматриваемые токи. Для задачи о разряде аккумулятора требования к этой функции должны быть жестче, однако и сама постановка задачи должна претерпеть некоторые изменения. Таким образом, разработанная математическая модель и асимптотический метод позволяет рассматривать массообмен в электрохимической ячейке при наличии пористых электродов с учетом электродинамических факторов.

### Библиографические ссылки

1. Дасоян М.А. Современная теория свинцового аккумулятора /М.А. Дасоян, И.А. Агуф – Л., 1975. – 200 с.
2. Кошель М.Д. Теоретичні основи електрохімічної енергетики/М.Д. Кошель – Д., 2002. – 430 с.
3. Григин А.П. Естественная конвекция в электрохимических системах /А.П. Григин, А.Д. Давыдов //Электрохимия. 1998, Т. 34, № 11, С. 1237-1263.
4. Александров Р.С. Численное исследование электроконвективной неустойчивости бинарного электролита в ячейке с плоскими параллельно расположенными электродами / Р.С. Александров, А.П. Григин, А.Д. Давыдов //Электрохимия. 2002, Т. 38, № 10, С. 1216–1222.
5. Елисеев В.И. Многокомпонентный нестационарный массообмен в химической ячейке свинцового аккумулятора / В.И. Елисеев, И.Р. Томасон // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. 2007, № 2/1, С. 47 – 52.
6. Антропов Л.И. Теоретическая электрохимия /Л.И. Антропов – М., 1984. – 519 с.
7. Борисова М.Э. Физика диэлектриков /М.Э. Борисова, С.Н. Койков – Л., 1979. – 240 с.
8. Чизмаджев Ю.А. Макрокинетика в пористых средах /Ю.А. Чизмаджев, В.С. Маркин, М.Р. Тарасевич – М., 1971. – 364 с.
9. Семенов М.Г. Исследование упрощенной двумерной модели разряда положительного электрода свинцово-кислотного аккумулятора /М.Г. Семенов, В.И. Семенов // Электрохимия. 1996, Т. 32, № 5, С. 586–591.

Надійшла до редколегії 20.11.09

УДК 532.516

В.И. Елисеєв, В.В. Давидсон

*Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*

## **МАССООБМЕН В ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКЕ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В ПОЛЕ ПЕРЕМЕННОГО НАПРЯЖЕНИЯ**

В рамках теории ионообмена рассмотрены электрокинетические явления в бинарной среде с учетом взаимодействия электролита с электродами. На основе выполненных экспериментов и теоретических построений получена зависимость отношений амплитуд реактивных и активных токов от частоты подаваемого напряжения.

*Ключевые слова: электрохимическая ячейка, электролит, взаимодействие электролита с электродами.*

У рамках теорії іонообміну розглянуті електрокінетичні явища в бінарному середовищі з урахуванням взаємодії електроліту з електродами. На основі виконаних експериментів і теоретичних побудов отримана залежність відношення амплітуд реактивних і активних струмів від частоти напруги, що подається.

*Ключові слова: електрохімічна комірка, електроліт, взаємодія електроліту з електродами.*

Within the limits of the ion exchange theory, the electrokinetic phenomenas in bicar sphere with the regard of electrolyte interaction with electrodes were considered. Based on the made experiments and the theoretical constructs, the dependence on the ratio amplitudes of reactive and active current flows on the frequency of impressed voltage was obtained.

*Keywords: electrochemical cell, electrolyte, interaction of the electrolyte with electords.*

**Введение.** В настоящее время для проведения качественного и количественного анализа веществ как в лабораторных, так и в промышленных условиях широко применяются электрические методы измерения [1] таких неэлектрических величин как состав, концентрация элементов, подвижность ионов, размер частиц, скорость химических реакций и прочее. Эти методы отличаются повышенной точностью, быстродействием, возможностью регистрации и обработки результатов в режиме реального времени, а также, в случае необходимости, пространственным разнесением датчиков и измерительной аппаратуры при исследовании опасных и агрессивных сред.

Вместе с тем, для косвенных измерений, каковыми в данном случае являются электрические измерения, существует проблема интерпретации экспериментальных результатов, т. е. выявление связей между непосредственно наблюдаемыми величинами, такими как токи, напряжения, сопротивления и емкости, с физико-химическими характеристиками вещества. Несмотря на огромное число работ посвященных данному вопросу, проблема интерпретации, ввиду сложности и многообразия одновременно происходящих процессов, далека от полного разрешения. Необходимо также отметить, что основная часть работ посвящена изучению электрохимических процессов на постоянном токе, в то время как значительно более сложные по механизму и интересные в прикладном плане процессы на переменном токе изучены недостаточно. Данная работа является попыткой в какой-то мере восполнить этот пробел. В ней теоретически и экспериментально исследуется поведение классической измерительной электрохимической ячейки (ИЯ) при воздействии на нее переменного тока.

Последняя имеет плоскую геометрию и состоит из пары металлических электродов (в эксперименте – медных), электролита, содержащего два класса ионов (в эксперименте – дистиллированная вода) и источника переменного напряжения (рис. 1, а). В теоретическом плане особенностью работы является учет зависимости интенсивности

порождения и рекомбинации ионов в объеме электролита от процессов массопереноса, происходящих под влиянием электрического поля и градиента концентрации. Кроме того, приняты во внимание окислительно-восстановительные реакции на электродах.

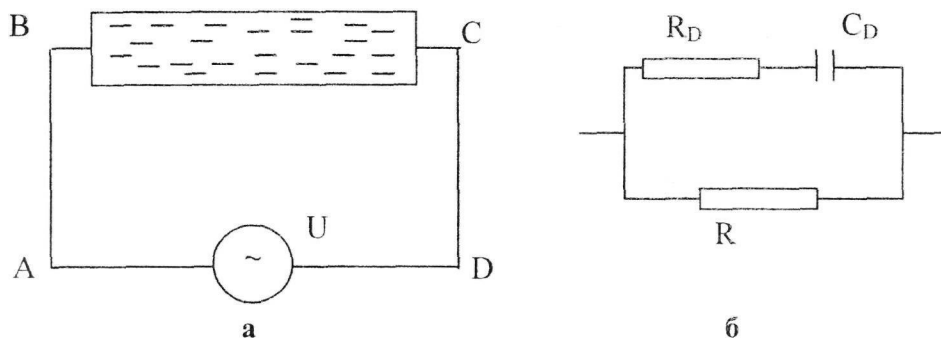


Рис. 1. Схема установки (А) и электронная схема двойного слоя (Б).

**Основные уравнения.** В качестве математической модели используем хорошо известную модель, описывающую ионообмен в электрохимических ячейках, с применением теории диэлектриков [2; 3]. Для нестационарного одномерного варианта рассматриваемой задачи можно записать следующие уравнения:

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial N}{\partial \zeta} \right) + r, \quad (1)$$

$$\frac{\partial N^+}{\partial \tau} = d^+ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial N^+}{\partial \zeta} + \gamma N^+ \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) + r^+, \quad (2)$$

$$\frac{\partial N^-}{\partial \tau} = d^- \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial N^-}{\partial \zeta} - \gamma N^- \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) + r^-, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_G}{\partial \zeta^2} = \frac{Fh^2}{\epsilon_0 \epsilon V} (N^- - N^+), \quad (4)$$

где  $\tau = t / T$  – безразмерное время;  $t$  – время;  $T = h^2 / D_{H_2O}$  – масштаб времени;  $h$  – полуширина слоя воды;  $D_{H_2O}$  – коэффициент диффузии воды,  $\zeta = x / h$  – безразмерная координата;  $N$ ,  $N^+$ ,  $N^-$  – мольные концентрации соответственно растворителя, положительных и отрицательных ионов;  $\phi_G$  – безразмерный потенциал, отнесенный к  $V = 1B$ ;  $d^+ = D^+ / D_{H_2O}$ ,  $d^- = D^- / D_{H_2O}$ ,  $D^\pm$  – коэффициенты диффузии ионов;  $\gamma = Vw^\pm / D^\pm$ ,  $w^\pm$  – подвижности ионов;  $F$  – число Фарадея;  $r, r^\pm$  – источники и стоки, учитывающие объемные химические реакции между компонентами среды.

Используя теперь простой приближенный метод решения уравнений тепло-массообмена, показанный в [4], перепишем уравнения (2) – (4) в следующем виде:

$$d^+ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial N^+}{\partial \zeta} + \gamma N^+ \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) = \frac{dN^+}{d\tau} - r^+, \quad (5)$$

$$d^- \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial N^-}{\partial \zeta} - \gamma N^- \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) = \frac{dN^-}{d\tau} - \bar{r}^-, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_G}{\partial \zeta^2} = \Phi \left( \bar{N}^- - \bar{N}^+ \right), \quad (7)$$

где в правых частях уравнений записаны осредненные по длине рабочей области параметры, в результате чего правые части зависят только от времени. Интегрируя по одному разу уравнения (5), (6), получим:

$$d^+ \left( \frac{\partial N^+}{\partial \zeta} + \gamma N^+ \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) = \left( \frac{dN^+}{d\tau} - \bar{r}^+ \right) \zeta + C^+, \quad (8)$$

$$d^- \left( \frac{\partial N^-}{\partial \zeta} - \gamma N^- \frac{\partial \phi_G}{\partial \zeta} \right) = \left( \frac{dN^-}{d\tau} - \bar{r}^- \right) \zeta + C^-. \quad (9)$$

В выражениях (8) – (9) постоянные  $C^+$ ,  $C^-$  определяются из граничных условий. Учитывая, что выражения (8) и (9) определяют безразмерные расходы ионов на границах  $\zeta = \pm 1$ , и вводя эти расходы как  $g_{C,B}^\pm$ , можно записать, что

$$C^+ = \frac{1}{2} (g_C^+ + g_B^+), \quad C^- = \frac{1}{2} (g_C^- + g_B^-),$$

$$\frac{dN^+}{d\tau} - \bar{r}^+ = \frac{1}{2} (g_C^+ - g_B^+), \quad \frac{dN^-}{d\tau} - \bar{r}^- = \frac{1}{2} (g_C^- - g_B^-). \quad (10)$$

Интегрируя два раза уравнение (7), получим

$$\phi_G = \frac{1}{2} \Phi \left( \bar{N}^- - \bar{N}^+ \right) \zeta^2 + C_G \zeta + D_G, \quad (11)$$

где постоянные интегрирования определяются из условия, что на границах  $\zeta = \pm 1$  потенциал соответственно равен  $\phi_C$  и  $\phi_B$ , тогда

$$D_G = \frac{1}{2} (\phi_C + \phi_B) - \frac{1}{2} \Phi \left( \bar{N}^- - \bar{N}^+ \right), \quad C_G = \frac{1}{2} (\phi_C - \phi_B). \quad (12)$$

Составим из этих выражений ток проводимости и ток смещения

$$j_{pr} = -SF \frac{D_{H_2O}}{h} \left\{ \left[ \frac{dN^+}{d\tau} - \frac{dN^-}{d\tau} - (\bar{r}^+ - \bar{r}^-) \right] \zeta + (C^+ - C^-) \right\} = \quad (13)$$

$$-SF \frac{D_{H_2O}}{2h} \left\{ \left[ (g_C^+ - g_B^+) - (g_C^- - g_B^-) \right] \zeta + \left[ (g_C^+ + g_B^+) - (g_C^- + g_B^-) \right] \right\}$$

$$j_{sm} = -S \frac{D_{H_2O}}{h^3} \varepsilon_0 \varepsilon_G \Phi \left[ \left( \frac{dN^-}{d\tau} - \frac{dN^+}{d\tau} \right) \zeta + \frac{1}{\Phi} \frac{1}{2} \frac{d(\phi_C - \phi_B)}{dt} \right]. \quad (14)$$

Учитывая, что токи на границах области ( $\zeta = \pm 1$ ) должны быть одинаковы, поэтому из (13) и (14) следует, что



$$\left[ \frac{d\overline{N^+}}{d\tau} - \frac{d\overline{N^-}}{d\tau} - (\overline{r^+} - \overline{r^-}) \right] = 0, \quad \frac{d\overline{N^+}}{d\tau} - \frac{d\overline{N^-}}{d\tau} = 0, \\ \overline{r^+} = \overline{r^-}, \quad (g_c^+ - g_b^+) - (g_c^- - g_b^-) = 0. \quad (15)$$

Последнее условие, которое можно переписать как  $(g_c^+ - g_c^-) = (g_b^+ - g_b^-)$ , указывает на то, что раствор, как система, обладает свойством самосогласованности, которое в данном случае заключается в равенстве расходов ионов на одном и другом электродах. Если теперь принять, что граничными условиями для мольных концентраций ионов являются следующие значения: при  $\zeta = 1$   $N^+ = N_C^+$ ,  $N^- = N_C^-$ , при  $\zeta = -1$   $N^+ = N_B^+$ ,  $N^- = N_B^-$ , то после второго интегрирования уравнений (8), (9) получим:

$$d^+ (N^+ + \gamma N^+ \phi_G) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\overline{N^+}}{d\tau} - \overline{r^+} \right) \zeta^2 + C^+ \zeta + G^+, \quad (16)$$

$$d^- (N^- - \gamma N^- \phi_G) = \frac{1}{2} \left( \frac{d\overline{N^-}}{d\tau} - \overline{r^-} \right) \zeta^2 + C^- \zeta + G^-. \quad (17)$$

где

$$G^+ = \frac{1}{2} d^+ \left[ (N_C^+ + N_B^+) + \gamma N_0 (\phi_C + \phi_B) \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{d\overline{N^+}}{d\tau} - \overline{r^+} \right), \\ G^- = \frac{1}{2} d^- \left[ (N_C^- + N_B^-) - \gamma N_0 (\phi_C + \phi_B) \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{d\overline{N^-}}{d\tau} - \overline{r^-} \right).$$

Выписанные уравнения служат для определения тока в жидкости в зависимости от подаваемого напряжения, однако здесь необходимо знать еще кинетические параметры приэлектродных реакций, т. е. необходимо увязать расходы на поверхностях электродов с приповерхностными концентрациями. Для этого рассмотрим наиболее простой случай, когда на поверхностях электродов проходят реакции с перезарядкой ионов, т. е. на одной границе в течении полупериода ионы  $N^-$  переходят в ионы  $N^+$ , на другой, наоборот. Для этого необходимо положить

$$g_c^+ = -g_c^-, \quad g_b^+ = -g_b^-. \quad (18)$$

Условие равенства расходов на концах рабочего участка (последнее условие (15)) показывает, что должно выполняться равенство

$$g_c^+ = g_b^+ = g. \quad (19)$$

Таким образом, все расходы свелись к одной величине, которую условно зададим в виде

$$g = k (N_c^- - N_c^+), \quad (20)$$

где  $k$  – коэффициент, характеризующий скорость гетерогенной химической реакции. Такой вид специально сконструированной реакции показывает, что величина расходов зависит от разности компонентов. Это обеспечивает регулирование расходов в

зависимости от их величины. После несложных преобразований можно увязать все необходимые параметры на поверхностях электродов, в результате чего будем иметь

$$g = \gamma N_0 \frac{d^- d^+ k}{d^- d^+ + (d^- + d^+) k} (\phi_B - \phi_C). \quad (21)$$

Это выражение хорошо показывает роль коэффициента  $k$  в процессе ионпереноса в жидкости. При  $k = 0$   $g = 0$ , и ток проводимости в жидкости также равен нулю. С ростом  $k$  монотонно растет  $g$  и при достаточно больших значениях  $k$  расход асимптотически достигает своего максимального значения. Соотношение (21) хорошо показывает как проводимость раствора зависит от гетерогенной реакции на электроде. Если лимитирующей стадией процесса является гетерогенная реакция (малые значения  $k$ ), то проводимость в растворе определяется скоростью этой реакции. При больших величинах  $k$  скорость реакции не ограничивает проводимость и она определяется переносными свойствами раствора.

Теперь для того, чтобы связать заданный генератором перепад потенциала с током, идущим в рабочем объеме раствора необходимо учесть скачки потенциала на границах между жидкостью и электродами. Возникновение этих скачков связано с двойными электрическими слоями, возникающими на фазовых поверхностях. Примем, что генератор дает синусоидальные колебания потенциала, тогда в точке В  $\phi_B = U_B - (\Delta\phi)_B$ ,  $U_B = a \sin(2\pi \bar{f} \tau)$ ; в точке С  $\phi_C = U_C + (\Delta\phi)_C$ ,  $U_C = -a \sin(2\pi \bar{f} \tau)$ , то есть  $\phi_B - \phi_C = 2a \sin(2\pi \bar{f} \tau) - [(\Delta\phi)_B + (\Delta\phi)_C]$ ,  $\phi_B + \phi_C = (\Delta\phi)_C - (\Delta\phi)_B$ , где  $\bar{f} = f/T$  – безразмерная частота,  $f$  – частота в Гц. Определение скачков потенциала в двойных слоях является сложнейшей задачей электрохимии, однако в электрических измерениях двойной слой можно рассматривать в виде схемы показанной на рис. 1, б. Используя законы электрических цепей [5], можно связать скачки потенциалов с токами, идущими по цепи. Если принять, что полный ток изменяется по закону  $j = A_I \sin(2\pi \bar{f} \tau) + B_I \cos(2\pi \bar{f} \tau)$ , то скачок потенциала на границе можно задать как  $\Delta\phi = A_U \sin(2\pi \bar{f} \tau) + B_U \cos(2\pi \bar{f} \tau)$  и тогда из теории электрических цепей следует, что

$$A_U = \frac{\Delta_1}{\Delta} A_I - \frac{\Delta_2}{\Delta} B_I, \quad \Delta_1 = R_D \left( 1 + \frac{R_D}{R} \right) + \frac{(2\pi \bar{f})^2}{R(C_D T)^2}, \quad \Delta_2 = \frac{(2\pi \bar{f})}{(C_D T)},$$

$$B_U = \frac{\Delta_2}{\Delta} A_I + \frac{\Delta_1}{\Delta} B_I, \quad \Delta = \left( 1 + \frac{R_D}{R} \right)^2 + \frac{(2\pi \bar{f})^2}{(R C_D T)^2}. \quad (22)$$

Выпишем формулу для полного тока

$$j = -S \frac{D_{H_2O}}{h} \left\{ 2\gamma N_0 F \frac{d^- d^+ k}{d^- d^+ + (d^- + d^+) k} (\phi_C - \phi_B) + \frac{\epsilon_0 \epsilon_G}{h^2} \frac{1}{2} \frac{d(\phi_C - \phi_B)}{dt} \right\}. \quad (23)$$

В этой формуле участвуют значения потенциалов в точках В и С со стороны жидкости. Примем, что параметры двойных слоев одинаковы, тогда найденная связь

скачков потенциала с протекающим общим током на границах будет также одинакова. Теперь, используя формулы (22), найдем связь общего тока с задаваемым синусоидальным напряжением. Подставляя все найденные выше соотношения в формулу (23), найдем амплитуды активного и реактивного токов в слое жидкости с учетом двойных слоев на электродах. После несложных преобразований, получим

$$A_I = S \frac{D_{H_2O}}{h} \frac{2(1+\alpha)\sigma + (2\pi\bar{f})^2 \beta (\varepsilon_0 \varepsilon_G / h^2)}{(2\pi\bar{f})^2 \beta^2 + (1+\alpha)^2} a, \\ B_I = S \frac{D_{H_2O}}{h} 2\pi\bar{f} \frac{(1+\alpha)(\varepsilon_0 \varepsilon_G / h^2) - 2\sigma\beta}{(2\pi\bar{f})^2 \beta^2 + (1+\alpha)^2} a, \quad (24)$$

где 
$$\sigma = \gamma N_0 \frac{d^- d^+ k}{d^- d^+ + (d^- + d^+) k} F,$$

$$\alpha = 2S \frac{D_{H_2O}}{h} \left[ \sigma \frac{\Delta_1}{\Delta} - \frac{(2\pi\bar{f})^2}{\Delta} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_G}{2C_D T h^2} \right], \quad \beta = 2S \frac{D_{H_2O}}{h} \left[ \frac{\sigma}{\Delta C_D T} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_G}{2h^2} \frac{\Delta_1}{\Delta} \right].$$

Важной характеристикой при измерении электрических свойств материалов является так называемый «тангенс потерь», равный отношению активной и реактивной амплитуд  $tg\delta = A_I/B_I$  или обратная ей величина «тангенс фазового сдвига»  $tg\varphi = B_I/A_I$ . Используя формулы (24), будем иметь для  $tg\varphi$

$$tg\varphi = 2\pi f \left\{ \sigma + 2S \frac{D_{H_2O}}{h} \frac{\Delta_1}{\Delta} \left[ \sigma^2 + (2\pi f)^2 \left( \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_G}{2D_{H_2O}} \right)^2 \right] \right\}^{-1} \cdot \\ \cdot \left\{ \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_G}{2D_{H_2O}} - 4S \frac{D_{H_2O}}{h \Delta C_D} \left[ \sigma^2 + (2\pi f)^2 \left( \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_G}{2D_{H_2O}} \right)^2 \right] \right\} \quad (25)$$

В этой формуле хорошо видны, параметры, относящиеся к рабочему объему, и величины  $\Delta, \Delta_1, C_D$ , характеризующие влияние двойного электрического слоя. Это выражение можно переписать в критериальном виде

$$tg\varphi = 2\pi f \lambda \frac{\left\{ 1 - \chi_R \left[ 1 + 1 / (2\pi f \lambda)^2 \right] \right\}}{\left\{ 1 + 2\chi_A \left[ 1 + (2\pi f \lambda)^2 \right] \right\}}, \quad (26)$$

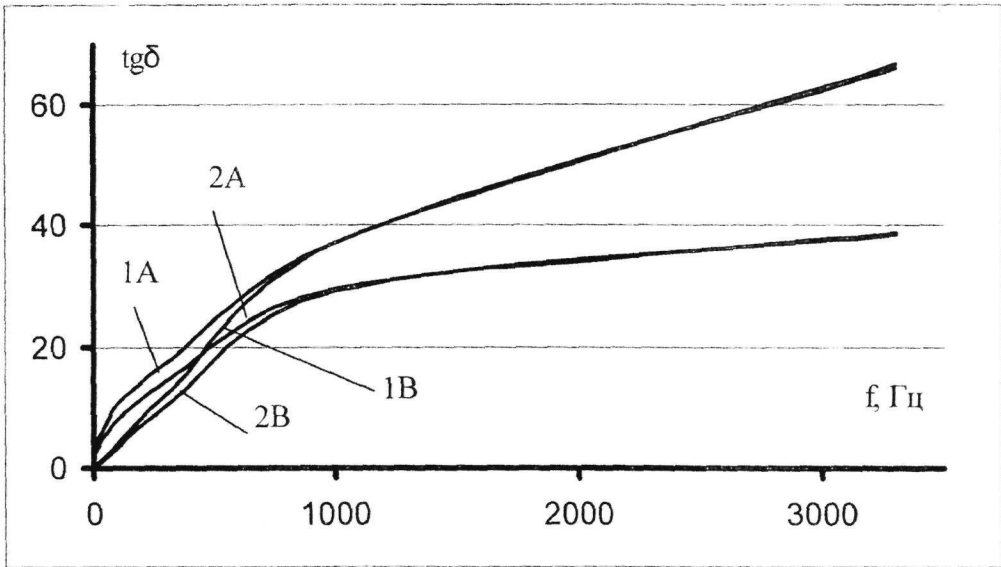
где  $\lambda = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_G}{2\sigma D_{H_2O}}$ ,  $\chi_A = S \frac{D_{H_2O}}{h} \frac{\Delta_1}{\Delta} \sigma$  – характеризует отношение активных сопротивлений двойного электрического слоя и рабочего слоя жидкости,  $\chi_R = (2\pi f)^2 S \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_G}{h \Delta C_D}$  – отношение реактивных сопротивлений слоев. Если считать,

что введенные параметры двойного слоя не меняются с частотой, то при  $f = 0$   $\chi_R = 0$ ,  $\chi_A = S \frac{D_{H_2O}}{h} \sigma \frac{R_D R}{(R + R_D)}$ , а при  $f \rightarrow \infty$ ,  $\chi_A = S \frac{D_{H_2O}}{h} \sigma R$ . В реальности эти параметры зависят от частот, но установление этих зависимостей требует тщательных экспериментов.

**Сравнение теоретических и экспериментальных результатов.** С целью проверки теоретических построений были выполнены измерения амплитудно-частотных и фазо-частотных характеристик ИЯ, изображенной на рис. 1А. Особенности примененной электронной измерительной схемы продиктовали выбор непосредственно регистрируемых величин, в качестве которых были использованы активная и реактивная составляющие полного тока через ИЯ, что соответствует параллельной эквивалентной схеме. От токов легко перейти к проводимостям, что дает возможность определить эффективные значения сопротивления и емкости ИЯ. Однако, эти величины носят несколько условный характер, так как в другой равноправной эквивалентной схеме – последовательной, они имеют другие значения. Для того, чтобы не зависеть от выбора той или иной схемы обычно используют другие величины, имеющие, в силу инвариантности, более фундаментальный физический смысл, а именно – модуль полного сопротивления (проводимости) и тангенс угла фазового сдвига полного тока относительно напряжения. Последний вычисляется как отношение реактивной и активной составляющей полного тока или напряжения (в зависимости от используемой схемы замещения). В диэлькометрии и кулонометрии чаще используется тангенс угла  $\delta$ , дополнительного к углу фазового сдвига  $\varphi$ , называемый «тангенсом потерь». Таким образом, последовательность действий в эксперименте была следующей: измерялись составляющие тока, по ним рассчитывались активные и реактивные проводимости и находилось их отношение, равное тангенсу потерь. Кроме частотных зависимостей было исследовано влияние ширины межэлектродного зазора, для чего использовался дифференциальный датчик с отношением величин зазоров равным 1,75. Испытательный сигнал представлял собой переменное напряжение с постоянной амплитудой 80 мВ и частотным диапазоном 0.01 ÷ 3300 Гц. Выбор величины амплитуды являлся компромиссом между хорошим разрешением, с одной стороны, и отсутствием нагрева электролита, с другой.

Для фазовых измерений использовался метод эллипса [6] с применением 2-х канального осциллографа. Указанный метод позволил единообразно провести измерения во всем рассматриваемом частотном диапазоне, включая и инфранизкие частоты.

На рис. 2 показаны экспериментальные кривые 1А, 2А и их аппроксимации (кривые 1В и 2В), сделанные в соответствии с формулой (25) при  $\chi_R = 0$ . Из формулы (25) видно, что при  $\chi_R = 0$  в выражении участвуют две величины  $\lambda$  и  $\chi_A$ , содержащие масштаб длины  $h$  в знаменателе. Принимая, что при изменении длины рабочего участка все остальные величины должны быть одинаковыми, в нашем случае пересчет кривых связан только с величиной  $h$ , которая в эксперименте изменяется в 1,75 раза. Однако, для получения более точной аппроксимации, пришлось корректировать и другие величины. В результате было получено: для случая А (узкий зазор)  $\lambda = 0.0055$ ,  $\chi_A = 0.00015$ ; для случая В (широкий зазор)  $\lambda = 0.0065$ ,  $\chi_A = 0.000101 / 1.75$ .

Рис. 2. Зависимость  $tg\varphi$  от частоты

Обращает на себя внимание наличие двух четко различимых областей, отличающихся наклоном и характером изменения. Первая из них, низкочастотная, определяется наличием приэлектродного двойного слоя, обладающего большой емкостью и относительно большим сопротивлением. В высокочастотной области влияние двойного слоя постепенно сходит на нет и основным действующим фактором является геометрическая емкость ИЯ и активная проводимость промежутка. Из рисунков видно, что примерно с  $f \approx 700$  Гц, аппроксимационные кривые количественно хорошо совпадают с экспериментальными величинами. На низких частотах совпадение лишь качественное. Это объясняется неполной адекватностью модели чрезвычайно сложным приэлектродным процессам. С другой стороны качественное совпадение теоретических и экспериментальных кривых свидетельствует о том, что модель правильно описывает основные явления ионообмена на электродах.

**Заключение.** В результате выполненного исследования показано, что соответствие теории и эксперимента можно признать удовлетворительным (принимая во внимание, что измеряемые величины в значительной степени зависят от неконтролируемого состояния поверхности электродов.). Таким образом, рассмотренная математическая модель может быть расширена на более сложные среды.

### Библиографические ссылки

1. **Тареев Б.М.** Физика диэлектрических материалов / Б.М. Тареев – М., – 1982. 320 с.
2. **Борисова М.Э.** Физика диэлектриков / М.Э. Борисова, С.Н. Койков. – Л., – 1979. – 240 с.
3. **Антропов Л.И.** Теоретическая электрохимия / Л.И. Антропов – М., – 1984. – 519 с.
4. **Елисеев В.И.** Тепломассообмен в пузырьке, движущемся в многокомпонентном растворе / В.И. Елисеев // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. 2003, Вип. 7, Т. 1. – С. 20 – 26.
5. **Поливанов К.М.** Теоретические основы электротехники. Часть третья / К.М. Поливанов – М., – 1969. – 352 с.
6. Измерения в электронике. Справочник. /под ред. В.А. Кузнецова. – М., – 1987. – 512 с.

Надійшла до редколегії 11.11.09

УДК 551.509

Е.В. Егоров, Н.Н. Лычагин

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

## ФИЛЬТРАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ ГОРОДСКИХ ЛАБИРИНТОВ

Предложена фильтрационная модель распространения загрязняющих примесей в атмосфере больших городов с плотной и высотной застройкой городских лабиринтов. Получена система дифференциальных уравнений фильтрационной модели приземного и пограничного слоя атмосферы, уравнение распространения загрязняющей примеси в условиях городского лабиринта.

*Ключевые слова:* распространение загрязнений в атмосфере, атмосфера больших городов, математические модели распространения загрязнений.

Запропоновано фільтраційну модель розповсюдження забруднюючих домішок в атмосфері великих міст зі щільною та висотною забудовою міських лабіринтів. Отримано систему диференціальних рівнянь фільтраційної моделі приземного та пограничного шарів атмосфери, рівняння поширення забруднюючої домішки в умовах міського лабіринту.

*Ключові слова:* розповсюдження забруднень в атмосфері, атмосфера великих міст, математичні моделі розповсюдження забруднень.

The filtration model of the distribution of pollutions in the atmosphere of the big cities with dense and tall building up of city labyrinths was proposed. The system of differential equation of surface air and boundary layer atmosphere filtration model was calculated as well as the equation of contaminant distribution in city labyrinth conditions.

*Keyword:* the distribution of pollutions in the atmosphere, the big city atmosphere, the mathematic model of contaminants distribution.

**Введение.** Проблема загрязнения атмосферы больших городов, крупных промышленных центров, т. н. мегаполисов, является одной из важнейших проблем современной экологической науки [1, 2]. Наиболее опасная ситуация с атмосферными загрязнениями складывается в больших городах в районах плотной и высокой застройки, т.н. «городских лабиринтах», что обусловлено в первую очередь резким ухудшением проветривания этих территорий, больших концентрацией автомобильного транспорта, наличием промышленных и коммунальных предприятий с их многочисленными источниками вредных для здоровья человека выбросов в атмосферу.

Плотная высотная застройка в значительной степени осложняет возможность расчётного определения поля скоростей ветра в условиях городского лабиринта, т. к. городские здания и сооружения являются, как правило, плохообтекаемыми объектами. При обтекании воздушным потоком одного отдельно взятого здания образуется загроможденный поток в окрестности лобовой части препятствия, ускоренный поток на боковых поверхностях и над крышей, отрывные вихревые течения на тыльной стороне объекта с образованием застойных зон сложной конфигурации. Чтобы определить расчётным путем такое поле скоростей ветра необходимо численно проинтегрировать систему уравнений гидродинамики турбулентного течения, затратив на это несколько десятков часов непрерывной работы компьютера. Но ведь в городском лабиринте имеются сотни, а то и тысячи зданий и сооружений, каждое из которых изменяет скорость ветра, как по величине, так и по направлению. Задача становится практически неразрешимой. А без знания поля скоростей ветра невоз-

можно определить расчетным путем поле концентраций и характер распространения загрязняющих примесей в атмосфере городского лабиринта.

В настоящей работе предлагается фильтрационная модель расчета распространения атмосферных загрязнений в городском лабиринте. Она основана на предположении о существовании аналогии между течением воздушных масс в условиях городского лабиринта и течением жидкостей и газов в порах грунтов и трещинах скальных пород. Такие течения изучаются в теории фильтрации [3]. Дело в том, что в естественных условиях поры пластов грунта и трещины скальных пород имеют чрезвычайно сложные очертания. Это практически исключает возможность точного расчетного определения скорости жидкости в каждой конкретной точке пор или трещины. Однако в теории фильтрации вводится понятие т. н. фильтрационного поля скоростей жидкости, на основе которого решаются все теоретические и практические задачи. Аналогичный подход предлагается использовать и в условиях городского лабиринта.

**Основные понятия и определения фильтрационной модели.** Введем понятие пор и скелета городского лабиринта. Под парами городского лабиринта будем понимать пустоты между зданиями и различного рода сооружениями, в том числе улицы, переулки, двory и т. д., а под скелетом – собственно сами эти здания и сооружения.

Определим коэффициент плотности застройки городского лабиринта – аналог коэффициента пористости для грунтов и скальных пород в теории фильтрации [3], в виде

$$m = \frac{W'}{W}, \quad 0 < m < 1, \quad (1)$$

где  $W'$  – пространственный объем всех пустот лабиринта;  $W$  – полный пространственный объем всего массива лабиринта.

Выберем в пространстве городского лабиринта, состоящем из пор и скелета, произвольную площадку  $\Delta S$ , малую по сравнению с площадью подстилающей поверхности самого лабиринта. Вместе с тем её размеры достаточно велики по сравнению со средней площадью поперечного сечения пор и элементов скелета (зданий) лабиринта. Пусть объёмный расход воздуха через эту площадку  $\Delta Q$ , ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) равен действительному расходу воздуха, осуществляемому через поры площадки. Тогда под скоростью фильтрационного потока воздуха в городском лабиринте  $\vec{V}$ , ( $\text{м}/\text{с}$ ), будем понимать скорость, постоянную в пределах площадки  $\Delta S$ , определяемую соотношением

$$\vec{V} = \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \quad (2)$$

а под средней скоростью воздуха в порах лабиринта, при действительном расходе  $\Delta Q$ , скорость

$$\vec{V}^* = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta S} = \frac{1}{m} \cdot \vec{V}. \quad (3)$$

Фильтрационный поток воздуха с полем скоростей  $\vec{V}$  является некоторым фиктивным усреднённым потоком, непрерывно заполняющим всё пространство городского лабиринта, включая объёмы пор и скелета. Однако скелет оказывает активное воздействие на этот поток через силы сопротивления  $\vec{R}$ , возникающие при реальном обтекании городских зданий и сооружений и включающие в себя силы сопротивления давления и трения. Если в пространстве городского лабиринта выделить элементарный объём  $d\tau$ , включающий в себя площадку  $\Delta S$  и состоящий из объема пор  $m d\tau$  и объема скелета  $(1 - m) d\tau$ , то при достаточно плотной застройке лаби-



ринта виділений об'єм буде включати в себе більше число елементів скелета. В такому випадку можна полагати, що сили опору  $\vec{R}$  розподілені всередині об'єму  $d\tau$  рівномірно і допустити, що вони пропорційні величині  $d\tau$ . Таким чином, згадані сили можна розглядати як сили об'ємні або масові.

Аналогічно (2), (3) в атмосфері міського лабіринту необхідно ввести поняття фільтраційних полів температури і концентрації атмосферної забруднюючої речовини. Через виділену раніше площадку  $\Delta S$  здійснюється не тільки дійсний реальний витік повітря  $\Delta Q$ , але і дійсні реальні витрати тепла  $\Delta Q_T$ , (кДж/с), і атмосферної забруднюючої речовини  $\Delta Q_\phi$ , (кг/с). Тоді під фільтраційним полем температури в атмосфері міського лабіринту будемо розуміти температуру, постійну в межах площадки  $\Delta S$  і визначену співвідношенням

$$T = \frac{\Delta Q_T}{\Delta Q'_{TK}}, \quad (4)$$

де  $\Delta Q'_{TK} = \Delta Q'_{TK} = \rho c_p \Delta Q$ , (кДж/(град·с)) – удільний, віднесений до одиниці температури, дійсний конвективний витік тепла через площадку  $\Delta S$ ;  $\rho$  – густина повітря, (кг/м<sup>3</sup>);  $c_p$  – удільна теплоємність повітря, (кДж/(кг·град)).

Середня температура повітря в порі міського лабіринту, при дійсному витраті тепла  $\Delta Q_T$ , визначається співвідношенням

$$T^* = \frac{\Delta Q_T}{m \Delta Q'_{TK}} = \frac{1}{m} T, \quad (5)$$

а середня температура каркаса

$$T_1^* = \frac{\Delta Q_T}{(1-m) \Delta Q'_{TK}} = \frac{1}{1-m} T = \frac{m}{1-m} T^*. \quad (6)$$

Фільтраційне поле концентрації забруднюючої речовини в атмосфері міського лабіринту визначимо як концентрацію, постійну в межах площадки  $\Delta S$ , співвідношенням

$$\phi = \frac{\Delta Q_\phi}{\Delta Q}, \quad (7)$$

де  $\phi$  – об'ємна концентрація забруднюючої речовини, (кг/м<sup>3</sup>).

Середня концентрація речовини в порі лабіринту, при дійсному витраті речовини  $\Delta Q_\phi$ , визначається співвідношенням

$$\phi^* = \frac{\Delta Q_\phi}{m \Delta Q} = \frac{1}{m} \phi, \quad (8)$$

а середня концентрація речовини в каркасі

$$\phi_1^* = \frac{\Delta Q_\phi}{(1-m) \Delta Q} \approx 0, \quad (9)$$

в силу того, що, на відміну від ґрунтів, процеси сорбції речовини на об'єктах міських споруджень незначущі.

Як і фільтраційне поле швидкості вітру (2), фільтраційне поле температури (4) і забруднюючої речовини (7) є фіктивними усередненими по-



лями, непрерывным образом покрывающими все пространства городского лабиринта, включая объемы пор и скелета.

**Фильтрационная математическая модель.** Введём декартову прямоугольную систему координат  $Oxyz$  таким образом, чтобы она была правой, начало – точка  $O$ , находилась в центре городского лабиринта, оси  $Ox$ ,  $Oy$  лежали на подстилающей земной поверхности, а ось  $Oz$  – перпендикулярна ей и направлена вверх. Кроме того, будем считать, что направление оси  $Ox$  совпадает с направлением скорости ветра вдали от территории городского лабиринта, т.е. при  $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$ .

Характерный горизонтальный масштаб территории городского лабиринта  $L$ , с учётом примыкающих к нему территорий, на которые распространяется его атмосферное влияние, будем считать значительно превосходящим среднюю высоту пограничного слоя атмосферы над лабиринтом  $H_1 \approx 1$  км [1], а подстилающую поверхность, для простоты – плоской,  $z=0$ .

Ограничившись верхней границей пограничного слоя атмосферы  $z = H_1$ , будем считать, что воздух в атмосфере городского лабиринта представляет собой практически несжимаемую ( $\rho \approx const$ ), но неизотермическую ( $T \neq const$ ) среду.

Воздушные массы городского лабиринта движутся в его порах. Выделим элементарный объём пор  $md\tau$  и рассмотрим баланс сил, действующих на воздух в этом объёме. Имеем

$$m\rho \frac{dV^*}{dt} d\tau = \left[ -grad P + m\rho \left( \vec{F}_g + \vec{R} + \vec{F}_{nl} \right) \right] d\tau, \quad (10)$$

где  $t$  – время, (с);  $P$  – давление, (Па);  $\vec{F}_g$ ,  $\vec{R}$ ,  $\vec{F}_{nl}$  – удельные, отнесённые к единице массы воздуха, плотности сил тяжести, сопротивления твёрдого каркаса, плавучести, ( $м/с^2$ ).

Плотность сил тяжести в атмосфере равна

$$\vec{F}_g = -grad(gz), \quad (11)$$

где  $g$  – ускорение земного тяготения ( $\approx 9,81$   $м/с^2$ ).

Течение воздушных масс в порах городского лабиринта существенно турбулентное и, согласно [3], сила сопротивления каркаса в этом случае пропорциональная квадрату скорости фильтрации. Определим ее плотность в виде

$$\vec{R} = -gB|\vec{V}|\vec{V}, \quad (12)$$

где  $B$  – эмпирический коэффициент, зависящий от характерных размеров городских сооружений и вязкости воздуха, ( $с/м$ )<sup>2</sup>.

При умеренных перепадах температуры плотность силы плавучести определяется выражением [4]:

$$\vec{F}_{nl} = -g(\beta\Delta T)\vec{k}, \quad (13)$$

где  $\beta$  коэффициент объемного термического расширения воздуха,  $1/^\circ K$ ;  $\Delta T = T - T_0$  – избыточная фильтрационная температура воздуха над уровнем подстилающей поверхности, ( $^\circ K$ );  $\vec{k}$  – орт оси  $Oz$ .

Учитывая (11) – (13), приведем уравнение (10) к виду Громеко-Ламба [4]:

$$\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{V^{*2}}{2} + \frac{P - P_0}{m\rho} + gz \right) - \vec{V}^* \times \text{rot} \vec{V}^* = -g \left[ B|\vec{V}|\vec{V} + (\beta\Delta T)\vec{K} \right], \quad (14)$$

где  $P - P_0$  – избыточное давление над постилающей поверхностью, (Па).

Обозначив, согласно [3], через  $h$  величину полного напора воздуха в порах городского лабиринта, (м)

$$h = \frac{V^2}{2m^2g} + \frac{P - P_0}{m\gamma} + z, \quad (15)$$

где  $\gamma = \rho g$  – удельный вес воздуха, ( $\text{н/м}^3$ ), и, воспользовавшись (3), приведем уравнение (14) к виду

$$m \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + m^2 g \left[ \text{grad} h + B|\vec{V}|\vec{V} + (\beta\Delta T)\vec{k} \right] - \vec{V} \times \text{rot} \vec{V} = 0, \quad (16)$$

К уравнению (16) необходимо добавить уравнение неразрывности фильтрационного поля скоростей ветра

$$\text{div} \vec{V} = 0, \quad (17)$$

и уравнение, описывающее распространение фильтрационного поля температуры в атмосфере городского лабиринта. С этой целью рассмотрим полное изменение внутренней энергии воздуха в объеме  $m d\tau$ . Имеем

$$m\rho \frac{dU^*}{dt} d\tau = m \text{div} \left[ (\lambda + \lambda^T) \text{grad} T^* \right] d\tau + m\dot{Q}^* d\tau - (1 - m)\rho_1 \frac{dU_1^*}{dt} d\tau, \quad (18)$$

где  $U^* = C_p T^*$  – удельная, отнесенная к единице массы, внутренняя энергия воздуха в порах лабиринта, ( $\text{кДж/кг}$ );  $\lambda, \lambda^T$  – молекулярный и турбулентный коэффициенты теплопроводности воздуха,  $\frac{\text{кДж}}{(\text{м} \cdot \text{с})^0 \text{K}}$ ;  $\dot{Q}^*$  – отнесенная к единице объема, быст-

рота прироста (убыли) тепла за счет действия внутренних источников (стоков),  $\left( \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}} \right)$ ;  $U_1^* = C_1 T_1^*$  – удельная, отнесенная к единице массы, внутренняя энергия материала твердого каркаса, ( $\text{кДж/кг}$ );  $\rho_1, C_1$  – плотность и удельная теплоёмкость материала каркаса, ( $\text{кг/м}^3$ ),  $\left( \frac{\text{кДж}}{\text{кг}^0 \text{K}} \right)$ .

Поскольку

$$\frac{dU^*}{dt} = C_p \left( \frac{\partial T^*}{\partial t} + \vec{V}^* \cdot \text{grad} T^* \right); \frac{dU_1^*}{dt} = C_1 \cdot \frac{\partial T_1^*}{\partial t},$$

то, учитывая (3), (5), (6), приведём уравнение (18) к виду

$$m \left[ 1 + \left( \frac{\rho_1 C_1}{\rho C_p} \right) \right] \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} T = m \cdot \text{div} \left[ \left( \frac{v}{P_r} + \frac{v^T}{P_r^T} \right) \text{grad} T \right] + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p}, \quad (19)$$

где  $\nu$ ,  $\nu^T$  – молекулярный и турбулентный кинематические коэффициенты трения, ( $\text{м}^2/\text{с}$ );  $P_r$ ,  $P_r^T$  – молекулярное и турбулентное числа Прандтля;  $\dot{Q} = m^2 \dot{Q}^*$  – фильтрационное значение удельной быстроты прироста (убыли) тепла за счет действия внутренних источников (стоков),  $\left(\frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}\right)$

Система уравнений (16), (17), (19) описывает фильтрационные поля скорости ветра и температуры в атмосфере городского лабиринта. Для отыскания фильтрационного поля концентрации загрязняющей примеси в этой атмосфере рассмотрим полное изменение средней концентрации примеси в объеме  $m d\tau$ .

Имеем

$$m\rho \frac{d\phi^*}{dt} d\tau = m \text{div} \left[ (D + D^T) \text{grad} \phi^* \right] d\tau - m\rho\sigma\phi^* d\tau + m\rho\dot{M}^* d\tau, \quad (20)$$

где  $D^T$ ,  $D^T$  – молекулярный и турбулентный динамические коэффициенты диффузии,  $\left(\frac{\text{к}\mathcal{Z}}{\text{м}\mathcal{C}}\right)$ ;  $\sigma$  – параметр нейтрализации примеси в атмосфере,  $1/\text{с}$ ;  $\dot{M}^*$  – отнесенная к единице объема быстрота прироста массы примеси за счет действия внутренних источников,  $\left(\frac{\text{к}\mathcal{Z}}{\text{м}^3 \mathcal{C}}\right)$ .

Поскольку

$$\frac{d\phi^*}{dt} = \frac{\partial\phi^*}{\partial t} + \vec{V}^* \text{grad} \phi^*,$$

то, учитывая (3), (8) приведём уравнение (20) к виду

$$m \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{V} \text{grad} \phi = m \text{div} \left[ (\nu_\phi + \nu_\phi^T) \text{grad} \phi \right] - m\sigma\phi + \dot{M}, \quad (21)$$

где  $\nu_\phi$ ,  $\nu_\phi^T$  – молекулярный и турбулентный кинематические коэффициенты диффузии;  $\dot{M} = m^2 \dot{M}^*$  – фильтрационное значение удельной быстроты прироста массы примеси за счет действия внутренних источников,  $\left(\frac{\text{к}\mathcal{Z}}{\text{м}^3 \mathcal{C}}\right)$ .

Уравнения (19), (21) замыкаются путем использования для вычисления коэффициентов турбулентного обмена  $\nu^T$ ,  $\nu_\phi^T$  хорошо зарекомендовавшие себя на практике полуэмпирические теории турбулентности [1, 4, 5].

Система уравнений фильтрационной атмосферы городского лабиринта (16), (17), (19), (21) решается при следующих начальных и граничных условиях

$$1) \vec{V} = \vec{V}^{(0)}(x, y, z); h = h^{(0)}(x, y, z); T = T^{(0)}(x, y, z); \phi = \phi^0(x, y, z) \text{ при } t = 0, \quad (22)$$

$$2) \vec{V} = h = 0; T = T_0(x, y, t); \phi = \phi_0(x, y, t) \text{ при } z = 0, \quad (23)$$

где функции  $T_0(x, y, t)$ ,  $\phi_0(x, y, t)$  удовлетворяют условиям баланса на подстилающей поверхности

$$\rho C_p \left[ \left( \frac{v}{Pr} + \frac{v_z^T}{Pr^T} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right]_{z=0} = m(\Phi_0 - R_0) \Big|_{z=0}, \quad (24)$$

$$\left( v_z^T + v_{\phi z}^T \right) \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = (\lambda_\phi - w_s) \phi \Big|_{z=0},$$

$\Phi_0, R_0$  – потік тепла в ґрунт і радіаційний баланс підстилюючої поверхності міського лабіринта,  $\left( \frac{\kappa Дж}{м^2 с} \right)$ ,  $v_z^T, v_{\phi z}^T$  – вертикальні кінематичні коефіцієнти турбулентного тертя і дифузії,  $(м^2/с)$ ,  $\lambda_\phi, w_s$  – швидкості поглинання забруднюючої приміси підстилюючої поверхністю і осадіння важкої приміси,  $(м/с)$ .

$$3) \frac{\vec{\partial V}}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\vec{\partial V}}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \quad (25)$$

$$4) \vec{V} = \vec{V}_g(x, y, t), \quad h = h_g(x, y, t), \quad T = T_g(x, y, t), \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = H_1(x, y, t), \quad (26)$$

де  $\vec{V}_g, h_g, T_g$  – швидкість вітру, повний напір, температура в зоні геострофічного вітру;  $z = H_1(x, y, t)$  – рівняння верхньої межі пограничного шару атмосфери, задовольняюче кінематичному граничному умову

$$\vec{V} \vec{n} = - \frac{\frac{\partial H_1}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial H_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_1}{\partial y} \right)^2}}, \quad \text{при } z = H_1(x, y, t); \quad (27)$$

де  $\vec{n}$  – нормаль до поверхності  $z = H_1(x, y, t)$ .

**Фільтраційна модель переносу приміси в приземному і пограничному шарах атмосфери.** Відомо [1; 2; 5], що приземний шар земної атмосфери має висоту  $H_0 \approx (50 \div 100)$  м, характеризується високою турбулентністю і великими вертикальними градієнтами величин швидкості вітру, температури, концентрації приміси.

Будемо вважати, що середня висота будівель і споруд міського лабіринта  $H_{cp} \approx H_0$ , а околиця верхньої межі робить вертикальні дифузійні потоки переважаючими над горизонтальними, в зв'язі з чим в рівняннях (19), (21) покладемо

$$\text{div} \left[ \left( \frac{v}{Pr} + \frac{v_z^T}{Pr^T} \right) \text{grad } T \right] \approx \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{v}{Pr} + \frac{v_z^T}{Pr^T} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right], \quad (28)$$

$$\text{div} \left[ (v_\phi + v_\phi^T) \text{grad } \phi \right] \approx \frac{\partial}{\partial z} \left[ (v_\phi + v_\phi^T) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right].$$

Крім того, в пограничному шарі атмосфери вертикальна складова швидкості вітру мала порівняно з горизонтальними складовими і зберігається в рівняннях лише перед похідними по вертикальній координаті [6]. Тоді систе-

ма уравнений фильтрационного переноса загрязняющей примеси (16), (17), (19), (21) в приземном слое атмосферы городского лабиринта, при  $0 \leq z \leq H_0(x, y, t)$ , в проекции на оси декартовой системы координат представима в виде

$$\begin{aligned} m \frac{\partial u}{\partial t} + m^2 g \left( \frac{\partial h}{\partial x} + Bu \sqrt{u^2 + v^2} \right) - v \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0, \\ m \frac{\partial v}{\partial t} + m^2 g \left( \frac{\partial h}{\partial y} + Bv \sqrt{u^2 + v^2} \right) + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 0, \\ m^2 g \left( \frac{\partial h}{\partial z} + \beta \Delta T \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} m \left( 1 + \frac{\rho_1 c_1}{\rho c_p} \right) \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} &= m \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{v}{p_r} + \frac{v_z^T}{p_r^T} \right) \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \frac{\dot{Q}}{\rho c_p} \\ m \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + (w - w_s) \frac{\partial \phi}{\partial z} &= m \frac{\partial}{\partial z} \left[ (v_\phi + v_{\phi z}^T) \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] - m \sigma \phi + \dot{M}, \end{aligned}$$

где  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости ветра  $\vec{V}$  на оси декартовой системы координат;  $h = \frac{U^2 + v^2}{2m^2 g} + \frac{P - P_0}{jm} + z$ .

Согласно [1, 2, 5, 6], вертикальные коэффициенты турбулентного обмена  $v_z^T, v_{\phi z}^T$  можно принять в виде

$$v_z^T = \begin{cases} k_1 \left( \frac{z}{z_1} \right), & \text{при } z \leq H_0, \\ k_1 \left( \frac{H_0}{z_1} \right), & \text{при } z > H_0, \end{cases} \quad v_{\phi z}^T = \begin{cases} k_1 \left( \frac{z}{z_1} \right)^p, & \text{при } z \leq H_0, \\ k_1 \left( \frac{H_0}{z_1} \right)^p, & \text{при } z > H_0, \end{cases} \quad (30)$$

где  $k_1 = (0,1 \div 0,2) \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $p=0,8 \div 1,2$  в зависимости от стратификации атмосферы;  $z_1 \approx 1$  м.

Для высот  $H_0(x, y, t) < Z \leq H_1(x, y, t)$ , т. е. для верхних слоев пограничного слоя атмосферы, на которые еще оказывает влияние подстилающая поверхность городского лабиринта, система уравнений (29), (30) также справедливее, если в ней учесть влияние сил вязкости, силы Кориолиса и положить  $m = 1$ ;  $B = \rho_1 c_1 = 0$ .

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} - v \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - fu = \left( v + v_z^T \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial y} + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + fu = \left( v + v_z^T \right) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (31)$$

$$g \left( \frac{\partial h}{\partial z} + \beta \Delta T \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \left( \frac{v}{P_r} + \frac{v_z^T}{P_r^T} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{Q}}{\rho C_p},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + (w - w_s) \frac{\partial \phi}{\partial z} = \left( v_\phi + v_{\phi z}^T \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \delta \phi + M,$$

где  $f$  – параметр Кориолиса,  $(1/c)$ .

Влияние подстилающей поверхности городского лабиринта на характер течения и перенос атмосферных загрязнений в верхних слоях пограничного слоя атмосферы будет осуществляться через граничные условия на поверхности верхней границы приземного слоя  $Z = H_0(x, y, t)$ , связывающие между собой решения систем уравнения (29) – (31):

$$u_- = u_+, v_- = v_+, w_- = w_+, h_- = h_+, T_- = T_+, \phi_- = \phi_+ \text{ при } z = H_0(x, y, t), \quad (32)$$

где индекс «-» соответствует значениям решений системы уравнений (29), (30), а индекс «+» – решениям системы уравнений (31). Кроме того, при  $z = H_0(x, y, t)$  выполняется кинематическое граничное условие

$$\vec{n} \cdot \vec{V}_- = - \frac{m_- \frac{\partial H_0}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial H_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial H_0}{\partial y} \right)^2}}. \quad (33)$$

где  $\vec{n}$  – нормаль к поверхности  $z = H_0(x, y, t)$ .

**Выводы.** Разработана фильтрационная математическая модель распространения атмосферных загрязнений в условиях городского лабиринта – районов плотной и высотной застройки больших городов, крупных промышленных центров, позволяющая учесть влияние характера плотности застройки на величину концентрации загрязняющей примеси в атмосфере города в различных условиях температурной стратификации.

Преимущество настоящей модели заключается в том, что она путем однократного интегрирования систем уравнений (29) – (31) позволяет получить поля скорости ветра и концентрации загрязнений во всём пограничном слое городского лабиринта, вместо того, чтобы расчётным путем определять эти поля в окрестности каждого городского здания или сооружения. Недостаток модели – результаты расчета могут не всегда точно соответствовать эмпирическим данным по концентрации атмосферных загрязнений в конкретно взятой точке городского лабиринта.

## Библиографические ссылки

1. Берлянд, М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнение воздуха / М.Е. Берлянд.–Л., 1985.–273с.
2. Абрамовский, Е.Р. Атмосфера больших городов / Е.Р. Абрамовский, Н.Н. Переметчик.– Д., 2007.–187с.
3. Аравин, В.И. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде / В.И. Аравин, С.Н. Нумеров.– М., 1953.–616с.
4. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский – М., 1970.–904с.
5. Обухов, А.М. Турбулентность и динамика атмосферы / А.М. Обухов – Л., 1988.–413с.
6. Бызова, Н.Л. Рассеивание примесей в пограничном слое атмосферы / Н.Л. Бызова – Л., 1977.–190с.

Надійшла до редколегії 05.12.09

УДК 532.516

С. В. Тарасов, Э. П. Яскевич, Д. А. Редчиц, И. Ю. Костюков  
Институт транспортных систем и технологий НАН Украины «ТРАНСМАГ»

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ТЕЧЕНИЯ ВОКРУГ ОДИНОЧНОЙ ЛОПАСТИ Н-РОТОРА ДАРЬЕ

Представлены результаты вычислительного эксперимента по изучению аэродинамики лопасти вращающегося ротора Дарье. Для численного моделирования аэродинамики лопасти применяются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса несжимаемой жидкости. При моделировании турбулентности используется однопараметрическая дифференциальная модель турбулентности. Решение системы исходных уравнений получены с помощью неявного оконечно-объемного численного алгоритма, который базируется на методе искусственной сжимаемости. Выполнен анализ поля течения вокруг лопасти ротора Дарье. Выделены основные стадии формирования вихревой структуры. Установлено, что для большинства угловых положений одиночной лопасти ротора Дарье центр давления находится на расстоянии 0.17-0.42 длины хорды.

*Ключевые слова:* ротор Дарье, уравнения Навье-Стокса, модель турбулентности, численное моделирование.

Представлено результати обчислювального експерименту з вивчення аеродинаміки лопаті ротора Дар'є, що обертається. Для чисельного моделювання аеродинаміки лопаті застосовуються осереднені за Рейнольдсом рівняння Нав'є-Стокса нестисливої рідини. При моделюванні турбулентності використовується однопараметрична диференціальна модель турбулентності. Розв'язок системи вихідних рівнянь отримано за допомогою неявного скінчено-об'ємного чисельного алгоритму, що базується на методі штучної стисливості. Виконано аналіз поля течії навколо лопаті ротора Дар'є. Виділено основні стадії формування вихрової структури. Установлено, що для більшості кутів положення одиночної лопаті ротора Дар'є центр тиску перебуває на відстані 0.17–0.42 довжини хорди.

*Ключові слова:* ротор Дар'є, рівняння Нав'є-Стокса, модель турбулентності, чисельне моделювання.

The results of computing experiment on studying of aerodynamics of the rotated blade of Darrieus rotor are presented. The incompressible Reynolds averaged Navier-Stokes equations are applied to numerical simulation of blade aerodynamics. One-equation differential turbulence model is used. Solution of system of the initial equations is based on the implicit finite-volume numerical algorithm and artificial compressibility method. The analysis of flow field around blade of Darrieus rotor is carried out. The basic stages of formation of vortex structure are allocated. The pressure centre is on distance of 0.17-0.42 chord lengths for the majority of angular positions of single blade of Darrieus rotor.

*Keywords:* Darrieus rotor, Navier-Stokes equations, turbulence model, numerical simulation.



**Введение.** В последнее время быстро развивается новое направление ветроэнергетики – вертикально-осевые ветроустановки с Н-ротором Дарье. Этот прогресс, в первую очередь, связан с такими особенностями вертикально-осевых ветроустановок с Н-ротором Дарье, как независимость работы от постоянно изменяющегося направления ветра, относительно низкие скорости вращения, пониженный уровень шумов и вибраций, которые позволяют им успешно конкурировать с традиционными горизонтально-осевыми ветроустановками. Аэродинамическая схема и динамика Н-ротора Дарье значительно сложнее горизонтально-осевых роторов. Лопастей горизонтально-осевых ветроустановок при постоянной скорости ветра на всей траектории вращаются с постоянным углом атаки, что обеспечивает постоянное распределение давления по поверхности профиля лопасти и, следовательно, постоянный вращающий момент. Угол атаки лопастей Н-ротора Дарье изменяется в зависимости от их азимутального положения и коэффициента быстроходности. При этом диапазон изменения угла атаки может быть значительным, что приводит к нестационарному обтеканию профиля лопасти, характеризующееся динамическим или полным срывом потока. Такое нестационарное обтекание вызывает пульсацию распределения давления по поверхности лопасти, и как следствие, циклические колебания аэродинамической силы и величины вращающего момента, что приводит к неравномерности движения лопастей по окружности вращения. На динамические процессы, происходящие в конструкции Н-роторов Дарье, также оказывают влияние аэроупругие явления, вызванные колебаниями лопастей и траверс в дозвуковом воздушном потоке. В настоящее время, во многих странах проводятся теоретические и экспериментальные исследования аэродинамики Н-роторов Дарье, которые позволят полной мерой реализовать преимущества этой схемы [1].

Решение задач динамики при проектировании Н-роторов Дарье требует в качестве исходных параметров, в первую очередь, знание реального характера изменения коэффициента давления, обуславливающего миграцию центра давления вдоль хорды лопасти, и коэффициента момента. Эти характеристики являются базовыми при определении напряженно-деформированного состояния лопастей ротора и оптимизации системы регулирования ветроустановки.

**Исходные уравнения.** Математическое моделирование аэродинамики одиночной лопасти ротора Дарье проводилось на основе нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости, записанных в обобщенных криволинейных координатах [1]. При моделировании турбулентности используется однопараметрическая дифференциальная модель турбулентности Spalart-Allmaras, адаптированная к тензору скоростей деформаций (SALSA) [3].

В качестве начальных условий задавались параметры невозмущенного потока во всей расчетной области. На внешней границе применялись неотражающие граничные условия, для расчета которых использовался метод характеристик. На поверхности твердого тела ставилось условие прилипания. В модели турбулентности SALSA значение рабочей переменной на теле задавалось равным нулю, на входной границе 0.1, на выходной – ставилось условие Неймана. Начальная угловая скорость ротора полагалась равной нулю.

**Численный алгоритм.** Исходные уравнения, замкнутые дифференциальной моделью турбулентности, интегрировались численно с использованием метода контрольного объема. Разработанный численный алгоритм базируется на трехслойной неявной схеме Rogers-Kwak [4], имеющей второй порядок точности интегрирования по времени, третий порядок противоточной аппроксимации конвективных слагаемых, и второй порядок центрально-разностной аппроксимации диффузион-



ных членов. Полученная блочно-матричная система алгебраических уравнений решалась методом итераций Гаусса-Зейделя.

В модели турбулентности для аппроксимации конвективных слагаемых применялась схема TVD с ограничителем потоков ISNAS третьего порядка [5].

**Обсуждения результатов.** В настоящей работе выполнено численное моделирование обтекания вращающейся лопасти ротора Дарье.

Основные параметры вычислительного эксперимента:

- профиль лопасти: NACA 0020;
- хорда лопасти:  $c = 0.708$  м;
- угловая скорость вращения:  $\omega = 6.94$  рад/с;
- диаметр ротора:  $D = 7.2$  м;
- скорость ветра:  $U = 10$  м/с;
- кинематическая вязкость воздуха ( $t = 15$  °C):  $\nu = 1.47 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с;
- коэффициент быстроходности:  $\lambda = 2.5$ ;
- число Рейнольдса по хорде лопасти:  $Re_c = Uc / \nu = 5 \cdot 10^5$ ;
- коэффициент заполнения:  $\sigma = 0.2$ .

При вращении по окружности лопасти ротора Дарье местный угол атаки  $\alpha$  и абсолютная скорость  $U_a$  являются функциями двух переменных: текущего углового положения  $\theta$  и угловой скорости вращения  $\omega$  (рис. 1).

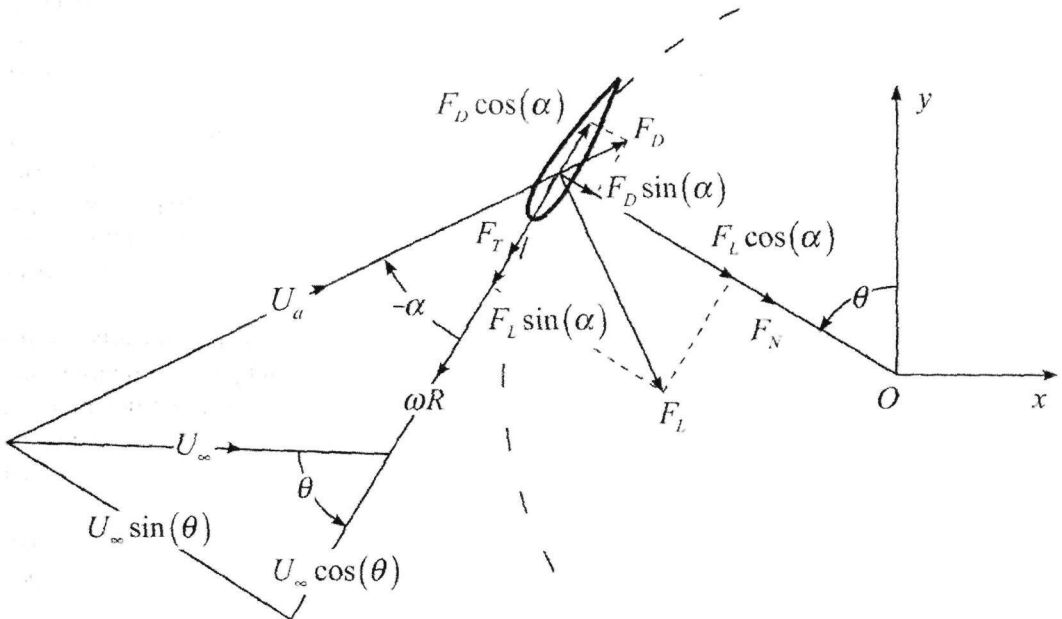


Рис. 1. Векторная диаграмма для определения местного угла атаки  $\alpha$  и абсолютной скорости  $U_a$  через скорость ветра  $U_\infty$ , линейную скорость вращения  $\omega r$  и текущее угловое положение лопасти  $\theta$

Следовательно, местный угол атаки и абсолютная скорость лопасти могут быть определены по формулам (1) и (2), соответственно:

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{U_\infty \sin \theta}{\omega R + U_\infty \cos \theta}\right) = -\arctan\left(\frac{\sin \theta}{\lambda + \cos \theta}\right), \quad (1)$$

$$U_a = \sqrt{(U_\infty \sin \theta)^2 + (\omega R + U_\infty \cos \theta)^2} = U_\infty \sqrt{\sin^2 \theta + (\lambda + \cos \theta)^2}. \quad (2)$$

Циклическое изменение местного угла атаки  $\alpha$  и абсолютной скорости  $U_a$  от углового положения  $\theta$  для различных коэффициентов быстроходности  $\lambda$  приведены на рис. 2 и рис. 3. Амплитуда изменения угла атаки  $\alpha$  при увеличении коэффициента быстроходности  $\lambda$  стремится к нулю.

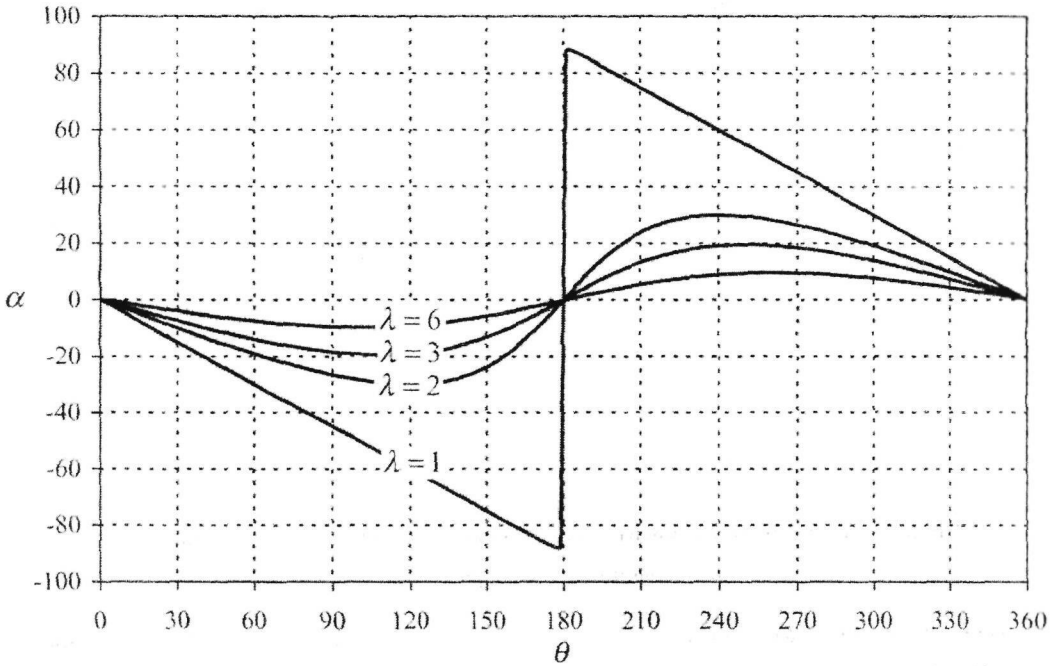


Рис. 2. Циклическое изменение местного угла атаки  $\alpha$  от углового положения лопасти  $\theta$  и коэффициента быстроходности  $\lambda$

Определение аэродинамических характеристик роторов Дарье на основе аналитических методов усложняется тем фактом, что лопасть, описывающая криволинейную траекторию, ведет себя не так как лопасть, осуществляющая движение по прямой, так что статические эксперименты в аэродинамической трубе не всегда дают точное отражение работы лопасти ротора Дарье. Проанализируем поля течения при вращении лопасти ротора Дарье для коэффициента быстроходности  $\lambda = 2.5$ .

Контуры завихренности (рис. 4–7), изменение коэффициентов крутящего момента лопасти ротора Дарье относительно передней кромки лопасти (рис. 8, а), центра оси вращения (рис. 8, б), действующего на лопасть, и положения центра давления (рис. 8, в) от углового положения ротора  $\theta$  получены на пятом обороте лопасти. Значение угла  $\theta = 0^\circ$  соответствует положению ротора, когда передняя кромка лопасти направлена навстречу потоку.

Движение лопасти ротора Дарье навстречу потоку в наветренной части траектории сопровождается отрывом потока вблизи задней кромки (рис. 4, а–е). Однако на самой лопасти течение носит присоединенный характер. На данном участке траектории с увеличением угла поворота ротора и местного угла атаки, наблюдается падение коэффициента давления на внутренней поверхности лопасти. Это приводит

к росту подъемной силы, которая вносит основной вклад в тангенциальную силу, а, следовательно, и в крутящий момент (рис. 4, б).

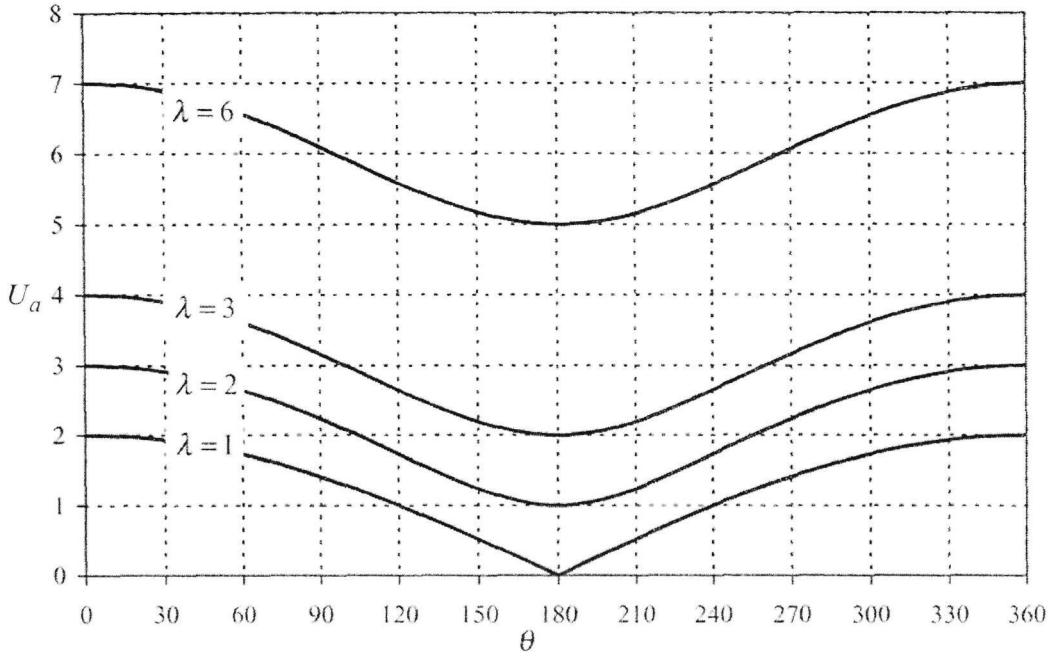


Рис. 3. Циклическое изменение относительной скорости  $U_a$  от углового положения лопасти  $\theta$  и коэффициента быстроходности  $\lambda$

Исходя из анализа контуров завихренности (рис. 5, а) при угле поворота лопасти  $\theta = 90^\circ$  (местный угол атаки лопасти составляет  $\alpha = -22^\circ$ ) на внутренней поверхности происходит динамический срыв потока.

Пограничный слой отрывается вблизи задней кромки лопасти, и положение точки отрыва смещается в направлении передней кромки лопасти. Это приводит к срыву вихря с носовой части лопасти и последующим движением вдоль хорды по направлению к задней кромке лопасти. Происходит падение коэффициента давления, что приводит к колебаниям коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления. На передней кромке лопасти формируются вихри, которые затем смещаются вдоль поверхности (рис. 5, б–г). Движение каскада вихрей оказывает значительное влияние на распределение коэффициента давления по внутренней поверхности лопасти. В результате происходит падение значений коэффициентов подъемной и тангенциальной сил. Наблюдается срыв вихрей с внутренней поверхности до тех пор, пока угловое положение ротора не приблизится к  $180^\circ$ .

При угле поворота ротора  $180^\circ$  происходит присоединение потока (рис. 6, а) (начинается вблизи передней кромки и смещается в направлении задней кромки).

В начале подветренного участка траектории  $\theta = 180^\circ$  и до углового положения ротора  $\theta = 270^\circ$  обтекание лопасти потоком носит присоединенный характер (рис. 6, рис. 7 а). Увеличение угла поворота ротора Дарье приводит к понижению минимума коэффициента давления на внешней поверхности лопасти. Отрыв потока начинается при угловом положении ротора  $\theta = 270^\circ$ , что соответствует местному углу атаки лопасти  $\alpha = 18^\circ$ . Увеличение местного угла атаки, при котором

происходит динамический срыв потока на подветренном участке траектории связано с уменьшением местной скорости потока из-за извлечения части его кинетической энергии на наветренном участке. В результате наблюдается локальный рост коэффициента быстроходности. Как и в случае динамического срыва с внутренней поверхности, вихри срываются с передней кромки лопасти и начинают движение вдоль поверхности (рис. 7, б-д). Как следствие, происходит резкий рост лобового сопротивления, уменьшение значений коэффициентов тангенциальной силы и крутящего момента (рис. 8, б). Поток повторно присоединяется к поверхности лопасти, когда угол поворота ротора составит  $\theta = 345^\circ$  (рис. 7, е). В следе начинает формироваться периодическое течение по структуре напоминающее вихревую дорожку Кармана за цилиндром.

При коэффициенте быстроходности  $\lambda = 2.5$  обтекание воздухом лопасти ротора Дарье характеризуется отрывом потока с передней кромки лопасти и формированием больших вихревых структур, которые сносятся вдоль хорды лопасти.

Изменение абсолютной скорости по окружности вращения лопасти приводит к сравнительно большой области динамического срыва в наветренной части траектории. В этой зоне набегающий поток сносит вихри в направлении движения лопасти. На второй половине траектории (подветренный участок), поток переносит вихри в сторону, противоположную движению лопасти. В этом случае продолжительность динамического срыва потока меньше, чем в предыдущем.

Зависимость неосредненных значений крутящего момента от углового положения ротора для коэффициента быстроходности  $\lambda = 2.5$  за один (данные получены на пятом обороте ротора) и восемь оборотов ротора приведены на рис. 8, 9. После достижения максимума  $C_Q = 0.35$  ( $\theta = 80^\circ$ ) происходит его падение до значений  $C_Q = -0.18$ , соответствующее углу поворота ротора  $\theta = 140^\circ$ . В этом диапазоне угловых положений ротор Дарье подвержен динамическому срыву потока. В последствии, когда происходит присоединение потока  $\theta = 180^\circ$ , значение момента вращения имеет положительное значение до угла  $\theta = 290^\circ$ . Дальнейшее увеличение угла поворота ротора приводит к динамическому срыву потока с внешней поверхности лопасти и коэффициент крутящего момента становится отрицательным.

Анализируя зависимость коэффициента крутящего момента от углового положения ротора (рис. 8, б, рис. 9, б) можно сделать вывод, что основной момент вращения создается на наветренном участке траектории лопасти. Это объясняется тем, что поток, проходя через наветренный участок траектории лопасти, теряет часть своей кинетической энергии. Поэтому, крутящий момент лопасти больше на этом участке, чем на подветренном.

Положение центра давления вращающейся лопасти носит динамический характер (рис. 8, в). При принятых параметрах вычислительного эксперимента для большинства угловых положений одиночной лопасти ротора Дарье центр давления находится на расстоянии 0.17 – 0.42 длины хорды. При угловых положениях лопасти, где доминирует динамический срыв вихрей ( $\theta = 90^\circ - 180^\circ$ ), происходит резкое изменение положение центра давления.

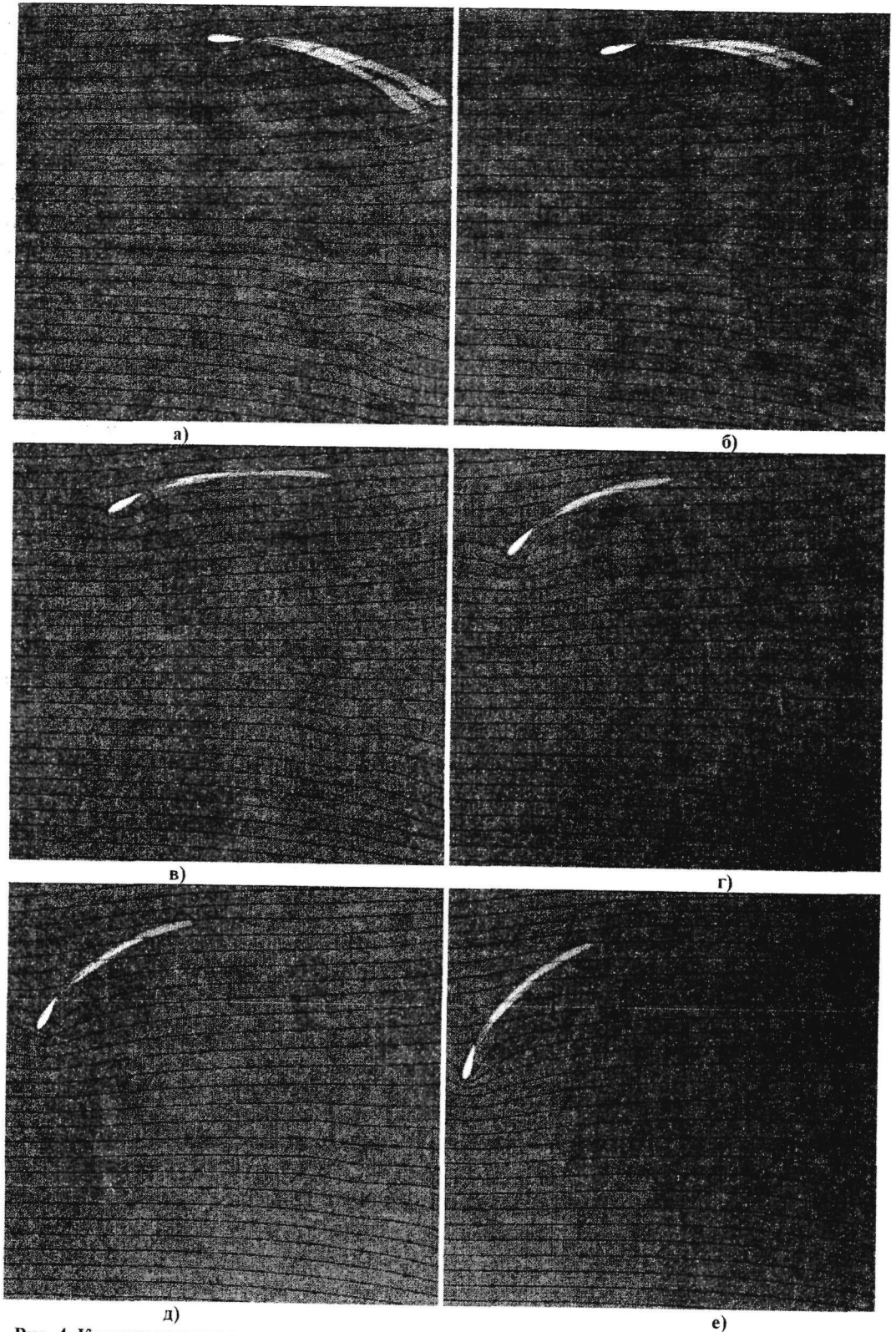


Рис. 4. Контуры завихренности при вращении однолопастного ротора Дарье ( $\lambda = 2.5$ ) для углового положения а)  $\theta = 0^\circ$ ; б)  $\theta = 15^\circ$ ; в)  $\theta = 30^\circ$ ; г)  $\theta = 45^\circ$ ; д)  $\theta = 60^\circ$ ; е)  $\theta = 75^\circ$



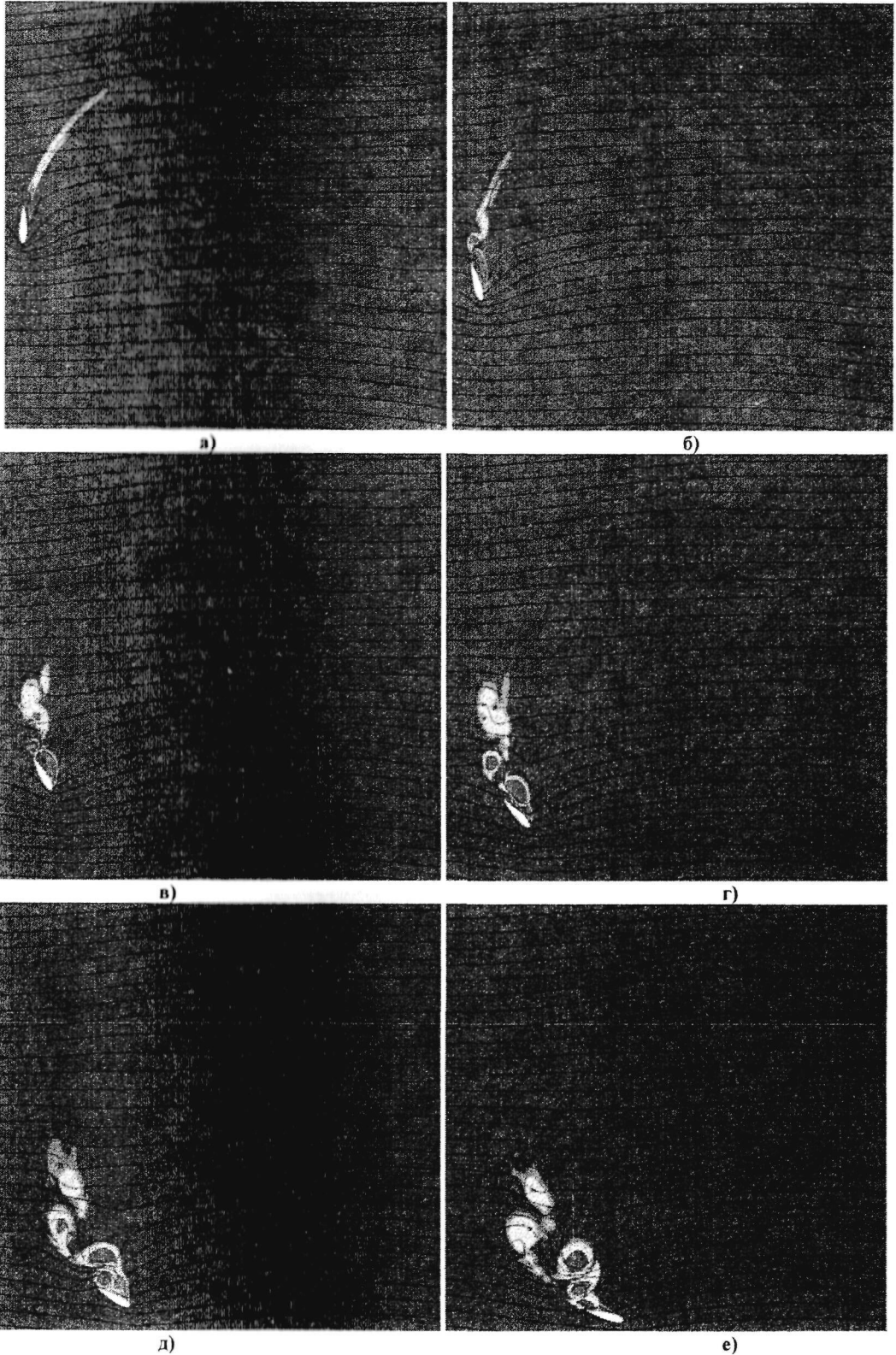


Рис. 5. Контуры завихренности при вращенні однолопатного ротора Дарье ( $\lambda = 2.5$ ) для углового положення а)  $\theta = 90^\circ$ ; б)  $\theta = 105^\circ$ ; в)  $\theta = 120^\circ$ ; г)  $\theta = 135^\circ$ ; д)  $\theta = 150^\circ$ ; е)  $\theta = 165^\circ$

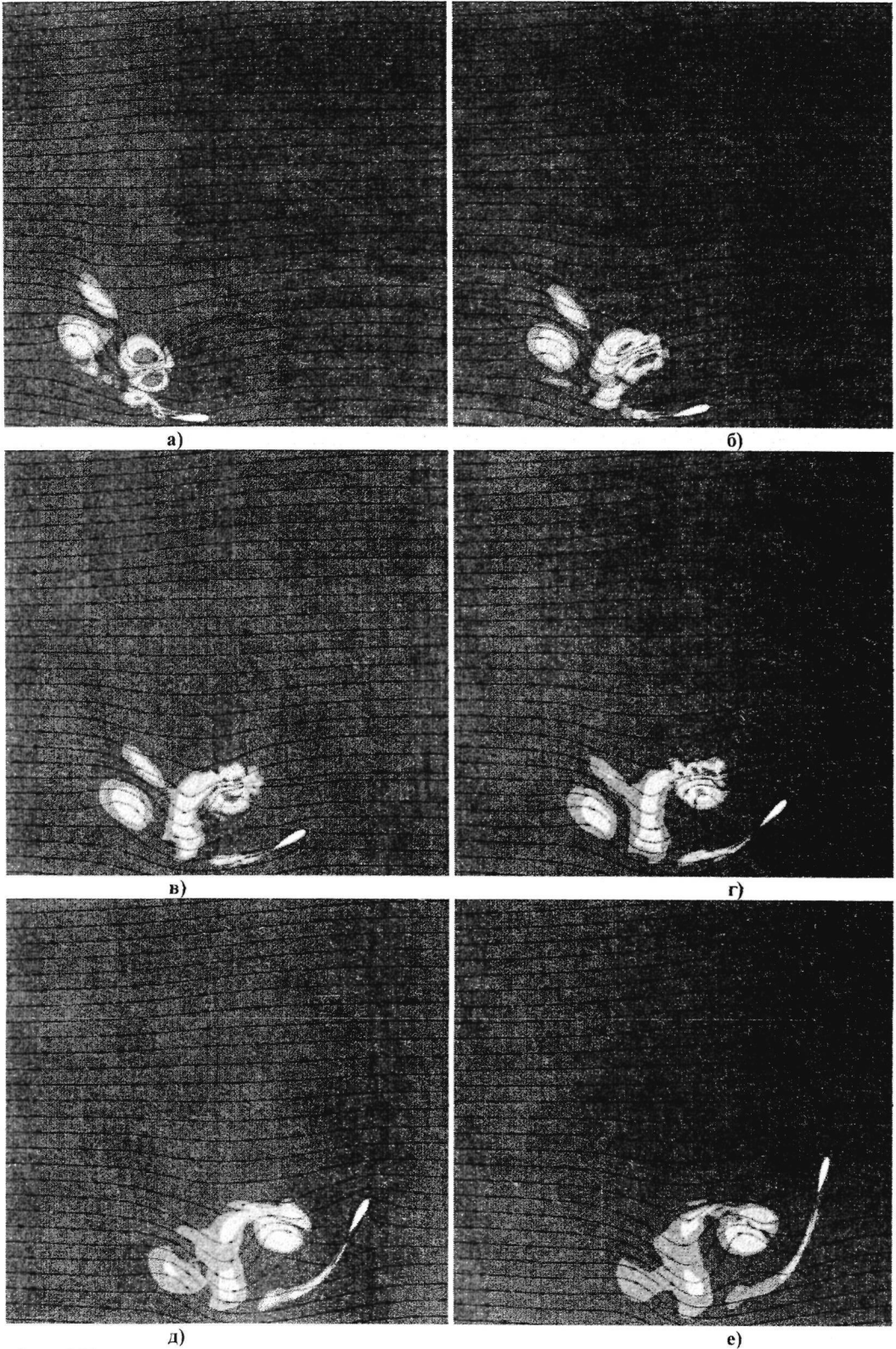


Рис. 6. Контуры завихренности при вращении однолопастного ротора Дарье ( $\lambda = 2.5$ ) для углового положения а)  $\theta = 180^\circ$ ; б)  $\theta = 195^\circ$ ; в)  $\theta = 210^\circ$ ; г)  $\theta = 225^\circ$ ; д)  $\theta = 240^\circ$ ; е)  $\theta = 255^\circ$

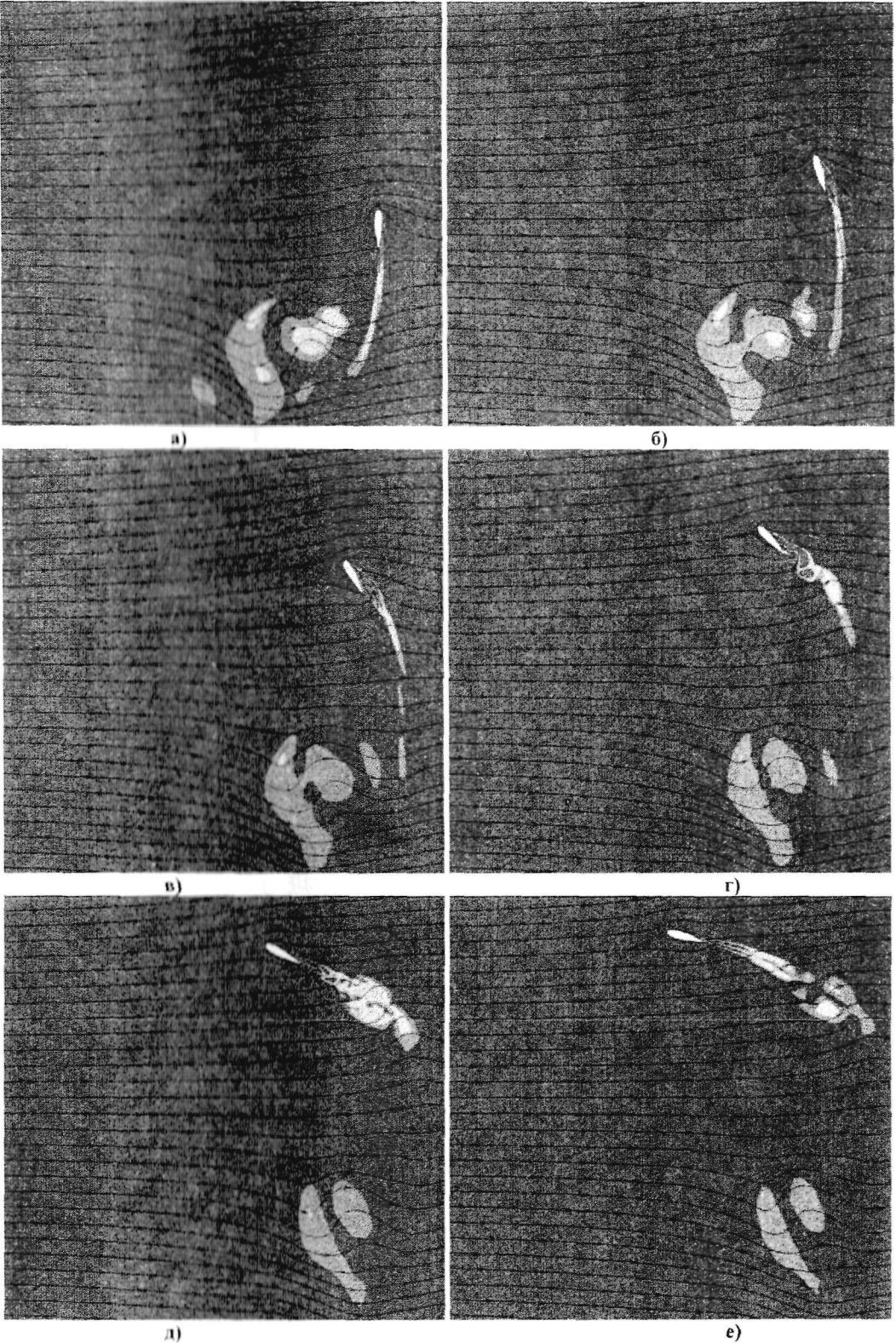
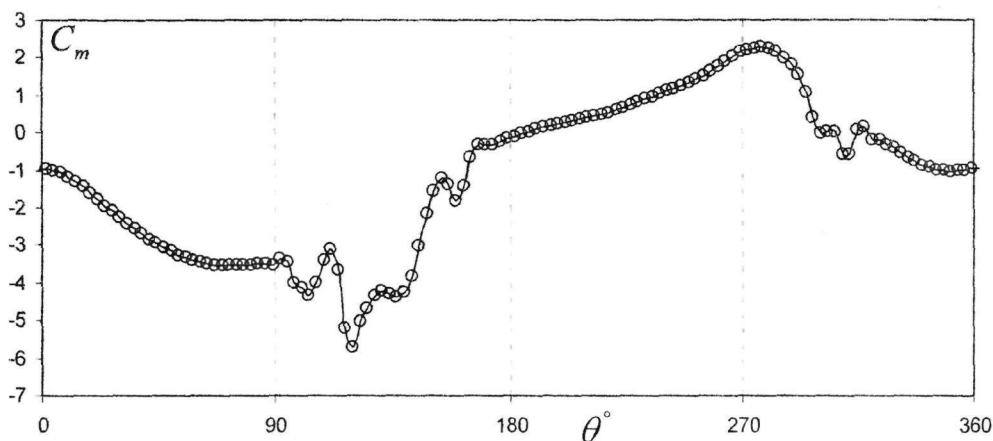
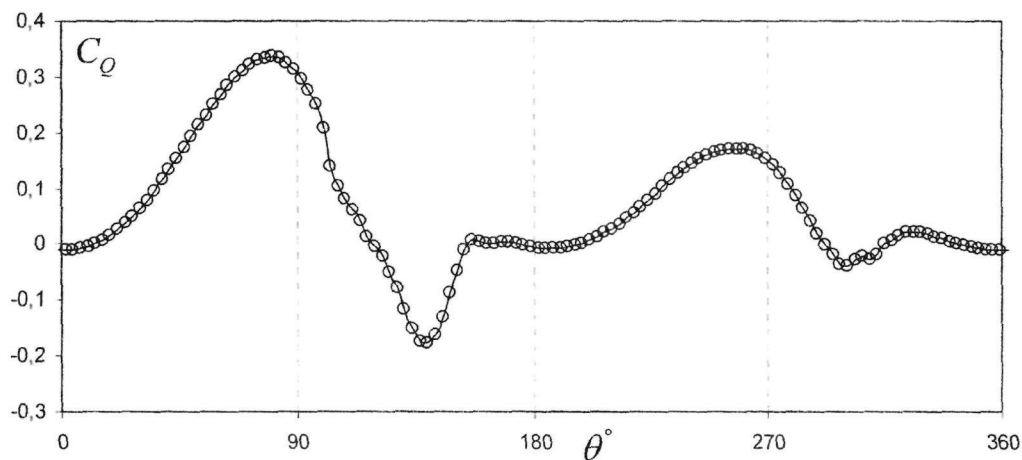


Рис. 7. Контуры завихренности при вращенні однолопастного ротора Дарье ( $\lambda = 2.5$ ) для углового положення а)  $\theta = 270^\circ$ ; б)  $\theta = 285^\circ$ ; в)  $\theta = 300^\circ$ ; г)  $\theta = 315^\circ$ ; д)  $\theta = 330^\circ$ ; е)  $\theta = 345^\circ$

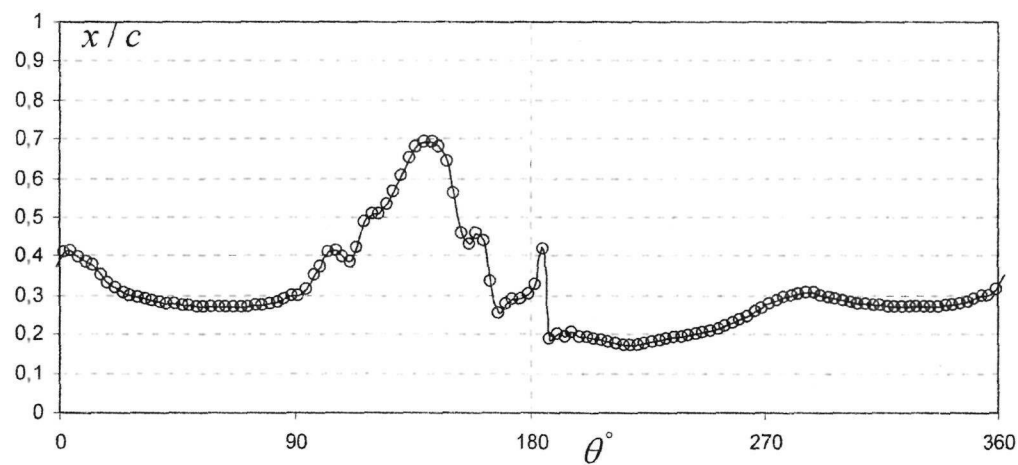




а)

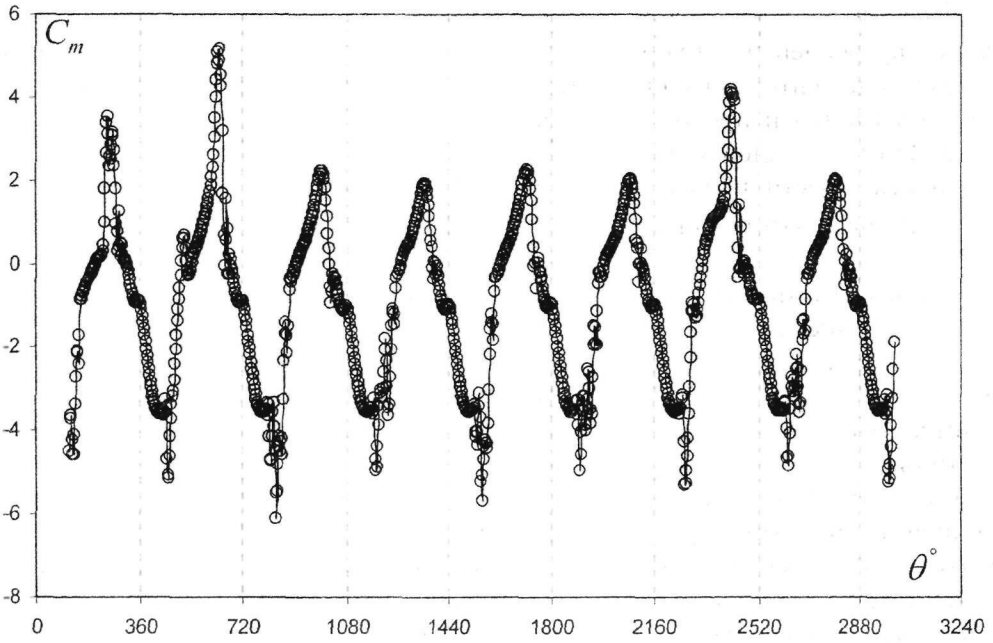


б)

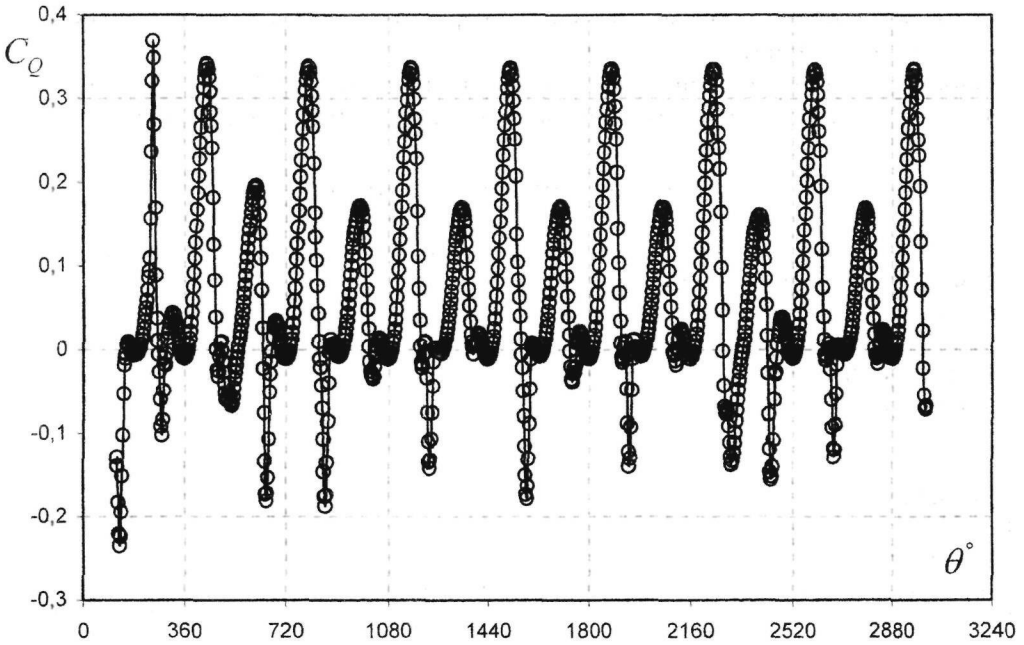


в)

Рис. 8. Изменение коэффициентов крутящего момента лопасти ротора Дарье относительно передней кромки (а), центра вращения (б), действующего на лопасть, и положения центра давления (в) от углового положения ротора  $\theta$  на пятом обороте лопасти



а)



б)

Рис. 9. Изменение коэффициентов крутящего момента лопасти ротора Дарье относительно передней кромки (а) и центра вращения (б), действующего на лопасть от углового положения ротора  $\theta$

В начале этапа, на котором начинают зарождаться крупные вихревые структуры на внутренней поверхности лопасти  $\theta = 90^\circ$  (рис. 5, а), происходит смещение положения центра давления в сторону задней кромки лопасти. Это объясняется формированием и прохождением крупных вихрей над обтекаемой поверхностью лопасти, а, следовательно, резким изменением распределения давления по поверхности лопасти, подверженной динамическому срыву потока. Максимальное отклонение наблюдается при угловом положении  $\theta = 135^\circ$  (рис. 5, г) и равно 0.7 (рис. 8, в).

После схода крупных вихрей положение центра давления начинает смещаться в сторону передней кромки лопасти.

На остальном участке траектории, где обтекание лопасти носит безотрывный характер или влияние вихрей не столь существенно, положение центра давления находится в указанном выше диапазоне (0.17–0.42 длины хорды).

#### **Выводы.**

1. В результате проведенных исследований на основе уравнений Навье-Стокса выполнен анализ структуры и закономерностей развития нестационарных турбулентных несжимаемых течений при обтекании одиночной лопасти ротора Дарье ( $\lambda = 2.5$ ). Рассчитаны коэффициенты крутящего момента лопасти относительно носика, центра вращения, а также положение центра давления от углового положения ротора.
2. Выделены основные стадии формирования вихревой структуры. Показано, что вязкие и динамические эффекты играют существенную роль в работе ротора Дарье. Основной крутящий момент при принятых параметрах создается на наветренном участке траектории лопасти.
3. Установлено, что для большинства угловых положений одиночной лопасти ротора Дарье центр давления находится на расстоянии 0.17 – 0.42 длины хорды.

#### **Библиографические ссылки**

1. **Howell R.** Wind tunnel and numerical study of a small vertical axis wind turbine / R. Howell. – University of Sheffield, 2009. – P.10.
2. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкости / К. Флетчер – М., 1991. – Т. 1. – 501 с. – Т. 2. – 552 с.
3. **Rung T.** Restatement of the Spalart-Allmaras eddy-viscosity model in strain-adaptive formulation / T. Rung, U. Bunge, M. Schatz, F.Thiele // AIAA Journal. – 2003. – Vol. 4, № 7. – P.1396–1399.
4. **Rogers S.E.** An upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier-Stokes equations / S.E. Rogers, D. Kwak // AIAA Journal. –1990. –Vol. 28, № 2. – P. 253–262.
5. **Zijlema M.** On the construction of third-order accurate TVD scheme using Leonards normalized variable diagram with application to turbulent flows in general domains / M. Zijlema // Delft University of Technology: Technical Report DUT-TWI-94-104. – 1994. –25 p.

Надійшла до редколегії 12.01.10

УДК 532.516

А.А. Пилипенко

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ НА ПРОФИЛЕ НАСА 0012

Проведено численне дослідження обтікання профілю НАСА 0012 в діапазоні чисел Маха набегаючого потоку  $M_x = 0.3 \div 0.95$  і кутів атаки  $\alpha = 0^\circ \div 10^\circ$  при фіксованому числі Рейнольдса  $Re = 3.91 \cdot 10^6$ . Розрахунки виконані на основі нестационарних усереднених по Рейнольдсу рівнянь Нав'є-Стокса, замкнених з допомогою однопараметричної диференціальної моделі турбулентності Спаларта-Аллараса. Наведено розподіл тиску та коефіцієнт тертя на поверхні профілю, ізолінії чисел Маха, а також значення аеродинамічних коефіцієнтів. Проаналізовано структуру та фізичні особливості течії. Визначено границі виникнення та зникнення автоколивань стрибка ущільнення для докритичних кутів атаки.

*Ключевые слова:* аеродинамічні характеристики профілю, трансзвукові числа Маха, автоколивання стрибка ущільнення.

Виконано численне дослідження обтікання профілю НАСА 0012 у діапазоні чисел Маха набегаючого потоку  $M_x = 0.3 \div 0.95$  та кутів атаки  $\alpha = 0^\circ \div 10^\circ$  при фіксованому числі Рейнольдса  $Re = 3.91 \cdot 10^6$ . Розрахунки виконані на основі нестационарних усереднених за Рейнольдсом рівнянь Нав'є-Стокса, замкнених за допомогою однопараметричної диференціальної моделі турбулентності Спаларта-Аллараса. Наведено розподіл тиску та коефіцієнт тертя на поверхні профілю, ізолінії чисел Маха, а також значення аеродинамічних коефіцієнтів. Проаналізовано структуру та фізичні особливості течії. Визначено границі виникнення та зникнення автоколивань стрибка ущільнення для докритичних кутів атаки.

*Ключові слова:* аеродинамічні характеристики профілю, трансзвукові числа Маха, автоколивання стрибка ущільнення.

The numerical investigation of flow about profile NACA 0012 in the range of Mach number of free-stream flow  $M=0.3-0.95$  and angle of attack  $\alpha=0^\circ-10^\circ$  with the fixed Reinold's number  $Re=3.91 \cdot 10^6$  is obtained. The calculations was made on the basis of non-stationary averaged equations Navier-Stocks on Reinold's closed with the help of one-parametrical differential model by Spalart-Allmaras turbulence. The pressure distribution on the surface of profile, isolines of Mach number, as well as the aerodynamic coefficients are calculated. The boundaries of inception and disappearing of auto-oscillations of compression shock for precritical angle of attack are noticed.

*Keywords:* profile aerodynamic characteristics, transonic Mach number, auto-oscillations of a compression shock

**Введение.** Теоретический интерес исследования нестационарного трансзвукового обтекания аэродинамических профилей состоит в изучении происходящих при этом физических процессов. С точки зрения практики инженерных расчетов немаловажным является возможность прогнозирования развития нестационарных аэродинамических сил. Взаимодействие ударной волны с турбулентным пограничным слоем может привести к отрыву потока, крупномасштабной неустойчивости всего поля течения и, как следствие, автоколебаниям скачка уплотнения. Возникновение автоколебаний скачка уплотнений относится к опасным явлениям в трансзвуковой аэродинамике, поскольку они могут привести к бафтингу элементов летательного аппарата [1; 2].

**Постановка задачи.** В работе рассматривается обтекание неподвижного профиля НАСА 0012 стационарным дозвуковым внешним потоком. Идентификация режима авто-

колебаний скачка уплотнения осуществлялась по возникновению периодических колебаний аэродинамических характеристик большой амплитуды для докритических углов атаки.

Исследования выполнены в диапазоне чисел Маха  $M_\infty = 0.3 \div 0.95$  и углов атаки  $\alpha = 0^\circ \div 10^\circ$  при фиксированном числе Рейнольдса  $Re = 3.91 \cdot 10^6$ .

Настоящая работа является продолжением исследования стационарного и нестационарного трансзвукового турбулентного обтекания аэродинамических профилей [3–8].

**Исходные уравнения и численный метод.** Численное моделирование выполнено с помощью двумерных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса в криволинейных координатах [9–11]. Система уравнений дополнялась уравнением состояния совершенного газа. Динамический коэффициент молекулярной вязкости определялся по степенной зависимости от температуры [12]. Для расчета коэффициента турбулентной вязкости использовалась однопараметрическая дифференциальная модель Spalart-Allmaras [13].

На поверхности профиля задавались условия прилипания  $\mathbf{V} = 0$  и отсутствия теплообмена  $\partial T / \partial n = 0$ . На внешней границе расчетной области значения параметров потока определялись на основе инвариантов Римана. Значение рабочей переменной  $\tilde{\nu}$ , входящей в модель турбулентности, на твердой поверхности полагалось равным нулю, на входной внешней границе  $\tilde{\nu} = 0.1$ , а на выходной границе ставились безградиентные условия.

Дискретизация системы исходных уравнений Навье-Стокса выполнена с помощью конечно-объемного метода для криволинейных координат [9; 11; 14]. Конвективные слагаемые вычислялись по схеме Roe [9; 15]. Для обеспечения второго порядка точности по пространству в работе использовалась симметричный ограничитель потоков, предложенный Jameson [16]. Вязкие слагаемые в уравнениях аппроксимировались по трехточечному шаблону со вторым порядком точности.

Дискретный аналог исходных уравнений Навье-Стокса записывался в виде неявной схемы относительно искомого приращения переменных. Полученная система алгебраических уравнений решалась блочно-матричными прогонками [17]. Данный численный алгоритм реализован в рамках единого пакета программ решения задач вычислительной аэродинамики [3; 9; 18].

**Тестирование численного алгоритма** было проведено на четырех задачах: стационарное трансзвуковое обтекание профиля RAE 2822 [3], обтекание профиля NASA 0012 с наличием локальных сверхзвуковых зон малой интенсивности [3–5], дозвуковое слабо-сжимаемое обтекание профиля NASA 4412 [6; 7] и обтекание профиля BGK No.1 для режима автоколебания скачка уплотнения на подветренной стороне [7].

Расчеты проводились на сетках типа «О» размерностью 450 x 200 и 600 x 250 узлов. Сгущение сеточных узлов вблизи твердой поверхности выбиралось таким образом, чтобы обеспечить значение  $\Delta y^+ \leq 0.7$  в области взаимодействия скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем. Расстояние до внешней границы полагалось равным 20÷25 длин хорды профиля. Время расчета одного варианта составляло от 6 до 25 часов машинного времени PC Athlon 3.0 ГГц.

Следует отметить, что погрешность расчета интегральных аэродинамических характеристик в тестовых задачах не превышала 2–3% при хорошем воспроизведении распределенных параметров.

**Результаты.** Ниже представлены результаты численных экспериментов по исследованию структуры трансзвуковых течений вблизи неподвижного профиля NASA 0012 при докритических углах атаки. Получены как стационарные режимы

обтекания с различными конфигурациями локальных сверхзвуковых зон и скачков уплотнения, так и нестационарные режимы, сопровождающиеся колебаниями распределенных и интегральных характеристик.

Наиболее опасными для конструкции летательного аппарата являются явно выраженные периодические колебания, когда значения коэффициента подъемной силы меняется в два-три раза. В качестве примера на рис. 1–3 представлены результаты расчета обтекания профиля NACA 0012 при  $M_\infty = 0.725$ ,  $\alpha = 5^\circ$ ,  $Re = 3.91 \cdot 10^6$  для одного цикла колебаний скачка уплотнения. Момент времени  $t = 0$  соответствует максимуму коэффициента подъемной силы (рис. 4а).

Скорости движения скачка уплотнения вверх и вниз по потоку различны. Изменение коэффициента подъемной силы от максимума до минимума занимает интервал времени  $\Delta t \approx 0.48 \cdot T$ , а возрастание его происходит на интервале  $\Delta t \approx 0.52 \cdot T$ . Следует отметить, что достижение максимума и минимума по  $C_L$  не совпадает с крайним правым и крайним левым положением скачка уплотнения.

Из анализа результатов расчетов, приведенных на рис. 1-3, вытекает, что в момент времени  $t = 0$  скачок уплотнения уже движется вверх по потоку. Точка отрыва находится в положении приблизительно одной трети хорды профиля.

Развитая отрывная зона, являющаяся результатом взаимодействия ударной волны с пограничным слоем, простирается от  $x/c \approx 0.33$  до задней кромки. В последующие моменты времени до  $t = 0.4 \cdot T$  криволинейный скачок уплотнения перемещается к носу профиля вследствие чего увеличивается протяженность области отрыва за ним.

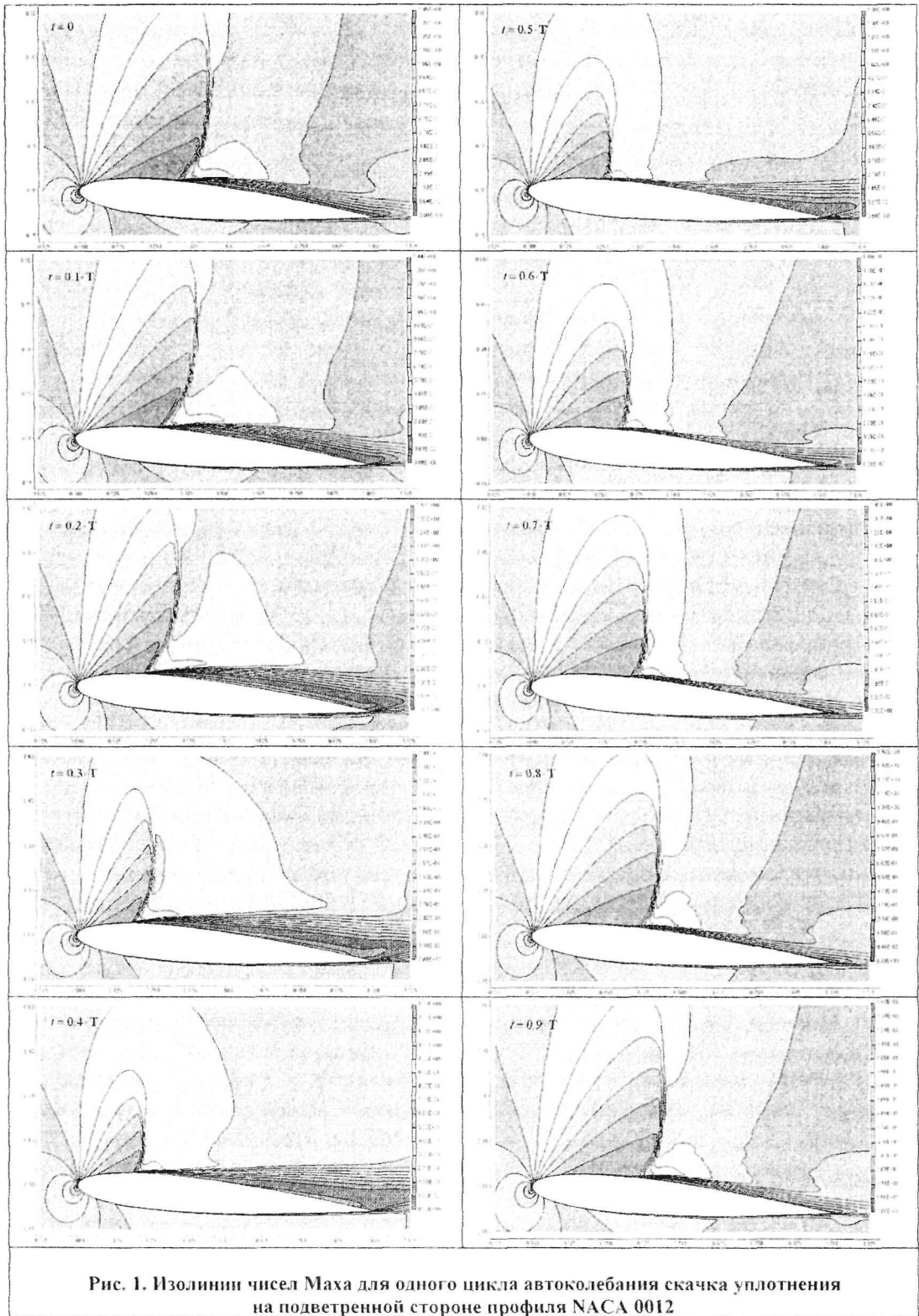
Отметим, что хотя в момент времени  $t = 0.4 \cdot T$  локальная сверхзвуковая зона (ЛСЗ) имеет минимальные размеры, и скачок уплотнения находится в крайнем левом положении, точка отрыва уже начинает движение вниз по потоку. Это связано с изменением формы скачка вблизи профиля из криволинейного в нормальный, близкий к прямому.

Вторая фаза характеризуется движением скачка уплотнения вниз по потоку, увеличением размеров сверхзвуковой зоны. Структура отрывного течения здесь иная. Единая отрывная зона распадается на две: отрыв, вызванный скачком уплотнения и отрыв вблизи задней кромки (рис. 3;  $t = 0.5 \cdot T$ ). При дальнейшем движении остается только одна отрывная зона от скачка уплотнения, а течение вблизи задней кромки становится безотрывным (рис. 3;  $t = 0.6 \cdot T$ ,  $t = 0.7 \cdot T$ ). Вблизи крайнего правого положения скачка уплотнения ( $t = 0.8 \cdot T$ ,  $t = 0.9 \cdot T$ ) точка отрыва находится в небольшом диапазоне  $x/c \approx 0.34 \div 0.36$ , а точка присоединения сдвигается к задней кромке. Затем цикл отрывного течения и движения скачка уплотнения повторяется вновь. Следует отметить, что распределение коэффициента давления на наветренной стороне сохраняет свой характер с незначительными изменениями вблизи задней кромки (рис. 2).

Эволюция по времени коэффициентов подъемной силы и сопротивления при нестационарном обтекании профиля NACA 0012 носит периодический характер (рис. 4). Изменения аэродинамических характеристик связано, в основном с процессами, происходящими на наветренной стороне. Коэффициент подъемной силы меняется в диапазоне от  $C_{L_{min}} \approx 0.339$  до  $C_{L_{max}} \approx 0.676$ , а коэффициент сопротивления – в диапазоне от  $C_{D_{min}} \approx 0.028$  до  $C_{D_{max}} \approx 0.059$ . Экстремумы коэффициентов  $C_L$  и  $C_D$  в процессе колебаний не совпадают друг с другом. Безразмерный период колебаний составил  $T \approx 14.7$ , а соответствующая ему частота (число Струхала  $Sh = 1/T$ ) была равна  $Sh \approx 0.068$ . Для хорды профиля один метр в условиях стандартной атмосферы период колебаний составляет примерно 0.06 секунды, а частота 16.7 Гц.



Полученные результаты хорошо согласуются с имеющимися представлениями об автоколебании скачка уплотнений [19].



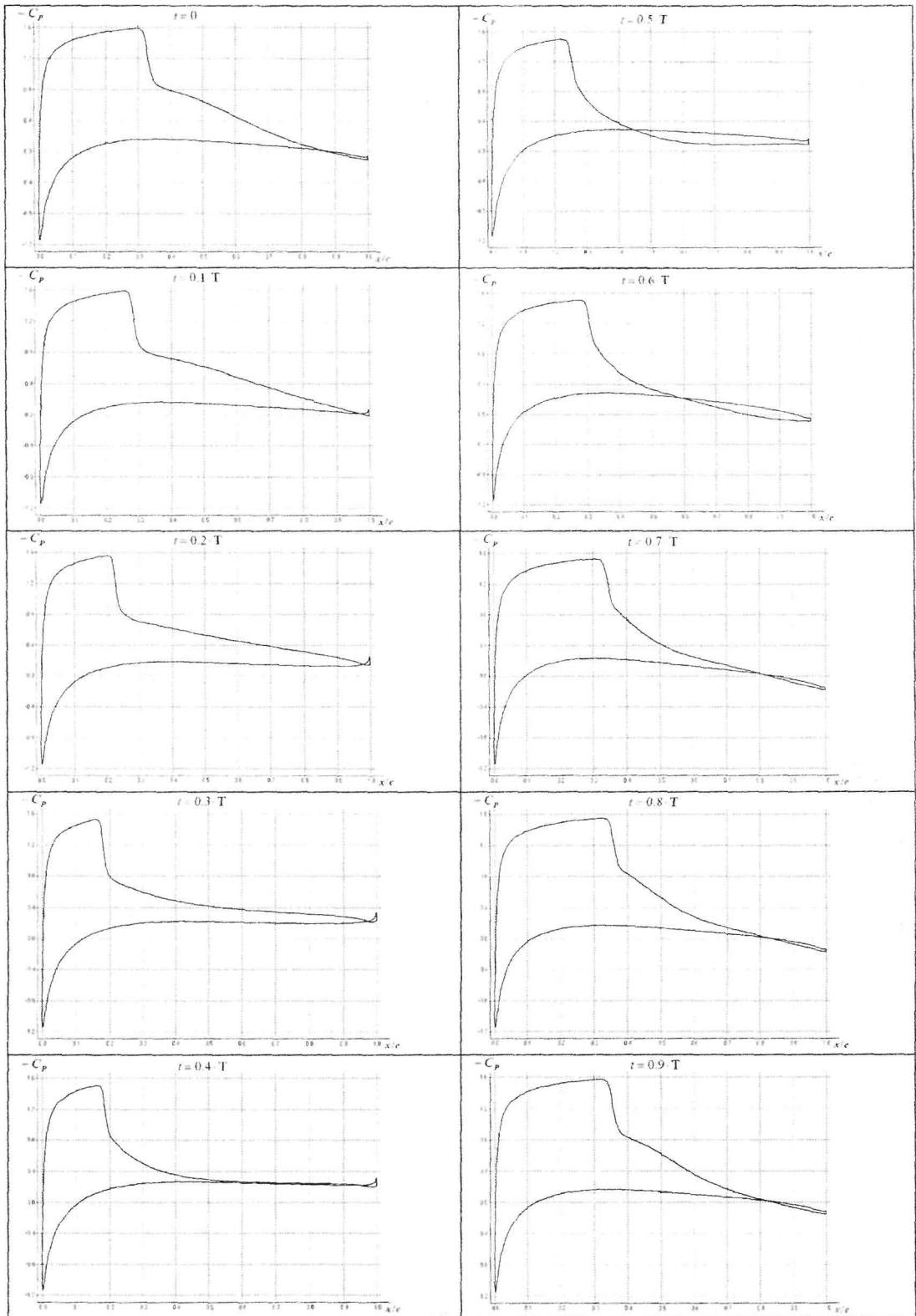


Рис. 2. Распределение коэффициента давления по поверхности профиля NACA 0012 для одного цикла автоколебания скачка уплотнения



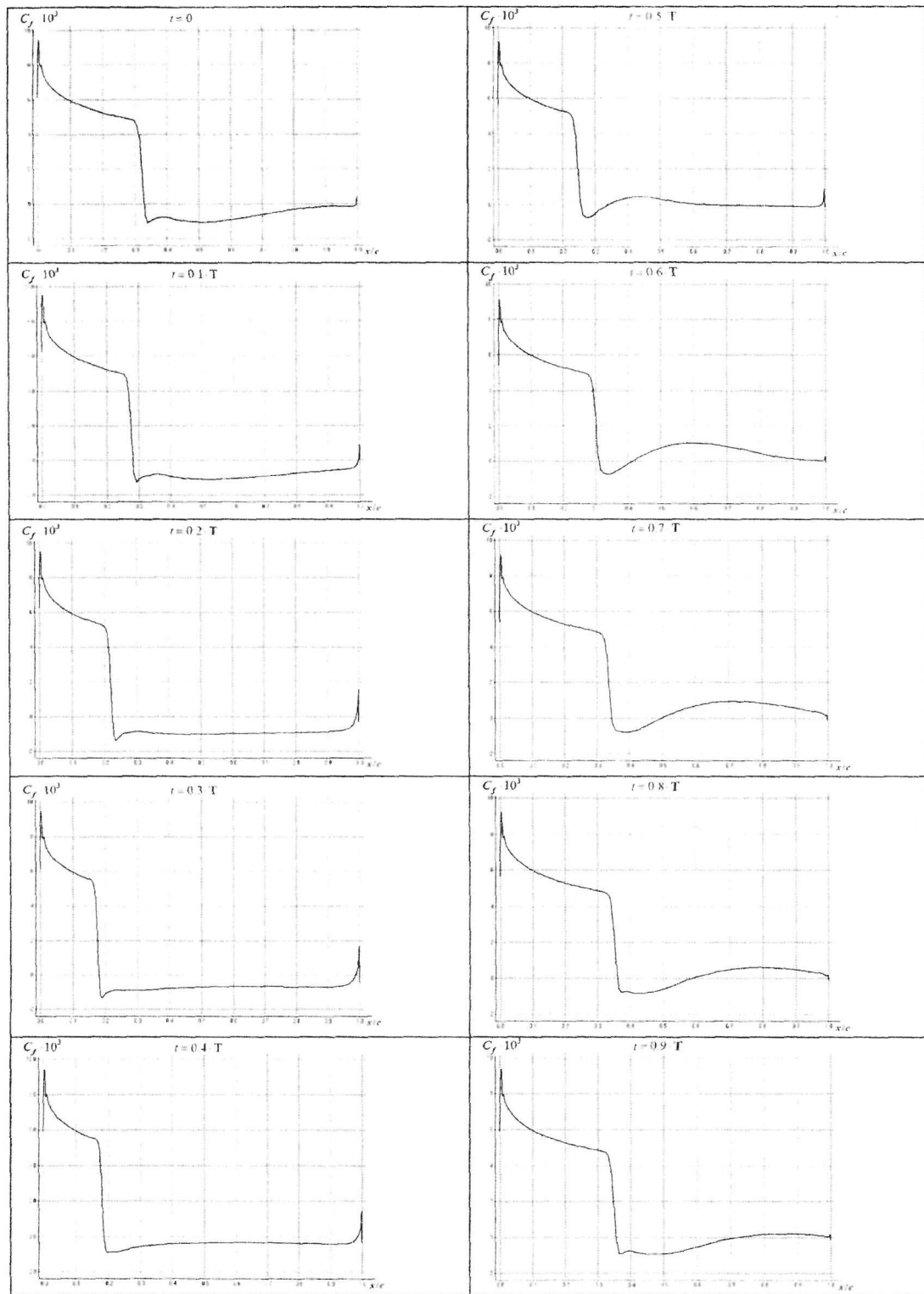


Рис. 3. Распределение коэффициента трения на подветренной стороне профиля NACA 0012 для одного цикла автоколебания скачка уплотнения

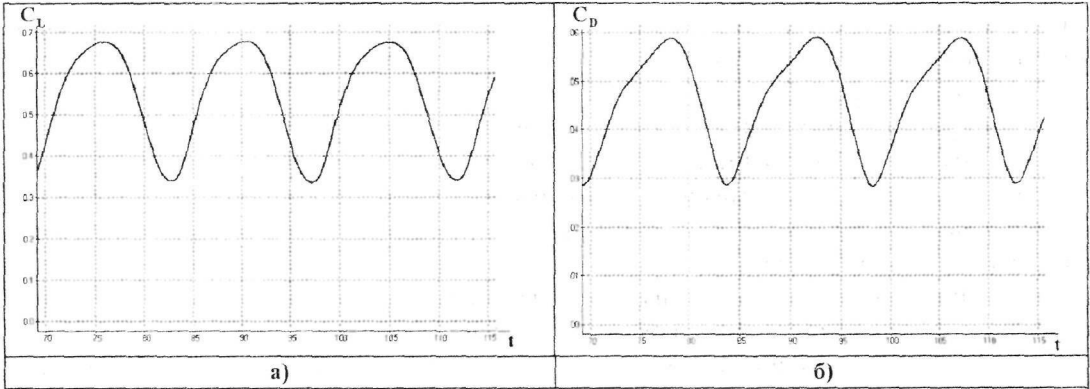


Рис. 4. Эволюция коэффициентов подъемной силы (а) и сопротивления (б) при автоколебании скачка уплотнения на профиле NACA 0012

В процессе проектирования летательных аппаратов граница начала бафтинга (автоколебания скачка уплотнения) является важной информацией для определения крейсерских режимов полета. В этой связи были проведены двухпараметрические исследования турбулентного трансзвукового обтекания профиля NACA 0012 для чисел Маха лежащих в диапазоне  $M_\infty = 0.3 \div 0.95$ , углов атаки  $\alpha = 0^\circ \div 10^\circ$  при фиксированном числе Рейнольдса  $Re = 3.91 \cdot 10^6$  и составлена «карта» режимов обтекания профиля (рис. 5) [6; 7]. Каждый режим обтекания соответствует различным физическим особенностям поля течения.

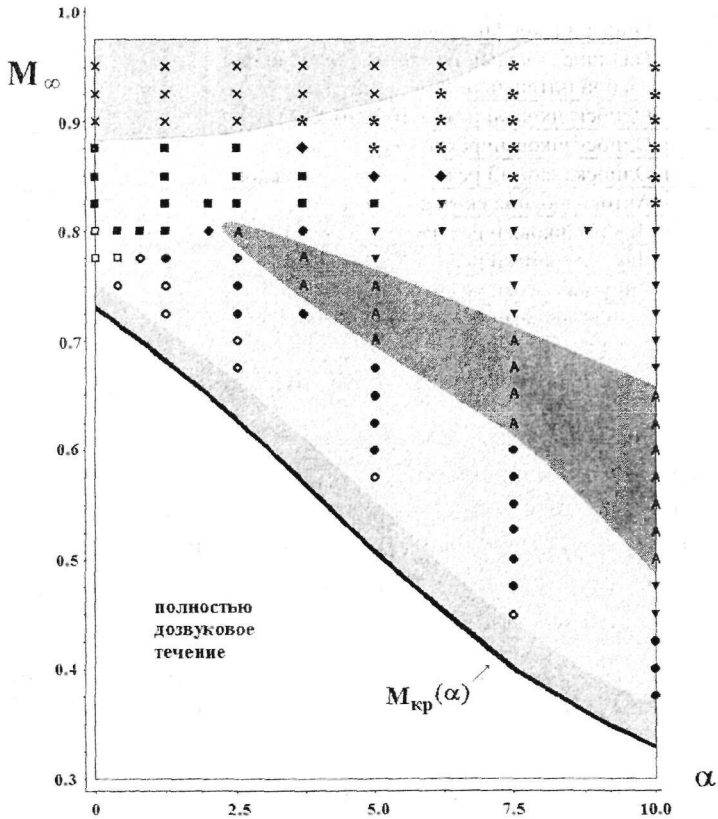


Рис. 5. «Карта» расположения режимов обтекания профиля NACA 0012

Полностью дозвуковое течение находится в нижней части «карты» и соответствует умеренным числам Маха набегающего потока (табл. 1).

Переход через критические значения чисел Маха характеризует режим с локальными сверхзвуковыми зонами слабой интенсивности при отсутствии ударных волн.

Большую часть «карты» занимают односкачковые режимы течения. Подрежимами здесь являются отрывное и безотрывное течение с криволинейным скачком уплотнения на подветренной стороне профиля, а также отрывные течения со скачком в виде лямбда-ножки.

Зона автоколебаний ударных волн находится полностью в рамках односкачкового режима. Следует отметить, что для меньших углов атаки реализуется стационарный режим с криволинейной ударной волной, а для больших углов атаки – режим со скачком в виде лямбда-ножки, в то время как в процессе автоколебаний происходит взаимная смена этих конфигураций.

Выше располагается режим с двухскачковой конфигурацией. Здесь также наблюдаются течения с отрывом пограничного слоя и без него. К этому режиму можно отнести конфигурацию, когда скачок на нижней поверхности является хвостовым, а на подветренной стороне образуется характерная лямбда-ножка. Автоколебания скачков уплотнения здесь не наблюдались.

При больших числах Маха реализуются стационарные режимы с хвостовыми скачками уплотнения, либо системы ударных волн, волн сжатия и разрежения.

Таблица 1

Таблица условных обозначений режимов обтекания профиля NASA 0012 к рис. 5

Символ	Описание конфигурации
	Наличие локальной сверхзвуковой зоны слабой интенсивности
○	Односкачковый режим (без отрыва)
●	Односкачковый режим (с отрывом)
▼	Односкачковый режим с лямбда-ножкой
А	Автоколебания скачка уплотнения
□	Двухскачковый режим (без отрыва)
■	Двухскачковый режим (с отрывом)
◆	Двухскачковый режим (1 + хвостовой)
×	Двухскачковый режим. Оба скачка хвостовые с наличием лямбда-ножек
*	Системы ударных волн и волн разрежения

При дальнейших исследованиях трансзвукового турбулентного обтекания профиля NASA 0012 возможно уточнение границ, разделяющих отдельные режимы.

**Заключение.** На основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса проведено численное исследование обтекания профиля NASA 0012 в диапазоне чисел Маха  $M_\infty = 0.3 \div 0.95$  и углов атаки  $\alpha = 0^0 \div 10^0$  при фиксированном числе Рейнольдса  $Re = 3.91 \cdot 10^6$ .

Проанализирована структура и физические особенностей течения для случая автоколебаний скачка уплотнения на подветренной стороне профиля при  $M_\infty = 0.725$ ,  $\alpha = 5^0$ .

Показаны границы возникновения и исчезновения автоколебания скачка уплотнения для докритических углов атаки.

Направлением дальнейших исследований является уточнение физических аспектов автоколебаний скачка уплотнения, неустойчивости отрыва пограничного на подветренной стороне и влияние трехмерных эффектов в геометрически двумерных задачах.

### Библиографические ссылки

1. **Mason W. H.** Configuration aerodynamics, Transonic aerodynamics of airfoils and wings / W. H. Mason // Course of Lectures. – 2006. – 24 p.
2. **Болхауз У. Ф.** Некоторые новейшие достижения в численном исследовании трансзвуковых течений / У. Ф. Болхауз // Численные методы в динамике жидкости; под ред. Г. Вириц, Ж. Смолдерн – М., – 1981. – 407 с.
3. **Приходько А.А.** Численное исследование возникновения и развития локальных сверхзвуковых зон при дозвуковом обтекании профиля NASA 0012 / А.А. Приходько, О.Б. Полевой, А.А. Пилипенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Механіка, 2008, Вип.11, т.16, № 5. – С. 19–30.
4. **Приходько А.А.** Численное моделирование нестационарных трансзвуковых турбулентных отрывных течений при обтекании профилей / А.А. Приходько, О. Б. Полевой, А. А. Пилипенко // Тези науково-практичної конференції «Комп'ютерна гідромеханіка». – К., – 2008. – С. 41.
5. **Пилипенко А.А.** Численное моделирование трансзвукового обтекания профиля NASA 0012 под небольшими углами атаки / А. А. Пилипенко // Тези XI міжнародної науково-практичної конференції «Людина і космос», Дніпропетровськ. – 2009. – С. 33.
6. **Пилипенко А. А.** О значениях критического числа Маха набегающего потока при трансзвуковом обтекании аэродинамических профилей / А. А. Пилипенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту., Механіка. – 2009, Вип.13, т.17, № 5. – С. 17–27.
7. **Приходько А. А.** Режимы трансзвукового обтекания аэродинамических профилей / А.А. Приходько, О.Б. Полевой, А.А. Пилипенко // Тезиси ІХ міжнародної школи семінара «Моделі і методи аеродинаміки», Євпаторія, 2009. – С. 142–144.
8. **Приходько А. А.** Особенности взаимодействия скачков уплотнения и волн разряжения с пограничным слоем и следом при трансзвуковом обтекании аэродинамических профилей / А.А. Приходько, О.Б. Полевой, А.А. Пилипенко // Харьков «ХАИ», 2009, Сборник научных трудов, вып. 3. – С. 158–182.
9. **Приходько А.А.** Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене / А.А. Приходько – К., – 2003. – 380 с.
10. **Pulliam T.H.** Efficient solution methods for the Navier-Stokes equations / T.H. Pulliam // Lecture notes for the von Karman Institute for Fluid Dynamics. Lecture Series, Von Karman Institute, Belgium. – 1985. – 98 p.
11. **Tannehill J.C.** Computational fluid mechanics and heat transfer (Second edition) / J.C. Tannehill, D.A. Anderson, R.H. Pletcher – Taylor & Francis, New York. – 1997. – 785 p.
12. **Шлихтинг Г.** Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг – М., – 1974. – 711 с.
13. **Spalart P.R.** A one-equation turbulence model for aerodynamic flow / P.R. Spalart, S.R. Allmaras // AIAA Paper, №.92-0439, 1992. – 22 p.
14. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкости / К. Флетчер – М., – 1991. – т.1, 501 с.; – т.2, 552 с.
15. **Roe P.L.** Characteristic-based schemes for the Euler equations / P.L. Roe // Annual review of fluid mechanics. – Vol.18, 1986. – P. 337–365.
16. **Jameson A.** Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics 1: Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence / A. Jameson // International Journal of Computational Fluid Dynamics, – Vol.4, 1995. – P. 171–218.
17. **Самарский А.А.** Теория разностных схем / А.А. Самарский – М., – 1983. – 616 с.
18. **Полевой О.Б.** Численное моделирование управления отрывом сверхзвукового трехмерного потока при обтекании стреловидных углов сжатия / О.Б. Полевой, А.А. Приходько // Аэрогидродинамика: проблемы и перспективы. – 2006. – С. 101–119.

19. **Xiao Q.** Numerical study of transonic buffet on a supercritical airfoil / Q. Xiao, H. M. Tsai // AIAA Journal – 2006, – Vol. 44, № 3. – P. 620–628.

Надійшла до редколегії 20.01.10

УДК 532.5+533.6

Л.И. Кньш, В.И. Давыдов

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

## ОСОБЕННОСТИ РАСЧЁТА ПОЛЯ СКОРОСТИ ПРИ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ ПОЛУКРУГЛОЙ ФОРМЫ

Представлены результаты аналитического и численного решения задачи вязкого течения несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале полукруглого сечения. Аналитическое решение получено с помощью рядов и интегралов Фурье, численное – итерационным конечно-разностным методом. Определены качественные характеристики течения, проведено сравнение результатов аналитического и численного решений.

*Ключевые слова:* вязкое течение несжимаемой жидкости, каналы полукруглого сечения, ряды и интегралы Фурье, приближенное аналитическое решение, численное решение.

Наведено результати аналітичного та чисельного розв'язку задачі в'язкої течії нестисливої рідини в циліндричному каналі напівкруглого перетину. Аналітичний розв'язок отримано за допомогою рядів та інтегралів Фур'є, чисельний – ітераційним скінченно-різницеvim методом. Визначено якісні характеристики течії, проведено порівняння результатів аналітичного та чисельного розв'язків.

*Ключові слова:* в'язка течія нестисливої рідини, канали напівкруглого перетину, ряди та інтеграли Фур'є, наближений аналітичний розв'язок, чисельний розв'язок.

Analytic and numerical results of problem about viscous incompressible liquid motion in cylindrical canal, which has semicircular form, were presented. Analytical solution was found with Fourier series and integrals, and numerical – with finite differences method. Qualitative characteristics of motion were determined and comparison of analytic and numerical solutions was done.

*Keywords:* viscous incompressible liquid motion, semicircular form of canals, series and integrals of Fourier, analytic solution, numerical solution.

**Введение.** Постоянное усовершенствование современного технологического оборудования выдвигает новые требования к качеству проведения опытно-конструкторских работ, что влечёт за собой необходимость более глубокой детализации при расчёте основных элементов и узлов.

В частности, дальнейшее развитие приоритетных в настоящее время энерго-сберегающих технологий и нетрадиционной энергетики невозможно без поиска новых проектных решений при конструировании теплообменного оборудования, без выбора нестандартных схемных решений компоновки основных агрегатов системы. Перспективным в этом смысле является использование в качестве магистралей для теплоносителей каналов некруглого сечения, труб с различными перегородками, которые могут служить как для интенсификации теплообмена, так и для разделения потоков в рекуперативных теплообменных аппаратах.

Особый интерес с точки зрения использования в объектах нетрадиционной энергетики представляют каналы полукруглой формы, динамика течения и теплообмен в которых являются недостаточно исследованными.

**Постановка задачі.** Математическая постановка задачі ґрунтується на класическій системі рівнянь руху Нав'є-Стокса, записаній для вязкої несжимаемой жидкості, котра стаціонарно рухється в циліндрическій трубі, ось котрої направлена по осі  $z$ . Рівняння неразрывности показує, що в цьому слухає шкорусть  $V$  не зависиє от  $z$  и являється функцією тільки радиуса  $r$  и угла  $\phi$ ,  $V = V(r, \phi)$ . Система рівнянь при цьому буде мати вид:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) = 0 \quad (1)$$

Обозначим через  $P = -\frac{\partial p}{\partial z}$  градиент давления вдоль трубы в направлении течения.

Этот градиент представляет собой постоянную величину, поскольку  $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$ . Тогда

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \frac{P}{\mu}, \quad (2)$$

и на контуре сечения  $V(r, \phi) = 0$ .

Функцию  $V(r, \phi)$  будем искать в виде [1]:

$$V(r, \phi) = \psi(r, \phi) - \frac{P \cdot r^2}{4\mu}, \quad (3)$$

при этом очевидно, что

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (4)$$

Поскольку на контуре сечения  $V(r, \phi) = 0$ , то можно сделать вывод, что гармоническая функция  $\psi(r, \phi)$  является функцией тока для невязкой несжимаемой жидкости, котра заполняет цилиндр такого же полукруглого поперечного сечения, что и рассматриваемая труба, и вращается вокруг оси с угловой скоростью  $\omega = \frac{P}{2\mu}$ .

**Определение граничных условий для функции  $\psi(r, \phi)$ .** Рассмотрим цилиндрическое тело, поперечным сечением которого является полукруг, который вращается вокруг выбранного начала координат  $O$  с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 1).

Очевидно, что компоненты скорости точки  $P(x, y)$ , котра лежит на границе цилиндра, таковы  $\vec{V} = \{-y\omega, x\omega\}$ . Обозначив через  $\theta$  угол наклона касательной к оси  $OX$  и проектируя компоненты скорости точки  $P$  на направление внешней нормали к границе в этой точке, получаем выражение для нормальной скорости

$$V_n = -y\omega \sin \theta - x\omega \cos \theta.$$

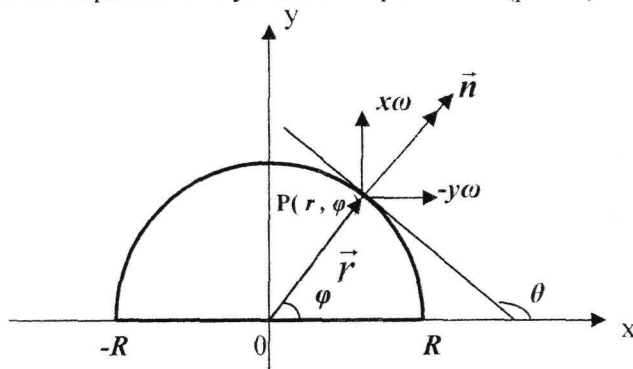


Рис. 1. Расчётная схема области течения

Далее, переходя к естественным координатами, имеем  $\sin \theta = \frac{dy}{ds}$ ,  $\cos \theta = \frac{dx}{ds}$  и тогда

$$V_n = -\frac{\partial \psi}{\partial s} = -y\omega \frac{dy}{ds} - x\omega \frac{dx}{ds}.$$

Интегрируя полученное равенство вдоль границы, находим

$$\psi = \frac{1}{2} \omega (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \omega r^2 + B,$$

где  $B$  – произвольная постоянная.

Таким образом, нахождение профиля скорости в цилиндрической трубе поперечным сечением которой является полукруг, сводится к нахождению гармонической функции  $\psi(r, \phi)$ , которая удовлетворяет на контуре таким граничным условиям:

$$\psi(r, 0) = \psi(r, \pi) = \frac{1}{2} \omega r^2, \quad \psi(R, \phi) = \frac{1}{2} \omega R^2. \quad (5)$$

**Особенности аналитического метода решения задачи.** Проведя обзор известных фундаментальных исследований [1; 2; 3], первоначально, для решения поставленной задачи был избран метод конформного отображения, суть которого сводилась к отысканию функции, отображающей интересующую нас область – полукруг – на круг единичного радиуса. Такая функция была найдена, однако, при подстановке её в выражение для граничных условий на единичном круге, получался тривиальный результат, который невозможно использовать в дальнейшем. Поэтому для решения внутренней задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости выбран метод, основанный на введении специальной системы координат, что позволило решить задачу в виде рядов и интегралов Фурье [4].

В качестве вспомогательной удобно взять полулогарифмическую систему координат  $(t, \phi)$ , которая связана с координатной системой  $(r, \phi)$  зависимостями:

$$t = \ln \frac{r}{R}, \quad \text{или} \quad r = Re^t \quad \text{и} \quad \phi = \phi.$$

Тогда, воспользовавшись соотношениями

$$\begin{aligned} \psi(r, \phi) &= \Phi(t, \phi), \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \end{aligned}$$

для определения функции  $\Phi(t, \phi)$  получим следующее дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0, \quad (6)$$

с граничными условиями:

$$\Phi(t, 0) = \Phi(t, \pi) = \frac{\omega R^2 e^{2t}}{2}, \quad \Phi(0, \phi) = \frac{\omega R^2}{2}. \quad (7)$$

Искомое решение  $\Phi(t, \phi)$  будем искать в виде суммы двух функций

$$\Phi(t, \phi) = \Phi_1(t, \phi) + \Phi_2(t, \phi),$$

одна из которых соответствует граничному условию по криволинейной области, а вторая – граничному условию по прямолинейной области АОВ.

Для нахождения функций  $\Phi_1(t, \phi)$  и  $\Phi_2(t, \phi)$  использовался метод разделения переменных, при реализации которого учитывались основные особенности задачи, а именно её внутренний характер, а также то, что переменная  $t$  не имеет предела слева.

Общее решение краевой задачи (6)–(7) запишем в виде:

$$\Phi(t, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{nt} \sin n\phi + \int_0^{\infty} (C(z) shz\phi + D(z) chz\phi) \sin ztdz, \quad (8)$$

где  $0 < \phi < \pi$ ,  $-\infty < t < 0$ .

Удовлетворяя первому из граничных условий (7):

$$\Phi(t, 0) = \int_0^{\infty} D(z) \sin ztdz = \frac{\omega R^2 e^{2t}}{2}, \quad -\infty < t < 0 \quad (9)$$

и воспользовавшись формулами преобразования Фурье [5]

$$f(t) = \int_0^{\infty} b(z) \sin ztdz, \quad -\infty < t < 0,$$

$$b(z) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(t) \sin ztdt = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(-t) \sin ztdt$$

получаем

$$D(z) = -\frac{\omega R^2 z}{\pi(4+z^2)}.$$

Удовлетворим второму из граничных условий (7):

$$C(z) sh\pi z + D(z) ch\pi z = -\frac{\omega R^2 z}{\pi(4+z^2)},$$

$$C(z) = -\frac{\omega R^2 z}{\pi(4+z^2)} \cdot \frac{1 - ch\pi z}{sh\pi z}.$$

Удовлетворяя граничному условию (8), получаем

$$\Phi(0, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\phi = \frac{\omega R^2}{2}, \quad 0 < \phi < \pi.$$

Используя метод Эйлера-Фурье, найдём коэффициенты полученного ряда Фурье:

$$A_n = \frac{2\omega R^2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 = \frac{2\omega R^2}{n\pi} (1 + (-1)^{n+1}).$$

Подставляя найденные коэффициенты  $A_n$ ,  $C(z)$ ,  $D(z)$  в выражение (8), получаем:



$$\Phi(t, \phi) = \frac{2\omega R^2}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{nt} \sin n\phi}{n} - \frac{\omega R^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{z \sin zt}{4+z^2} \frac{\operatorname{ch}(\frac{\pi z}{2} - z\phi)}{\operatorname{ch}(\frac{\pi z}{2})} dz,$$

$$0 \leq \phi \leq \pi, \quad -\infty < t \leq 0.$$

Вычисляем значение суммы

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{e^{nt} \sin n\phi}{n} = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin \phi}{\operatorname{sh} t}\right), \quad t < 0,$$

и вспомогательного интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(z(\phi - \frac{\pi}{2}))}{z \operatorname{ch}(\frac{z\pi}{2})} \sin zt dz = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin \phi}{\operatorname{sh} t}\right), \quad t < 0.$$

Окончательно получаем

$$\Phi(t, \phi) = \frac{\omega R^2}{2} + \frac{4\omega R^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\frac{\pi z}{2} - z\phi)}{z(z^2 + 4)\operatorname{ch}(\frac{\pi z}{2})} \sin zt dz, \quad (10)$$

$$0 \leq \phi \leq \pi, \quad -\infty < t \leq 0.$$

Полученное решение (10) содержит несобственный интеграл от гиперболических функций, который не удастся вычислить аналитически. Однако, прибегнув к стандартной замене бесконечного предела интегрирования на конечный, интеграл был рассчитан по квадратурной формуле трапеций, что дало возможность получить приближённое аналитическое решения.

**Численное решение задачи.** Получить численное решение задачи по определению профиля скорости в трубе полукруглого сечения возможно не прибегая к переходу к новой системе координат, а лишь организовав итерационный процесс по определению значений для функции тока  $\psi(r, \phi)$  на основании уравнений (4)–(5).

С помощью известных методов построения разностных схем [6] осуществлён переход к аппроксимирующему уравнение (4) разностному аналогу

$$r^2 \frac{\psi_{i+1,k} - 2\psi_{i,k} + \psi_{i-1,k}}{h^2} + r \frac{\psi_{i+1,k} - \psi_{i-1,k}}{2h} + \frac{\psi_{i,k+1} - 2\psi_{i,k} + \psi_{i,k-1}}{l^2} = 0 \quad (11)$$

на сетке  $r_i = r_0 + ih$ ,  $\phi_k = \phi_0 + kl$ ,  $(0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq k \leq M)$ .

Известно, что сходимость итерационного процесса для подобных разностных схем довольно низка. Для её ускорения применён метод введения релаксационного параметра. Оптимальное значение такого параметра найдено в ходе численного эксперимента и оказалось равным 1,7.

**Обсуждение результатов.** В ходе проведения исследований выявлена качественная картина течения в канале полукруглого сечения. На рис. 2 показаны кривые, полученные в результате аналитического решения тестовой задачи в полукруге единичного радиуса при  $\omega = 1$ . Как видно из графика, динамика течения существенно изменяется при изменении значения радиальной координаты.

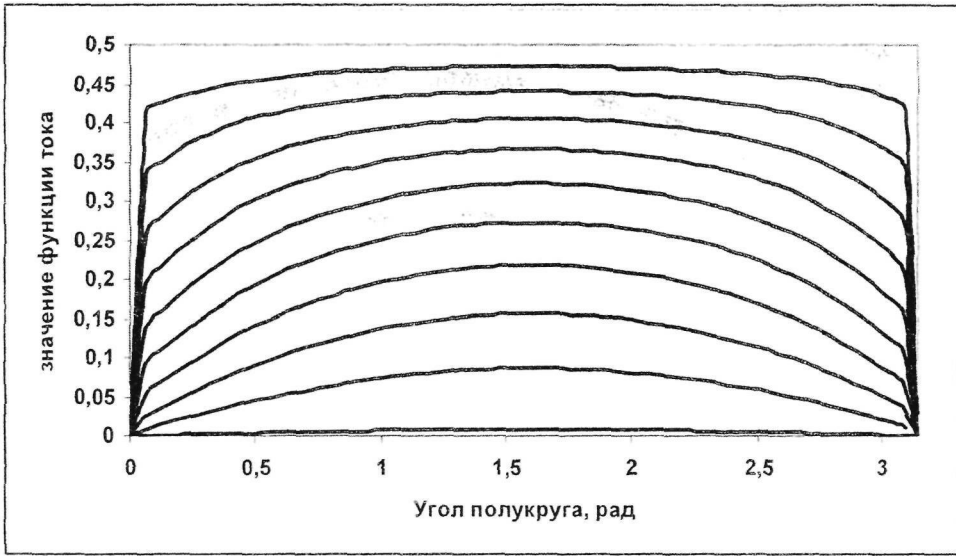


Рис. 2. Характер течения в полукруге при различных значениях радиальной координаты

На рис. 3 показаны кривые, характеризующие изменение параметров течения в радиальном направлении. Учитывая симметричную картину течения, кривые были построены для углов первой четверти, а именно  $\varphi=3^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ . Как видно из графика, при малых углах в пристеночной прямолинейной области функция тока растёт значительно медленнее, с постепенным ускорением и достижением максимальной скорости роста при  $\varphi=90^\circ$ .

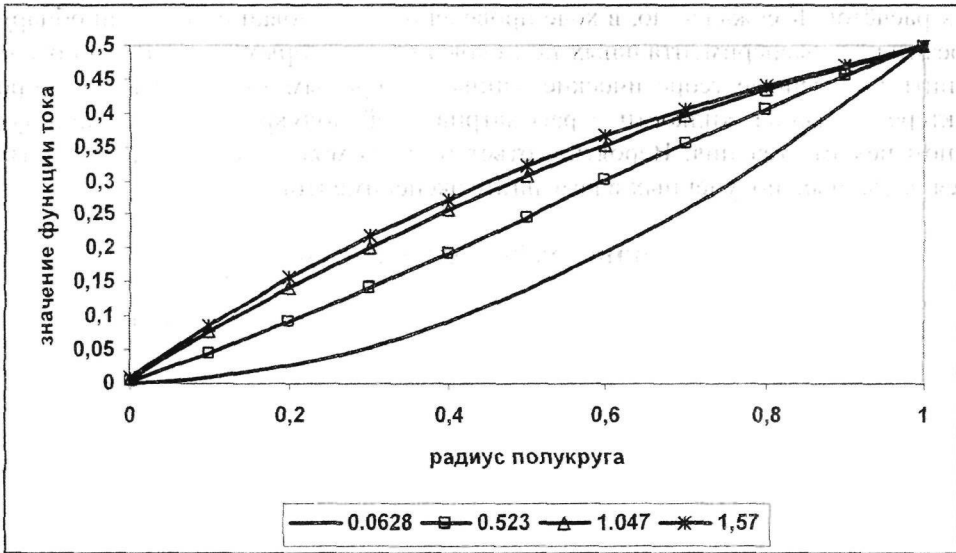


Рис. 3. Изменение динамики течения в полукруге в зависимости от радиуса

Абсолютно аналогичные результаты получены при решении данной задачи численно. На рис. 4. приведены результаты сравнения численного и аналитического решений при  $R=0,25$  и  $R=0,5$ .

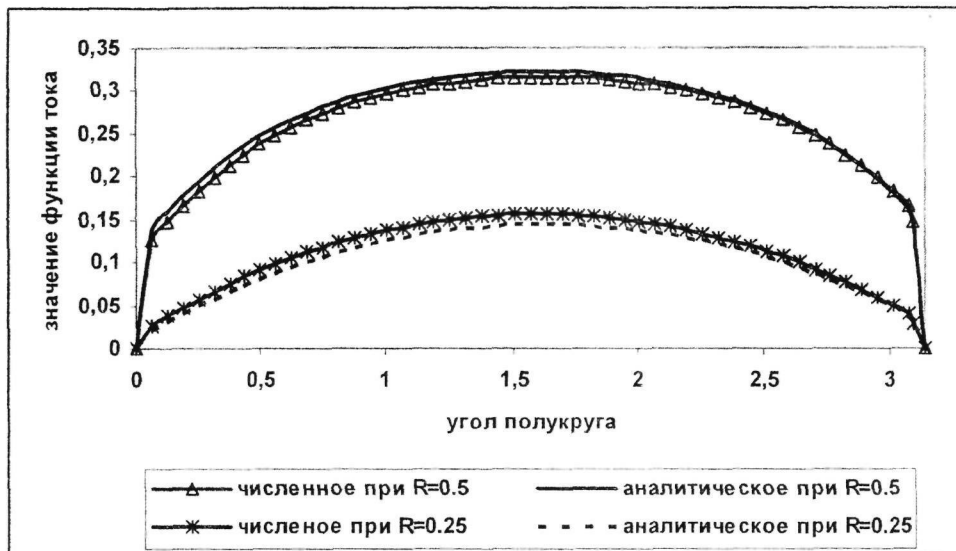


Рис. 4. Сравнение численного и аналитического решения задачи по определению профиля скорости в трубе полукруглого поперечного сечения

Полученные данные могут быть положены в основу последующей двумерной аппроксимации, в которой станет возможным описать единой зависимостью изменения скорости, как по  $r$ ; так и  $\varphi$ . Знание такой зависимости может существенно облегчить тепловой и гидродинамический расчёт при ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости в каналах различной геометрии.

**Заключение.** Рассмотренные методики и созданные на их основе программы расчёта могут выступать отдельными программными модулями при проведении таких расчётов. К сожалению, в ходе проведения исследований, не были обнаружены результаты экспериментальных исследований, с которыми желательно было бы сравнить полученные теоретические данные. Открытым также остаётся вопрос о характере движения жидкости в рассматриваемой полукруглой трубе при турбулентном режиме течения. Вероятно, ответ на него можно получить, если базироваться на данных, полученных в результате экспериментов.

### Библиографические ссылки

1. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика / Л.М. Милн-Томсон – М.,1964. – 656 с.
2. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И.Мухелишвили – М.,1966. – 709 с.
3. Лейбензон Л.С. Руководство по нефтепромысловой механике / Л.С. Лейбензон – М.,1931. – 158 с.
4. Арутюнян Н.Х. Кручение упругих тел / Н.Х. Арутюнян, Б.Л.Абрамян – М.,1963. – 686 с.
5. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье / Е. Титчмарш – М.,1948. – 480 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский – М.,1977. – 348 с.

Надійшла до редколегії 01.02.10

УДК 536.2:621.078

В. Ю. Клим

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИССИПАТИВНОГО РАЗОГРЕВА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ТЕЛ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Построена математическая модель саморазогрева элементов конструкций (простой и составной формы), возникающего при циклическом нагружении. Проведен расчет температурных полей, позволяющий учесть зависимость теплофизических, механических характеристик материала и источника теплоты от температуры.

*Ключевые слова:* диссипативный разогрев, циклическое нагружение, внутренний источник тепла, метод последовательных интервалов.

Побудовано математичну модель саморозігріву елементів конструкцій (простої та складеної форми), виникаючого при циклічному навантаженні. Проведено розрахунок температурних полів, який дозволяє врахувати залежність теплофізичних та механічних характеристик матеріалів та джерел теплоти від температури.

*Ключові слова:* дисипативний розігрів, циклічне навантаження, внутрішнє джерело тепла, метод послідовних інтервалів.

The mathematical model of heat generation in elements of construction (simple and consisting) due to cyclic loading is developed. The calculate of temperature fields is obtained and allows to take into account temperature dependences for thermomechanical properties of material and internal heat generation.

*Keywords:* dissipative heating, cyclic loading, internal heat generation, method of successive intervals.

**Введение.** Развитие современных промышленных технологий определяет экстремальные эксплуатационные режимы работы устройств и конструктивных элементов оборудования: высокая интенсивность механического нагружения одновременно с нестационарным теплообменом с окружающей средой. При этом в механическом поведении конструкционных материалов существенно проявляются физические явления и эффекты, которые раньше не учитывались.

Циклическое нагружение (от малоциклового до гигациклового) элементов конструкций является причиной рассеяния (диссипации) энергии деформирования в материале, часть которой переходит в тепло. Для распространенных конструкционных материалов – металлов – при некоторых комбинациях параметров циклического нагружения: частоты, амплитуды, вида и т. п. – рассеяние энергии вызывает значительное повышение температуры, то есть саморазогрев тела. Нестационарность теплового процесса усложняется зависимостью теплофизических и механических характеристик материала от температуры. При этом долговечность элементов конструкций при циклическом нагружении оказывается тем меньше, чем больше амплитуда колебаний, зависящая от того, насколько колебания близки к резонансу и насколько велико поглощение и последующее рассеяние энергии колебаний, т. е. величина диссипативного разогрева [1–6].

К наиболее важным задачам такого типа, представляющим интерес для инженерной практики можно отнести расчет компрессорных и турбинных лопаток, акустических концентраторов, большой класс деталей машин, аппаратов и оборудования с высокой динамической напряженностью, обусловленной высокоинтенсивным циклическим нагружением [1–6].

Предложенный в работе подход, заключается в известном последовательном решении задач о колебаниях и теплопроводности [2], на основании которых определяются соответственно изменения во времени напряженно-деформированного состояния и температурного поля в исследуемых элементах. Поскольку эти задачи являются нелинейными, их решение, в настоящее время, может быть получено приближенными численными или аналитическими методами [7–12]. Напряженно-деформированное состояние в задаче теплопроводности учитывается введением распределенных источников тепла, наличие которых является результатом превращения части энергии деформирования в теплоту. Поскольку при решении задачи теплопроводности возможно учесть теплообмен между элементом и окружающей средой (в том числе и с другими частями конструкции), обоснованным является предположение о том, что энергия, необратимо рассеянная в материале, полностью преобразуется в теплоту. Аналитическое решение таких задач с учетом наличия внутренних источников тепла и сложного теплообмена с окружающей средой в виде отдельных выражений дает возможность обобщения качественной и количественной оценки теплового режима, взаимного влияния отдельных факторов в процессе циклического нагружения с целью их практического использования.

Цель работы заключается в построении математической модели процесса диссипативного разогрева элементов конструкций (простой и составной формы) при циклическом нагружении с разными условиями теплообмена с окружающей средой, позволяющая учесть зависимость теплофизических и механических характеристик материала и источника тепла от температуры; получении приближенного аналитического решения нелинейной задачи нестационарной теплопроводности с учетом зависимости теплофизических и механических характеристик материала и источника тепла от температуры; проведении сравнительного анализа результатов вычислительного эксперимента определения влияния на тепловые режимы элементов конструкций параметров циклического нагружения: амплитуды напряжений, частоты, числа циклов и т. д. – для прогнозирования рациональных эксплуатационных и технологических параметров.

**Постановка и решение задачи.** В общем случае материал тела считается неоднородным и анизотропным. Тогда для тела, ограниченного поверхностью  $S$  и занимающего в пространстве объем  $V$ , в точке  $M$  уравнение теплопроводности имеет следующий вид

$$c_V(M, T) \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_{ij}^{(T)}(M, T) \frac{\partial T(M, T)}{\partial x_j} \right) + q_V(M, T), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $\tau$  – время;  $\lambda_{ij}^{(T)}$  – компоненты симметричного тензора теплопроводности в прямоугольной системе координат  $Ox_1x_2x_3$ .

Начальным условием для (1) должно быть распределение температуры в начальный момент времени  $\tau = 0$

$$T(M, 0) = T^0(M), \quad M \in V. \quad (2)$$

Граничные условия для (1) имеют вид

$$\lambda_{ij}^{(T)}(N, T) \frac{\partial T(N, \tau)}{\partial x_j} n_i(N) = \alpha(N, \tau) (T_c(N, \tau) - T(N, \tau)), \quad N \in S, \quad (3)$$

где  $n_i$  – направляющие косинусы единичного вектора внешней нормали к поверхности  $S$  в ее точке  $N$ ;  $\alpha$  и  $T_c$  – заданные зависимости коэффициента теплообмена

и температуры окружающей среды соответственно. В случаях, когда на участках поверхности  $S_T \subseteq S$  теплообмен с окружающей средой весьма интенсивен и можно считать, что  $\alpha \rightarrow \infty$ , то используют граничные условия первого рода:

$$T(N, \tau) = T_c(N, \tau), \quad N \in S_T. \tag{4}$$

В случаях, когда на участках поверхности  $S_q \subseteq S$  выполняется  $T_c(N, \tau) \gg T(N, \tau)$ , то условия (3) переходят в граничные условия второго рода:

$$\lambda_{ij}^{(T)}(N, T) \frac{\partial T(N, \tau)}{\partial x_j} n_i(N) = \tilde{q}(N, \tau), \quad N \in S_q, \tag{5}$$

где  $\tilde{q}(N, T) \approx \alpha(N, \tau)T_c(N, \tau)$  – заданная зависимость плотности теплового потока, подводимого к поверхности. Граничными условиями третьего рода является общий случай в виде выражения (3).

Для изотропного однородного материала тела теплопроводность  $\lambda_{ij}^{(T)}(M, T)$  следует заменить на  $\lambda^{(T)}(T)$ .

Интенсивность внутренних источников тепла при циклическом нагружении в дифференциальном уравнении теплопроводности для одномерного случая может быть представлена выражениями [7]:

$$vq(x, \sigma_a, T, \tau) = \begin{cases} vD(\sigma_a, T), \\ vK_\phi \Delta \varepsilon(\sigma_a, T) \sigma_a(x, \tau) \\ v\sigma_a^2(x, \tau) \psi(\sigma_a, T) / (2E^*(T)), \\ v\sigma_a^2(x, \tau) \delta(\sigma_a, T) / (E^*(T)), \end{cases} \tag{6}$$

где  $v$  – частота нагружения;  $\sigma_a(x, \tau)$  – амплитуда напряжений;  $\psi(\sigma_a, T)$  – относительное рассеяние энергии, равное отношению площади петли гистерезиса  $D(\sigma_a, T)$  к амплитудному значению потенциальной энергии упругой системы;  $T$  – температура;  $E^*(T)$  – секущий (приведенный) модуль упругости, равной модулю Юнга  $E$  при упругих деформациях;  $\delta(\sigma_a, T)$  – логарифмический декремент колебаний;  $\Delta \varepsilon(\sigma_a, T)$ ,  $K_\phi$  – ширина и коэффициент формы петли гистерезиса.

Таким образом, для получения достоверных результатов расчета температурного поля элементов конструкций необходимым является наличие экспериментальных данных о рассеянии энергии в единице объема материала.

Для определения напряжений в общем случае предполагается, что исследуемое тело находится в неоднородном и нестационарном температурном поле  $T(x_i, \tau)$ . Согласно гипотезе Неймана полная линейная деформация  $\varepsilon_{ii}$  складывается из деформаций от силовой нагрузки и температурного расширения

$$\varepsilon_{ii} = \varepsilon'_{ii} + \varepsilon''_{ii}, \tag{7}$$

где  $\varepsilon''_{ii} = \alpha T$ ;  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения материала. Температурные добавки для сдвиговых деформаций равны нулю. Поэтому закон Гука с учетом температуры имеет вид

$$\sigma_{ij} = 2G \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu\theta}{1-2\nu} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \delta_{ij} \right), \tag{8}$$

где  $u_n = u_i n_i$ ;  $\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$ ;  $\sigma_{ii} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i$ .

Тепловое взаимодействие описывается условиями неидеального теплового контакта:

$$\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i = -\alpha_p (T - T_p), \quad x \in \Gamma_p, \quad (6)$$

где  $\alpha_p$  – коэффициент контактного теплообмена,  $T_p$  – температура поверхности штампа. Значение коэффициента контактного теплообмена  $\alpha_p$  зависит от большого числа факторов [8], так как теплота между соприкасающимися поверхностями в общем случае может передаваться теплопроводностью через места фактического контакта выступающих неровностей, теплопроводностью и конвекцией через среду, заполняющую свободное пространство между поверхностями, и излучением.

В настоящей работе рассматривается случай, когда  $\alpha_p$  является функцией контактного давления  $\sigma_n$  и фактического зазора  $\psi(x) = \Phi(x) - u_n(x)$  между телом и штампом

$$\alpha_p(\sigma_n, \psi) = \begin{cases} f_1(\sigma_n), & \sigma_n \leq 0, \psi = 0; \\ f_2(\psi), & \sigma_n = 0, \psi \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

Относительно функций  $f_1(\sigma_n)$  и  $f_2(\psi)$  предполагается, что они являются невозрастающими функциями, причем  $f_1(0) = f_2(0)$ . Вследствие такого выбора коэффициента контактного теплообмена граничное условие (6) связывает напряженно-деформированное и температурное состояние и рассматриваемая задача является связанной контактной задачей термоупругости.

На оставшейся части поверхности  $\Gamma \setminus \Gamma_p$  заданы граничные условия классических типов [7]:

$$u_i(x) = g_i(x), \quad x \in \Gamma_u; \quad \sigma_{ij}(x) n_j(x) = P_i(x), \quad x \in \Gamma_\sigma; \quad (8)$$

$$\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_p; \quad \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = 0;$$

$$T(x) = \phi_1(x), \quad x \in \Gamma_t; \quad \lambda_{ij} \frac{\partial T(x)}{\partial x_j} n_i(x) = \phi_2(x), \quad x \in \Gamma_q; \quad (9)$$

$$\lambda_{ij} \frac{\partial T(x)}{\partial x_j} n_i(x) = \alpha(T_\alpha - T), \quad x \in \Gamma_\alpha; \quad (10)$$

$$\Gamma_t \cup \Gamma_q \cup \Gamma_\alpha = \Gamma \setminus \Gamma_p; \quad \Gamma_t \cap \Gamma_q = 0; \quad \Gamma_t \cap \Gamma_\alpha = 0; \quad \Gamma_q \cap \Gamma_\alpha = 0,$$

где  $\bar{g}(x)$  – перемещения на  $\Gamma_u$ ,  $\bar{P}(x)$  – поверхностные усилия на  $\Gamma_\sigma$ ,  $\phi_1(x)$  – температура на  $\Gamma_t$ ,  $\phi_2(x)$  – тепловой поток на  $\Gamma_q$ ,  $T_\alpha$  – температура внешней среды на  $\Gamma_\alpha$ ,  $\alpha$  – коэффициент конвективного теплообмена на  $\Gamma_\alpha$ .

Таким образом, задача состоит в определении функций  $u_i(x)$ ,  $\varepsilon_{ij}(x)$ ,  $\sigma_{ij}(x)$ ,  $T(x)$ , удовлетворяющих в области  $\Omega$  системе уравнений (1) – (4) с граничными условиями (5) – (6), (8) – (10). Необходимо также определить фактические площадки соприкосновения тел.



**Вариационная формулировка задачи.** Введем пространства С.Л. Соболева

$H_u(\Omega) = [W_2^1(\Omega)]^3$  вектор-функций  $\vec{v}(x) = (\vec{v}_1(x), \vec{v}_2(x), \vec{v}_3(x))$  и

$H_T(\Omega) = W_2^1(\Omega)$  функций  $\tilde{T}(x)$ , определенных в области  $\Omega$  и суммируемых с квадратом в  $\Omega$  вместе с первыми частными производными. Выделим множество кинематически допустимых перемещений

$$V_u = \left\{ \vec{v}(x) \in H_u(\Omega) : \vec{v}(x) = \vec{g}(x), x \in \Gamma_u; v_n(x) \leq \Phi(x), x \in \Gamma_p \right\}$$

и множество допустимых температур

$$T_T = \left\{ \tilde{T}(x) \in H_T(\Omega) : \tilde{T} = \phi_1(x), x \in \Gamma_t \right\}.$$

Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{kl}(\vec{v}) d\Omega; \quad L(\vec{v}) = \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} P_i v_i d\Gamma;$$

$$M(\tilde{T}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ij} \tilde{T}) v_i d\Omega; \quad b(\tilde{T}, \theta) = \int_{\Omega} \lambda_{ij} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\Omega;$$

$$N(\tilde{T}) = \int_{\Omega} Q \tilde{T} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \phi_2 \tilde{T} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\alpha}} \alpha T_{\alpha} \tilde{T} d\Gamma; \quad K(\tilde{T}, \theta) = \int_{\Gamma_{\alpha}} \alpha \tilde{T} \theta d\Gamma.$$

Для законности проводимых ниже соотношений будем предполагать, что

$$a_{ijkl} \in L_{\infty}(\Omega); \quad \vec{g} \in [H^{1/2}(\Gamma_u)]^3; \quad \vec{P} \in [H^{-1/2}(\Gamma_{\sigma})]^3; \quad \vec{F} \in [L_2(\Omega)]^3;$$

$$c_{ij} \in L_{\infty}(\Omega); \quad \lambda_{ij} \in L_{\infty}(\Omega); \quad \phi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_t); \quad \phi_2 \in H^{-1/2}(\Gamma_q); \quad Q \in L_2(\Omega);$$

$$\alpha_p \in L_2(\Gamma_p); \quad \alpha \in L_2(\Gamma_{\alpha}); \quad T_{\alpha} \in L_2(\Gamma_{\alpha}); \quad \Phi \in H^{1/2}(\Gamma_p).$$

Пусть  $(u, T)$  – решение рассматриваемой задачи в дифференциальной постановке (1) – (4). Тогда, используя [2; 6], можно показать, что справедливы следующие утверждения:

**Предложение 1.** Решение задачи в дифференциальной постановке удовлетворяет системе, состоящей из вариационного неравенства

$$a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) \geq L(\vec{v} - \vec{u}) - M(T - T_0, \vec{v} - \vec{u}), \quad \forall \vec{v}, \vec{u} \in V_u, \quad (11)$$

и вариационного уравнения

$$b(T, \hat{T} - T) + K(T, \tilde{T} - T) = N(\tilde{T} - T) - \int_{\Gamma_p} \alpha_p (T - T_p)(\tilde{T} - T) d\Gamma, \quad \forall \tilde{T}, T \in V_T. \quad (12)$$

**Предложение 2.** Решение системы (11) – (12), если оно существует и обладает вторыми производными (хотя бы обобщенными), удовлетворяет всем уравнениям и условиям задачи в дифференциальной постановке (1) – (4), (5) – (6), (8) – (10).

**Вычислительный алгоритм.** При постановке задачи использовались несвязанные уравнения термоупругости (1) – (4), однако рассматриваемая задача является связанной контактной задачей термоупругости, поскольку согласно (7) коэффициент контактного теплообмена зависит от контактного давления и фактического зазора между телом и штампом. Для решения задачи используется итерационный алгоритм, на каждом шаге которого решается несвязанная система, состоящая из вариационного уравнения



$$\begin{cases} A_0 \lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = B_0 \alpha_0^*(T_1) [f_0(\tau) - D_0 T_1(x, \tau)] \Big|_{x=0_1}, \\ A_1 \lambda_M(T_M) \frac{\partial T_M(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=l_M} = B_1 \alpha_1^*(T_M) [f_1(\tau) - D_1 T_M(x, \tau)] \Big|_{x=l_M}, \end{cases} \quad (19)$$

где  $T_m(x, \tau)$  – температура  $m$ -ой гладкой части многоступенчатого стержня, зависящая от координаты  $x$  и времени  $\tau$ ;  $T_{cm}$  – температура среды, окружающей  $m$ -ую часть стержня;  $c_m(T_m)$ ,  $\lambda_m(T_m)$  и  $\rho_m(T_m)$  – коэффициенты удельной теплоемкости, теплопроводности и плотность материала  $m$ -ой части стержня;  $\alpha_m(T_m)$ ,  $\alpha_s^*(T_m)$  – коэффициенты теплоотдачи с боковой поверхности и торцов внешних (граничных) частей стержня ( $s=0$  или  $1$ );  $A_s$ ,  $B_s$ ,  $D_s$  ( $s=0$  или  $1$ ) – коэффициенты, принимаемые значения  $\pm 1$  или  $0$ . В зависимости от сочетания значений этих коэффициентов на внешних торцах системы стержня можно задавать граничные условия I, II или III рода, а граничные функции  $f_s(\tau)$  при этом принимают значения температуры поверхности стержня, теплового потока или температуры окружающей среды;  $h_m$  – отношение площади  $F_m$  поперечного сечения  $m$ -ой части стержня к его периметру. На стыках стержней имеют место условия неидеального теплового контакта

$$\begin{cases} F_m \lambda_m(T_m) \frac{\partial T_m(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=l_m} = \frac{F_{m+1}}{R_{m,m+1}^*} [T_{m+1}(O_{m+1}, \tau) - T_m(l_m, \tau)] - \\ - \alpha_{m,m+1}(T_m) [T_m(l_m, \tau) - T_{m,c}] (|F_m - F_{m+1}|), \\ F_m \lambda_m(T_m) \frac{\partial T_m(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=l_m} = F_{m+1} \lambda_{m+1}(T_{m+1}) \frac{\partial T_{m+1}(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=O_{m+1}} - \\ - \alpha_{m,m+1}(T_m) [T_m(l_m, \tau) - T_{m,c}] (|F_m - F_{m+1}|), \end{cases} \quad (20)$$

где  $R_{m,m+1}^*$  – контактное термическое сопротивление на стыке  $m$  и  $m+1$ -ой частей стержня;  $\alpha_{m,m+1}(T_m)$  – коэффициент теплоотдачи со свободных торцов  $m$  и  $m+1$ -ой части стержня. Необходимо отметить, что при  $M=1$  задача (17) – (20) соответствует математической постановке нелинейной задачи теплопроводности для гладкого стержня, при  $M=2$  – для одноступенчатого и т. д.

Решение задачи (17)–(20) возможно приближенными численными или аналитическими методами. В [7–12] для решения поставленной задачи применяется метод последовательных интервалов, основанный на интегральном преобразовании Лапласа. Использование метода последовательных интервалов позволяет свести решение нелинейной задачи нестационарной теплопроводности к совокупности решений линейных задач с различными начальными и граничными условиями для каждого интервала времени:

$$T_j(x, \tau_j) \Big|_{\tau_j=0_j} = T_{j-1}(x, \Delta \tau_{j-1}), \quad (21)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T_j(x, 0_j)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \\ T_j(x, \tau_j) \Big|_{x=l} = f_j(\tau) \end{cases}, \quad (22)$$

где функция  $f_j(\tau)$  может иметь вид  $f_j(\tau) = T_{j-1}(1, \Delta\tau_{j-1}) + k_j\tau$ , что схематически показано на рис. 1.

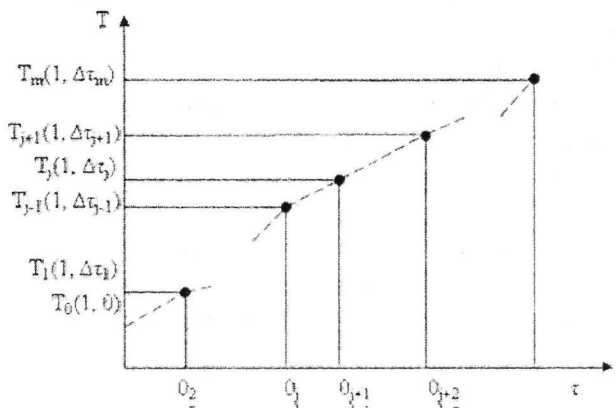


Рис. 1. Схема аппроксимации граничной функции

Операционный метод позволяет получить асимптотическое решение, удобное для малых значений критерия Фурье в интервале  $\Delta Fo$  [7; 8–10].

Разогрев стержня при циклическом деформировании определяется при выполнении следующего алгоритма:

Полное время нагружения разбивается на конечные временные интервалы длительностью  $\Delta\tau_j: [0, \tau_j]$ , в каждом из которых:

1. Решается задача о вынужденных колебаниях. При этом рассматриваются колебания в резонансной зоне, предполагается выполнение правила Видлера, то есть считается, что рассеяние механической энергии не влияет на форму колебаний системы [5]. Определяются формы колебаний, деформации и напряжения по длине стержня для любого момента времени  $\tau \in [0, \tau_j]$ . Проверяется условие для амплитудных напряжений в опасном сечении  $\sigma_{0j}^a(x_0, \tau) < \sigma_j^T$ . Определяется количество циклов нагружения  $N_j$ . Значения механических характеристик соответствуют значениям при температуре в начале данного интервала времени. Разбиение на интервалы по координате и по времени может быть неравномерным.

2. Определяется распределение интенсивности внутренних источников тепла по длине стержня по известным зависимостям, например  $q(x, \sigma_a, T, \tau) = \sigma_a^2 \psi(\sigma_a, T) / (2E(T))$ .

3. Решается задача теплопроводности для определения температуры  $T_j(x, \Delta\tau_j)$  (для составного стержня для каждого участка длиной  $\Delta l_i$  определяется функция  $T_j^i(x, \Delta\tau_j)$ ). Проверяется условие для температур  $|T_j(x, \Delta\tau_j) - T_{j-1}(x, \Delta\tau_{j-1})| \leq \varepsilon$ . Теплофизические  $(a_{i+1}, \lambda_{j+1})$  и механические  $(E_{i+1}, \sigma_{j+1}^T)$  характеристики материала принимают значения, соответствующие среднеинтегральному значению температуры на данном интервале времени. Тем-

пература  $T_j(x, \Delta\tau_j)$  являється початковим розподілом температури для наступного інтервала часу.

4. Для наступного інтервала часу повторюються попередні кроки алгоритма.

При невыполненні умови в п. 3, змінюється тривалість інтервала часу  $\Delta\tau_j$  в відповідності з темпом зростання температури.

Усталостні випробування зразків з аустенітної хромонікелевої сталі були проведені на установці фірми «Шенк» [4]. Діапазон амплітуд напружень при випробуваннях 70–190 МПа. Для дослідження розігріву і розподілу температури по довжині зразка використовувалися рідкі кристали, наносимі тонким шаром на верхню поверхню його робочої частини. Температура в зразку визначалася по зміні кольору плівки рідких кристалів. В якості розрахункової моделі зразка взят ступінчастий стержень прямокутного поперечного перерізу. Утолщені частини служать для передачі згинаючого моменту. Згинальні напруження в цих частинах стержня прийняті рівними нулю. В розрахунках використовуються температурні залежності теплофізических і механічних властивостей матеріалу, прийняті з робіт [3–7].

На рис. 2 зображені залежності температури в точці, віддаленій від місця стику зразка і концентратора на відстані 16 мм при різних амплітудах коливань нижнього кінця концентратора  $A_0$ . Тільки при  $A_0 = 3,75$  мкм розрахункова зміна температури відбувається інтенсивніше, ніж це було виміряно при випробуваннях. З рис. 2 видно, що в залежності від режиму навантаження (значення  $A_0$ ) температура в досліджуваній точці зразка може встановлюватися або підвищуватися з наростаючою швидкістю, що підтверджує можливість використання розрахункового методу для оцінки розігріву циклічно навантаженого елемента.

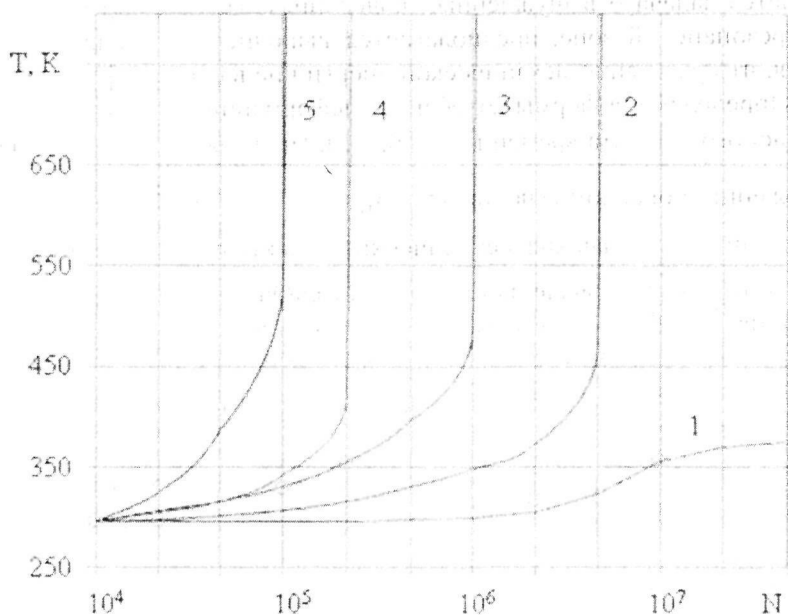


Рис. 2. Залежність температури  $T$  в точці робочої частини зразка від кількості циклів  $N$  при різних значеннях  $A_0$ :  
 1 –  $A_0 = 2,25$  мкм; 2 –  $A_0 = 3,75$  мкм; 3 –  $A_0 = 5,25$  мкм;  
 4 –  $A_0 = 5,85$  мкм; 5 –  $A_0 = 6,45$  мкм; о – експериментальні дані

На рис. 3, 4 представлено температурное поле стержня при изменяющихся параметрах циклического нагружения: количества циклов  $N$  и амплитуды колебаний  $A_0$ .

На рис.3 изображены распределение температуры по длине стержня в различные моменты времени при значении амплитуды напряжений 160 МПа. Точками на рис.5 показаны результаты измерения температуры в образце соответствующие  $N=750$  циклам нагружения. По рис.3 можно оценить характер изменения температуры во времени (для точки  $x=0$ ): в начале нагружения (приблизительно до  $10^3$  циклов) происходит незначительное изменение температуры, затем скорость роста температуры увеличивается и после  $10^4$  циклов нагружения скорость роста температуры резко снижается.

На рис.4 в виде поверхности приведены результаты расчетных исследований и точки показаны экспериментальные данные изменения температуры во времени по рабочей длине образца. Начало координат взято в месте стыка образца и концентратора. Циклическое нагружение соответствует амплитуде колебаний нижнего конца концентратора  $A_0 = 5,25$  мкм. Как видно из рис. 4, в каждой регистрируемой точке рабочей части образца имеет место повышение температуры с нарастающей скоростью. Результаты расчетных и экспериментальных исследований достаточно близки друг к другу. Распределение температуры по длине образца вблизи его центра имеет максимум, который несколько смещается в процессе нагружения. Существенное повышение температуры образца происходит в его центральной части.

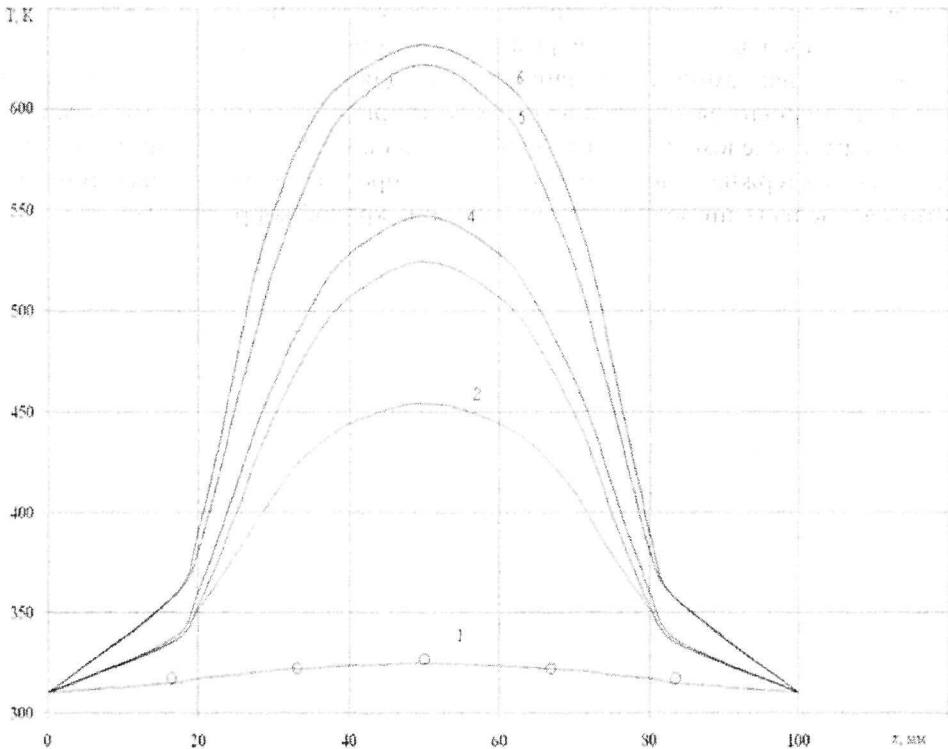


Рис. 3. Распределение температуры  $T$  по рабочей длине образца в зависимости от количества циклов  $N$ :

1 –  $N=750$ ; 2 –  $N=6 \cdot 10^3$ ; 3 –  $N=8 \cdot 10^3$ ; 4 –  $N=9 \cdot 10^3$ ; 5 –  $N=2 \cdot 10^4$ ; 6 –  $N=2 \cdot 10^6$ ;  
о – экспериментальные данные

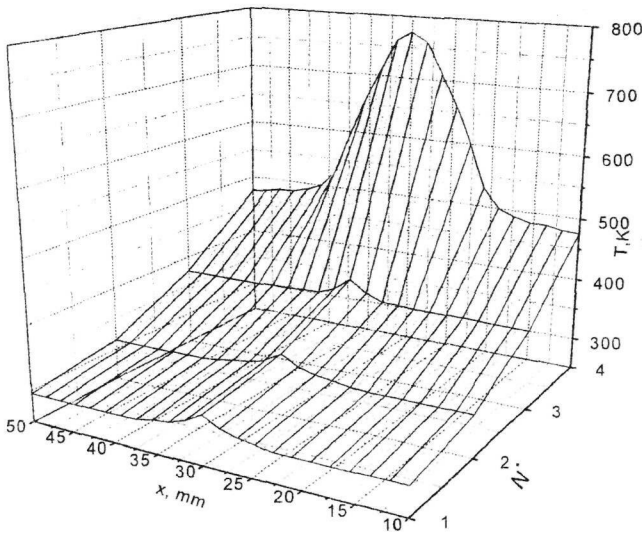


Рис. 4. Распределение температуры  $T$  по рабочей длине образца в зависимости от количества циклов  $N^*$  ( $1=10^4$ ;  $2=10^5$ ;  $3=10^6$ ;  $4=10^7$ ) при  $A_0 = 5,25$  мкм

На рис. 5 приведены зависимости температуры в центре стержня от амплитуды напряжений  $\sigma_a$  в различные моменты времени. Из рис. 5 следует, что с увеличением числа циклов нагружения резкий рост температуры происходит при более низких значениях амплитуды напряжений. Для определения корреляции между максимумом кривизны зависимости температуры от амплитуды напряжений и ограниченным пределом выносливости необходимо иметь зависимости изменения температуры стержня в достаточно широких пределах (чтобы максимум кривизны достигался не на границе области определения кривой корреляции).

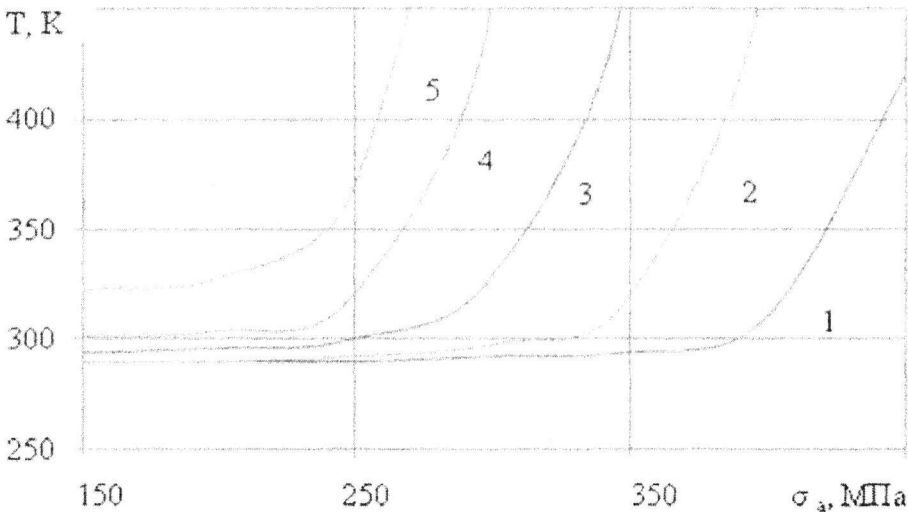


Рис. 5. Зависимость температуры  $T$  в центре образца от амплитуды напряжения  $\sigma_a$  при разных значениях количества циклов  $N$ :  
 1 –  $N=10^3$ ; 2 –  $N=10^4$ ; 3 –  $N=10^5$ ; 4 –  $N=10^6$ ; 5 –  $N=10^7$

**Выводы.** Построена математическая модель процесса диссипативного разогрева элементов конструкций (простой и составной формы) при циклическом нагружении с разными условиями теплообмена с окружающей средой, позволяющая

учеть зависимость теплофизических и механических характеристик материала и источника тепла от температуры. Расширена область применения метода последовательных интегралов для решения нелинейной задачи нестационарной теплопроводности с учетом зависимости от температуры теплофизических, механических характеристик материала и источника тепла. Разработанная математическая модель дает возможность исследования и прогнозирования влияния параметров циклического нагружения, вибропоглощающих свойств конструкционного материала, условий теплообмена с окружающей средой и на стыках составных частей на распределение температурного поля конкретных элементов конструкций, выбора рациональных эксплуатационных и технологических режимов работы.

### Бibliографические ссылки

1. Ботвина Л. Р. Разрушение: кинетика, механизмы, общие закономерности / Л.Р. Ботвина – М., 2008. – 334 с.
2. Горшков А. Г. Теория упругости и пластичности / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский – М., 2002. – 416 с.
3. Писаренко Г. С. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов : справочник. / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев – К., 1971. – 375 с.
4. Писаренко Г. С. Протекание пластических деформаций в сталях 12Х18Н10Т при циклическом симметричном изгибе образцов различной длины / Г.С. Писаренко, В. А. Леоненко, Н. Д. Бега // Пробл. прочности, 1983. – №8. – С. 20–23.
5. Абакумов В. Г. О проектировании акустических концентраторов с учетом внутреннего рассеяния энергии / В. Г. Абакумов, К.А. Трапезов // Акуст. вісник, 2007. – Т.10, № 1. – С. 3–16.
6. Матвеев В. В. Демпфирование колебаний деформируемых тел / В. В. Матвеев – К., 1985. – 264 с.
7. Клим В. Ю. Математическое моделирование температурных полей элементов конструкций вследствие их диссипативного разогрева при циклическом деформировании / В. Ю. Клим // Машинознавство. – Львів, 2008. – С. 54–61.
8. Клим В. Ю. Математическая модель разогрева элементов конструкций при циклическом деформировании / В. Ю. Клим : зб. наук. праць «Динаміка та міцність машин, будівель, споруд» - Полтава, 2009. – С. 43–50.
9. Веселовский В. Б. Температурные поля элементов конструкций, разогревающихся вследствие высокочастотного нагружения / В. Б. Веселовский, В. Ю. Клим // Вісник Донецького університету, сер. А: Природничі науки, 2003. – Вип. 1.– С.104–107.
10. Веселовский В. Б. Разогрев ограниченного стержня при высокочастотном нагружении / В. Б. Веселовский, В. Ю. Клим // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – Вип. 6 – Т. 2.– 2002. – С.27–34.
11. Веселовский В. Б. Разогрев составного стержня при высокочастотном нагружении / В. Б. Веселовский, А. В. Сяев, В. Ю. Клим // Сб. науч. трудов Национальной горной академии Украины. – Д., 2002. – №13 – Т.2. – С. 53–59.
12. Веселовский В. Б. Решение задачи о колебаниях при диссипативном разогреве элементов конструкций / В. Б. Веселовский, В. Ю. Клим // Диференціальні рівняння та їх застосування : зб. наук. праць. – Д., 2008. – С.56–65.

Надійшла до редколегії 08.12.09

где  $u_n = u_i n_i$ ;  $\sigma_n = \sigma_{ij} n_i n_j$ ;  $\sigma_{ii} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i$ .

Тепловое взаимодействие описывается условиями неидеального теплового контакта:

$$\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i = -\alpha_p (T - T_p), \quad x \in \Gamma_p, \tag{6}$$

где  $\alpha_p$  – коэффициент контактного теплообмена,  $T_p$  – температура поверхности штампа. Значение коэффициента контактного теплообмена  $\alpha_p$  зависит от большего числа факторов [8], так как теплота между соприкасающимися поверхностями в общем случае может передаваться теплопроводностью через места фактического контакта выступающих неровностей, теплопроводностью и конвекцией через среду, заполняющую свободное пространство между поверхностями, и излучением.

В настоящей работе рассматривается случай, когда  $\alpha_p$  является функцией контактного давления  $\sigma_n$  и фактического зазора  $\psi(x) = \Phi(x) - u_n(x)$  между телом и штампом

$$\alpha_p(\sigma_n, \psi) = \begin{cases} f_1(\sigma_n), & \sigma_n \leq 0, \psi = 0; \\ f_2(\psi), & \sigma_n = 0, \psi \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Относительно функций  $f_1(\sigma_n)$  и  $f_2(\psi)$  предполагается, что они являются невозрастающими функциями, причем  $f_1(0) = f_2(0)$ . Вследствие такого выбора коэффициента контактного теплообмена граничное условие (6) связывает напряженно-деформированное и температурное состояние и рассматриваемая задача является связанной контактной задачей термоупругости.

На оставшейся части поверхности  $\Gamma \setminus \Gamma_p$  заданы граничные условия классических типов [7]:

$$u_i(x) = g_i(x), \quad x \in \Gamma_u; \quad \sigma_{ij}(x) n_j(x) = P_i(x), \quad x \in \Gamma_\sigma; \tag{8}$$

$$\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma \setminus \Gamma_p; \quad \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset;$$

$$T(x) = \phi_1(x), \quad x \in \Gamma_t; \quad \lambda_{ij} \frac{\partial T(x)}{\partial x_j} n_i(x) = \phi_2(x), \quad x \in \Gamma_q; \tag{9}$$

$$\lambda_{ij} \frac{\partial T(x)}{\partial x_j} n_i(x) = \alpha(T_\alpha - T), \quad x \in \Gamma_\alpha; \tag{10}$$

$$\Gamma_t \cup \Gamma_q \cup \Gamma_\alpha = \Gamma \setminus \Gamma_p; \quad \Gamma_t \cap \Gamma_q = \emptyset; \quad \Gamma_t \cap \Gamma_\alpha = \emptyset; \quad \Gamma_q \cap \Gamma_\alpha = \emptyset,$$

где  $\bar{g}(x)$  – перемещения на  $\Gamma_u$ ,  $\bar{P}(x)$  – поверхностные усилия на  $\Gamma_\sigma$ ,  $\phi_1(x)$  – температура на  $\Gamma_t$ ,  $\phi_2(x)$  – тепловой поток на  $\Gamma_q$ ,  $T_\alpha$  – температура внешней среды на  $\Gamma_\alpha$ ,  $\alpha$  – коэффициент конвективного теплообмена на  $\Gamma_\alpha$ .

Таким образом, задача состоит в определении функций  $u_i(x)$ ,  $\varepsilon_{ij}(x)$ ,  $\sigma_{ij}(x)$ ,  $T(x)$ , удовлетворяющих в области  $\Omega$  системе уравнений (1) – (4) с граничными условиями (5) – (6), (8) – (10). Необходимо также определить фактические площадки соприкосновения тел.

**Вариационная формулировка задачи.** Введем пространства С.Л. Соболева  $H_u(\Omega) = [W_2^1(\Omega)]^3$  вектор-функций  $\vec{v}(x) = (\vec{v}_1(x), \vec{v}_2(x), \vec{v}_3(x))$  и  $H_T(\Omega) = W_2^1(\Omega)$  функций  $\tilde{T}(x)$ , определенных в области  $\Omega$  и суммируемых с квадратом в  $\Omega$  вместе с первыми частными производными. Выделим множество кинематически допустимых перемещений

$$V_u = \left\{ \vec{v}(x) \in H_u(\Omega) : \vec{v}(x) = \vec{g}(x), \quad x \in \Gamma_u; \quad v_n(x) \leq \Phi(x), \quad x \in \Gamma_p \right\}$$

и множество допустимых температур

$$T_T = \left\{ \tilde{T}(x) \in H_T(\Omega) : \tilde{T} = \phi_1(x), \quad x \in \Gamma_t \right\}.$$

Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} a_{ijkl} \varepsilon_{ij}(\vec{u}) \varepsilon_{kl}(\vec{v}) d\Omega; \quad L(\vec{v}) = \int_{\Omega} F_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} P_i v_i d\Gamma;$$

$$M(\tilde{T}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (c_{ij} \tilde{T}) v_i d\Omega; \quad b(\tilde{T}, \theta) = \int_{\Omega} \lambda_{ij} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} d\Omega;$$

$$N(\tilde{T}) = \int_{\Omega} Q \tilde{T} d\Omega + \int_{\Gamma_q} \phi_2 \tilde{T} d\Gamma + \int_{\Gamma_{\alpha}} \alpha T_{\alpha} \tilde{T} d\Gamma; \quad K(\tilde{T}, \theta) = \int_{\Gamma_{\alpha}} \alpha \tilde{T} \theta d\Gamma.$$

Для законности проводимых ниже соотношений будем предполагать, что

$$a_{ijkl} \in L_{\infty}(\Omega); \quad \vec{g} \in [H^{1/2}(\Gamma_u)]^3; \quad \vec{P} \in [H^{-1/2}(\Gamma_{\sigma})]^3; \quad \vec{F} \in [L_2(\Omega)]^3; \\ c_{ij} \in L_{\infty}(\Omega); \quad \lambda_{ij} \in L_{\infty}(\Omega); \quad \phi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_t); \quad \phi_2 \in H^{-1/2}(\Gamma_q); \quad Q \in L_2(\Omega); \\ \alpha_p \in L_2(\Gamma_p); \quad \alpha \in L_2(\Gamma_{\alpha}); \quad T_{\alpha} \in L_2(\Gamma_{\alpha}); \quad \Phi \in H^{1/2}(\Gamma_p).$$

Пусть  $(u, T)$  – решение рассматриваемой задачи в дифференциальной постановке (1) – (4). Тогда, используя [2; 6], можно показать, что справедливы следующие утверждения:

**Предложение 1.** Решение задачи в дифференциальной постановке удовлетворяет системе, состоящей из вариационного неравенства

$$a(\vec{u}, \vec{v} - \vec{u}) \geq L(\vec{v} - \vec{u}) - M(T - T_0, \vec{v} - \vec{u}), \quad \forall \vec{v}, \vec{u} \in V_u, \quad (11)$$

и вариационного уравнения

$$b(T, \hat{T} - T) + K(T, \tilde{T} - T) = N(\tilde{T} - T) - \int_{\Gamma_p} \alpha_p (T - T_p) (\tilde{T} - T) d\Gamma, \quad \forall \tilde{T}, T \in V_T. \quad (12)$$

**Предложение 2.** Решение системы (11) – (12), если оно существует и обладает вторыми производными (хотя бы обобщенными), удовлетворяет всем уравнениям и условиям задачи в дифференциальной постановке (1) – (4), (5) – (6), (8) – (10).

**Вычислительный алгоритм.** При постановке задачи использовались несвязанные уравнения термоупругости (1) – (4), однако рассматриваемая задача является связанной контактной задачей термоупругости, поскольку согласно (7) коэффициент контактного теплообмена зависит от контактного давления и фактического зазора между телом и штампом. Для решения задачи используется итерационный алгоритм, на каждом шаге которого решается несвязанная система, состоящая из вариационного уравнения



$$b(T_k, \tilde{T} - T_k) + K(T_k, \tilde{T} - T_k) = N(\tilde{T} - T_k) - \int_{\Gamma_p} \alpha_p(\sigma_{k-1}, \psi_{k-1})(T_k - T_p)(\tilde{T} - T_k) d\Gamma, \quad \forall \tilde{T}, T_k \in V_T \quad (13)$$

и вариационного неравенства

$$a(\bar{u}_k, \bar{v} - \bar{u}_k) \geq L(\bar{v} - \bar{u}_k) - M(T_k - T_0, \bar{v} - \bar{u}_k), \quad \forall \bar{v}, \bar{u}_k \in V_u. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что если функциональная последовательность  $\{\bar{u}_k, T_k\}$  сходится, то предел этой последовательности  $(\bar{u}, T)$  будет решением вариационной задачи (11) – (12). В качестве начального приближения можно использовать естественное состояние, т. е.  $\alpha_p[0, \Phi \cdot H(\Phi)]$ , где  $H(\Phi)$  – функция Хевисайда.

При построении алгоритмов численного решения вместо вариационных задач, как правило, используют эквивалентные им экстремальные задачи [1].

**Предложение 3.** Вариационное уравнение (13) эквивалентно экстремальной задаче

$$\inf_{t \in I_T} \left\{ J_T(t) = \frac{1}{2} b(\tilde{T}, \tilde{T}) + \frac{1}{2} K(\tilde{T}, \tilde{T}) - N(\tilde{T}) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_p} \alpha_p(\sigma_{k-1}, \psi_{k-1})(\tilde{T} - T_p)^2 d\Gamma \right\}, \quad (17)$$

а вариационное неравенство (14) – экстремальной задаче

$$\inf_{\bar{v} \in V_u} \left\{ J_u(\bar{v}) = \frac{1}{2} a(\bar{v}, \bar{v}) - L(\bar{v}) - M(T_k - T_p, \bar{v}) \right\}. \quad (18)$$

Для дискретизации экстремальных задач применялся метод конечных элементов [3]. Использовались треугольные конечные элементы первого порядка. Для численного решения полученных в результате дискретизации задач квадратичного программирования применялся метод сопряженных градиентов с масштабированием матриц жесткости и теплопроводности для ускорения сходимости. Критерием сходимости итерационного процесса считалось установление значений контактных напряжений и зазоров.

**Численное решение задачи.** При проведении вычислительных экспериментов, в качестве модельной, рассматривалась задача о плоской деформации однородного изотропного упругого тела, занимающего прямоугольную область

$$\Omega = \{ (x_1, x_2) \in R^2 : 0 \leq x_1 \leq L_1, 0 \leq x_2 \leq L_2 \}$$

и контактирующего с жестким штампом по грани  $x_2 = L_2$ . Граничные условия на границе  $\Gamma$  принимались следующими:

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = \sigma_{12} = 0, \quad q = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, L_1; \\ u_2 = 0, \quad \sigma_{21} = 0, \quad T = 0^\circ\text{C} \quad \text{при } x_2 = 0. \end{aligned}$$

Для исключения смещений тела как жесткого целого дополнительно принималось условие

$$u_1 = 0, \quad \text{при } x_2 = L_1 / 2.$$

Форма и положение штампа описывались функцией

$$\Phi(x_1) = a(x_1 - L_1 / 2)^2 + b.$$

Значения физических и геометрических параметров при проведении расчетов принимались следующими: модуль Юнга  $E = 210$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , коэффициент линейного расширения  $\alpha_L = 10^{-5}$ , коэффициент теплопроводности  $\lambda = 0,47$  Вт/(м·К), размеры области  $L_1 = L_2 = L = 1$  м, параметры штампа  $a = -0,001L$ ,  $b = 0,005L$ .

Числовое значение коэффициента контактного теплообмена при неидеальном контакте определялось функцией

$$\alpha_p(\sigma_n, \psi) = \begin{cases} 3 \cdot 10^3 \left( 1 + \sigma_n^{0,6} / 10^4 \right), & \sigma_n \leq 0, \psi = 0; \\ 3 \cdot 10^3 \left( 1 - \psi / 10^{-4} \right) * H(\psi), & \sigma_n = 0, \psi \geq 0. \end{cases}$$

Дискретизация области  $\Omega$  производилась с помощью равномерной сетки треугольных конечных элементов первого порядка. Использовалась сетка 100 x 100 элементов.

На рис. 1 изображен график нормальных контактных напряжений на поверхности возможного контакта тела со штампом  $\Gamma_p$ . Кривая 1 соответствует напряжениям для нагретого до  $T_p = 20^\circ\text{C}$  штампа, кривая 2 – для ненагретого штампа с  $T_p = 0^\circ\text{C}$ .

На рис. 2 изображен график нормальных перемещений на поверхности возможного контакта тела со штампом  $\Gamma_p$ . Кривая 1 соответствует перемещениям для нагретого до  $T_p = 20^\circ\text{C}$  штампа, кривая 2 – для ненагретого штампа с  $T_p = 0^\circ\text{C}$ , кривая 3 соответствует положению штампа.

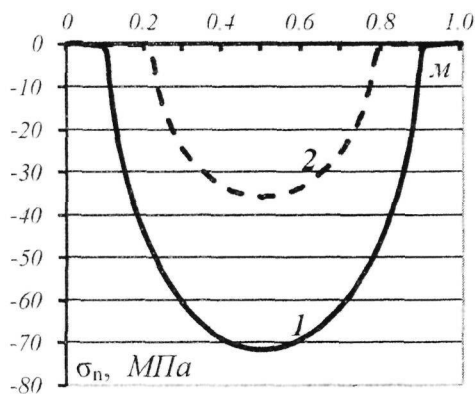


Рис. 1. Распределение напряжений

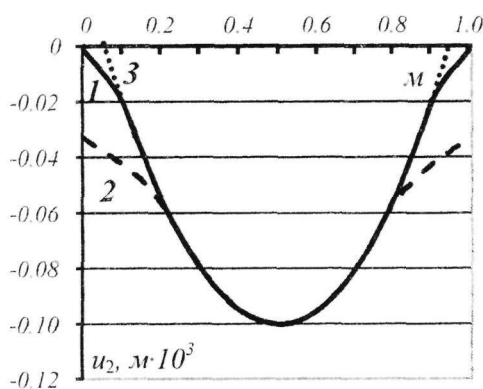


Рис. 2. Распределение перемещений

**Выводы.** При постановке задачи о контактом взаимодействии упругого тела с жестким нагретым выпуклым штампом использовались несвязанные уравнения термоупругости и условия неидеального теплового контакта. Рассматриваемая задача является связанной контактной задачей термоупругости, поскольку коэффициент контактного теплообмена зависит от контактного давления и фактического зазора между телом и штампом.

На основе вариационной формулировки задачи разработан итерационный алгоритм, на каждом шаге которого решаются несвязанные задачи теории упругости и

теплопроводности. Для дискретизации задач использован метод конечных элементов. Полученные численные результаты подтвердили вычислительную эффективность разработанного алгоритма.

### Библиографические ссылки

1. **Гловински Р.** Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольтер. – М., 1979. – 574 с.
2. **Дюво Г.** Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М., 1980. – 383 с.
3. **Зарубин В. С.** Инженерные методы решения задач теплопроводности / В. С. Зарубин. – М., 1983. – 328 с.
4. **Кравчук А. С.** К задаче Герца для линейно- и нелинейно-упругих тел конечных размеров / А. С. Кравчук // Прикл. математика и механика. – 1977. – Т.41.
5. **Механика контактных взаимодействий.** – М., 2001. – 672 с.
6. **Панагиотопулос П.** Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функционалы энергии / П. Панагиотопулос. – М., 1989. – 496 с.
7. **Подстригач А. С.** Обобщенная термомеханика / А. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – К., 1976. – 312 с.
8. **Шлыков Ю. П.** Контактный теплообмен / Ю. П. Шлыков, Е. А. Ганин. – М. –Л., 1963. – 247 с.

Надійшла до редколегії 22.02.10

## ЗМІСТ

<b>Ходанен Т.В., Лобода В.В.</b> Плоская задача для пьезоэлектрического/пьезомагнитного биматериала с электроизолированной магнитнопроницаемой межфазной трещиной	3
<b>Швайко Н.Ю.</b> Эффект Фейгена и его описание теорией пластичности, основанной на концепции скольжения	15
<b>Александров А.И.</b> Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для решения пространственных контактных задач о взаимодействии упругих тел при наличии трения	26
<b>Антоненко Н.М., Величко І.Г.</b> Узагальнення методу функцій податливості на випадок плоскої деформації багатопарової основи при наявності дотичних і нормальних пружних зв'язків між шарами	39
<b>Черняков Ю.А., Тесленко Д.К., Шнейдер В.П., Гончаренко А.В.</b> Устойчивость трехмерных упруго-вязкопластических тел	46
<b>Остапенко В.А.</b> Поле перемещений в стержне переменной длины, возмущаемом инерцией груза	52
<b>Рахманов С.Р.</b> Динамические явления в очаге деформации в процессе прошивки трубной заготовки на прошивном прессе	65
<b>Куземко В.А., Дедик М.О.</b> Разрушение пластины с трещиной нормального отрыва, подкрепленной ребрами жесткости	77
<b>Блюсс Б.А., Семененко Е.В., Криль С.И.</b> Математические модели процессов гидромеханизации	80
<b>Абрамовский Е.Р.</b> Аэрология объектов городской застройки в расчетах загрязнения воздушной среды	90
<b>Гоман О.Г., Давыдов В. И., Романовский Ю.К., Шипилов Ю.Т.</b> Определение скорости газа в трубопроводе при помощи ультразвуковых измерителей	97
<b>Перехрест В.І., Осипчук М.М.</b> Про структури планетарних вихорів і закономірності їх обертання	110
<b>Долгов А.С., Стеценко Н.В.</b> Кинетика поверхностного монослоя	118
<b>Елисеев В.И., Томасон И.Р.</b> Массообмен в электрохимической ячейке свинцового аккумулятора	126
<b>Елисеев В.И., Давидсон В.В.</b> Массообмен в электрохимической ячейке, находящейся в поле переменного напряжения	135
<b>Егоров Е.В., Лычагин Н.Н.</b> Фильтрационная модель распространения загрязняющих примесей в атмосфере городских лабиринтов	143
<b>Тарасов С.В., Яскевич Э.П., Редчиц Д.А., Костюков И.Ю.</b> Математическое моделирование поля течения вокруг одиночной лопасти Н-ротора Дарье	152
<b>Пилипенко А.А.</b> Численное моделирование автоколебаний скачка уплотнения на профиле НАСА 0012	165
<b>Кныш Л.И., Давыдов В.И.</b> Особенности расчёта поля скорости при течении вязкой несжимаемой жидкости в каналах полукруглой формы	174
<b>Клим В.Ю.</b> Математическая модель диссипативного разогрева и определение температурных полей тел при циклическом нагружении	181
<b>Бобылёв А.А. (мл.)</b> Задача о контактном взаимодействии упругого тела с выпуклым нагретым штампом	192