ISSN 9125 0912

ВІСНИК
засновання
1993
Дніпропетровський національний університет
90 років
1918–2008

ВІСНИК

Дніпропетровського університету

2008 Т.16 № 6/1

Серія

МАТЕМАТИКА

Випуск 13

ISSN 9125 0912

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІСНИК Дніпропетровського університету

Заснований 1993

Дніпропетровський національний університет

90 років 1918–2008

Науковий журнал

№ 6/1 Том 16 2008

Серія: МАТЕМАТИКА. Вип. 13

Дніпропетровськ
Видавництво
Дніпропетровського
національного університету

УДК 517

Друкується за рішенням вченої ради Дніпропетровського національного університету згідно з затвердженим планом видань 2008 р.

Изложены результаты исследований по вопросам теории приближений функций действительного переменного, алгебре, уравнениям математической физики, а также по их применению к решению задач.

Для научных сотрудников, а также аспирантов и студентов старших курсов.

Викладено результати досліджень з питань теорії наближень функцій дійсної змінної, алгебри, рівняниям математичної фізики, а також їхнього застосування до розв'язування задач.

Для наукових співробітників, а також аспірантів та студентів старших курсів.

Рецензенти:

акад. Академії наук ВШ України,
д-р фіз.-мат. наук, проф. М.П.Тіман,
д-р фіз.-мат. наук, проф. В.В. Лобода

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко[*,**], Т.В. Матвеева [*]

[*] *Днепропетровский национальный университет*

[**] *Институт прикладной математики и механики НАН Украины*

НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Доведено нову точну нерівність типу Колмогорова, що оцінює норму мішаної похідної дробового порядку типу Маршо функції n змінних через C-норму самої функції та її норми в Ліпшицевих просторах.

Пусть R^n – евклидово пространство точек $t=(t_1,t_2,...,t_n)$, $|t|=\sqrt{t_1^2+...+t_n^2}$, $R_+^n=\{t\in R^n : t_i\ge 0\ \forall i=1,2,...,n\}$. Представим R^n в виде $R^n=R^k\oplus R^{n-k}$. Точку t часто будем записывать в виде $t=(\underline{t},\bar{t})=\underline{t}+\bar{t}$, где $\underline{t}=(t_1,...,t_k,0,...,0)$, $\bar{t}=(0,...,0,t_{k+1},...,t_n)$. Через $C(R^n)$ обозначим пространство всех непрерывных ограниченных функций $x: R^n\to R$ с нормой

$$\|x\|_C=\sup\{|x(t)| : t\in R^n\}.$$

Пусть $x\in C(R^n)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2), \alpha_1,\alpha_2\in(0,1); \varepsilon=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n), \varepsilon_i=\pm, i=1,...,n.$ Для $t\in R^n$ положим $\varepsilon t=(\varepsilon_1 t_1,\varepsilon_2 t_2,...,\varepsilon_n t_n)$. Смешанную разность функции x в направлении подпространств R^k и R^{n-k} определим равенством

$$\Delta_t^{k,n-k}x(u)=x(u)-x(u+\underline{t})-x(u+\bar{t})+x(u+t).$$

Определим смешанную производную типа Маршо равенством

$$(D_\varepsilon^\alpha)x(u)=A_\alpha\int\limits_{R_+^n}\frac{\Delta_{-\varepsilon t}^{k,n-k}x(u)}{|\underline{t}|^{k+\alpha_1}|\bar{t}|^{n-k+\alpha_2}}dt,$$

где $A_\alpha=A_{\alpha_1}A_{\alpha_2}$, $\quad A_{\alpha_i}=\dfrac{\alpha_i}{\Gamma(1-\alpha_i)}, i=1,2.$

Различные определения дробных производных функций одной и многих переменных приведены в [1].

Для $x\in C(R^n)$ и $\beta_1,\beta_2\in(0,1)$ положим

$$\|x\|_{k,\beta_1}=\sup_{\underline{t}}\frac{\|x(\cdot+\underline{t})-x(\cdot)\|_C}{|\underline{t}|^{\beta_1}},\qquad \|x\|_{n-k,\beta_2}=\sup_{\bar{t}}\frac{\|x(\cdot+\bar{t})-x(\cdot)\|_C}{|\bar{t}|^{\beta_2}}.$$

Конечность введенных полунорм означает, что функция x удовлетворяет условию Липшица с показателем β_1 в направлении подпространства R^k и условию Липшица с показателем β_2 в направлении подпространства R^{n-k} соответственно.

Теорема: *Пусть* $x(u)\in\mathbf{C}(\mathbf{R}^n)$, $\|x\|_C<\infty$, $\|x\|_{k,\beta_1}<\infty$, $\|x\|_{n-k,\beta_2}<\infty$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2}<1$. *Тогда имеет место следующее точное неравенство:*

$$\left\|\left(\mathbf{D}_\varepsilon^\alpha\right)x(u)\right\|_C\leq\frac{\omega_k\omega_{n-k}}{2^n}A_\alpha\cdot\frac{2^{2-\frac{\alpha_1}{\beta_1}-\frac{\alpha_2}{\beta_2}}}{\alpha_1\alpha_2\left(1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}-\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)}\|x\|_C^{1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}-\frac{\alpha_2}{\beta_2}}\|x\|_{k\beta_1}^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}\|x\|_{n-k\beta_2}^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}},\qquad (1)$$

где ω_n – площадь поверхности единичной сферы в $\mathbf{R}^n$.

Замечание. Для функций одной переменной неравенства такого типа установлены в [2]. Для функций двух переменных неравенство (1) доказано в [3]. Там же можно найти информацию о других известных точных неравенствах типа Колмогорова для дробных производных и соответствующие ссылки.

Доказательство. При доказательстве будем существенно использовать метод из [3]. Имеем

$$\left\|(D_\varepsilon^\alpha)x\right\|_C\leq A_\alpha\int_{R_+^n}\frac{\left\|\Delta_{-\varepsilon t}^{k,n-k}x(u)\right\|_C}{|\underline{t}|^{k+\alpha_1}|\bar{t}|^{n-k+\alpha_2}}dt.$$

Для оценки нормы смешанной разности используем следующие неравенства:

$$\left\|\Delta_{-\varepsilon t}^{k,n-k}x(u)\right\|_C\leq4\|x\|_C,$$

$$\left\| \Delta^{k,\,n-k}_{-\varepsilon t} x(u) \right\|_C \le 2 \left| \bar{t} \right|^{\beta_2} \| x \|_{n-k,\beta_2},$$

$$\left\| \Delta^{k,\,n-k}_{-\varepsilon t} x(u) \right\|_C \le 2 \left| \underline{t} \right|^{\beta_1} \| x \|_{k,\beta_1}.$$

Объединяя эти оценки, получим

$$\left\| \Delta^{k,\,n-k}_{-\varepsilon t} x(u) \right\|_C \le 2 \min \left\{ 2 \| x \|_C ; \left| \underline{t} \right|^{\beta_1} \| x \|_{k,\beta_1} ; \left| \bar{t} \right|^{\beta_2} \| x \|_{n-k,\beta_2} \right\}.$$

Следовательно,

$$\left\| (D^{\alpha}_{\varepsilon}) x(u) \right\|_C \le 2A_\alpha \int\limits_{R^n_+} \frac{\min \left\{ 2 \| x \|_C ; \left| \underline{t} \right|^{\beta_1} \| x \|_{k,\beta_1} ; \left| \bar{t} \right|^{\beta_2} \| x \|_{n-k,\beta_2} \right\}}{\left| \underline{t} \right|^{k+\alpha_1} \left| \bar{t} \right|^{n-k+\alpha_2}} \, dt.$$

Применим это неравенство к функции

$$y(\underline{u}, \bar{u}) = \frac{1}{b} x(d_1 \underline{t}, d_2 \bar{t}), \;\; b, d_1, d_2 > 0.$$

Так как

$$\left\| (D^{\alpha}_{\varepsilon}) y(u) \right\|_C = \frac{1}{b} d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \left\| (D^{\alpha}_{\varepsilon}) x(t) \right\|_C,$$

$$\| y \|_{k,\beta_1} = \frac{d_1^{\beta_1}}{b} \| x \|_{k,\beta_1},$$

$$\| y \|_{n-k,\beta_2} = \frac{d_2^{\beta_2}}{b} \| x \|_{n-k,\beta_2},$$

получаем, что для всех $b, d_1, d_2 > 0$

$$\frac{1}{b} d_1^{\alpha_1} d_2^{\alpha_2} \left\| (D^{\alpha}_{\varepsilon}) x(t) \right\|_C \le 2A_\alpha \int\limits_{R^n_+} \frac{\min \left\{ \frac{2}{b} \| x \|_C ; \frac{d_1^{\beta_1}}{b} \left| \underline{t} \right|^{\beta_1} \| x \|_{k,\beta_1} ; \frac{d_2^{\beta_2}}{b} \left| \bar{t} \right|^{\beta_2} \| x \|_{n-k,\beta_2} \right\}}{\left| \underline{t} \right|^{k+\alpha_1} \left| \bar{t} \right|^{n-k+\alpha_2}} \, dt.$$

Полагая

$$b = 2\|x\|_C, \quad d_1^{\beta_1} = \frac{2\|x\|_C}{\|x\|_{k,\beta_1}}, \quad d_2^{\beta_2} = \frac{2\|x\|_C}{\|x\|_{n-k,\beta_2}},$$

получим

$$\left\|(D_\varepsilon^\alpha)x(t)\right\|_C \le 2A_\alpha 2^{1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}-\frac{\alpha_2}{\beta_2}} \|x\|_C^{1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}-\frac{\alpha_2}{\beta_2}} \|x\|_{k,\beta_1}^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} \|x\|_{n-k,\beta_2}^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}} \cdot I, \tag{2}$$

где

$$I = \int_{R_+^n} \frac{\min\left\{1; |\underline{t}|^{\beta_1}; |\bar{t}|^{\beta_2}\right\}}{|\underline{t}|^{k+\alpha_1} |\bar{t}|^{n-k+\alpha_2}} dt.$$

Для того, чтобы вычислить интеграл I, разобъем R_+^n на три части:

$$I = U_1 \cup U_2 \cup U_3,$$

где

$$U_1 = \left\{t \in R_+^n : \min\left\{1; |\underline{t}|^{\beta_1}; |\bar{t}|^{\beta_2}\right\} = |\underline{t}|^{\beta_1}\right\} = \left\{t \in R_+^n : |\underline{t}|^{\beta_1} \le 1, |\underline{t}|^{\beta_1} \le |\bar{t}|^{\beta_2}\right\},$$

$$U_2 = \left\{t \in R_+^n : \min\left\{1; |\underline{t}|^{\beta_1}; |\bar{t}|^{\beta_2}\right\} = |\bar{t}|^{\beta_2}\right\} = \left\{t \in R_+^n : |\bar{t}|^{\beta_2} \le 1, |\bar{t}|^{\beta_2} \le |\underline{t}|^{\beta_1}\right\},$$

$$U_3 = \left\{t \in R_+^n : \min\left\{1; |\underline{t}|^{\beta_1}; |\bar{t}|^{\beta_2}\right\} = 1\right\} = \left\{t \in R_+^n : |\underline{t}| \ge 1; |\bar{t}| \ge 1\right\}.$$

Отметим, что попарные пересечения этих частей имеют нулевую меру Лебега. Поэтому

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_j = \int_{U_j} \frac{\min\left\{1; |\underline{t}|^{\beta_1}; |\bar{t}|^{\beta_2}\right\}}{|\underline{t}|^{k+\alpha_1} |\bar{t}|^{n-k+\alpha_2}} dt, \quad j = 1,2,3.$$

Вычислим интеграл I_1. Имеем

$$I_1 = \int_{U_1} \frac{|\underline{t}|^{-k+\beta_1-\alpha_1}}{|\bar{t}|^{n-k+\alpha_1}} dt = \iint_{\underline{t}\in R_+^k, |\underline{t}|\le 1} |\underline{t}|^{-k+\beta_1-\alpha_1} \int_{\bar{t}\in R_+^k, |\bar{t}|^{\beta_2} \ge |\underline{t}|^{\beta_1}} \frac{1}{|\bar{t}|^{n-k+\alpha_2}} d\bar{t}\, d\underline{t}.$$

Переходя к полярным координатам, получим последовательно

$$I_1 = \iint_{\underline{t}\in R_+^k, |\underline{t}|\le 1} |\underline{t}|^{-k+\beta_1-\alpha_1} \frac{\omega_{n-k}}{2^{n-k}} \int_{|\bar{t}|\ge|\underline{t}|^{\beta_1/\beta_2}}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^{1+\alpha_2}} d\underline{t} =$$

$$= \frac{\omega_{n-k}\omega_k}{2^{n-k}2^k\alpha_2} \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{\beta_1-\alpha_1-\alpha_2\frac{\beta_1}{\beta_2}-1}} = \frac{\omega_{n-k}}{2^{n-k}\alpha_2} \iint_{\underline{t}\in R_+^k, |\underline{t}|\le 1} |\underline{t}|^{-k+\beta_1-\alpha_1+\alpha_2\frac{\beta_1}{\beta_2}} d\underline{t} =$$

$$= \frac{\omega_{n-k}\omega_k}{2^{n-k}2^k\alpha_2\left(\beta_1-\alpha_1-\alpha_2\dfrac{\beta_1}{\beta_2}\right)} = \frac{\omega_{n-k}\omega_k}{2^n} \frac{\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}}{\alpha_1\alpha_2\left(1-\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}-\dfrac{\alpha_1}{\beta_2}\right)}.$$

Аналогично,

$$I_2 = \frac{\omega_{n-k}\omega_k}{2^n} \frac{\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}}{\alpha_1\alpha_2\left(1-\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}-\dfrac{\alpha_1}{\beta_2}\right)}.$$

Наконец,

$$I_3 = \frac{\omega_{n-k}\omega_k}{2^n} \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}.$$

Таким образом,

$$I=\frac{\omega_{n-k}\omega_k}{2^n}\frac{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}{\alpha_1\alpha_2\left(1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}-\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right)}+\frac{\omega_{n-k}\omega_k}{2^n}\frac{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}{\alpha_1\alpha_2\left(1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}-\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right)}+\frac{\omega_{n-k}\omega_k}{2^n}\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}=$$

$$=\frac{\omega_k\omega_{n-k}}{2^n}\cdot\frac{1}{\alpha_1\alpha_2(1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}-\frac{\alpha_2}{\beta_2})}.$$

Сопоставляя полученное выражение с (2), получаем неравенство (1).

Теперь построим функцию f(u), которая обращает неравенство (1) в равенство. Сначала определим f(u) для $u \in R^n_+$. Положим:

$$f(u)=\frac{1}{2},\qquad \text{если } |\underline{u}|\geq 1; |\overline{u}|\geq 1,$$

$$f(u)=|\underline{u}|^{\beta_1}-|\overline{u}|^{\beta_2}+\frac{1}{2},\qquad \text{если } |\underline{u}|^{\beta_1}\leq|\overline{u}|^{\beta_2}\leq 1,$$

$$f(u)=|\underline{u}|^{\beta_2}-|\overline{u}|^{\beta_1}+\frac{1}{2},\qquad \text{если } |\underline{u}|^{\beta_2}\leq|\overline{u}|^{\beta_1}\leq 1;$$

$$f(u)=|\overline{u}|^{\beta_1}-\frac{1}{2},\qquad \text{если } |\underline{u}|^{\beta_1}\leq 1\leq|\overline{u}|^{\beta_2};$$

$$f(u)=|\underline{u}|^{\beta_2}-\frac{1}{2},\qquad \text{если } |\underline{u}|^{\beta_2}\leq 1\leq|\overline{u}|^{\beta_1}.$$

Теперь продолжим f(u) на все пространство R^n четным образом по каждой переменной. Элементарные вычисления показывают, что

$$\|f\|_C=\frac{1}{2},\ \|f\|_{k,\beta_1}=1,\ \|f\|_{n-k,\beta_2}=1.$$

Кроме того, для $t_1, ..., t_n > 0$

$$\Delta_t^{k,n-k} f(0)=\begin{cases} 2|\underline{t}|^{\beta_1}, \text{ если } |\underline{t}|^{\beta_1}\le\min\left\{|\bar{t}|^{\beta_2},1\right\}, \\ 2|\bar{t}|^{\beta_2}, \text{ если } |\bar{t}|^{\beta_2}\le\min\left\{|\underline{t}|^{\beta_1},1\right\}, \\ 2, \text{ если } |\underline{t}|\ge 1, |\bar{t}|\ge 1. \end{cases}$$

Следовательно, для таких $t_1, \ldots, t_n$

$$\Delta_t^{k,n-k} f(0)=2\min\left\{1; |\underline{t}|^{\beta_1}; |\bar{t}|^{\beta_2}\right\}.$$

Теперь для $\varepsilon=(-,\ldots,-)$ получаем

$$\left\|(D_\varepsilon^\alpha)f(u)\right\|_C \ge (D_\varepsilon^\alpha)f(0)=2A_\alpha \int_{R_+^n}\frac{\min\left\{1; |\underline{t}|^{\beta_1}; |\bar{t}|^{\beta_2}\right\}}{|\underline{t}|^{k+\alpha_1}|\bar{t}|^{n-k+\alpha_2}}dt=$$

$$=\frac{\omega_k\omega_{n-k}}{2^n}A_\alpha\cdot\frac{2^{2-\frac{\alpha_1}{\beta_1}-\frac{\alpha_2}{\beta_2}}}{\alpha_1\alpha_2\left(1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}-\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)}\|f\|_C^{1-\frac{\alpha_1}{\beta_1}-\frac{\alpha_2}{\beta_2}}\|f\|_{k,\beta_1}^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}\|f\|_{n-k,\beta_2}^{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}.$$

Случаи других наборов знаков ε рассматриваются аналогично.

Теорема доказана.

Библиографические ссылки.

1. **Самко С.Г.** Интегралы и производные дробного порядка и их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев – Минск, 1987 – 304 с.
2. **Бабенко В.Ф.** О неравенствах типа Колмогорова для производных дробнюго порядка/ В.Ф. Бабенко, М.Г. Чурилова // Вісник Дніпропетр. ун–ту. Математика. – 2001. – Вип. 6. – С. 16 – 20.
3. **Babenko V.F.** Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives of Holder functions of two variables/ V.F. Babenko, S.A. Pichugov // East Journal on Approximations. – 2007. – Vol. 13, № 3. – P. 321 – 329.

Надійшла до редколегії 26 02 08

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко[*,**], С.В.Савела[*]

[*] *Днепропетровский национальный университет*

[**] *Институт прикладной математики и механики НАН Украины*

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ДЖЕКСОНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Викладено узагальнення результатів М.І. Черних, стосовно оцінки найкращого L_2-наближення періодичної функції f тригонометричними поліномами через її L_2-модуль неперервності, на випадок функцій зі значеннями в гільбертовому просторі.

Пусть C и L_p ($1\le p \le \infty$) пространства 2π-периодических функций $f : R \to R$ с соответствующими нормами $\| f \|_C$ и $\| f \|_{L_p} = \| f \|_p$. Пусть X = C или X = L_p. Модулем непрерывности функции $f \in X$ в пространстве X называется функция

$$\omega\,(f;\,t)_X = \sup_{|u|\le t} \| f(\cdot+u)-f(\cdot) \|_X\,, \qquad t \ge 0.$$

Наилучшим приближением функции $f \in X$ подпространством $\mathcal{N}\subset X$ в метрике пространства X называется величина

$$E\,(f,\,\mathcal{N})_X = \inf_{\eta\in\mathcal{N}} \| f-\eta \|_X\,,$$

а наилучшим приближением некоторого класса функций $\mathcal{M} \subset X$ подпространством $\mathcal{N}$ – величина

$$E\,(\mathcal{M},\,\mathcal{N})_X = \sup_{f\in\mathcal{M}} E\,(f,\,\mathcal{N})_X\,.$$

Величина

$$d_n\,(\mathcal{M},\,X) = \inf_{\dim\mathcal{N}=n} E_n(\mathcal{M},\,\mathcal{N})_X$$

называется n-поперечником по Колмогорову класса $\mathcal{M}$ в пространстве X.

Для наилучших равномерных приближений непрерывных 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами $\mathcal{T}_{2n-1}$ порядка не выше n – 1 в 1911 году Д. Джексон [1] доказал, что

$$E\,(f,\,\mathcal{T}_{2n-1})_C \le \chi\,\omega(f,\,\frac{1}{n}) \qquad (n = 1, 2,\ldots).$$

где константа χ не зависит ни от функции f, ни от n. Эти, а также аналогичные им соотношения в других функциональных пространствах и с модулем гладкости любого порядка известны в теории приближений как теоремы (или неравенства) Джексона.

Пусть ω (t) – заданный модуль непрерывности. Через H^{ω}_{X} обозначим множество функций f из X, для которых $\omega\,(f\,;\,t)_X \le \omega\,(t)$. В 1961 году Н.П. Корнейчук [2] доказал, что если $\omega(t)$ выпуклый вверх модуль непрерывности, то

$$E\,(H^{\omega}{}_C,\ T_{2n-1})_C = \frac{1}{2}\,\omega(\,f,\ \frac{\pi}{n})_C.$$

С помощью этого соотношения в 1962 году для наилучших приближений функции $f \in C$ тригонометрическими полиномами порядка n-1 он получил неравенство Джексона с наилучшей константой [3]

$$E\,(f\,,T_{2n-1})_C < \omega(\,f,\ \frac{\pi}{n})_C\,, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

В 1963 году Н.П. Корнейчуком [4] было доказано, что

$$d_{2n-1}\,(H^{\omega},\,C) = \frac{1}{2}\,\omega(\,f,\ \frac{\pi}{n})_C\,.$$

Точные неравенства типа Джексона в пространстве L_2 получены в 1967 году Н.И. Черных [5; 6]. Им, в частности, было доказано [5], что для любой функции f из L_2, которая не является константой (с точностью до множества меры нуль), имеет место неравенство

$$E\,(f\,,T_{2n-1})_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}\ \omega(\,f,\ \frac{\pi}{n})_2 \qquad n = 1, 2, \ldots\ , \tag{1}$$

причем для произвольного фиксированного n константа $\frac{1}{\sqrt{2}}$ улучшена быть не может. Отметим, что в ходе доказательства последнего неравенства Н.И. Черных доказал следующее неравенство, представляющее и самостоятельный интерес

$$E^2\,(f, T_{2n-1}\,)_2 \le \frac{n}{4}\int\limits_0^{\pi/n} \omega^2(f;t)_2 \sin nt\,dt\,. \tag{2}$$

Для класса функций $H_2^{1/2} = \{\ f \in L_2\,([0;\,2\pi]) : \omega\,(f\,;\,t)_2 \le t^{1/2}\ \}$ Н.И. Черных [5] доказано, что

$$E\,(H_2^{1/2}, T_{2n-1})_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Ю.И. Григоряном [7] доказано, что

$$d_{2n-1}\,(H_2^{1/2}, L_2([0;\,2\pi])) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}. \tag{3}$$

В [8] изучались задачи аппроксимации непрерывных, определённых на метрическом компакте, функций со значениями в произвольном метрическом пространстве. Точные неравенства типа Джексона в пространстве L_2 для функций со значениями в R^n рассматривали В.И. Иванов и О.И. Смирнов [9].

Целью данной работы является обобщение приведенных выше результатов Н.И. Черных на случай функций со значениями в произвольном вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве. Для полноты изложения приведем необходимые сведения из анализа таких функций [10] .

Пусть H – вещественное сепарабельное гильбертово со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Функция $f : [a;\, b] \to H$ называется слабо измеримой, если для любого элемента $z \in H$ функция

$$[a;\, b] \ni t \to (z, f(t))$$

измерима по Лебегу.

Во множестве слабо измеримых функций, которые удовлетворяют условию

$$\int_a^b \| f(t) \|^2\, dt < +\infty,$$

определим скалярное произведение

$$(f, g) = \int_a^b (f(x), g(x))dx$$

и норму

$$\| f \|_{2,H}^2 := \int_a^b (f(x), f(x))dx = \int_a^b \| f(x) \|^2\, dx$$

(оба интеграла – интегралы Лебега).

Множество классов эквивалентности слабо измеримых функций относительно этой нормы представляет собой пространство L_2 ([a; b], H).

Пространство $L_2([a;b],H)$ является гильбертовым. Если $\{e_n : n \geq 1\}$ - ортонормированный базис пространства H и для $t \in [a;b]$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) e_n ,$$

где $\varphi_n(t) = (f(t), e_n)$, то функция $f \in L_2([a;b],H)$ тогда и только тогда, когда

1) функции $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ измеримы по Лебегу ;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n^2(t)dt < +\infty$.

Наилучшим приближением функции $f \in L_2([a,b],H)$ подпространством $G \subset L_2([a;b],H)$ называется величина

$$E(f, G)_{2,H} = \inf_{g \in G} \| f - g \|_{2,H} ,$$

а наилучшим приближением некоторого класса функций $Q \subset L_2([a,b],H)$ подпространством G – величина

$$E(Q, G)_{2,H} = \sup_{f \in Q} E(f, G)_{2,H} .$$

В дальнейшем рассматриваем пространство $L_2([0;2\pi],H)$ 2π – периодических функций. Модулем непрерывности функции в пространстве $L_2([0;2\pi],H)$ называется

$$\omega(f;t)_{2,H} = \sup_{|u| \leq t} \| f(\cdot + u) - f(\cdot) \|_{2,H}, \quad t \geq 0.$$

В качестве G будем использовать множество T_{2n-1}^{H} обобщенных тригонометрических полиномов порядка n-1 вида

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (A_k \cos kx + B_k \sin kx),$$

где $A_к, B_k \in H$.

Функцию $f : [0, 2\pi] \to H$ будем называть кусочно-постоянной, если существует разбиение $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} = t_n = 2\pi$ отрезка $[0, 2\pi]$ и элементы $p_0, p_1 < \ldots < p_{n-1} \in H$ такие, что $f(t) = p_k$, если $t \in [t_k, t_{k+1}], k = 0,\ldots,n-2$, и $f(t) = p_{n-1}$, если $t \in [t_{n-1}, t_n]$. Будем говорить, что функция $f : [0, 2\pi] \to H$ принадлежит классу P_1, если существует последовательность $\{f_n\}$ кусочно-постоянных функций такая, что

$$\sup_{t\in[0,2\pi]} \|f(t)-f_n(t)\| \to 0,\ n\to\infty.$$

Через P_2 обозначим класс функций $f : [0, 2\pi] \to H$ ограниченных и кусочно-непрерывных на $[0, 2\pi]$. Отметим, что $P_1 \cup P_2 \subset L_2([0; 2\pi], H)$ и функции $f \in P_1 \cup P_2$ интегрируемы по Риману.

Каждой 2π – периодической функции f, принадлежащей $P_1 \cup P_2$ на $[0; 2\pi]$, поставим в соответствие ряд, который называется рядом Фурье данной функции

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

где

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt\, dt,\ к \geq 0,$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt,\ к \geq 1.$$

Через $s_n(f;t)$ обозначим частную сумму ряда Фурье

$$s_n(f;t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Известно [10], что для функций $f \in P_1 \cup P_2$ имеет место равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \| f(t) \|^2 dt = \frac{1}{2} \|a_0\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\| a_k \|^2 + \| b_k \|^2).$$

Кроме того

$$E^2 (f, T^H_{2n-1})_{2,H} = \| f - s_n(f) \|^2_{2,H} = \pi \sum_{k=n}^{\infty} (\| a_k \|^2 + \| b_k \|^2). \qquad (4)$$

Имеет место теорема.

Теорема 1. *Для произвольной 2π-периодической функции f, принадлежащей $P_1 \cup P_2$ на $[0; 2\pi]$, которая не является постоянной величиной (с точностью до множества меры нуль), и для всех натуральных n верны неравенства*

$$E^2(f, T^{H}_{2n-1})_{2,H} \le \frac{n}{4}\int_0^{\pi/n}\omega^2(f;t)_{2,H}\sin nt\,dt. \qquad (5)$$

Константа в правой части неравенства улучшена быть не может.

Доказательство. Мы повторим с незначительными отличиями рассуждения Н.И. Черных [6] (см. также [11]), использованные при доказательстве неравенства (2). Положим, для краткости $(\| a_k \|^2 + \| b_k \|^2) = \rho_k^2$. В силу (1) будем иметь

$$E^2(f, T^{H}_{2n-1})_{2,H} = \pi\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2.$$

Используя равенство Парсеваля, получим

$$\| f(\cdot + t) - f(\cdot) \|_{2,H} = 2\pi\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(1-\cos kt).$$

Следовательно для любого $t \ge 0$ можем записать

$$\omega^2(f;t)_{2,H} = \sup_{|u|\le t}\| f(\cdot + u) - f(\cdot) \|^2_{2,H} \ge \| f(\cdot + t) - f(\cdot) \|^2_{2,H} \ge$$

$$\ge 2\pi\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2(1-\cos kt) = 2E^2(f, T^{H}_{2n-1})_{2,H} - 2\pi\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\cos kt,$$

или

$$E^2(f, T^{H}_{2n-1})_{2,H} \le \frac{1}{2}\,\omega^2(f;t)_{2,H} + \pi\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2\cos kt.$$

Из этого неравенства, как и в случае вещественнозначных функций, выводим неравенство (5).

Обобщенные тригонометрические полиномы вида

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1\cos nx + \beta_1\sin nx \quad (\alpha_0, \alpha_1, \beta_1 \in H),$$

реализуют в (5) знак равенства.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для произвольной 2π-периодической функции f, принадлежащей $P_1 \cup P_2$ на $[0;\ 2\pi]$, которая не является постоянной величиной (с точностью до множества меры нуль), и для всех натуральных n верны неравенства*

$$E\,(f,\ T^{H}_{2n-1})_{2,H} < \frac{1}{\sqrt{2}}\ \omega(f,\ \frac{\pi}{n})_{2,H}, \tag{6}$$

и при каждом n константа $\frac{1}{\sqrt{2}}$ в правой части уменьшена быть не может.

Доказательство. Если функция $f(x)$ не является постоянной величиной, то

$$\omega(f;\frac{\pi}{n})_{2,H} > 0$$

и

$$\int_0^{\pi/n}\omega^2(f;t)_{2,H}\sin nt\,dt < \omega^2(f;\frac{\pi}{n})_{2,H}\int_0^{\pi/n}\sin nt\,dt = \frac{2}{n}\,\omega^2(f;\frac{\pi}{n})_{2,H},$$

но тогда

$$E\,(f,\ T^{H}_{2n-1})_{2,H} < \frac{1}{2}\left\{n\frac{2}{n}\omega^2(f;\frac{\pi}{n})_{2,H}\right\}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \omega(f;\frac{\pi}{n})_{2,H}.$$

Докажем, что оценка (6) неулучшаема. Снова наши рассуждения будут близкими к доказательству неулучшаемости неравенства (1) для вещественнозначных функций.

Зафиксируем n и зададим δ $(0 < \delta < \frac{\pi}{n})$. Построим чётную $\frac{2\pi}{n}$-периодическую непрерывную на всей оси функцию $g_n(\delta;\ t)$, полагая

$$g_n(\delta;\ t) = \begin{cases}\left(1-\dfrac{t}{2\delta}\right), & 0 \le t \le 2\delta;\\ 0, & 2\delta \le t \le \pi/n.\end{cases}$$

Эта функция $g_n(\delta;\ t)$ раскладывается в ряд Фурье

$$g_n(\delta;\ t) = \frac{\delta}{\pi} + \frac{2}{\pi\delta}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\nu\delta}{n\nu}\right)^2\cos n\nu t,$$

причём $g_n(\delta; 0) = 1$ и $g_n(\delta; t) \ge 0$ для $0 \le t \le \frac{\pi}{n}$. Положим

$$F_n(t) = F_n(\delta; t) = h_0 \sqrt{\frac{2}{\pi\delta}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin n\nu\delta}{n\nu} \cos n\nu t,$$

где h_0 – некоторый ненулевой элемент гильбертова пространства H. Тогда

$$\| F_n(\cdot + u) - F_n(\cdot) \|_{2,H}^2 = 2\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\| h_0 \sqrt{\frac{2}{\pi\delta}} \frac{\sin n\nu\delta}{n\nu} \right\|^2 (1 - \cos n\nu u) =$$

$$= 2\pi \frac{2}{\pi\delta} \| h_0 \|^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n\nu\delta}{n\nu} \right)^2 (1 - \cos n\nu u) = 2\pi \, [g_n(\delta; 0) - g_n(\delta; u)] \, \| h_0 \|^2 .$$

Так как $g_n(\delta; t)$ (как функция от t) не возрастает на $[0; \frac{\pi}{n}]$, то учитывая равенство Парсеваля, будем иметь

$$\omega^2(F_n; \frac{\pi}{n})_{2,H} = 2\pi \| h_0 \|^2 \, [g_n(\delta; 0) - g_n(\delta; \frac{\pi}{n})] = 2\pi \| h_0 \|^2$$

и

$$E^2(F_n, T_{2n-1}^H)_{2,H} = \pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\| h_0 \sqrt{\frac{2}{\pi\delta}} \frac{\sin n\nu\delta}{n\nu} \right\|^2 =$$

$$= \pi \| h_0 \|^2 \, [g_n(\delta; 0) - \frac{\delta}{\pi}] = \| h_0 \| \, [\pi - \delta].$$

То есть,

$$\omega^2(F_n; \frac{\pi}{n})_{2,H} = 2 E^2(F_n, T_{2n-1}^H)_{2,H} \frac{\pi}{\pi - \delta}.$$

Так как δ может быть сколь угодно близким к нулю, точность оценки (6) доказана.

Теорема 2 доказана.

Обозначим через $H^{1/2}_{2,H}$ класс 2π-периодических функций f, принадлежащих $P_1 \cup P_2$ на $[0; 2\pi]$, для которых $\omega(f; t)_{2,H} \le \sqrt{t}$. Из оценки (5) получим, что для любой функции f из $H^{1/2}_{2,H}$

$$E^2(f, T^H_{2n-1})_{2,H} \le \frac{n}{4}\int_0^{\pi/n} t \sin nt\, dt = \frac{\pi}{4n}.$$

Следовательно,

$$E(H^{1/2}_{2,H}, T^H_{2n-1})_{2,H} \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \tag{7}$$

На самом деле в (7) имеет место равенство, что будет следовать из нашей следующей теоремы.

Пусть G – некоторое подпространство пространства $L_2([0; 2\pi], H)$. Будем говорить, что G имеет слабую размерность n (и писать $w - \dim G = n$), если: 1) найдутся n элементов в G, которые слабо линейно независимы; 2) любые (n + 1) элементов из G слабо линейно зависимы [8]. Отметим, что $w - \dim T^H_{2n-1} = 2n - 1$.

Величину

$$d^w_{2n-1}(H^{1/2}_{2,H}, L_2([0; 2\pi], H)) = \inf_{w-\dim G \le 2n-1} E_n(H^{1/2}_{2,H}, G)_{2H}$$

назовем слабым (2n–1)-поперечником по Колмогорову класса $H^{1/2}_{2,H}$ в пространстве $L_2([0;2\pi], H)$.

Теорема 3. *Для любого n = 1, 2, ...*

$$d^w_{2n-1}(H^{1/2}_{2,H}, L_2([0; 2\pi], H)) = E(H^{1/2}_{2,H}, T^H_{2n-1})_{2,H} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Доказательство. Неравенство

$$d^w_{2n-1}(H^{1/2}_{2,H}, L_2([0; 2\pi], H)) \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

следует из (7). Докажем неравенство противоположного смысла.

При доказательстве соотношения (3) Ю.И. Григоряном [8] установлено следующее. Рассмотрим 2n – мерное линейное многообразие $S_{2n,0}$, состоящее из функций вида

$$f(t) = \sum_{k=1}^{2n} a_k \psi_k(t),$$

где

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1 & ((k-1)\pi)/n \le t < k\pi/n), \\ 0 & (0 \le t < (k-1)\pi)/n \le t < 2\pi\pi \end{cases}$$

Шар

$$U\rho = \{g \in S_{2n,0} : \| g \|_2 \le \rho\}, \ \rho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

обладает следующими двумя свойствами

1) $\forall g \in U_\rho \quad g \in H_2^{1/2}$;

2) для произвольного (2n-1) - мерного подпространства $M_{2n-1} \subset L_2$ в шаре $U\rho$ найдется функция $g \in S_{2n,0}$, для которой

$$E\,(U_\rho,\ M_{2n-1})_2^2 \ge \rho^2 . \tag{8}$$

Рассмотрим подпространство W_{2n-1} в L_2 ([0; 2π], H) такое, что $w - \dim W_{2n-1} \le 2n-1$, и произвольный функционал $F \in H$, $\| F \| = 1$. Функционал F порождает подпространство $\langle F, W_{2n-1} \rangle = \{ \langle F, h\rangle : h \in W_{2n-1}\} \subset L_2([0;2\pi], \mathbf{R})$, размерность которого не превосходит (2n–1). Рассмотрим также класс $F\cdot U\rho = \{g(t)F : g(t) \in U\rho\}$. Как нетрудно проверить, $F\cdot U\rho \subset H^{1/2}_{2,H}$, и, следовательно,

$$E\,(H^{1/2}_{2,H},\ W_{2n-1})_{2,H} \ge E\,(F\cdot U\rho,\ W_{2n-1})_{2,H} . \tag{9}$$

Убедимся в том, что

$$E\,(F\cdot U\rho,\ W_{2n-1})_{2,H} \ge E\,(\langle F, F\cdot U\rho\rangle,\ \langle F, W_{2n-1}\rangle)_2 = E\,(U\rho,\ \langle F, W_{2n-1}\rangle)_2 . \tag{10}$$

Действительно,

$$E\,(F\cdot U\rho,\ W_{2n-1})_{2,H} = \sup_{f \in F\,U_\rho}\ \inf_{h \in W_{2n-1}} \left(\int_0^{2\pi} \| f(t) - h(t) \|_{2,H}^2\, dt \right)^{1/2} \ge$$

$$\geq \sup_{f\in F\cdot U_\rho} \inf_{h\in W_{2n-1}} \left(\int_0^{2\pi} (F, f(t)-h(t))^2 dt \right)^{1/2} =$$

$$= \sup_{f\in F\, U_\rho} \inf_{h\in W_{2n-1}} \left(\int_0^{2\pi} |(F, f(t)) - (F, h(t))|^2 dt \right)^{1/2} =$$

$$= \sup_{g\in F\cdot U_\rho} \inf_{h\in W_{2n-1}} \left(\int_0^{2\pi} |g(t) - (F, h(t))|^2 dt \right)^{1/2} =$$

$$= E\,(U\rho, \langle F, W_{2n-1}\rangle)_2$$

Таким образом, из включения $F\cdot U\rho \subset H^{1/2}_{2,H}$ и неравенств (8), (10) следует, что

$$d^{w}_{2n-1}\ (H^{1/2}_{2,H}, L_2\,([0; 2\pi], H)) \geq \rho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

В сопоставлении с (7) получаем

$$d^{w}_{2n-1}\ (H^{1/2}_{2,H}, L_2\,([0; 2\pi], H)) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Теорема 3 доказана.

Библиографические ссылки

1. **Jackson J.** Uber die Genauigkeit des Annaherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegeben Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung – Diss., Gottingen, 1911.
2. **Корнейчук Н.П.** О наилучшем равномерном приближении на некоторых классах непрерывных функций// ДАН СССР. – 1961 – 140 – С. 748–751.
3. **Корнейчук Н.П.** Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций// ДАН СССР. – 1962 – 145 – С. 514-515.
4. **Корнейчук Н.П.** Точное значение наилучших приближений и поперечников некоторых классов функций// ДАН СССР. – 1963 – 150 – С. 1218–1220.
5. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИАН. –1967 – 88 – С. 71–74.
6. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2// Матем. заметки. – 1967 – 2, №5 – С. 513–522.
7. **Григорян Ю.И.** Поперечники некоторых множеств в функциональных пространствах// Матем. заметки. – 1973 – 13, №5 – С. 637–646.
8. **Бабенко В.Ф.** Аппроксимация непрерывных вектор-функций / В.Ф. Бабенко, С.А. Пичугов // Укр. мат. журн. – 1994 – 46, №11 – С. 1435-1448.
9. **Иванов В.И.** Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p / В.И. Иванов, О.И. Смирнов – Тула, 1995, 192 с.
10. **Дороговцев А.Я.** Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем – К., 1992 – 319 с.
11. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные задачи теории приближения – М., 1976 – 320 с.

Надійшла до редколегії 29 02.08

УДК 517.5

В. Ф. Бабенко[*,**], С.А. Спектор [*]

[*] *Днепропетровский национальный университет*

[**] *Институт прикладной математики и механики НАН Украины*

НЕРАВЕНСТВА ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ СПЛАЙНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_2(R)$

Отримано точну нерівність типу Бернштейна у просторі $L_2(\mathbf{R})$ для неперіодичних сплайн-функцій порядку m, мінімального дефекту, з рівновіддаленими вузлами.

Пусть $G=R$ или T, где T – единичная окружность, реализованная как отрезок $[0;2\pi]$ с отождествленными концами. Через $L_p(G)$, $1\le p\le\infty$, будем обозначать пространство измеримых функций $f:G\to C$, таких, что $\|f\|_{L_p(G)}<\infty$, где

$$\|f\|_{L_p(G)}=\begin{cases}\left(\int_G |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, & \text{если } p<\infty,\\ \operatorname{vrai}\sup\limits_{x\in G}|f(x)|, & \text{если } p=\infty.\end{cases}$$

Функция $s(x)$ называется сплайном порядка m, минимального дефекта с узлами ℓh, $h>0$, $\ell\in Z$, если $s(x)\in C^{m-2}(R)$ и сужение $s(x)$ на каждый промежуток $(h(\ell-1),h\ell)$, $\ell\in Z$, является полиномом с действительными коэффициентами степени не выше $m-1$. Совокупность всех таких сплайнов обозначим через $S_{m,h}$. Пространство 2π-периодических сплайнов из $S_{m,\pi/n}$ будем обозначать через $\tilde{S}_{m,n}$.

Во многих вопросах теории аппроксимации важную роль играют неравенства типа Бернштейна для периодических и непериодических сплайнов. Обзор известных точных неравенств типа Бернштейна для периодических сплайнов можно найти, например, в [1, с. 211-245].

Через $\varphi_m(t)$, $m\in N$, обозначим m-й 2π - периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0=\operatorname{sgn}\sin t$. Для $\lambda>0$ положим $\varphi_{\lambda,m}(t)=\lambda^{-m}\varphi_m(\lambda t)$. Отметим, что $\|\varphi_m\|_\infty=K_m$, где $K_m=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell(m+1)}}{(1+2\ell)^{m+1}}$, $m=0,1,2\ldots$, – константы Фавара [2, с. 64-65].

Отметим также, что $\|\varphi_m\|_1 = 4K_{m+1}$ и $\|\varphi_m\|_2 = 2\sqrt{K_{2m+1}}$.

Следующие точные неравенства типа Бернштейна для сплайнов из $\tilde{S}_{m,n}$

$$\left\|s^{(k)}\right\|_{L_p(T)} \le n^k \frac{\left\|\varphi_{m-1-k}\right\|_{L_p(T)}}{\left\|\varphi_{m-1}\right\|_{L_p(T)}} \left\|s\right\|_{L_p(T)} \qquad (1)$$

в случае $p=\infty$ установлены В.М. Тихомировым [3], в случае $p=1$ – Ю.М. Субботиным [4], а в случае $p=2$ – В.Ф. Бабенко и С.А. Пичуговым [5].

Для сплайнов из $S_{m,h} \cap L_\infty(R)$ известно следующее точное неравенство типа Бернштейна, полученное Г.Г. Магарил-Ильяевым [6]

$$\left\|s^{(m-1)}\right\|_{L_\infty(R)} \le \frac{\pi^{m-1}}{K_{m-1} h^{m-1}} \left\|s\right\|_{L_\infty(R)}.$$

В данной статье мы получим точное неравенство типа Бернштейна, дающее оценку $L_2(R)$- нормы $(m-1)$-ой производной сплайна из $S_{m,h} \cap L_2(R)$ через $L_2(R)$- норму самого сплайна s. Ниже для упрощения записей пишем $\|\cdot\|_2$ вместо $\|\cdot\|_{L_2(R)}$.

Теорема. *Для любого сплайна* $s \in S_{m,h} \cap L_2(R)$ *и любого* $h>0$ *справедливо неравенство*

$$\left\|s^{(m-1)}\right\|_2 \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^{m-1} \sqrt{\frac{K_1}{K_{2m-1}}} \left\|s\right\|_2. \qquad (2)$$

Константа в правой части неравенства (2) *неулучшаема.*

Доказательство. Будем использовать преобразование Фурье функции $f \in L_2(R)$

$$f^\wedge(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R f(x) e^{-i\omega x} dx$$

и равенство Парсеваля

$$\int_R |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_R |f^\wedge(\omega)|^2 d\omega.$$

Пусть сначала $h=1$. Как хорошо известно, любой сплайн $s\in S_{m1}$ однозначно представим в виде

$$s(x)=\sum_{v\in Z} c_v N_m(x+v), \tag{3}$$

где

$$N_m(x)=\frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k (x-k)_+^{m-1} -$$

В-сплайн порядка m. Отметим, что В-сплайны обладают многими важными свойствами [7, с. 146,151], в частности, справедливо соотношение

$$N_m'(x)=N_{m-1}(x)-N_{m-1}(x-1). \tag{4}$$

Используя стандартные свойства преобразования Фурье, из (4) получаем

$$(N_m')^\wedge(\omega)=(N_{m-1})^\wedge(\omega)(1-e^{-i\omega})$$

и, следовательно,

$$(N_m^{(m-1)})^\wedge(\omega)=(N_1)^\wedge(\omega)(1-e^{-i\omega})^{m-1}. \tag{5}$$

Положим

$$m_s(\omega)=\sum_{v\in Z} c_v e^{-iv\omega},$$

где c_v – коэффициенты из (3). Как хорошо известно, ввиду того, что $s\in L_2(R)$, будет $m_s\in L_2(T)$,

$$\|s\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|m_s(\omega)|^2\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^\wedge(\omega+2\pi\ell)\right|^2 d\omega \tag{6}$$

и

$$\left\|s^{(m-1)}\right\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|m_s(\omega)|^2\left|1-e^{i\omega}\right|^{2m-2}\sum_{\ell\in Z}\left|(N_1)^\wedge(\omega+2\pi\ell)\right|^2 d\omega. \tag{7}$$

Используя равенство равенство (7), тот факт [7, с. 149], что для почти всех $\omega\in R$

$$\sum_{\ell\in Z}\left|(N_1)^\wedge(\omega+2\pi\ell)\right|^2=1,$$

и равенство (6), получим

$$\left\| s^{(m-1)}\right\|_2^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|m_s(\omega)\right|^2\left|1-e^{-i\omega}\right|^{2m-2}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|m_s(\omega)\right|^2\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^\wedge(\omega+2\pi\ell)\right|^2\frac{\left|1-e^{i\omega}\right|^{2m-2}}{\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^\wedge(\omega+2\pi\ell)\right|^2}d\omega\le$$

$$\le\max_\omega\frac{\left|1-e^{i\omega}\right|^{2m-2}}{\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^\wedge(\omega+2\pi\ell)\right|^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|m_s(\omega)\right|^2\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^\wedge(\omega+2\pi\ell)\right|^2d\omega=$$

$$=\max_\omega\frac{\left|1-e^{i\omega}\right|^{2m-2}}{\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^\wedge(\omega+2\pi\ell)\right|^2}\|s\|_2^2.$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\left\|s^{(m-1)}\right\|_2^2\le\max_\omega\frac{\left|1-e^{i\omega}\right|^{2m-2}}{\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^\wedge(\omega+2\pi\ell)\right|^2}\|s\|_2^2. \tag{8}$$

Найдем значение константы в правой части неравенства (8). Отметим, что

$$\left|1-e^{-i\omega}\right|^{2m-2}\le\left|1-e^{-i\pi}\right|^{2m-2}=2^{2m-2}.$$

Кроме того [7, с. 152]

$$\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^\wedge(\omega+2\pi\ell)\right|^2\ge\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^\wedge(\pi+2\pi\ell)\right|^2.$$

Поэтому

$$\max_{\omega} \frac{\left|1-e^{i\omega}\right|^{2m-2}}{\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^{\wedge}(\omega+2\pi\ell)\right|^2} = \frac{2^{2m-2}}{\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^{\wedge}(\pi+2\pi\ell)\right|^2}. \tag{9}$$

Учитывая соотношение [7, с. 149]

$$\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^{\wedge}(\pi+2\pi\ell)\right|^2 = 2^{2m}\sum_{\ell\in Z}\frac{1}{(\pi+2\pi\ell)^{2m}},$$

получим

$$2^{2m}\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^{\wedge}(\pi+2\pi\ell)\right|^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m-1}\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2\ell)^{2m}} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m-1}K_{2m-1}.$$

Таким образом, с учетом того, что $K_1 = \frac{\pi}{2}$, получаем

$$\max_{\omega} \frac{\left|1-e^{i\omega}\right|^{2m-2}}{\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^{\wedge}(\omega+2\pi\ell)\right|^2} = \frac{2^{2m-2}}{\sum_{\ell\in Z}\left|(N_m)^{\wedge}(\pi+2\pi\ell)\right|^2} =$$

$$= \frac{2^{2m-2}}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m-1}K_{2m-1}} = \frac{\pi^{2m-1}}{2K_{2m-1}} = \pi^{2m-2}\frac{K_1}{K_{2m-1}}.$$

Итак, нами доказано, что для любого сплайна $s\in S_{m,1}$ имеет место неравенство

$$\left\| s^{(m-1)} \right\|_2^2 \le \pi^{2m-2}\frac{K_1}{K_{2m-1}}\|s\|_2^2. \tag{10}$$

Пусть теперь $h>0$ произвольно. Заметим, что $s(x)\in S_{m,h}$ тогда и только тогда, когда $s_h(x) = s(hx)\in S_{m,1}$. При этом, как нетрудно проверить,

$$\|s\|_2^2 = h\|s_h\|_2^2, \quad \left\|s^{(m-1)}\right\|_2^2 = h^{-2m+3}\left\|s_h^{(m-1)}\right\|_2^2.$$

Поэтому для любого $s\in S_{m,h}$, применяя неравенство (10) для оценки $\left\|s_h^{(m-1)}\right\|_2^2$, получим

$$\left\| s^{(m-1)} \right\|_2^2 = h^{-2m+3}\left\| s_h^{(m-1)} \right\|_2^2 \le$$

$$\leq \pi^{2m-2}h^{-2m+2}\frac{K_1}{K_{2m-1}}h\|s_h\|_2^2=\left(\frac{\pi}{h}\right)^{2m-2}\frac{K_1}{K_{2m-1}}$$

Неравество (2) доказано.

Покажем, что неравенство (2) является неулучшаемым. Это можно сделать разными способами. Мы воспользуемся методом, который будет полезен не только при доказательстве точности неравенств типа Бернштейна для сплайнов, но и в других ситуациях, скажем, при доказательстве точности неравенств типа Бернштейна для для элементов подпространств пространства $L_2(R)$, порожденных сдвигами одной, достаточно произвольной функции.

Ясно, что неулучшаемость константы в (2) достаточно доказать при h=1.

Пусть

$$\Phi_n(\omega)=\frac{\sin^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega}{(n+1)\sin^2\frac{1}{2}\omega}\quad -$$

ядро Фейера. Как хорошо известно, для любой непрерывной 2π- периодической функции f последовательность $\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_n(\omega\text{-}\xi)f(\omega)d\omega\right\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно на всей числовой оси сходится к $f(\xi)$ при $n\to\infty$.

Положим

$$m_n(\omega)=\sqrt{\Phi_n(\omega\text{-}\pi)}\,.$$

Разложим $m_n(\omega)$ в ряд Фурье

$$m_n(\omega)=\sum_{v\in Z}c_v^n e^{iv\omega},$$

и определим последовательность сплайнов

$$s(\,x\,)=\sum_{v\hat{I}Z}c_v^n\,N_m(x+v\,),\quad n\in N,$$

или, в образах Фурье,

$$s(\omega)=\sum_{v\in Z}c_v^n e^{ivv}\left(N_m\right)^\wedge(\omega)=m_n(\omega)\left(N_m\right)^\wedge(\omega),\qquad n\in N.$$

Будем иметь

$$\|s_n\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |m_n(\omega)|^2 \sum_{v\in Z} \left|(N_m)^\wedge(\omega+2\pi\ell)\right|^2 d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_n(\omega-\pi) \sum_{v\in Z} \left|(N_m)^\wedge(\omega+2\pi\ell)\right|^2 d\omega$$

и

$$\left\|s_n^{(m-1)}\right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |m_n(\omega)|^2 \left|1-e^{-i\omega}\right|^{2m-2} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_n(\omega-\pi) \left|1-e^{-i\omega}\right|^{2m-2} d\omega.$$

При $n \to \infty$ получим

$$\frac{\left\|s_n^{(m-1)}\right\|_2^2}{\|s_n\|_2^2} = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_n(\omega-\pi) \left|1-e^{-i\omega}\right|^{2m-2} d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_n(\omega-\pi) \sum_{v\in Z} \left|(N_m)^\wedge(\omega+2\pi\ell)\right|^2 d\omega} \to$$

$$\to \frac{\left|1-e^{-i\pi}\right|^{2m-2}}{\sum_{v\in Z} \left|(N_m)^\wedge(\pi+2\pi\ell)\right|^2} = \pi^{2m-2}\frac{K_1}{K_{2m-1}}.$$

Теорема полностью доказана.

Библиографические ссылки

1. **Корнейчук Н. П** Экстремальные свойства полиномов и сплайнов / Н.П. Корнейчук, В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун – К, 1992. – 304 с.
2. **Корнейчук Н. П.** Сплайны в теории приближения. М., 1984 - 352 с.
3. **Тихомиров В.М.** Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений// Успехи мат. наук. – 1960 – 15, №3 – С. 81–120.
4. **Субботин Ю.Н.** О кусочно-полиномиальной интерполяции// Мат. заметки. – 1967 – 1, №1 – С. 24–29.
5. **Бабенко В.Ф.** Неравенства типа Бернштейна для полиномиальных сплайнов в пространстве L_2 / В.Ф. Бабенко, С.А. Пичугов // Укр. мат. журн.- 1991.-43.№3.-С. 420-422.
6. **Магарил–Ильяев Г.Г.** О наилучших приближениях сплайнами функциональных классов на оси// Труды матем. инст. Стеклова. – 1992 – 194 – С. 153-154.
7. **Чуи. К.** Введение в вейвлеты. – М., 2001 – 412 с.

Надійшла до редколегії 20 02 08

УДК 517.5

В.Ф. Бабенко[*,**], М.С. Чурілова[*]

[*] *Дніпропетровський національний університет*

[**] *Інститут прикладної математики і механіки НАН України*

ПРО НЕРІВНОСТІ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА ДІЙСНІЙ ОСІ

Одержано нові нерівності, які узагальнюють відомий результат Гейсберга, одержаний для дробових похідних у формі Маршо, на випадок більш високих порядків похідних, причому дробова похідна береться за Ріссом. Нерівність зі старшою другою похідною є точною.

Нерівності типу Колмогорова для норм проміжних похідних, особливо з непокращуваними константами, знаходять важливі застосування в багатьох галузях математики, і для цілих порядків похідних у цьому напрямку одержано чимало результатів [1]. Для дробових похідних таких нерівностей відомо значно менше. Деякі результати для похідних дробового порядку містяться в [2–5; 8–10; 12].

У даній статті для функцій, заданих на дійсній осі, для похідних за Ріссом установлюється аналог результата Гейсберга [4], одержаного для дробових похідних у формі Маршо. При цьому порівняно з результатом Гейсберга збільшуються порядки як старших (цілих) похідних, так і проміжної (дробової).

Наведемо спочатку основні використовувані означення.

Через $C = C(R)$ будемо позначати простір усіх неперервних та обмежених на R функцій $f : R \to R$ з нормою

$$\|f\|_C = \|f\|_{C(R)} := \sup_{x\in R}|f(x)|.$$

Через $L_p(R)$, $1 \le p \le \infty$, будемо позначати простір вимірюваних функцій $f : R \to R$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(R)} := \begin{cases} \left(\int_R |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in R}|f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Для $r \in N$ та $s \in [1,\infty]$ позначимо через $L_s^r(R)$ множину функцій $f : R \to R$ таких, що $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} = f$) локально абсолютно неперервна та $f^{(r)} \in L_s(R)$ і покладемо $L_{p,s}^r(R) := L_p(R) \cap L_s^r(R)$.

Означення 1 [7, с. 95-97]. *Дробова похідна у формі Маршо порядку* $\alpha \in (0,1)$ *функції* $f : R \to R$ *визначається формулою*

$$(D_{\pm}^{\alpha}f)(x)=\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{f(x)-f(x\mp t)}{t^{1+\alpha}}dt$$

(коли ці інтеграли існують), де $\Gamma(x)$ *– гама-функція Ейлера.*

Для заданого $\lambda>0$ та $r\in N$ через $\varphi_{\lambda,r}$ будемо позначати r-й $\frac{2\pi}{\lambda}$–періодичний інтеграл від функції $\varphi_{\lambda,0}(t):=\operatorname{sgn}\sin\lambda t$ з нульовим середнім значенням на періоді; $\varphi_r:=\varphi_{1,r}$. Функції $\varphi_{\lambda,r}$ називають *ідеальними сплайнами Ейлера.*

Ми також будемо використовувати такі функції: $\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}$, яка дорівнює $\varphi_{\lambda,r}\left(x+(r-1)\frac{\pi}{2\lambda}\right)$, якщо $x\in\left[-\frac{\pi}{\lambda},\frac{\pi}{\lambda}\right]$, і $\max\limits_t\varphi_{\lambda,r}(t)$, якщо $x\notin\left[-\frac{\pi}{\lambda},\frac{\pi}{\lambda}\right]$; $\widetilde{\varphi}_r:=\widetilde{\varphi}_{1,r}$ та функцію $\overline{\varphi}_2$, яка дорівнює: $\varphi_2(x)$, якщо $x\in[-\pi/2,\pi/2]$; $\max\limits_t\varphi_2(t)$, якщо $x\in(\pi/2,\infty)$; $\min\limits_t\varphi_2(t)$, якщо $x\in(-\infty,-\pi/2)$.

Результат Гейсберга [4] можна подати в такому вигляді.

Теорема 1. *Нехай* $\alpha\in(0,1)$. *Для всіх функцій* $f\in L^2_{\infty,\infty}(R)$ *справедливі точні нерівності*

$$\left\|D_{\pm}^{\alpha}f\right\|_{\infty}\le\frac{\left\|D_{\pm}^{\alpha}\overline{\varphi}_2\right\|_{\infty}}{\left\|\overline{\varphi}_2\right\|_{\infty}^{1-\frac{\alpha}{2}}}\|f\|_{\infty}^{1-\frac{\alpha}{2}}\|f''\|_{\infty}^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{1}$$

У даній статті одержано аналог теореми 1 для дробових похідних за Ріссом порядку $\alpha\in(0,2)$ [7]; при цьому порядок старшої похідної може дорівнювати $r=2,3,...$, та для $r=2$ знаходиться найкраща константа.

Означення 2. *Дробова похідна за Ріссом порядку* $\alpha\in(0,2)$ *функції* $f:R\to R$ *визначається формулою*

$$(D^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}\int_0^{\infty}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^{1+\alpha}}dh$$

(коли цей інтеграл існує); причому при $\alpha=1$ *нормуючий множник вважається рівним своєму граничному значенню при* $\alpha\to1$, *тобто рівним* $(-2/\pi)$.

Важливу роль у наших міркуваннях відіграватиме теорема порівняння Колмогорова для похідних. Наведемо її формулювання як воно дається в [6, с. 122]. Нехай

$$W_{\infty}^{r}(R)=\left\{f\in L_{\infty,\infty}^{r}(R):\left\|f^{(r)}\right\|_{\infty}\le1\right\}.$$

Теорема 2. *Нехай* $f\in W_{\infty}^{r}(R)$ *(*$r=1,2,...$*) та* $\|f\|_{\infty}=\left\|\varphi_{\lambda,r}\right\|_{\infty}$ *для деякого* λ. *Тоді:*

1) *якщо* $f(x)=\varphi_{\lambda,r}(y)$, *то* $|f'(x)|\le|\varphi'_{\lambda,r}(y)|$ *(для* $r=1$ *у припущенні, що* $f'(x)$ *існує);*

2) *справедливі непокращувані (в умовах теореми) нерівності*

$$\left\|f^{(k)}\right\|_\infty \le \left\|\varphi^{(k)}_{\lambda,r}\right\|_\infty = \left\|\varphi_{\lambda,r-k}\right\|_\infty, \quad k=1,2,\dots,r-1.$$

Наведемо основний результат даної статті.

Теорема 3. *Нехай* $\alpha\in(0,2)$ *і* $r=2,3,\dots$ *Тоді для всіх функцій* $f\in L^r_{\infty,\infty}(R)$ *справедлива нерівність*

$$\left\|D^\alpha f\right\|_\infty \le \frac{\left\|D^\alpha\widetilde{\varphi}_r\right\|_\infty}{\left\|\widetilde{\varphi}_r\right\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{r}}}\left\|f\right\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{r}}\left\|f^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{\alpha}{r}}. \tag{2}$$

Для $r=2$ *константа* $\left\|D^\alpha\widetilde{\varphi}_r\right\|_\infty/\left\|\widetilde{\varphi}_r\right\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{r}}$ *у (2) є непокращуваною та (2) перетворюється на рівність для функції* $\widetilde{\varphi}_r$.

Зауваження. Для $\alpha\in(0,1)$ твердження теореми встановлено авторами в [10]. У даній роботі ми покажемо, що міркування з [10] практично без змін переносяться на випадок $\alpha\in(0,2)$.

Доведення. Візьмемо спочатку функцію f таку, що $\left\|f^{(r)}\right\|_\infty=1$ та виберемо $\lambda>0$ так, щоб $\|f\|_\infty=\left\|\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}\right\|_\infty$. Будемо оцінювати $|(D^\alpha f)(0)|$.

Зауважимо, що ми можемо вважати функцію f парною, оскільки для парної функції $f^*(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, як випливає з означення похідної, $(D^\alpha f^*)(0)=(D^\alpha f)(0)$, та, згідно з властивостями норми, $\|f^*\|_\infty\le\|f\|_\infty$ і $\left\|f^{*(r)}\right\|_\infty\le\left\|f^{(r)}\right\|_\infty$; отже, якщо нерівність справедлива для f^*, вона також справедлива і для f.

Для доведення нерівності (2) доведемо оцінку

$$\left|(D^\alpha f)(0)\right|\le\left|(D^\alpha\widetilde{\varphi}_{\lambda,r})(0)\right|. \tag{3}$$

Для цього, враховуючи парність f, покажемо, що для всіх $h>0$

$$|f(h)-f(0)|\le\left|\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(h)-\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(0)\right|.$$

Розглянемо 3 випадки.

1) Нехай спочатку $0<h<\frac{\pi}{2\lambda}$. Нехай $g(x)=x+h$, якщо $x\in(-h,0]$; $g(x)=-x+h$, якщо $x\in(0,h)$, і $g(x)=0$, якщо $x\notin(-h,h)$. Неважко перевірити, що

$$f(h)-f(0)=\frac{1}{2}\int_{-h}^{h}f''(x)g(x)dx.$$

Через $r(f,x)$ будемо позначати спадне переставлення звуження функції $|f|$ на проміжок $[-h,h]$ (означення і властивості спадного переставлення [6, с. 111-113].

Спочатку доведемо одну допоміжну нерівність для переставлень. Точніше, покажемо, що для всіх $x\in(0,2h)$

$$\int_{0}^{x}\left[r(\tilde{\varphi}''_{\lambda,r},x)-r(f'',x)\right]dx\geq 0. \qquad (4)$$

Варто зазначити, що $r(\tilde{\varphi}''_{\lambda,r},0)\geq r(f'',0)$ (це випливає з означення переставлення та з того факту, що оскільки $\|f\|_{\infty}=\|\tilde{\varphi}_{\lambda,r}\|_{\infty}$, то за теоремою 2 $\|f''\|_{\infty}\leq\|\tilde{\varphi}''_{\lambda,r}\|_{\infty}$). Далі, покажемо, що різниця $\psi(x)=r(\tilde{\varphi}''_{\lambda,r},x)-r(f'',x)$ змінює знак на інтервалі $[0,2h]$ не більше одного разу. Дійсно, припустимо, що ψ змінює знак більше одного разу. Тоді існують три точки $y_1<y_2<y_3$ такі, що $\psi(y_1)>0$, $\psi(y_2)<0$ та $\psi(y_3)>0$. Позначимо через z_1 та z_2 ($y_1<z_1<y_2<z_2<y_3$) найближчі до точки y_2 нулі цієї різниці. Тоді на інтервалі (z_1,z_2) буде $\psi(x)<0$ (та $\psi(z_2)=0$). Таким чином, на інтервалі (y_2,z_2) існує така точка x_1, що $\psi'(x_1)>0$ і отже $|r'(f'',x_1)|>|r'(\tilde{\varphi}''_{\lambda,r},x_1)|$. Нехай $x_0\in(0,x_1)$ – така точка, що $|r(f'',x_1)|=|r(\tilde{\varphi}''_{\lambda,r},x_0)|$. Тоді обов'язково

$$|r'(f'',x_1)|>|r'(\tilde{\varphi}''_{\lambda,r},x_0)|. \qquad (5)$$

Але ця нерівність суперечлива. Дійсно,

$$|r'(\tilde{\varphi}''_{\lambda,r},x_0)|=\frac{1}{\frac{1}{|\tilde{\varphi}'''_{\lambda,r}(x_0^1)|}+\frac{1}{|\tilde{\varphi}'''_{\lambda,r}(x_0^2)|}},$$

де точки x_0^1 та x_0^2 є такими, що $\tilde{\varphi}''_{\lambda,r}(x_0^1)=\tilde{\varphi}''_{\lambda,r}(x_0^2)=|r(\tilde{\varphi}''_{\lambda,r},x_0)|$. До того ж існує щонайменше дві точки x_1^1 та x_1^2 такі, що $|f''(x_1^2)|=|f''(x_1^1)|=|r(f'',x_1)|$ і

$$|r'(f'',x_1)|\leq\frac{1}{\frac{1}{|f'''(x_1^1)|}+\frac{1}{|f'''(x_1^2)|}}.$$

За теоремою 2 маємо $\left|f'''\left(x_1^1\right)\right| \le \left|\widetilde{\varphi}'''_{\lambda,r}\left(x_0^1\right)\right|$ і $\left|f'''\left(x_1^2\right)\right| \le \left|\widetilde{\varphi}'''_{\lambda,r}\left(x_0^2\right)\right|$. Але тоді

$$\left|r'\left(f'', x_1\right)\right| \le \left|r'\left(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x_0\right)\right|,$$

що суперечить (5).

Нарешті,

$$\int_0^{2h} r\left(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x\right)dx \ge \int_0^{2h} r\left(f'', x\right)dx.$$

Дійсно, згідно з властивостями переставлень ця нерівність еквівалентна нерівності

$$\int_{-h}^{h} \left|\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}(x)\right|dx \ge \int_{-h}^{h} \left|f''(x)\right|dx,$$

яка є частковим випадком результату Б. Боянова і Н. Найдьонова [11, теорема 3].

Враховуючи все вищесказане, бачимо, що різниця $\psi(x)$ змінює знак з «+» на «–» та інтеграл від $\psi(x)$ по інтервалу $[0, \bar{x}]$, де вона додатна, більший за інтеграл по інтервалу $[\bar{x}, 2h]$, де вона від'ємна. Таким чином, первісна $\Psi(x) = \int_0^x \psi(x)dx$, зростаючи до точки $\bar{x}$ та спадаючи після неї, зменшується на величину, яка менша за максимальне значення $\psi(x)$ у точці $\bar{x}$, і отже залишається невід'ємною. Нерівність (4) доведено.

Тоді, згідно з лемою 3.2.6 [6, с. 114]

$$\int_0^{2h} r\left(f'', x\right) r(g, x)dx \le \int_0^{2h} r\left(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x\right) r(g, x)dx. \tag{6}$$

Повернемося тепер до нашої оцінки. Враховуючи властивості переставлень та нерівність (6), маємо

$$\left|f(h) - f(0)\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{-h}^{h} f''(x)g(x)dx\right| \le \frac{1}{2}\int_0^{2h} r\left(f'', x\right) r(g, x)dx \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^{2h} r\left(\widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}, x\right) r(g, x)dx = \frac{1}{2}\int_{-h}^{h} \widetilde{\varphi}''_{\lambda,r}(x)g(x)dx = \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(h) - \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(0),$$

що й потрібно було довести.

2) Нехай тепер $\frac{\pi}{2\lambda} \le h < \frac{\pi}{\lambda}$. Якщо припустити, що для деякого h

$$\left|f(h) - f(0)\right| > \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(h) - \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(0),$$

то одержуємо суперечність з лемою 3.3.1 [6, с. 119], яка використовується при доведенні теореми 2, і отже, оскільки $f(x)$ та $\widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(x)$ задовольняють умови теореми 2, маємо

$$\left|f(h) - f(0)\right| \le \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(h) - \widetilde{\varphi}_{\lambda,r}(0).$$

3) Для $h \in \left[\frac{\pi}{\lambda}, +\infty\right)$ ця нерівність негайно випливає з обмеження $\|f\|_\infty = \|\tilde{\varphi}_{\lambda,r}\|_\infty$.

Використовуючи доведену нерівність, одержуємо (зауважимо, що константа $\Gamma(-\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}$ є від'ємною при розглядуваних значеннях α)

$$\left|\left(D^\alpha f\right)(0)\right| \le \frac{-1}{2\Gamma(-\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{|f(h)+f(-h)-2f(0)|}{h^{1+\alpha}} dh \le$$

$$\le \frac{-1}{2\Gamma(-\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{\tilde{\varphi}_{\lambda,r}(h)+\tilde{\varphi}_{\lambda,r}(-h)-2\tilde{\varphi}_{\lambda,r}(0)}{h^{1+\alpha}} dh =$$

$$= -\left(D^\alpha \tilde{\varphi}_{\lambda,r}\right)(0) \le \left|\left(D^\alpha \tilde{\varphi}_{\lambda,r}\right)(0)\right| \quad ,$$

тобто оцінку (3) доведено. З цієї оцінки випливає нерівність

$$\left\|D^\alpha f\right\|_\infty \le \left\|D^\alpha \tilde{\varphi}_{\lambda,r}\right\|_\infty = \lambda^{-r+\alpha}\left\|D^\alpha \tilde{\varphi}_r\right\|_\infty .$$

Підставляючи в одержану нерівність λ, яке за припущенням було вибране рівним $\lambda = \left(\|\tilde{\varphi}_r\|_\infty \|f\|_\infty^{-1}\right)^{\frac{1}{r}}$, для функцій з $\left\|f^{(r)}\right\|_\infty = 1$ отримуємо нерівність (2):

$$\left\|D^\alpha f\right\|_\infty \le \frac{\left\|D^\alpha \tilde{\varphi}_r\right\|_\infty}{\|\tilde{\varphi}_r\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{r}}} \|f\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{r}} \left\|f^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{\alpha}{r}} .$$

Якщо тепер взяти довільну функцію f таку, що $\left\|f^{(r)}\right\|_\infty > 0$, то, розглядаючи функцію $f_* = \frac{f}{\left\|f^{(r)}\right\|_\infty}$ та застосовуючи до неї доведену нерівність, одержуємо, що нерівність (2) має місце для всіх функцій $f \in L^r_{\infty,\infty}(R)$. Коли $r = 2$, то для $\tilde{\varphi}_2 \in L^2_{\infty,\infty}(R)$ нерівність перетворюється на рівність, оскільки $\left\|\tilde{\varphi}_2''\right\|_\infty = 1$. Теорему доведено.

Для $r > 2$ функція $\tilde{\varphi}_r \notin L^r_{\infty,\infty}(R)$, оскільки вже її друга похідна має розриви в точках $-\pi, \pi$. Тому в цьому випадку ми не можемо застосувати нашу нерівність до $\tilde{\varphi}_r$ і не можемо нічого сказати про точність доведеної нерівності.

Застосувавши до нерівностей (1) та (2) метод Стейна [13] (див. також [1, с. 84]), одержимо їхні аналоги у просторі $L_p(R)$, $1 \le p < \infty$; при цьому питання про точність одержаних нерівностей залишається відкритим.

Теорема 4. *1) Нехай* $\alpha \in (0,1)$. *Для всіх функцій* $f \in L^2_{p,p}(R)$, $1 \le p < \infty$, *справедливі нерівності*

$$\left\|D_{\pm}^{\alpha} f\right\|_{p} \leq \frac{\left\|D_{\pm}^{\alpha} \overline{\varphi}_{2}\right\|_{\infty}}{\left\|\overline{\varphi}_{2}\right\|_{\infty}^{1-\frac{\alpha}{2}}}\|f\|_{p}^{1-\frac{\alpha}{2}}\left\|f''\right\|_{p}^{\frac{\alpha}{2}} .$$

2) Нехай $\alpha \in (0,2)$ *і* $r = 2,3,\ldots$ *Тоді для всіх функцій* $f \in L_{p,p}^{r}(R), 1 \leq p < \infty$, *справедлива нерівність*

$$\left\|D^{\alpha} f\right\|_{p} \leq \frac{\left\|D^{\alpha} \widetilde{\varphi}_{r}\right\|_{\infty}}{\left\|\widetilde{\varphi}_{r}\right\|_{\infty}^{1-\frac{\alpha}{r}}}\|f\|_{p}^{1-\frac{\alpha}{r}}\left\|f^{(r)}\right\|_{p}^{\frac{\alpha}{r}} .$$

Бібліографічні посилання

1. **Бабенко В.Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов // К., 2003. – 590 с.
2. **Бабенко В.Ф.** Про нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку / В.Ф. Бабенко, М.Г. Чурілова // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 2001, Вип.6. – С. 16–20.
3. **Бабенко В.Ф.** О неравенствах типа Колмогорова для дробных производных в многомерном случае / В.Ф. Бабенко, М.С. Чурилова // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 2003, Вип.8. – С. 26–30.
4. **Гейсберг С.П.** Обобщение неравенства Адамара. Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций // Сб. науч. тр. ЛОМИ. – 1965. – 50. – С. 42–54.
5. **Гейсберг С.П.** Дробные производные ограниченных на оси функций // Известия вузов. – Математика 11 (1968). – С. 51–69.
6. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближений. – М., 1987. – 424 с.
7. **Самко С.Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения./ С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев // Минск, 1987. – 650 с.
8. **Чурилова М.С.** О неравенствах типа Ландау-Колмогорова для дробных производных на отрезке // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 2005, Вип.10. – С. 47–56.
9. **Arestov V.V.** Inequalities for fractional derivatives on the half-line // Approximation theory, Banach center publications. – 1979. – Vol. 4. – P. 19–34.
10. **Babenko V.F.** On the Kolmogorov type inequalities for fractional derivatives / V.F. Babenko, M.G. Churilova // East Journ. on Approx. – 2002. – V.8, № 4. – P. 437–446.
11. **Bojanov B.** An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. A solution of Erdos problem / B. Bojanov, N. Najdenov // Journal d'Analyse Mathematique. – 1999. – Vol. 78. – P. 263–280.
12. **Magarill-Il'yaev G.G.** On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line / G.G. Magarill-Il'yaev, V.M. Tikhomirov // Anal. Math. – 1981. – Vol. 7, № 1. – P. 37–47.
13. **Stein E.M.** Functions of exponential type // Ann. Math. – 1957. – V. 65, № 3. – P. 582–592.

Надійшла до редколегії 20 02 08

УДК 517.51

Л.Г.Бойцун, С.В. Кочерга
Дніпропетровський національний університет

АБСОЛЮТНЕ ПІДСУМОВУВАННЯ МЕТОДОМ Г.Ф. ВОРОНОГО ІНТЕГРАЛІВ ФУР'Є З МНОЖНИКОМ

Наведена теорема, що пов'язана з функціональним методом Г.Ф.Вороного. Встановлені достатні умови, які накладені на функцію, що породжує метод підсумовування Г.Ф.Вороного, на функцію-множник та на функцию $f(t)$, при яких інтеграл Фур'э цієї функції з множником абсолютно підсумовувається функціональним методом Г.Ф.Вороного.

Нехай функція $f(u)$ інтегрована на кожному скінченому проміжку, $S(t)=\int_0^t f(u)du$. Функціональний метод підсумовування Г.Ф.Вороного інтеграла $\int_0^\infty f(u)du$ визначається наступним чином. Нехай дана інтегрована на кожному скінченому проміжку функція $p(t)$ і $P(y)=\int_0^y p(t)dt$. Якщо

$$\lim_{y\to\infty}\tau(y)=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{P(y)}\int_0^y P(y-u)f(u)du=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(y-u)S(u)du=I,$$

то кажуть, що інтеграл $\int_0^\infty f(u)du$ підсумовується методом Г.Ф. Вороного до I або скорочено $(W,p(y))$ – підсумовуємо до I [1], і абсолютно підсумовується $(W,p(y))$, або підсумовується$|W,p(y)|$, якщо $\int_0^\infty |\tau'(y)|dy\le K$.

Якщо $p(t)=\alpha t^{\alpha-1}$, $\alpha>0$,метод підсумовування Г.Ф. Вороного перетворюється у відомий метод підсумовування Чезаро додатного порядку.

Інтеграл Фур'є функції $f(t)\in L(-\infty;\infty)$, згідно [2], має вигляд

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(t-x)dt.$$

Доводиться наступна теорема.

Теорема. *Нехай додатна функція* $\lambda(y)$ *неперервно диференційована така, що* $\lambda'(y)\le 0$,

$$\int_0^\infty \frac{\lambda(y)}{y+1}dy<\infty,\qquad \int_0^\infty \frac{\lambda(y)\ln(1+y)}{y}dy<\infty,$$

і нехай $p(y)$ *додатна, монотонно зростаюча функція така, що*

$$\frac{p(y)}{P(y)}=O\left(\frac{1}{y}\right),\qquad \left(\frac{P(y)}{p(y)}\right)'=O(1).$$

Тоді, якщо $\int_0^t \frac{1}{2}\left|f(x+u)+f(x-u)\right|du = o(t),\ t\to 0$, *то* $\int_0^\infty \lambda(y)A(y,x)dy$ *підсумовується* $\left|W,p(y)\right|$.

Для доведення теореми нам потрібні леми.

Лема 1. *Нехай* $\tau(y)=\frac{1}{P(y)}\int_0^y P(y-u)f(u)du$.

Тоді

$$\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(y-u)\left[\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right]f(u)du=\frac{P(y)}{p(y)}\tau'(y).$$

Доведення. Дійсно,

$$\tau'(y)=-\frac{p(y)}{P^2(y)}\int_0^y P(y-u)f(u)du+\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(y-u)f(u)du=$$

$$=\frac{1}{P^2(y)}\int_0^y\left[P(y)p(y-u)-P(y-u)p(y)\right]f(u)du,$$

звідки

$$\frac{P(y)}{p(y)}\tau'(y)=\frac{1}{P(y)p(y)}\int_0^y\left[P(y)p(y-u)-P(y-u)p(y)\right]f(u)du=$$

$$=\frac{1}{P(y)}\int_0^y\left[\frac{P(y)p(y-u)}{p(y)}-P(y-u)\right]f(u)du=$$

$$=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(y-u)\left[\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right]f(u)du.$$

Лема 2. *Нехай* $0<t$ *і* $S(y,t)=\int_0^y p(y-u)\left[\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right]\cos ut\,du$.

Тоді

$$S(y,t)=\begin{cases}O\left(yP(y)\right), & \text{для } 0<t\le\frac{1}{y},\\ O\left(\frac{yP(y)}{t}\right), & \text{для } \frac{1}{y}<t\end{cases}$$

Доведення. Для $0<t\le\frac{1}{y}$

$$\left|S(y,t)\right|\le\int_0^y p(y-u)\left|\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right|du\le$$

$$\le\frac{P(y)}{p(y)}\int_0^y p(y-u)du+\int_0^y P(y-u)du=$$

$$=\frac{P^2(y)}{p(y)}+\int_0^y P(u)du\le\frac{P^2(y)}{p(y)}+yP(y)\le 2yP(y).$$

Нехай $t>\frac{1}{y}$. Інтегруючи частинами, маємо

$$S(y,t)=\left\{\begin{matrix} p(y-u)\cos ut = dv & v=\int_0^u p(y-z)\cos ztdz \\ \frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-u)}{p(y-u)}=u & du=-\left(\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right)' du \end{matrix}\right\}=$$

$$=\left[\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right]\int_0^u p(y-z)\cos ztdz\Big|_0^y +$$

$$+\int_0^y\left(\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right)' du\int_0^u p(y-z)\cos ztdz=$$

$$=\frac{P(y)}{p(y)}\int_0^u p(y-z)\cos ztdz+\int_0^y\left(\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right)' du\, p(y)\int_0^\lambda \cos ztdz=$$

$$=\frac{P(y)}{p(y)}p(y)\int_0^v \cos ztdz+\int_0^y\left(\frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right)' p(y)\frac{\sin\lambda t}{t}du=$$

$$=\frac{P(y)\sin vtp(y)}{p(y)t}+O\left(\frac{yp(y)}{t}\right)=O\left(\frac{yp(y)}{t}\right),$$

$0\le\lambda\le u$, $0\le v\le y$ за теоремою про середнє значення і того, що $\frac{P(y)}{yp(y)}\le 1$.

Лема 3. *Нехай*

$$S(y,v,t)=\int_0^v p(y-z)\left(\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-z)}{p(y-z)}\right)\cos ztdz.$$

Тоді

$$S(y,v,t)=\begin{cases} O\left(v^2p(y)\right), \text{ для } 0<t\le\frac{1}{y}, \\ O\left(\frac{vp(y)}{t}\right), \text{ для } t>\frac{1}{y}. \end{cases}$$

Доведення. Інтегруючи частинами, отримаємо для $0<t\le\frac{1}{y}$

$$S(y,v,t)=\left[\frac{P(y)}{p(y)}-\frac{P(y-v)}{p(y-v)}\right]_0^v\int p(y-u)\cos utdu \;+$$

$$+\int_0^v\left(\frac{P(y-z)}{p(y-z)}\right)' dz\int_0^z p(y-u)\cos utdu=\left(\frac{P(y-z)}{p(y-z)}\right)'_{u=\xi}\int_0^\eta \cos utdu+$$

$$+\int_0^v\left(\frac{P(y-z)}{p(y-z)}\right)' dzp(y)\int_0^{\eta_1}\cos utdu=$$

$$= O(1)O\left(\frac{\nu p(y)\sin\eta t}{t}\right) + \left(\int_0^{\nu} p(y)dz \left|\int_0^{\eta_1}\cos utdu\right|\right) =$$

$$= O\left(\nu^2 p(y)\right) + O\left(p(y)\int_0^{\nu} zdz\right) = O\left(\nu^2 p(y)\right),$$

де $y-u \le \xi \le y$, $0 \le \eta \le \nu$, $0 \le \eta_1 \le z \le \nu$.

Далі для $t > \frac{1}{y}$:

$$S(y,\nu,t) = O\left(\frac{\nu p(y)}{t}\right) + O\left(\int_0^{\nu} p(y)\frac{|\sin\eta_1 t|}{t}dt\right) = O\left(\frac{\nu p(y)}{t}\right).$$

Лема 4. *Нехай*

$$K(y,t) = \frac{1}{P(y)}\int_0^{y} p(y-z)\left[\frac{P(y)}{p(y)} - \frac{P(y-z)}{p(y-z)}\right]\lambda(z)\cos ztdz \cdot$$

Тоді

$$K(y,t) = \begin{cases} O\left(\frac{p(y)}{P(y)}\int_0^{y} z^2\left(-\lambda'(z)\right)dz\right) + O\left(y\lambda(y)\right), & \text{для} \quad 0 < t \le \frac{1}{y}, \\ O\left(\frac{p(y)}{P(y)}\int_0^{y} z\left(-\lambda'(z)\right)dz\right) + O\left(\lambda(y)\frac{yp(y)}{P(y)t}\right), & \text{для} \quad t > \frac{1}{y}. \end{cases}$$

Доведення. Інтегруючи частинами, маємо

$$K(y,t) = \frac{\lambda(y)}{P(y)}S(y,y,t) - \frac{1}{P(y)}\int_0^{y} S(y,z,t)\lambda'(z)dz,$$

звідки за лемою 3 отримуємо для $0 < t \le \frac{1}{y}$

$$K(y,t) = O\left(\frac{y^2 p(y)}{P(y)}\lambda(y)\right) + O\left(\frac{1}{P(y)}\int_0^{y} z^2 p(y)\left(-\lambda'(z)\right)dz\right) =$$

$$= O\left(y\lambda(y)\right) + O\left(\frac{p(y)}{P(y)}\int_0^{y} z^2 p(y)\left(-\lambda'(z)\right)dz\right)$$

Для $\frac{1}{y} < t$ за лемою 3

$$K(y,t) = O\left(\frac{\lambda(y)yp(y)}{P(y)t}\right) + O\left(\frac{1}{P(y)}\int_0^{y}\frac{zp(y)}{t}\left(-\lambda'(z)\right)dz\right) =$$

$$= O\left(\lambda(y)\frac{yp(y)}{tP(y)}\right) + O\left(\frac{p(y)}{tP(y)}\int_0^{y} z\left(-\lambda'(z)\right)dz\right).$$

Лема 5. *Якщо* $\lambda(y)$ *задовольняє умовам теореми, то*

$$\int_0^\infty \ln(y+1)\lambda'(y)dy < \infty.$$

Доведення. Інтегруючи частинами, маємо

$$\int_0^A \lambda'(y)\ln(y+1)dy = \ln(A+1)\lambda(A) - \int_0^A \frac{\lambda(y)}{y+1}dy.$$

Але $\lambda(A)\ln(A+1) = O(1)$, коли $A \to \infty$, тоді

$$\int_0^A \lambda'(y)\ln(y+1)dy = O(1), \text{ коли } A \to \infty.$$

Доведення теореми. Ми маємо $\tau'(y) = \frac{1}{P(y)}\int_0^y P(y-u)\lambda(u)A(u,x)dx.$

За лемою 1 $\tau'(y) = \frac{p(y)}{P^2(y)}\int_0^y p(y-u)\left[\frac{P(y)}{p(y)} - \frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right]\lambda(u)A(u,x)du,$

де $A(u,x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(t)\cos utdt.$

$$\int_0^\infty |\tau'(y)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_0^y p(y-u)\left|\left[\frac{P(y)}{p(y)} - \frac{P(y-u)}{p(y-u)}\right]\lambda(u)du\int_0^\infty \varphi(t)\cos utdt\right| =$$

$$= \int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_0^\infty |\varphi(t)||K(y,t)|dt = \int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_0^{\frac{1}{y}} |\varphi(t)||K(y,t)|dt +$$

$$+ \int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_{\frac{1}{y}}^\infty |\varphi(t)||K(y,t)|dt = I_1 + I_2.$$

Оцінимо кожний із інтегралів I_1, I_2. За лемою 4 та умовою теореми маємо

$$I_1 = O\left(\int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_0^{\frac{1}{y}} |\varphi(t)|dt\frac{p(y)}{P(y)}\int_0^y z^2(-\lambda'(z))dz\right) +$$

$$+ O\left(\int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_0^{\frac{1}{y}} |\varphi(t)|y\lambda(y)dt\right) =$$

$$= O\left(\int_0^\infty \frac{p^2(y)}{yP^2(y)}dy\int_0^y z^2(-\lambda'(z))dz\right) + O\left(\int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\frac{1}{y}y\lambda(y)dy\right) =$$

$$=O\left(\int_0^\infty \frac{dy}{y^3}\int_0^y z^2\left(-\lambda'(z)\right)dz\right)+O\left(\int_0^\infty \frac{\lambda(y)}{y+1}dy\right)=$$

$$=O\left(\int_0^\infty z^2\left(-\lambda'(z)\right)dz\int_z^\infty \frac{dy}{y^3}\right)+O(1)=$$

$$=O\left(\int_0^\infty \left(-\lambda'(z)\right)dz\right)+O(1)=O(1).$$

За лемою 4

$$I_2=O\left(\int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_{\frac{1}{y}}^\infty |\varphi(t)|\frac{p(y)dt}{P(y)t}\int_0^y z^2\left(-\lambda'(z)\right)dz\right)+$$

$$+O\left(\int_0^\infty \frac{p(y)}{P(y)}dy\int_{\frac{1}{y}}^\infty |\varphi(t)|\lambda(y)\frac{yp(y)}{P(y)t}dt\right)=$$

$$=O\left(\int_0^\infty \frac{p^2(y)}{P^2(y)}dy\int_0^y z\left(-\lambda'(z)\right)dz\int_{\frac{1}{y}}^\infty \frac{|\varphi(t)|}{t}dt\right)+$$

$$+O\left(\int_0^\infty \frac{yp^2(y)}{P^2(y)}\lambda(y)dy\int_{\frac{1}{y}}^\infty \frac{|\varphi(t)|}{t}dt\right)=$$

$$=O\left(\int_0^\infty \frac{\ln(1+y)}{y^2}dy\int_0^y z\left(-\lambda'(z)\right)dz\right)+O\left(\int_0^\infty \frac{\lambda(y)}{y}\ln(1+y)dy\right)=$$

$$=O\left(\int_0^\infty z\left(-\lambda'(z)\right)dz\int_z^\infty \frac{\ln(1+y)}{y^2}dy\right)+O(1).$$

Двічі інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int_z^\infty \frac{\ln(1+y)}{y^2}dy=\frac{\ln(1+z)}{z}+\frac{1}{z},$$

так що

$$I_2=O\left(\int_0^\infty \ln(1+z)\left(-\lambda'(z)\right)dz\right)+O\left(\int_0^\infty \left(-\lambda'(z)\right)dz\right)+O(1)=O(1)$$

за лемою 5.

Це завершує доведення теореми.

Наслідок. Нехай функція $\lambda(y)$ задовольняє умовам теореми. Якщо $\int_0^t|\varphi(t)|dt=O(t)$, $t\to 0$, тоді інтеграл $\int_0^\infty \lambda(y)A(y,x)dy$ підсумовується $|C,\alpha|$, $\alpha>1$.

Бібліографічні посилання

1. **Вороной Г.Ф.** Расширение понятия о пределе суммы членов бесконечного ряда // Собр. соч.: В 3 т.– К., 1952. – Т.3. – С.9 –10.
2. **Титчмарш Е.** Введение в теорию интеграла Фурье. – М., 1948. – 453 с.

Надійшла до редколегії 17.11.07

УДК 517.5

С. Б. Вакарчук*, М. Б. Вакарчук**, В. И. Забутная**

**Академия таможенной службы Украины*

***Днепропетровский национальный университет*

О РАВНОМЕРНОМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ НЕПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ КОНТИНУУМОВ

Показано, що деякі з одержаних С. Н. Бернштейном результатів з конструктивної теорії функцій при виконанні певних умов мають місце для рівномірної поліноміальної апроксимації функцій, аналітичних у скінченому числі континуумів, що не перетинаються. На основі одержаних результатів для певного класу аналітичних функцій обчислено асимптотичні значення деяких *n*-поперечників.

Для решения различных задач теории приближения в комплексной плоскости **C** используют полиномы, дробно-рациональные функции, комплексные и аналитические сплайны [11; 6; 14; 1; 4]. В частности, хорошо известно, какую роль играют полиномы Фабера в конструктивной теории функций комплексного переменного [3; 11; 12] и в решении экстремальных задач теории аппроксимации в **C** [2; 10; 15]. Для решения задач теории полиномиального приближения на континуумах, состоящих из нескольких изолированных частей, Дж. Уолш определенным образом обобщил понятие многочленов Фабера [17; 19]. Дальнейшие исследования в этом направлении были проведены П. Я. Киселевым [7; 8], перенесшим при помощи многочленов Фабера-Уолша ряд результатов С. Я. Альпера на множества указанного вида. Данная статья продолжает названную тематику и посвящена распространению некоторых классических результатов, таких как теоремы С. Н. Бернштейна – Уолша [12, с. 78 – 84] на рассматриваемый случай.

Пусть в расширенной комплексной плоскости **C** задано замкнутое подмножество M, состоящее из нескольких изолированных подмножеств, а именно – из m непересекающихся между собой континуумов $M_1,\ldots, M_m$, каждый из которых ограничен, не разбивает плоскость и содержит более одной точки. Дополнение D множества M в **C** является m-связной областью, которая содержит бесконечно удаленную точку. Пусть $b_1,\ldots, b_m$ – отличные друг от друга произвольные конечные точки в комплексной плоскости W, а $\nu_1,\ldots,\nu_m$ – положительные числа, такие, что $\sum\limits_{j=1}^{m}\nu_j = 1$. Имея в виду главное значение, запишем функцию $H(w)=\prod\limits_{j=1}^{m}(w-b_j)^{\nu_j}$. В [10] Дж. Уолш показал, что, используя $b_1,\ldots, b_m$, можно составить такую бесконечную последовательность чисел $\{\beta_j\}_{j\in N}$, каждое из которых равно одному из чисел b_j ($j=\overline{1,m}$), что на произвольном замкнутом ограниченном множестве Ω плоскости W, не содержащем точек b_j ($j=\overline{1,m}$), при любом $k \in \mathbf{N}$, имеет место неравенство

$$0 < c_1 \le \left|\frac{H_k(w)}{H^k(w)}\right| \le c_2 < \infty, \tag{1}$$

где c_1 и c_2 – абсолютные константы, $H_k = \prod_{j=1}^{k}(w-\beta_j)$. Из [18] следует, что существует функция $w = \Phi(z)$, отображающая конформно и однолистно область D на область $Q \overset{df}{=} \{w \in W : |H(w)| > 1\}$ при выполнении условий $\Phi(\infty) = \infty$ и $\Phi^{(1)} > 0$. Также существует обратная ей функция $z = \Psi(w)$. Через γ_R ($R>1$) обозначим линию в плоскости W, на которой $|H(w)| \equiv R$, а через Γ_R обозначим ее образ в плоскости **C** при отображении $z = \Psi(w)$. В случае $R = 1$ кривая $\Gamma \overset{df}{=} \Gamma_1$ является границей ∂M множества M. Под G_R понимаем внутренность линии Γ_R, а под D_R – общую часть внешностей всех замкнутых кривых, составляющих Γ_R.

Обозначим через $E_n(f, M)$ наилучшее приближение аналитической на континууме M функции f алгебраическими полиномами комплексного переменного z степени, не превосходящей $n-1$ в пространстве $C(M)$; $\|f\| = \|f\|_{C(M)} = \sup\{|f(z)| : z \in M\}$.

Как и в [8], всюду далее полагаем, что отображение $z = \Psi(w)$ имеет на линии γ_1 непрерывную и отличную от нуля первую производную $\Psi^{(1)}(w)$ и ограниченную вторую производную $\Psi^{(2)}(w)$. Тогда для отображающей функции $\Psi(w)$ выполняется условие [12, с.308]

$$\int_{\gamma_1}\left|\frac{\Psi^{(1)}(t)}{\Psi(t)-\Psi(w)} - \frac{1}{t-w}\right||dt| \le c_3; \quad |H(w)| \ge 1, \tag{2}$$

где c_3 – константа. Вышесказанное означает, что все континуумы $M_j(\overline{1,m})$ ограничены достаточно гладкими кривыми ∂M_j.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть отличная от алгебраического полинома функция f является аналитической на континууме M, имеющем границу, удовлетворяющую условию (2).* Тогда существует бесконечная последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_j < \ldots$, для которой

$$E_{n_j}(f, M) \succ\!\prec |a_{n_j}(f)| \quad (j \in N), \tag{3}$$

где $a_m(f)$ ($m \in Z_+$) – коэффициенты разложения функции в ряд Фабера-Уолша, а символ «$\succ\!\prec$» означает отношение слабой эквивалентности.

Теорема 2. *Пусть континуум M имеет гладкую границу, удовлетворяющую условию (2), и функция f, являясь аналитической на* *множестве* $G_{R_0}(R_0>1)$, *перестает быть такой на множестве* G_R *при любом* $R>R_0$. *Тогда справедливо предельное равенство*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{E_n(f,M)}=\frac{1}{R_0}. \qquad (4)$$

Перейдем к доказательству сформулированных теорем.

Доказательство теоремы 1. Будучи аналитической на континууме M, функция f является аналитической в некоторой области G_ρ, где $\rho>1$. При этом она разлагается в ряд Фабера-Уолша

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(f)U_k(z) \qquad (z\in M), \qquad (5)$$

где

$$U_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho}\frac{H_k(\Phi(\xi))}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{H_n(t)\Psi'(t)}{\Psi(t)-z}dt \qquad (6)$$

есть многочлены Фабера-Уолша, а

$$a_k(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\Psi(t))}{H_{k+1}(t)}dt \qquad (7)$$

– коэффициенты указанного разложения. Поскольку дальнейшие рассуждения касаются непосредственно аппроксимации функции на континууме M с достаточно гладкой границей $\Gamma=\partial M$, то в силу [12, с.308] в интегралах (6) и (7) вместо Γ_ρ и γ_ρ можно поставить соответственно ∂M и γ_1, что мы и сделаем ниже.

Многочлены Фабера-Уолша являются ограниченными в совокупности для рассматриваемых в данной статье областей.

Используя (5) и определение наилучшего равномерного полиномиального приближения, запишем оценку сверху

$$E_n(f,M)\le\left\|f-\sum_{k=0}^{n-1}a_k(f)U_k\right\|\le\sum_{k=n}^{\infty}|a_k(f)|\,\|U_k\|\le c_4\sum_{k=n}^{\infty}|a_k(f)|. \qquad (8)$$

Поскольку ряд (5) сходится равномерно на линии Γ_r [12], где $1<r<\rho$ – произвольное фиксированное число, то очевидно, что при $k\to\infty$ для произвольного $z\in\Gamma_r$ имеем

$$|a_k(f)|\,|U_k(z)|\to 0. \qquad (9)$$

Известно [12, с.307], что

$$c_5|H_k(\Phi(z))|\le|U_k(z)|\le c_6|H_k(\Phi(z))| \quad (\forall z\in\Gamma_r), \qquad (10)$$

где k – произвольное натуральное число, а c_5 и c_6 – константы, не зависящие от z и k. Используя (1) и левую часть неравенства (10), получим

$$|U_k(z)|\ge c_7\left|H^k(\Phi(z))\right|=c_7r^k, \qquad (11)$$

где $c_7\overset{df}{=}c_1c_5$. Из (9) и (11) следует, что при $k\to\infty$ $\lambda_k\overset{df}{=}|a_k(f)|r^k\to 0$.

Далее нам понадобится один факт, приведенный в [9, с.40]: если $\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\ldots$ – произвольная последовательность положительных чисел и $\lim\{\lambda_k : k\to\infty\}=0$, то существует бесконечно много номеров n, для которых λ_n превосходит все следующие за ним члены $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \lambda_{n+3},\ldots$. На основании этого заключаем, что существует бесконечная подпоследовательность индексов $n_1<n_2<\ldots<n_j<\ldots$ такая, что

$$\left|a_{n_j}(f)\right|r^{n_j} \geq \left|a_{n_{j+m}}(f)\right|r^{n_{j+m}}$$

для любых m и j из **N**. Отсюда имеем

$$\frac{\left|a_{n_{j+m}}(f)\right|}{\left|a_{n_j}(f)\right|} \leq r^{-m}. \tag{12}$$

Тогда для произвольного числа $n_j(j\in N)$ на основании (8) и (12) получим

$$E_{n_j}(f,M) \leq c_4\left|a_{n_j}(f)\right|\sum_{m=0}^{\infty} r^{-m} = c_8\left|a_{n_j}(f)\right| \quad \left(c_8 \overset{df}{=} c_4 r/(r-1)\right). \tag{13}$$

Пусть $P_n(z)$ – произвольный алгебраический многочлен комплексного переменного z, имеющий степень, не превосходящую $n-1$. Для него справедливо разложение вида (5) в ряд по многочленам Фабера-Уолша, то есть

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(P_n)U_k(z).$$

В этой формуле все коэффициенты разложения $a_k(P_n)=0$ при $k \geq n$.

Поскольку

$$a_n(P_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{P_n(\Psi(t))}{H_{n+1}(t)}dt,$$

то очевидно, что

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(\Psi(t)) - P_n(\Psi(t))}{H_{n+1}(t)}dt.$$

Используя (1), отсюда получим $\left|a_n(f)\right| \leq c_9\left\|f - P_n\right\|$, где $c_9 \overset{df}{=} l_1/(2\pi c_1)$, $l_1 \overset{df}{=} l(\gamma_1)$ – длина кривой γ_1. В силу определения величины $E_n(f,M)$ и произвольности выбора полинома $P_n(z)$, отсюда имеем оценку снизу

$$\left|a_n(f)\right| \leq c_9 E_n(f,M). \tag{14}$$

Сопоставив неравенства (13) и (14), получим соотношение (3). Теорема 1 доказана.

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 1 и при некотором $R_1 \in (1,R)$ числовая последовательность $\left\{\left|a_k(f)\right|R_1^k\right\}_{k\in N}$ начиная с некоторого $n_0 \in \mathbf{N}$ является невозрастающей и стремящейся к нулю. Тогда для любого натурального числа $n \geq n_0$

$$E_n(f,M) \succ\prec \left|a_n(f)\right|.$$

Действительно, для любых $j,k \in N$, где $k \geq n$, имеем

$$\frac{|a_{k+j}(f)|}{|a_k(f)|} \leq \frac{1}{R_1^j}.$$

Используя (8), отсюда получим

$$E_n(f,M) \leq c_4 |a_n(f)| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{R_1^j} = \frac{c_4 R_1}{R_1 - 1} |a_n(f)|.$$

Из этого неравенства и (14) следует требуемое соотношение $E_n(f,M) \succ\prec |a_n(f)|$.

Доказательство теоремы 2. Поскольку [12, с.307]

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k(f)|} = \frac{1}{R_0}, \tag{15}$$

то для произвольного $\varepsilon \in (0;1-1/R_0)$ существует $k_0=k_0(\varepsilon)$, такое, что для любого натурального числа $k \geq k_0$ справедливо неравенство

$$|a_k(f)| \leq \left(\frac{1}{R_0} + \varepsilon\right)^k.$$

Используя (8), отсюда получим для всех $n \geq k_0$

$$E_n(f,M) \leq c_4 \left(\frac{1}{R_0} + \varepsilon\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{R_0} + \varepsilon\right)^m = \frac{c_4}{1 - 1/R_0 - \varepsilon} \left(\frac{1}{R_0} + \varepsilon\right)^n.$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f,M)} \leq \frac{1}{R_0} + \varepsilon.$$

В силу произвольного выбора ε отсюда имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f,M)} \leq \frac{1}{R_0}. \tag{16}$$

Из (14) получим

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(f)|} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f,M)}. \tag{17}$$

Требуемое предельное равенство (4) следует из соотношений (15) – (17). Теорема 2 доказана.

Пусть A(M) – пространство аналитических на компакте M функций f с равномерной нормой $\|f\|$, а A_Q^M – класс функций $f \in A(M)$, допускающих аналитическое продолжение в область Q, содержащую M, и удовлетворяющих условию $\sup\{|f(z)| : z \in Q\} \leq 1$. Воспользуемся полученными выше результатами для нахождения сильной асимптотики некоторых n-поперечников класса $A_{G_{R_0}}^M$. Для этого напомним необходимые понятия и определения применительно к рассматриваемому случаю.

Пусть B – единичный шар в A(M); K – выпуклое центрально-симметричное подмножество из A(M); $L_n \subset A(M)$ – n-мерное подпространство; $L^n \subset A(M)$ – подпространство коразмерности n; $\Lambda^{\perp} : A(M) \to L_n$ – непрерывный оператор линейного проектирования; $\Lambda : A(M) \to L_n$ – линейный непрерывный оператор.

Величины

$$d_n(K, A(M)) = \inf_{L_n \subset A(M)} \sup_{f \in K} \inf_{\varphi \in L_n} \|f - \varphi\|,$$

$$\delta_n(K, A(M)) = \inf_{L_n \subset A(M)} \inf_{\Lambda\ A(M) \to L_n} \sup_{f \in K} \|f - \Lambda f\|,$$

$$d^n(K, A(M)) = \inf_{L^n \subset A(M)} \sup_{f \in K \cap L^n} \|f\|,$$

$$\Pi_n(K, A(M)) = \inf_{L_n \subset A(M)} \inf_{\Lambda^{\perp}: A(M) \to L_n} \sup_{f \in K} \|f - \Lambda^{\perp} f\|,$$

$$b_n(K, A(M)) = \sup_{L_{n+1} \subset A(M)} \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon B \cap L_{n+1} \subset K\}$$

называют соответственно колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным и бернштейновским n-поперечниками. Между этими характеристиками имеют место следующие неравенства [13], [16]:

$$b_n(K,A(M)) \le d_n(K,A(M)) \le \delta_n(K,A(M)) \le \Pi_n(K,A(M)), \tag{18}$$

$$b_n(K,A(M)) \le d^n(K,A(M)) \le \delta_n(K,A(M)). \tag{19}$$

Приведем краткие сведения из истории рассматриваемого вопроса. В случае невырожденного континуума M, имеющего односвязное дополнение и расположенного в ограниченной односвязной области Q, В. Д. Ерохин исследовал аппроксимативные характеристики класса A_Q^M [6]. При помощи соответствующего обобщения полиномов Фабера им было получено следующее равенство

$$\varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{d_n(A_Q^M, A(M))} = \frac{1}{R},$$

где R есть конформный модуль двусвязной области Q\M [5, с.209]. Переход от односвязного случая к конечносвязному был сделан В. М. Тихомировым и А. Л. Левиным в приложении к [6, с.119 – 131]. В нем получена формула

$$\varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{d_n(A_Q^M, A(M))} = \exp(-1/\tau)$$

($\tau = \tau(Q, M)$ – некоторая константа) для ситуации, когда Q есть область комплексной плоскости, граница которой состоит из конечного числа замкнутых аналитических жордановых кривых без вырожденных точек, а компакт M есть объединение конечного числа лежащих в Q кривых, удовлетворяющих ряду требований. Дальнейшие результаты, в той или иной мере касающиеся этого направления, изложены в [14, с.217 – 218].

Теорема 3. *Пусть континуум M состоит из m непересекающихся между собой континуумов $M_1,\dots,M_m$ и имеет гладкую границу, для которой выполнено условие (2); $p_n(\cdot)$ есть любой из n-поперечников, перечисленных выше.* Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{p_n(A^M_{G_{R_0}},A(M))}=\frac{1}{R_0}. \qquad (20)$$

Доказательство. Для произвольной функции $f\in A^M_{Q_{R_0}}$ запишем разложение в ряд Фабера-Уолша (5). В силу определения проекционного n-поперечника, (8), (18), (19) и теоремы 2 получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{p_n(A^M_{G_{R_0}},A(M))}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\Pi_n(A_{G_{R_0}},A(M))}\le$$
$$\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\sup_{f\in A^M_{G_{R_0}}}\left\|f-\sum_{k=0}^{n-1}a_k(f)\cdot U_k\right\|}\le\frac{1}{R_0}. \qquad (21)$$

С другой стороны рассмотрим множество B_{n+1}, состоящее из полиномов $P_{n+1}(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k(P_{n+1})\cdot U_k(z)$, для которых $\|P_{n+1}\|\le1$. Используя (1) и интегральное представление (7) для коэффициентов полинома P_{n+1}, где вместо кривой γ_ρ интегрирование производится по кривой γ_1, имеем

$$|a_k(P_{n+1})|\le c_9\quad(k=\overline{0,n}).$$

Тогда в силу (10) и (1) для любого полинома $P_{n+1}\in B_{n+1}$ запишем

$$\sup_{z\in G_{R_0}}|P_{n+1}(z)|\le\sum_{k=0}^{n}|a_k(P_{n+1})|\cdot\sup_{z\in G_{R_0}}|U_k(z)|\le c_{10}\cdot R_0^n,$$

где $c_{10}\overset{df}{=}c_6c_9R_0/(R_0-1)$. Следовательно, шар $\varepsilon_*\cdot B_{n+1}$ где $\varepsilon_*\overset{df}{=}1/(c_{10}\cdot R_0^n)$, принадлежит классу $A^M_{G_{R_0}}$.

Из определения бернштейновского n-поперечника и (18) – (19) имеем

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{p_n(A^M_{G_{R_0}},A(M))}\ge\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{b_n(A^M_{G_{R_0}},A(M))}\ge\frac{1}{R_0}. \qquad (22)$$

Сопоставив (21) и (22) получим соотношение (20), чем и завершим доказательство теоремы 3.

В качестве замечания отметим, что из доказательства леммы 2 из [6, с.129] и (20) следует предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{H_\varepsilon(A^M_{G_{R_0}})}{\ln^2\frac{1}{\varepsilon}}=\frac{1}{R_0},$$

где $H_\varepsilon(A^M_{G_{R_0}})$ обозначает ε-энтропию компакта $A^M_{G_{R_0}}$.

Библиографические ссылки

1. **Вакарчук М. Б.** О связи между комплексной сплайн-аппроксимацией и непрерывной дифференцируемостью функций на кривой // Известия вузов. Математика. – 1998. – № 5 (432). – С. 3 – 5.
2. **Вакарчук С. Б.** О поперечниках некоторых классов аналитических функций // Укр. матем. журн. – 1992. – 44, № 3. – С. 324 – 333.
3. **Вакарчук С. Б.** О наилучшем приближении в среднем и сверхсходимости последовательности полиномов наилучшего приближения // Укр. матем. журн. – 2000. – 52. – № 1. – С. 35 – 45.
4. **Вакарчук С. Б.** Аналитические сплайны и поперечники функциональных классов / С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная // Теория приближения и задачи вычислительной математики: Тезисы докладов междунар. Конф., посвященной 75-летию госуниверситета, Днепропетровск, 26 – 28 мая 1993 г. – Д., 1993. – С. 37.
5. **Голузин Г. М.** Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М., 1966. – 628 с.
6. **Ерохин В. Д.** О наилучшей линейной аппроксимации функций, аналитически продолжимых с данного континуума в данную область // Успехи математических наук. – 1968. – 23, № 1. – С. 91 – 132.
7. **Киселев П. Я.** О приближении аналитических функций полиномами Фабера-Уолша // Укр. матем. журн. – 1963. – 15, № 2. – С. 193 – 199.
8. **Киселев П. Я.** Некоторые вопросы аппроксимации аналитических функций в конечном числе областей // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. – Баку, 1965. – С. 326 – 332.
9. **Полиа Г.** Задачи и теоремы из анализа. В 2-х томах. Том 1. / Г. Полиа, Г. Сеге. – М., 1956. – 396 с.
10. **Романюк В. С.** Колмогоровские поперечники классов функций, аналитических в ограниченных областях комплексной плоскости // Ряды Фурье: теория и приложения. Сб. науч. тр. – К., 1992. – С. 119 – 126.
11. **Смирнов В. И.** Конструктивная теория функций комплексного переменного // В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев. – М., Л., 1964. – 438 с.
12. **Суетин П. К.** Ряды по многочленам Фабера. – М., 1984. – 336 с.
13. **Тихомиров В. М.** Некоторые вопросы теории приближений. – М., 1976. – 304 с.
14. **Тихомиров В. М.** Теория приближений // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М., 1987. – Т. 14. – С.103 – 260.
15. **Фарков Ю. А.** О проекторе Фабера // Применение функционального анализа в теории приближений. – Сб. науч. тр. – Калинин, 1985. – С. 112 – 118.
16. **Pincus A.** n-Widths in Approximation Theory. – Berlin, 1985. – 292 p.
17. **Walsh J. L.** Sur l'approximation par fonctions rationelles et par fonctions holomorphes bornees // Ann. di Math. Pura ed Applicata – 1955. – 39. – P.267 – 277.
18. **Walsh J. L.** On the conformal mapping of multiplay connected regions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – 82, № 1. – P.128 – 146.
19. **Walsh J. L.** A generalization of Faber's polynomials // Matem. Ann. – 1958. – 136, № 1. – P. 23 – 33.

Надійшла до редколегн 31 10 07

УДК 517.51

С.В. Гончаров, В.П. Моторный
Днепропетровский национальный университет

ОЦЕНКИ ОБОБЩЕННЫХ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА ЧАСТНЫХ СУММ ФУРЬЕ-ЯКОБИ

Встановлено у деяких випадках оцінки узагальнених констант Лебега сум Фур'є-Якобі у просторах $L_{p,w}$.

Пусть $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ – многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом

$$\rho(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}, \qquad (\alpha>-1, \beta>-1) \tag{1}$$

и нормированные условием: $P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}$, w(x) – некоторая весовая функция на $[-1,1]$. Через $L_{p,w}$ обозначим пространство измеримых на отрезке $[-1,1]$ функций f, для которых $fw^{1/p}\in L_p$. Частную сумму порядка n ряда Фурье-Якоби функции $f\in L_{p,\rho}$ будем обозначать через $S_n^{\alpha,\beta}(f)$. Частные суммы $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ можно рассматривать как оператор действующий в некотором подпространстве X пространства $L_{p,w}$. Норма этого оператора $\| S_n^{\alpha,\beta}\|_X=\sup\limits_{\|f\|_X\le 1}\| S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_X$ называется константой Лебега. В силу неравенства Лебега

$$\| f-S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_X\le (1+\| S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_X)E_n(f)_X,$$

где $E_n(f)_X$ – наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше n в пространстве X. Ограниченность констант Лебега влечет сходимость ряда Фурье-Якоби для любой функции в пространстве X, если в пространстве X имеет место теорема Вейерштрасса, а также определяет порядок сходимости частных сумм ряда Фурье-Якоби $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ к f в пространстве X. В работах Х.Полларда [17–18}, Дж.Неймана и У.Рудина [16], Г.Винга [19] и Б.Маккенхоупта [15] были выделены пространства интегрируемых с весом функций, в которых константы Лебега ограничены. Наиболее общий результат получен Б.Маккенхоуптом [15] и формулируется он следующим образом.

Пусть $1<p<\infty$, $w(t)=(1-t)^A(1+t)^B$ – *вес вида* (1). *Тогда для того чтобы* $\| S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{L_{p,w}}$ *были ограничены, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\begin{aligned} &|A/p+1/p-(\alpha+1)/2|<\min\{1/4,(\alpha+1)/2\},\\ &|B/p+1/p-(\beta+1)/2|<\min\{1/4,(\beta+1)/2\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Следующий шаг, естественно, состоял в том чтобы найти условия, которые нужно наложить на функцию f, достаточные для разложения f в ряд Фурье-Якоби в пространствах $L_{p,w}$ в случаях, когда не выполняются условия (2). Оказалось, что для определения порядка сходимости и условий сходимости частных сумм $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ к f в пространстве $L_{p,w}$ в случаях, когда константы Лебега неограниченны и $p<2$, решающее значение имеет наименьшая константа C_γ в неравенстве

$$\| S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{L_{p,w}} \le C_\gamma \| f(x)(\sqrt{1-x^2}+1/n)^{-\gamma} \|_{L_{p,w}},$$

где γ – некоторое положительное число. Константа C_γ называется модифицированной или обобщенной константой Лебега. Для многочленов Лежандра и весовой функции $w(x) = 1$ оценки констант C_γ и их применения получены в [7 – 10]. Для многочленов Якоби и весовой функции $w(x) = 1$ эти константы изучались в [12 – 13]. Для ультрасферических многочленов $P_n^{(\alpha;\alpha)}(x)$ и весовой функции $w(x)=(1-x^2)^\alpha$, если $\alpha\in(-0{,}5;\ 0)$ оценки обобщенных констант Лебега получено в [5]. Понятно, что оценки обобщенных констант Лебега следует находить лишь тогда, когда константы Лебега неограничены, т.е. когда не имеет место хотя бы одно из условий (2). Отметим, что константы Лебега в случаях, когда не имеют место условия (2), исследовались в работах [1– 4; 6– 10]. Наиболее общий случай рассмотрен в [6].

В данной работе получены оценки модифицированных констант Лебега для многочленов Якоби при условии, что $\alpha,\beta\in(-0{,}5;\ 0)$ и $A=\alpha$, $B=\beta$. В силу симметрии многочленов Якоби ($P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^n P_n^{(\beta;\alpha)}(-x)$) можно считать, что $\beta<\alpha$. Положим $\mu=(\alpha+1)(1/p-1/2)$; $\nu=(\beta+1)(1/p-1/2)$. Так как $p<2$ и $\beta<\alpha$, то $0<\nu<\mu<(\alpha+1)/2$. Поэтому первое из условий (2) будет нарушаться, если $\mu\in[1/4;\ (\alpha+1)/2)$. При этом второе из условий (2) может выполняться. В последнем случае интересно знать: будет ли влиять неограниченность констант Лебега на сходимость $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ к f на всем отрезке $[-1;\ 1]$ или только на отрезке $[0;\ 1]$? Оценки констант Лебега, полученные в [6] не учитывают нарушение только одного или обоих условий (2). Для указанных значений β и α их можно представить виде:

$$D_{1,\mu} n^{2\mu-1/2} \le \| S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{L_{p,w}} \le D_{2,\mu} n^{2\mu-1/2}, \quad \text{если } \mu\in(1/4;\ (\alpha+1)/2),$$

$$D_1 Ln(n+1) \le \| S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{L_{p,w}} \le D_2 Ln(n+1), \quad \text{если } \mu=1/4.$$

Из этих оценок не видно будет ли $S_n^{\alpha,\beta}(f;x)$ сходиться к f(x) на всем на отрезке $[-1;\ 0]$ (естественно с весом $w(x)=(1+x)^\beta$) для любой функции $f\in L_{p,\rho}$, если первое из условий (2) не имеет место, а второе выполняется.

Пусть $p_\beta = 4(\beta+1)/(2\beta+3)$; $p_\alpha = 4(\alpha+1)/(2\alpha+3)$.. Заметим, что если $\mu \ge 1/4$, то $1 < p \le p_\alpha$. Если же $p > p_\alpha$, то $\mu < 1/4$ и в этом случае выполняются условия (2). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать случай $1 < p \le p_\alpha$. Если же $p_\beta < p \le p_\alpha$, то это будет означать, что первое из условий (3) не имеет место, а второе выполняется.. Положим $\varphi_\gamma(n;x) = (\sqrt{1-x} + 1/n)^\gamma$ и $\psi_\delta(n;x) = (\sqrt{1+x}+1/n)^\delta$. Основной результат работа содержится в следующих утверждениях.

Теорема 1. *Пусть* $-1/2 < \beta < \alpha < 0$, $p_\beta < p \le p_\alpha$ *и* $\gamma \ge 2\mu - 1/2$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{p,\rho}$ *имеет место неравенство:*

$$\left\|S_n^\alpha(f;x)\right\|_{L_{p,\rho}} \le \begin{cases} C_{\gamma,p} \| f(x)/(\sqrt{1-x}+1/n)^\gamma \|_{L_{p,\rho}}, & \gamma > 2\mu - 1/2, \quad p < p_\alpha, \\ C_p \ln^{1/q}(n+1) \| f(x)/(\sqrt{1-x}+1/n)^\gamma \|_{L_{p,\rho}}, & \gamma = 2\mu - 1/2, \ p < p_\alpha, \\ 1/p + 1/q = 1 & \\ C \ln(n+1) \| f(x) \|_{L_{p,\rho}}, & \gamma = 0, \ p = p_\alpha, \\ C \ln^{1/p}(n+1) \| f(x)/(\sqrt{1-x}+1/n)^\gamma \|_{L_{p,\rho}}, & \gamma > 2\mu - 1/2, \ p = p_\alpha. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть* $-1/2 < \beta < \alpha < 0$, $p \le p_\beta$ *и* $\gamma \ge 2\mu - 1/2$, $\delta \ge 2\nu - 1/2$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{p,\rho}$ *имеет место неравенство:*

$$\left\|S_n^\alpha(f;x)\right\|_{L_{p\rho}} \le \begin{cases} C_{\gamma,\delta,p} \left\| \dfrac{f(x)}{\psi_\delta(n;x)\varphi_\gamma(n;x)} \right\|_{L_{p\rho}}, & \gamma > 2\mu - 1/2, \quad \delta > 2\nu - 1/2, \quad p < p_\beta, \\ C_p \ln^{1/q}(n+1) \left\| \dfrac{f(x)}{\psi_\delta(n;x)\varphi_\gamma(n;x)} \right\|_{L_{p\rho}}, & \gamma = 2\mu - 1/2 \text{ или } \delta = 2\nu - 1/2, \\ 1/p + 1/q = 1, \quad p < p_\beta, & \\ C \ln(n+1) \| f(x)/\varphi_\gamma(n;x) \|_{L_{p\rho}}, & \delta = 0, \ p = p_\beta, \ \gamma \ge 2\mu - 1/2, \\ C \ln^{1/p}(n+1) \| f(x)/\psi_\delta(n;x)\varphi_\gamma(n;x) \|_{L_{p,\rho}}, & \delta > 0, \ \gamma \ge 2\mu - 1/2, \ p = p_\beta. \end{cases}$$

Доказательство. Приведем доказательство теоремы 1, теорема 2 доказывается аналогично. Представим частную сумму $S_n^{\alpha,\beta}(f)$ ряда Фурье-Якоби в виде

$$S_n^{\alpha,\beta}(f;x) = \int_{-1}^{1} \sum_{k=1}^{3} a_n^k h(n;x,y) f(y)(1-y)^\alpha (1+y)^\beta dy, \qquad (3)$$

где

$$h_1(n;x,y)=(n+1)P_n^{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(y),$$

$$h_3(n;y,x)=h_2(n;x,y)=\frac{n(1-y^2)P_n^{\alpha,\beta}(x)P_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(y)}{x-y},$$

а a_n^k, b_n^k – ограниченные последовательности. Для многочленов $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ будем использовать следующие равенство и оценки [11, стр. 71]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^n P_n^{(\beta;\alpha)}(-x) \tag{4}$$

$$|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\le Cn^{-1/2}(1-x+n^{-2})^{-\alpha/2-1/4}, \quad 0\le x\le 1. \tag{5}$$

Положим

$$I_k=\int_{-1}^{1}\left|\int_0^1 h_k(n;x;y)f(y)(1-y)^\alpha dy\right|^p (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \quad k=1,2,3.$$

Благодаря представлению (3), ограниченности последовательностей a_n^k, b_n^k, достаточно оценить каждый интеграл I_k. Так как функция $h_1(n;x,y)$ представима в виде произведения функций, одна из которых зависит от x , а другая от y, то, в силу (4) и оценки (5) интеграл $I_1\le CP_1P_2$, где интеграл

$$P_1=\int_{-1}^{1}\left(1-x+\frac{1}{n^2}\right)^{-p\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\right)}\left(1+x+\frac{1}{n^2}\right)^{-p\left(\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}\right)}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx<C,$$

так как $-p(2\alpha+1)/4+\alpha>-p(2\beta+1)/4+\beta>-1/2$. Всюду в дальнейшем абсолютные константы будем обозначать буквой C, а величины, зависящие от параметров α,β,p (и других), через $C_{\alpha,\beta,p}$, хотя в разных местах они могут иметь разные значения. Сомножитель P_2 оценим, используя неравенство Гельдера:

$$P_2=\left(\int_{-1}^{1}|f(y)|\left(1-y+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\left(1+y+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}(1-y)^\alpha(1+y)^\beta dy\right)^p\le$$

$$\le C\int_{-1}^{1}|f(y)|^p\left(\sqrt{1-y}+1/n\right)^{-\gamma p}(1-y)^\alpha(1+y)^\beta dy\times$$

$$\times\left(\int_{-1}^{1}\left(1-y+\frac{1}{n^2}\right)^{q\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(1+y+\frac{1}{n^2}\right)^{q\left(-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\right)}(1-y)^\alpha(1+y)^\beta dy\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Очевидно, что I-й интеграл не превосходит $C\| f(\sqrt{1-y^2}+1/n)^{-\gamma}\|_{L_{p,\rho}}$. Если $\gamma > 2\mu - 1/2$, то $\alpha + q(\gamma/2 - \alpha/2 - 1/4) > -1$. Очевидно, что $\beta + q(-\beta/2 - 1/4) > -1$. Следовательно, второй интеграл не превосходит некоторой величины $C_{\gamma,p}$, зависящей от γ и p. Если $\gamma = 2\mu - 1/2$, то этот интеграл не превосходит $C\ln(n+1)$, для всех $p > p_\beta$. Таким образом для любого $p \in (p_\beta,\, p_\alpha]$ имеет место неравенство

$$I_1 \le \begin{cases} C_{\gamma,p}\| f(y)(\sqrt{1-y}+1/n)^{-\gamma}\|^p_{L_{p,\rho}}, \text{ если } \gamma > 2\mu - 1/2, \\ C\ln^{p/q}(n+1)\| f(y)(\sqrt{1-y}+1/n)^{-\gamma}\|^p_{L_{p,\rho}}, \text{ если } \gamma = 2\mu - 1/2. \end{cases} \tag{6}$$

Интеграл I_2 очевидно удовлетворяет неравенству:

$$I_2 \le 2^{p-1}\Bigg(\int_{-1}^{1}\Big|\int_0^1 f(y)h_2(n;x,y)(1-y)^\alpha(1+y)^\beta dy\Big|^p (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx\,|^p + \\ + \int_{-1}^{1}\Big|\int_{-1}^{0} f(y)h_2(n;x,y)(1-y)^\alpha(1+y)^\beta dy\Big|^p (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx\Bigg). \tag{7}$$

Чтобы оценить первый интеграл в (7), промежуток $[-1;1]$ представим в виде $[-1;\, -1/2]\bigcup[-1/2;\, 1]$ и интеграл по промежутку $[-1;\, -1/2]$ обозначим через $I_{2,1}$, по отрезку $[-1/2;\, 1]$ – через $I_{2,2}$. Так как $|x-y| \ge 1/2$, то воспользовавшись видом функции $h_2(n;x,y)$, равенством (4), оценкой (5) и неравенством $-p(\beta/2+1/4)+\beta > -1/2$, получим $I_{2,1} \le C\|f\|^p_{L_{p,\rho}}$. Интеграл $I_{2,2}$ не превосходит

$$C\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\left|\int_0^1 \frac{f(y)(1-y)^{1+\alpha}\varphi(y;n)}{(x-y)(1-x+1/n^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1-y+1/n^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}}}dy\right|^p (1-x)^\alpha dx, \tag{8}$$

где $\varphi(y;n)$ – ограниченная функция. Оценка интеграла (8) получена в [5 , (15 – 18)]: $I_{2,2} \le C\|f\|^p_{L_{p,\rho}}$. Аналогично оценивается второй интеграл в (7), лишь в этом случае промежуток интегрирования $[-1;1]$ следует представить в виде $[-1;\, 1/2]\bigcup[1/2;\, 1]$. Таким образом:

$$I_2 \le C\|f\|_{L_{p,\rho}}. \tag{9}$$

Также как интеграл I_2, I_3 оценим суммой двух интегралов:

$$I_3 \le 2^{p-1}\Bigg(\int_{-1}^{1}\Big|\int_0^1 f(y)h_3(n;x,y)(1-y)^\alpha(1+y)^\beta dy\Big|^p (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx + \\ + \int_{-1}^{1}\Big|\int_{-1}^{0} f(y)h_3(n;x,y)(1-y)^\alpha(1+y)^\beta dy\Big|^p (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx\Bigg). \tag{10}$$

В первом из интегралов (10) промежуток $[-1;1]$ представим в виде $[-1;\, -1/2]\bigcup[-1/2;\, 1]$ и интеграл по промежутку $[-1;\, -1/2]$ обозначим через

$I_{3,1}$, а по отрезку $[-1/2;\,1]$ – через $I_{3,2}$. Тогда, в силу (4 – 5) и выражения для $h_3(n;x,y)$,

$$I_{3,1} \le \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{\beta+p}}{(1+x+1/n^2)^{p(\beta/2+3/4}} dx \Big(\int_{0}^{1} \frac{|f(y)|(1-y)^{\alpha}\,dy}{(1-y+1/n^2)^{\alpha/2+1/4}} \Big)^{p}.$$

Первый множитель не превосходит константы, так как $\beta+p-p(\beta/2+3/4)>0$, а второй не превосходит CP_2. Следовательно

$$I_{3,1} \le \begin{cases} C_{\gamma,p}\,\| f(y)(\sqrt{1-y}+1/n)^{-\gamma}\|^{p}_{L_{p,\rho}}, \text{ если } \gamma > 2\mu - 1/2, \\ C\ln^{p/q}(n+1)\| f(y)(\sqrt{1-y}+1/n)^{-\gamma}\|^{p}_{L_{p,\rho}}, \text{ если } \gamma = 2\mu - 1/2. \end{cases} \tag{11}$$

Повторяя выкладки, приведенные в [5] при оценке интегралов $I_{3,1}$, $I_{3,2}$ и $I_{3,3}$, а также учитывая оценку для P_2, получим неравенство

$$I_{3,2} \le \begin{cases} C_{\gamma,p}\,\| f(x)/(\sqrt{1-x}+1/n)^{\gamma}\|^{p}_{L_{p,\rho}}, \quad \gamma > 2\mu-1/2, \quad p<p_{\alpha}, \\ C_p\ln^{p/q}(n+1)\| f(x)/(\sqrt{1-x}+1/n)^{\gamma}\|^{p}_{L_{p,\rho}}, \quad \gamma=2\mu-1/2, \ p<p_{\alpha}, \\ 1/p+1/q=1 \\ C\ln^{p}(n+1)\| f(x)\|^{p}_{L_{p,\rho}}, \quad \gamma=0, \ p=p_{\alpha}, \\ C\ln(n+1)\| f(x)/(\sqrt{1-x}+1/n)^{\gamma}\|^{p}_{L_{p,\rho}}, \gamma>2\mu-1/2, \ p=p_{\alpha}. \end{cases} \tag{12}$$

Во втором из интегралов (10) промежуток $[-1;1]$ представим в виде $[-1;\,1/2]\cup[1/2;\,1]$ и интеграл по промежутку $[-1;\,1/2]$ обозначим через $I^{-}_{3,1}$, а по отрезку $[1/2;\,1]$ – через $I^{-}_{3,2}$. Тогда, в силу (4 – 5) и выражения для $h_3(n;x,y)$,

$$I^{-}_{3,1} \le C\int_{-1}^{1/2}\left| \int_{-1}^{0} \frac{f(y)(1+y)^{\beta}\varphi(y;n)}{(x-y)\left(1+y+1/n^2\right)^{\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}\left(1+x+1/n^2\right)^{\frac{\beta}{2}+\frac{3}{4}}}dy\right|^{p}(1+x)^{p+\beta}dx.$$

В этом случае параметры p и β удовлетворяют условия (2), поэтому

$$I^{-}_{3,1} \le C_{\beta,p}\,\| f\|^{p}_{L_{p,\rho}}. \tag{13}$$

Так как $|x-y|\ge 1/2$, то воспользовавшись видом функции $h_2(n;x,y)$, равенством (4) и оценкой (5), получим

$$I^{-}_{3,2} \le C\int_{1/2}^{1}(1-x)^{p+\alpha}(1-x+1/n^2)^{-p(\alpha/2+3/4)}dx \ \times$$

$$\times\left(\int_{-1}^{0}|f(y)|(1+y)^{\beta}(1+y+1/n^2)^{-\beta/2-1/4}dy\right)^{p}. \qquad (14)$$

Так как $p+\alpha-p(\alpha/2+3/4)>0$, а $\beta-q(\beta/2+1/4)>-1$б, то первый множитель не превосходит 1, а второй интеграла P_2.

Из неравенств (6 – 14) следует теорема 1.

Библиографические ссылки

1. **Бадков В.М.** О приближении функций суммами Фурье-Якоби//ДАН СССР, 1966. – 167:4. – С. 731 –734.
2. **Бадков В.М.** Приближение функций частными суммами ряда Фурье по обобщенным многочленам Якоби//Матем. Заметки, 1968. – 3:6. – С. 671 – 682.
3. **Бадков В.М.** Оценки функций Лебега и остатка ряда Фурье-Якоби//СМЖ 1968. – 9:6. – С. 285 – 295.
4. **Бадков В.М.** Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным полиномам// УМН. – 1978. – Т. 33, № 4. – С. 51 –106.
5. **Гончаров С.В.** О сходимости рядов Фурье-Якоби в среднем/С.В. Гончаров, В.П. Моторный//Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2007, № 8, вип. 12. – С. 70 – 83.
6. **Казакова Н.М.** О порядках констант Лебега сумм Фурье-Якоби в простран-ствах L_p^r //Деп. в ВИНИТИ. – Свердловск, 1981. – 54 с.
7. **Моторный В.П.** О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра// ДАН СССР, 1972. – Т. 204, № 4. – С. 788 –790.
8. **Моторный В.П.** О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра//Изв. АН СССР. Сер. Мат. – 1973. – 37, №1. – С. 135 – 147.
9. **Моторный В.П.** Приближение функций алгебраическими многочленами в метрике L_p //Изв. АН СССР. Сер. Мат. – 1971. – 35, № 4. – С. 874 – 899.
10. **Моторный В.П.** Приближение функций суммами Фурье-Лежандра в среднем// ДАН СССР, 1981. – Т. 259, №1. – С. 39 – 42.
11. **Сегё Г.** Ортогональные ряды.- М.: 1962. – 500 с.
12. **Ходак Л.Б.** О сходимости рядов Фурье-Якоби в интегральной метрике//Деп. в Укр. НИИНТИ. – Днепропетровск, 1979. – 29 с.
13. **Ходак Л.Б.** Сходимость рядов Фурье по многочленам Якоби в среднем// Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982, № 8. – С. 28 – 31.
14. **Cartwright D.J.** Lebesque constant for Jacobi expansions// Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – V. 87, № 3. – p. 427 – 433/
15. **Muckehoupt B.** Mean convergence of Jacobi series//Proc. Amer. Math. Soc. 1969. – 23, №2. – P. 306 –310.
16. **Neuman J. and Rudin W.** Mean convergence of ortogonal series//Proc. Amer. Math. Soc. 1952. – 3. – P. 219 – 222.
17. **Pollard H.**The mean convergence of ortogonal series//Trans. Amer. J.Math. Soc.1947. – 62. – P. 387 – 403; Ibedem, 1948. – 63. – P. 355 –367.
18. **Pollard H.** The mean convergence of ortogonal series// Duke Math. J. 1949. 1948. – 16, № 1. –P. – 189 – 191.
19. **Wing G.M.** The mean convergence of ortogonal series//Amer. J.Math. 1950. – 72. – P. 792 – 807.

Надійшла до редколегії 24.01.08

УДК 51. 444

О.Ю.Дашкова
Киевский национальный университет

О НЕАБЕЛЕВЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ

Вивчаються неабелеві розв'язні нескінченновимірні лінійні групи нескінченного p–рангу ($p \geq 0$) і нескінченної фундаментальної вимірності такі, що кожна власна неабелева підгрупа нескінченного p-рангу має скінченну фундаментальну вимірність. Отримано опис будови груп цього класу.

Введение. Группа G всех автоморфизмов векторного пространства A над полем F называется полной линейной группой и обозначается GL(F,A). Подгруппы группы GL(F,A) называются линейными группами. Если размерность $\dim_F A$ векторного пространства A над F конечна, группа G называется конечномерной линейной группой, и GL(F,A) в этом случае может быть отождествлена с группой невырожденных квадратных матриц размерности $n \times n$, где $n = \dim_F A$. Конечномерные линейные группы играют важную роль в различных областях математики, физики и прикладных наук и изучались достаточно много.

Подгруппы группы GL(F,A) в случае, когда $\dim_F A$ бесконечна, исследовались мало, более того, такие исследования требуют дополнительных ограничений на рассматриваемые группы. Эта ситуация подобна ситуации, сложившейся при исследовании бесконечных групп с определенными условиями конечности. Одним из важных ограничений такого типа, налагаемых на бесконечномерные линейные группы, является финитарность линейной группы. Группа G называется финитарной, если для каждого ее элемента g подпространство $C_A(g)$ имеет конечную коразмерность в A. Финитарные линейные группы исследовались в [17; 18]). В частности, финитарные линейные группы являются линейным аналогом FC-групп. В [10; 16] обсуждались другие типы условий конечности, налагаемых на линейные группы, аналогичные хорошо известным условиям минимальности и максимальности для подгрупп.

Если H – подгруппа группы GL(F,A), то H реально действует на фактор-пространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Обозначим размерность $\dim_F(A/C_A(H))$ символом $\mathrm{centdim}_F(H)$. Если $\dim_F(A/C_A(H))$ конечна, будем говорить, что H имеет конечную центральную размерность. В противном случае полагаем, что H имеет бесконечную центральную размерность. В частности, группа G является финитарной линейной группой, если любая ее циклическая подгруппа имеет конечную центральную размерность. Отметим, что центральная размерность линейной группы зависит от векторного пространства, на котором она действует. В [9] изучались линейные группы бесконечной центральной размерности и бесконечного ранга, у которых любая собственная подгруппа бесконечного ранга имеет конечную центральную размерность.

В [2] было введено понятие фундаментальной размерности линейной группы. Пусть H – подгруппа группы GL(F,A). Рассмотрим подпространство [H,A] пространства A, которое порождается следующими элементами:

$$[H,A] = \langle v(g-1), g \in H, v \in A\rangle.$$

Назовем фундаментальной размерностью группы H размерность подпространства [H,A].

В настоящей работе исследуются неабелевы разрешимые линейные группы бесконечной фундаментальной размерности, у которых определенные условия конечности налагаются на собственные неабелевы подгруппы определенных бесконечных рангов.

Напомним, что группа G имеет конечный 0-ранг $r_0(G) = r$, если G обладает конечным субнормальным рядом с r бесконечными циклическими факторами, все остальные факторы которого периодические. Известно, что 0-ранг не зависит от выбора ряда и является числовым инвариантом. В случае почти полициклической группы 0-ранг называется числом Хирша. В частности, если группа G имеет конечный 0-ранг, $H \leq G$ и L – нормальная подгруппа группы G, тогда H и G/L также имеют конечный 0-ранг. Разрешимые группы конечного 0-ранга изучены достаточно хорошо [11]. В [12] эти исследования распространены на случай локально почти разрешимых групп конечного 0-ранга.

Пусть теперь p – простое число. Говорят, что группа G имеет конечный секционный p-ранг $r_p(G) = r$, если каждая элементарная абелева p-секция U/V группы G имеет порядок, не превосходящий p^r, и существует элементарная абелева p-секция U/V такая, что $|U/V| = p^r$. В частности, если группа G имеет конечный секционный p-ранг, $H \leq G$ и L – нормальная подгруппа группы G, тогда H и G/L также имеют конечный секционный p-ранг. В нашей работе мы будем говорить о секционном p-ранге, подразумевая, что p = 0, или p – простое число, делая необходимые оговорки, если это необходимо. Нас интересуют неабелевы группы бесконечной фундаментальной размерности и бесконечного секционного p-ранга, чьи собственные неабелевы подгруппы бесконечного секционного p-ранга имеют конечную фундаментальную размерность.

Далее мы получим ряд результатов о неабелевых группах бесконечной фундаментальной размерности и бесконечного секционного p-ранга, чьи собственные неабелевы подгруппы бесконечного секционного p-ранга имеют конечную фундаментальную размерность, исследуем неабелевы разрешимые группы, удовлетворяющие заданным условиям. Как оказалось, при p = 0 групп такого типа не существует вообще. Однако в случае простого числа p имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $G \leq GL(F,A)$ – неабелева разрешимая линейная группа и пусть $p > 0$. Предположим, что $r_p(G)$ и $ddim_F G$ бесконечны Если каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного секционного p-ранга имеет конечную фундаментальную размерность, то группа G удовлетворяет следующим условиям:*

(i) $G = HQ$, где H – нормальная подгруппа группы G, $H \cap Q = E$, $Q \cong C_{q\infty}$ для некоторого простого числа q, $q \neq p$;

(ii) H является p-группой конечной фундаментальной размерности, причем $char\, F = p$;

(iii) $K = H \cap Z(G)$ – конечная подгруппа;

(iv) H/K – бесконечная элементарная абелева p-группа;

(v) H/K – минимальная нормальная погруппа фактор-группы G/K.

Мы также получаем другие результаты о неабелевых линейных группах бесконечной фундаментальной размерности и бесконечного ранга, у которых все собственные неабелевы подгруппы бесконечного ранга имеют конечную фундаментальную размерность. В дальнейшем для удобства изложения секционный p-ранг группы будем называть просто p-рангом группы.

Предварительные результаты. Мы установим некоторые свойства неабелевых групп, у которых каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную фундаментальную размерность. Хотя эти результаты элементарны, они играют важную роль.

Лемма 1. *Пусть $G \leq GL(F,A)$ – неабелева группа, и пусть $r_p(G)$ и $ddim_F G$ бесконечны. Предположим, что каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную фундаментальную размерность. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(i) Если U и V – собственные неабелевы подгруппы группы G и $G = \langle U, V \rangle$, тогда по крайней мере одна из подгрупп U или V имеет конечный p-ранг;

(ii) Если H – собственная неабелева подгруппа группы G, имеющая бесконечный p-ранг, тогда любая подгруппа группы H и любая собственная подгруппа группы G, содержащая H, имеет конечную фундаментальную размерность;

(iii) Если K и L – собственные подгруппы группы G, содержащие неабелеву подгруппу H, имеющую бесконечный p-ранг, то $\langle K, L \rangle$ является собственной подгруппой группы G.

Лемма 2. *Пусть $G \leq GL(F,A)$ – разрешимая неабелева группа, и пусть $r_p(G)$ и $ddim_F G$ бесконечны. Предположим, что каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную фундаментальную размерность. Если H – собственная нормальная подгруппа группы G бесконечного p-ранга и фактор-группа G/H конечно порождена, тогда G/H является циклической q-группой для некоторого простого числа q.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай неабелевой подгруппы H. Тогда для любого элемента $g \in G$, $g \notin H$, подгруппа $\langle H, g \rangle$ является неабелевой. Предположим, что $G = \langle H, S \rangle$ для некоторого конечного множества S с тем свойством, что если R – собственное подмножество множества S, то $G \neq \langle H, R \rangle$. Пусть S состоит из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Если $k > 1$, тогда $\langle H, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1} \rangle$ и $\langle H, x_k \rangle$ являются собственными неабелевыми подгруппами бесконечного p-ранга, что противоречит лемме 1. Отсюда следует, что фактор-группа G/H является циклической. В случаях, когда фактор-группа G/H бесконечна, либо G/H конечна, но $\pi(G/H) > 1$, группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп бесконечного р-ранга, что противоречит лемме 1. Следовательно, фактор-группа G/H является циклической q-группой для некоторого простого числа q.

Пусть теперь подгруппа H абелева. Символом H_1 обозначим максимальную нормальную абслеву подгруппу группы G, содержащую подгруппу H, а символом C – централизатор $C_G(H_1)$. В силу определения централизатора для любого элемента $g \in G$, $g \notin C$, подгруппа $\langle C, g\rangle$ является неабелевой. Поэтому в случае, когда фактор-группа G/C не является циклической q-группой для некоторого простого числа q, группа G представима в виде произведения двух своих собственных неабелевых подгрупп бесконечного р-ранга, что противоречит лемме 1.

Осталось рассмотреть случай, когда фактор-группа $G/C=\langle g\rangle C/C$ – циклическая q-группа для некоторого простого числа q. Пусть подгруппа C абелева, и пусть a – элемент, не содержащийся в центре группы G. Обозначим через $M=C/\langle a\rangle^G$, $G_1=G/\langle a\rangle^G$. По построению фактор-группа M имеет бесконечный р-ранг. Обозначим через T периодическую часть группы M. Пусть $p \geq 0$ и $M \neq T$. Тогда фактор-группа M/T – нетривиальная абелева группа без кручения. Рассмотрим сначала случай, когда M/T является делимой. Поскольку фактор-группа G/C конечна, то, согласно теореме 5.9 [15], M/T разлагаетя в прямое произведение G-допустимых подгрупп конечного р-ранга. Если р-ранг фактор-группы M/T бесконечен, то группа G_1 представима в виде произведения двух своих собственных подгрупп $N_1 = S_1/\langle a\rangle^G$ и $N_2 = S_2/\langle a\rangle^G$ бесконечного р-ранга, таких, что подгруппы S_1 и S_2 содержат элемент g. Отсюда следует, что $G = S_1S_2$. Следовательно, группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп бесконечного р-ранга, что противоречит лемме 1.

Рассмотрим теперь случай, когда фактор-группа M/T не является делимой. Тогда найдется простое число r, для которого фактор-группа $(M/T)/(M/T)^r$ нетривиальна. Если $r \neq q$ и фактор-группа $(G_1/T)/(M/T)^r$ бесконечна, то, с учетом теоремы 5.9 [15], группа G_1 представима в виде произведения двух своих собственных подгрупп $G_2 = L/\langle a\rangle^G$ и $G_3 = F/\langle a\rangle^G$ бесконечного р-ранга, где подгруппы L и F содержат элемент g. По построению подгруппы L и F неабелевы, и $G = LF$. Противоречие с леммой 1. Если же $r = q$ и фактор-группа $(G_1/T)/(M/T)^r$ бесконечна, то, с учетом леммы 6.34 [19] фактор-группа $K = (G_1/T)/(M/T)^r$ нильпотентна и имеет бесконечный q-ранг. По лемме 22 [19] фактор-группа K/K' бесконечна. Отсюда следует, группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп бесконечного р-ранга, содержащих элемент g. Противоречие с леммой 1.

Если фактор-группа $(M/T)/(M/T)^r$ конечна для любого простого числа r, и найдутся два различных простых числа r_1 и r_2, отличные от q, для которых фактор-группы $(M/T)/(M/T)^{r_1}$ и $(M/T)/(M/T)^{r_2}$ нетривиальны, то группа $(G_1/T)/(M/T)^{r_1 r_2}$ является расширением абелевой $\{r_1, r_2\}$-группы при помощи циклической q-группы. Следовательно, группа G представима в виде произведения двух своих собственных подгрупп $L_1/\langle a\rangle^G$ и $F_1/\langle a\rangle^G$ бесконечного р-ранга, где подгруппы L и F содержат элемент g. По построению подгруппы L_1 и F_1 неабелевы, и $G = L_1F_1$. Вновь получили противоречие с леммой 1. Если простых чисел r_1 и r_2 с заданным свойством не существует, то фактор-группа G_1/T содержит нормальную делимую абелеву подгруппу без кручения конечного индекса, и поэтому применимы те же рассуждения, что и в случае делимой фактор-группы M/T.

Если же подгруппа M периодическая, то обозначим через M_0 силовскую p'-подгруппу группы M. Фактор-группа G_1/M_0 является расширением абелевой p-группы бесконечного p-ранга при помощи циклической q-группы. Если фактор-группа M/M_0 является почти делимой, то обозначим через M_1/M_0 ее нижний слой. Фактор-группа G_1/M_1 является почти делимой абелевой p-группой бесконечного p-ранга, а подгруппа M_1 также имеет бесконечный p-ранг. Согласно теореме 5.9 [15], фактор-группа G_1/M_1 представима в виде произведения двух своих нетривиальных собственных подгрупп N_1/M_1 и N_2/M_1, где $N_1 = L_2/\langle a\rangle^G$ и $N_2 = F_2/\langle a\rangle^G$, причем подгруппы L_2 и F_2 содержат элемент g. По построению подгруппы L_2 и F_2 неабелевы, имеют бесконечный p-ранг, и выполняется равенство $G = L_2F_2$. Противоречие с леммой 1. Осталось рассмотреть случай, когда G_1/M_0 не является почти делимой. Если период фактор-группы M/M_0 бесконечен, то рассмотрим, как и в предыдущем случае, фактор-группу G_1/M_1. Она содержит нормальную абелеву p-подгруппу бесконечного p-ранга конечного индекса. К фактор-группе G_1/M_1 применимы те же рассуждения, что и в предыдущем случае. Пусть теперь период фактор-группы M/M_0 конечен. Если $q \neq p$, то по теореме 5.9 [15] M/M_0 разлагается в прямую сумму бесконечного числа G-допустимых подгрупп. Следовательно, фактор-группа G_1/M_0 разложима в произведение двух собственных подгрупп бесконечного p-ранга, содержащих элемент gM_0/M_0. Следовательно, группа G представима в виде произведения двух своих собственных неабелевых подгрупп бесконечного p-ранга, что противоречит лемме 1. Если $q = p$, то, с учетом леммы 6.34 [19] фактор-группа G_1/M_0 нильпотентна и имеет бесконечный p-ранг. По лемме 22 [19] фактор-группа $(G_1/M_0)/(G_1/M_0)'$ бесконечна. Отсюда следует, группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп бесконечного p-ранга. Противоречие с леммой 1.

В случае неабелевой подгруппы C фактор-группа C/H не является циклической. Отсюда вытекает, что если $G/C = \langle g\rangle C/C$, то подгруппа $\langle H, g \rangle$ является собственной неабелевой подгруппой группы G. И тогда группа G представима в виде произведения двух собственных неабелевых подгрупп C и $\langle H, g \rangle$ бесконечного p-ранга, что противоречит лемме 1. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть $G \leq GL(F,A)$ – разрешимая неабелева группа, и пусть $r_p(G)$ и $\mathrm{ddim}_F G$ бесконечны. Предположим, что каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную фундаментальную размерность. Если H – собственная нормальная подгруппа группы G бесконечного p-ранга такая, что фактор-группа G/H бесконечна, тогда группа G является финитарной линейной группой.

Доказательство. По лемме 2 фактор-группа G/H бесконечно порождена. Рассмотрим сначала случай, когда подгруппа H абелева. Обозначим через H_1 максимальную нормальную абелеву подгруппу группы G, содержащую подгруппу H. Если фактор-группа G/H_1 конечно порождена, то по лемме 2 она является циклической q-группой для некоторого простого числа q. Отсюда вытекает, что можно выбрать неабелеву подгруппу K группы G, имеющую конечный специальный ранг, а поэтому и конечный p-ранг. Обозначим через T периодическую часть подгруппы H_1. Рассмотрим сначала случай, когда p является простым числом. Пусть T имеет бесконечный p-ранг. Подгруппу T можно представить в виде прямого произведения $T = T_1 \times T_2$, где T_2 – силовская p-подгруппа группы T. Фактор-группа T/T_1 имеет бесконечный p-ранг. Покажем, что существует G-допустимая подгруппа $T_0 < T$, имеющая бесконечный p-ранг, такая, что p-ранг фактор-группы T/T_0 также бесконечен. Если $q \neq p$, то теореме 5.9 [15] фактор-группа T/T_1 разлагается в прямое произведение бесконечного числа G-допустимых подгрупп. Отсюда вытекает, что $T/T_1=T_0/T_1 \times T_3/T_1$, где T_0/T_1 и T_3/T_1 – G-допустимые фактор-группы бесконечного p-ранга. Подгруппа T_0 удовлетворяет заданным условиям. Пусть теперь $p = q$. Поскольку фактор-группа G/H_1 является циклической q-группой, то $G/H_1 = \langle h\rangle H_1/H_1$, причем $h^n \in H_1$ для некоторого $n = p^k$. Обозначим через T_4/T_1 нижний слой фактор-группы T/T_1. T_4/T_1 является характеристической подгруппой группы G, и, согласно лемме 22 [19], фактор-группа $T_4\langle h\rangle/(T_1\langle h^n\rangle)$ нильпотентна, и ее p-ранг бесконечен. Отсюда следует, что можно выбрать нормальную подгруппу $T_0\langle h\rangle/(T_1\langle h^n\rangle) \leq T_4\langle h\rangle/(T_1\langle h^n\rangle)$, такую, что подгруппа T_0 удовлетворяет заданным условиям. Тогда для любого элемента g группы G подгруппа $KT_0\langle g\rangle^G$ является собственной неабелевой подгруппой бесконечного p-ранга, откуда вытекает конечность фундаментальной размерности подгруппы $KT_0\langle g\rangle^G$. Поскольку $\langle g\rangle \leq \langle g\rangle^G$, то фундаментальная размерность подгруппы $\langle g\rangle$ также конечна, и поэтому группа G финитарна. В случае, когда p-ранг подгруппы T конечен, фактор-группа H_1/T является группой без кручения бесконечного специального ранга. Если фактор-группа G/T абелева, то группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп бесконечного p-ранга, что противоречит лемме 1. Если же фактор-группа G/T неабелева, то, согласно лемме 5[1], в H_1/T существует периодический G-фактор $(B/T)/(U/T)$ бесконечного специального ранга. Тогда для любого элемента g группы G подгруппа $KU\langle g\rangle^G$ является собственной неабелевой подгруппой бесконечного p-ранга, откуда вытекает конечность фундаментальной размерности подгруппы $KU\langle g\rangle^G$. Следовательно, фундаментальная размерность подгруппы $\langle g\rangle$ также конечна, и группа G является финитарной.

Рассмотрим теперь случай, когда $p = 0$. К фактор-группе G/T применим те же рассуждения, что и в случае конечности p-ранга подгруппы T для простого числа p.

Если же фактор-группа G/H_1 бесконечно порождена, то для произвольного элемента g группы G можно выбрать элемент $h \in G$ так, чтобы подгруппа $\langle H_1, g, h\rangle$ являлась собственной неабелевой подгруппой группы G бесконечного p-ранга. Поэтому подгруппа $\langle H_1, g, h\rangle$ имеет конечную фундаментальную размерность. Следовательно, фундаментальная размерность подгруппы $\langle g\rangle$ также конечна, и поэтому группа G финитарна. Если же подгруппа H неабелева и фактор-группа G/H бесконечно порождена, то для произвольного элемента g группы G подгруппа $< H, g >$ является собственной неабелевой подгруппой группы G, и группа G финитарна. Следствие доказано.

Лемма 3. *Пусть G – разрешимая неабелева группа, и q – простое число. Предположим, что A – бесконечная нормальная элементарная абелева q-подгруппа группы G, такая, что фактор-группа G/A конечна. Тогда G порождается двумя собственными неабелевыми подгруппами, имеющими бесконечный q-ранг.*

Доказательство. Предположим сначала, что G является бесконечной q-группой. Тогда по лемме 6.34 [19] группа G является нильпотентной. Поскольку группа G бесконечна, то согласно лемме 22 [19] фактор-группа G/G' также является бесконечной, и разлагается в прямое произведение конечных q-подгрупп. Легко видеть, что существуют две собственные неабелевы подгруппы U и V, каждая из которых имеет бесконечный q-ранг, для которых $G = UV$.

Предположим теперь, что G/A не является q-группой. Можно выбрать конечную неабелеву подгруппу L группы G такую, что $G = AL$. Обозначим через P силовскую q-подгруппу группы G. P является собственной подгруппой бесконечного q-ранга. Предположим сначала, что подгруппа P неабелева. Пусть $1 \neq a_1 \in A$, $a_1 \notin Z(G)$, где $Z(G)$ – центр группы G, и пусть $A_1 = \langle a_1 \rangle^G$. Поскольку фактор-группа G/A конечна, подгруппа A_1 также конечна и $A = A_1 \times C_1$ для некоторой подгруппы C_1. Так как индекс $| G:C_1 |$ конечен, то подгруппа $D_1 = \mathrm{core}_G\, C_1$ имеет конечный индекс в A. Пусть $1 \neq a_2 \in D_1$ и $A_2 = \langle a_2 \rangle^G$. Тогда $< A_1, A_2 > = A_1 \times A_2$ и $A = (A_1 \times A_2) \times C_2$ для некоторой подгруппы C_2. Проводя аналогичные рассуждения, построим бесконечное семейство нетривиальных G-инвариантных подгрупп A_n, $n \in \mathbf{N}$, такое, что $< A_n | \; n \in \mathbf{N} > = \mathrm{Dr}_{n \in N} A_n$. Если $K = A_1 \times A_3 \times \ldots \times A_{2k+1} \times A_{2k+3} \ldots$, тогда K – собственная G-инвариантная подгруппа группы A, имеющая бесконечный q-ранг. Поскольку подгруппа KL не содержит подгруппу $< A_n | \; n \in \mathbf{N} >$, то KL является собственной неабелевой подгруппой бесконечного q-ранга, и поэтому $G = < P, KL >$. Пусть теперь подгруппа P абелева. Тогда $P \leq C_G(P)$, и поскольку $A \leq P$, то конечная фактор-группа $G/C_G(A)$ является q'-группой. По теореме Машке подгруппа A разлагается в прямое произведение бесконечного числа $G/C_G(A)$ -допустимых подгрупп $A = B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_k \times \ldots$.

Полагаем $U=(B_1 \times B_3 \times \ldots \times B_{2k+1} \times B_{2k+3} \ldots)L$, $V=(B_2 \times B_4 \times \ldots \times B_{2k} \times B_{2k+2} \ldots)L$. Подгруппы U и V являются собственными неабелевыми подгруппами группы G, причем $G = UV$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G – разрешимая неабелева группа, и q – простое число. Предположим, что A – бесконечная нормальная делимая абелева q-подгруппа группы G, такая, что фактор-группа G/A конечна. Если A имеет бесконечный q-ранг, тогда G порождается двумя собственными неабелевыми подгруппами, имеющими бесконечный q-ранг*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда подгруппа A содержится в центре группы G. Тогда $G = AM$, где M – конечная неабелева подгруппа группы G. Ввиду своего строения, подгруппа A представима в виде прямого произведения $A = A_1 \times A_2$, где A_1 и A_2 – подгруппы бесконечного q-

ранга. Полагаем $U = A_1M$, $V = A_2M$. Тогда $G = UV$, где U и V – собственные неабелевы подгруппы группы G, имеющие бесконечный q-ранг. Пусть теперь подгруппа A не содержится в центре группы G. Поскольку A является делимой абелевой q-группой, она разлагается в прямое произведение квазициклических q-подгрупп. Пусть $K \cong C_{q^\infty}$ является подгруппой группы A, не содержащейся в центре группы G, и пусть $L = KG$. Поскольку фактор-группа G/A конечна, L является черниковской группой, и $A = L \times U$, где U имеет бесконечный q-ранг. Пусть $D \cong C_{q^\infty}$ является подгруппой группы U. В результате мы получаем разложение $A= L \times D \times Q$ для некоторой подгруппы Q, имеющей бесконечный q-ранг. Поскольку индекс $|G : N_G(Q)|$ конечен, подгруппа Q имеет конечное число сопряженных подгрупп $Q_1, Q_2,\dots,Q_m$ в группе G, и, если $W = core_GQ$, то фактор-группа A/W может быть вложена в прямое произведение $A/Q_1 \times A/Q_2 \times \dots \times A/Q_m$, и поэтому фактор-группа A/W является черниковской. Ввиду выбора подгруппы W получаем, что $L \cap W = 1$, $A/W = LW/W$. Поскольку LW/W является G-инвариантной фактор-группой, и фактор-группа G/A конечна, в силу результата Д.И.Зайцева [3] имеем равенство $A/W=(LW/W)(B/W)$, где фактор-группа B/W – G-инвариантна, и пересечение $(LW/W) \cap (B/W)$ конечно. Существует конечная неабелева подгруппа F, такая, что $G = AF$, и поэтому BF – собственная неабелева подгруппа группы G. Поскольку подгруппа W имеет бесконечный q-ранг, то и обе подгруппы LW и BF также имеют бесконечный q-ранг. Отсюда следует, что $G = (LWF)(BF)$. Лемма доказана.

Мы также будем использовать следующий результат, который доказывается достаточно легко с использованием предыдущих лемм.

Лемма 5 *Пусть G – разрешимая неабелева группа, A – нормальная подгруппа группы G, для которой фактор-группа G/A является бесконечной периодической почти абелевой группой. Если $\pi(G/A) > 1$, тогда группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп, содержащих A.*

Мы применим эти результаты для доказательства следующей леммы.

Лемма 6. *Пусть $H \le GL(F,A)$ – разрешимая неабелева группа, и пусть $r_p(H)$ и $ddim_FH$ бесконечны. Предположим, что каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную фундаментальную размерность. Пусть K – нормальная подгруппа неабелевой группы H, и предположим, что фактор-группа H/K почти абелева. Если $r_p(H/K)$ бесконечен, то группа H имеет конечную фундаментальную размерность.*

Доказательство. Предположим сначала, что $p = 0$. Пусть L – нормальная подгруппа группы H такая, что фактор-группа H/L конечна, а L/K – абелева. Если $r_0(L/K)$ бесконечен, то фактор-группа L/K содержит свободную абелеву подгруппу B/K такую, что ранг $r_0(B/K)$ бесконечен, и фактор-группа L/B периодическая. Поскольку фактор-группа H/L конечна, подгруппа B имеет конечное число сопряженных подгрупп в H. Обозначим эти подгруппы как $B_1, \dots, B_m$. Если $C = core_HB$, то существует вложение фактор-группы L/C в прямое произведение $L/B_1 \times L/B_2 \times \dots \times L/B_m$. Отсюда следует, что фактор-группа L/C периодическая, и, поскольку $r_0(C/K)$ бесконечен, то $r_0(C)$ также бесконечен.

Отметим также, что фактор-группа C/K является свободной абелевой. Если фактор-группа H/C конечна, либо $\pi(H/C) = 1$, то выберем простое число $q \notin \pi(H/C)$, и положим $D/K = (C/K)^q$. Если фактор-группа H/C бесконечна, и $\pi(H/C) > 1$, положим $D = C$. Тогда, в каждом из этих случаев, H/D бесконечна, и $\pi(H/D) > 1$, причем $r_0(D)$ бесконечен. Применяя леммы 5 и 1 к подгруппе H, мы видим, что H имеет конечную фундаментальную размерность.

Предположим теперь, что $p > 0$, и пусть L – подгруппа, определенная выше. Выберем свободную абелеву подгруппу B/K фактор-группы L/K, такую, что фактор-группа L/B является периодической. Если ранг $r_0(B/K)$ бесконечен, тогда мы проводим те же рассуждения, как и в случае при $p = 0$. Поэтому полагаем, что $r_0(B/K)$ конечен. Как и ранее, если $C = \mathrm{core}_H B$, то фактор-группа L/C периодическая, и $r_p(L/C)$ бесконечен. Рассматривая, если это необходимо, фактор-группу группы L/C по ее силовской p'–подгруппе, мы получаем, что L/C является p-группой. Если фактор-группа L/L^pC бесконечна, то H/L^pC удовлетворяет условиям леммы 3, и поэтому H является произведением двух своих собственных неабелевых подгрупп, имеющих бесконечный p-ранг и конечную фундаментальную размерность. Следовательно, H в этом случае также имеет конечную фундаментальную размерность. Если фактор-группа L/L^pC конечна, то для нее имеет место равенство $L/C = E/C \times D/C$ для некоторой конечной подгруппы E/C и делимой подгруппы D/C. Поскольку фактор-группа H/L конечна, а L/C абелева, то фактор-группа $F/C = (E/C)^{H/C}$ также конечна. Более того, L/F является делимой абелевой p-группой бесконечного p-ранга. Если фактор-группа H/F неабелева, то согласно лемме 4, H является произведением двух своих собственных неабелевых подгрупп, каждая из которых имеет бесконечный p-ранг, и, следовательно, конечную фундаментальную размерность. Если же фактор-группа H/F абелева, то можно выбрать две неабелевы подгруппы U и V, содержащие подгруппу F и имеющие бесконечный p-ранг, для которых $H = UV$. Таким образом, в этом случае H также имеет конечную фундаментальную размерность. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $G \leq GL(F,A)$ – разрешимая неабелева группа, и пусть $r_p(G)$ и $\mathrm{ddim}_F G$ бесконечны. Предположим, что каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную фундаментальную размерность. Пусть H – нормальная подгруппа группы G и предположим, что фактор-группа G/H почти абелева. Тогда фактор-группа G/H изоморфна подгруппе квазициклической группы C_{q^∞} для некоторого простого числа q. Более того, если G/H бесконечна, то $q \neq \mathrm{char}F$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $G \neq H$. Если ранг $r_p(G/H)$ бесконечен, то $\mathrm{ddim}_F G$ конечна по лемме 6. Таким образом, $r_p(G/H)$ конечен, и, поэтому, ранг $r_p(H)$ бесконечен. Более того, если фактор-группа G/H конечна, справедливость нашего утверждения следует из леммы 2. Таким образом, мы полагаем, что фактор-группа G/H бесконечна.

Достаточно рассмотреть случай, когда группа G не является почти абелевой, поскольку в случае почти абелевой группы, как и при доказательстве леммы 2, устанавливается, что группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп бесконечного p-ранга. Противоречие с леммой 1(iii). Предположим сначала, что G/H является абелевой группой. Если фактор-группа G/H является свободной абелевой, то группу G можно представить в виде произведения двух своих собственных неабелевых подгрупп U и V бесконечного p-ранга, что противоречит лемме 1(iii). Следовательно, G/H не является свободной абелевой группой. Обозначим через B/H свободную абелеву подгруппу группы G/H, такую, что фактор-группа G/B периодическая. Поскольку ранг $r_p(H)$ бесконечен, ранг $r_p(B)$ также бесконечен. Если $\pi(G/B) > 1$, то по лемме 2 фактор-группа G/B является бесконечной, и тогда группа G является произведением двух своих собственных неабелевых подгрупп, имеющих бесконечный p-ранг, что противоречит лемме 1(iii). Таким образом, фактор-группа G/B является q-группой для некоторого простого числа q. Пусть фактор-группа B/H нетривиальна, и r – простое число, отличное от q. Положим $C/H = (B/H)^r \neq B/H$. Отсюда вытекает, что фактор-группа G/C является периодической, и $\pi(G/C)$ состоит из двух различных простых чисел q и r, причем по лемме 2 фактор-группа G/C бесконечна. Как и ранее, приходим к противоречию. Следовательно, фактор-группа G/H является периодической q-группой. Если G/H делимая, то она является прямым произведением квазициклических q-групп, и, согласно лемме 1(iii) $G/H \cong C_{q\infty}$. В противном случае фактор-группа $(G/H)/(G/H)^q$ является нетривиальной элементарной абелевой q-группой, и по лемме 1(iii) получаем, что $|(G/H)/(G/H)^q| = q$. Отсюда следует, что $G/H = (E/H) \times (D/H)$, где D/H является делимой, $|E/H| = q$. Подгруппа D является неабелевой, поэтому группу G можно представить в виде произведения двух своих собственных неабелевых подгрупп, имеющих бесконечный p-ранг, что противоречит лемме 1(iii).

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. Пусть L/H – нормальная абелева подгруппа фактор-группы G/H, такая, что фактор-группа G/L конечна. Пусть U/H – произвольная подгруппа конечного индекса в группе G/H. Если $V/H = \mathrm{core}_{G/H}U/H$, то G/V конечна, причем ранг $r_p(V)$ бесконечен. Согласно лемме 2 фактор-группа G/V является циклической q-группой для некоторого простого числа q, и поэтому $G' \leq V \leq U$. Таким образом, если W/H – пересечение всех подгрупп конечного индекса фактор-группы L/H, то G/W абелева, W имеет бесконечный p-ранг, и, как и в первой части доказательства, фактор-группа G/W финитно аппроксимируема, и поэтому конечна. Таким образом, $G = WK$ для некоторой подгруппы K, содержащей H, причем фактор-группа K/H конечно порождена. Предположим, что W и K – собственные подгруппы группы G. Фактор-группа G/W конечно порождена, и по лемме 2 она является циклической q-группой для некоторого простого числа q. Тогда $G/W = \langle g \rangle W/W$ для некоторого элемента g. Достаточно рассмотреть случай неабелевой подгруппы W. Предположим, что подгруппа K абелева. Отсюда следует, что подгруппа H также абелева, и поэтому группа G является почти метабелевой. Тогда можно выбрать элемент h подгруппы W, для которого подгруппа $K\langle h \rangle^G$ является собственной неабелевой подгруппой группы G, а фактор-группа $K\langle h \rangle^G/H$ конечно порождена. Отсюда вытекает, что группа G представима в виде произведения $G = W(K\langle h \rangle^G)$ двух своих собственных неабелевых подгрупп бесконечного p-ранга. Получили противоречие с леммой 1(iii). Следовательно, подгруппа K неабелева, и из соотношения $G = WK$ вытекает, что выполняется одно из равенств $G = W$, либо $G = K$. Поскольку G/H

бесконечна, из леммы 2 следует, что $G \neq K$. Отсюда получаем, что $G = W$, и тогда фактор-группа G/H абелева, и справедливость результата следует из первой части доказательства.

Пусть теперь $G/H \cong C_{q^\infty}$. Если подгруппа H – абелева, то найдется неабелева подгруппа K, являющаяся конечным расширением подгруппы H. Подгруппа K имеет конечную фундаментальную размерность, следовательно, фунда-ментальная размерность подгруппы H также конечна. В случае неабелевой подгруппы H конечность ее фундаментальной размерности следует из условия леммы. Если $C = C_A(H)$, то $\dim_F(A/C)$ конечна. Поскольку $H \leq C_G(C)$, мы получаем, что либо $G = C_G(C)$, либо $G/C_G(C) \cong C_{q^\infty}$. В первом случае $\mathrm{ddim}_F(G)$ конечна, что противоречит условию леммы. Следовательно, $G/C_G(C) \cong C_{q^\infty}$. Согласно следствию 1 группа G является финитарной линейной группой, и поэтому фактор-группа $G/C_G(C)$ является финитарной подгруппой группы $GL(F,C)$. Согласно лемме 5.1 [10] $q \neq \mathrm{char}\, F$. Лемма доказана.

Разрешимые группы. Мы увидим, что структура разрешимых групп, удовлетворяющих заданным условиям конечности, в значительной степени ограничена.

Предложение 1. Пусть $G \leq GL(F,A)$ – неабелева разрешимая группа, и пусть $r_p(G)$ и $\mathrm{ddim}_F G$ бесконечны. Предположим, что каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную фундаментальную размерность. Если группа G разрешима, то G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H бесконечного p-ранга, и $G/H \cong C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q. Если поле F имеет характеристику 0, то подгруппа H не имеет кручения. Если $\mathrm{char}\, F \neq 0$, тогда $p \neq 0$, $\mathrm{char}\, F = p$, и H является ограниченной p-группой.

Доказательство. Пусть $G = D_0 \geq D_1 \geq \ldots \geq D_{n-1} \geq D_n = 1$ – производный ряд группы G. Тогда существует такое натуральное число m, что фактор-группа G/D_m конечна, а фактор-группа D_m/D_{m+1} бесконечна. Положим $K = D_m$. Согласно лемме 2.8 $G/K' \cong C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q. Следовательно, K' имеет бесконечный p-ранг. Если подгруппа K' неабелева, то ее фундаментальная размерность конечна. Если же подгруппа K' абелева, то существует ее конечное расширение, являющееся неабелевым, и поэтому и в этом случае фундаментальная размерность подгруппы K' конечна. Положим $C = [K',A]$. Подпространство C имеет конечную размерность над полем F. Поскольку K' – нормальная подгруппа группы G, C является FG-подмодулем модуля A. A обладает конечным рядом FG-подмодулей $0 = C_0 \leq C_1 \leq C_2 \leq \ldots \leq C_{t-1} = C \leq C_t = A$ таких, что $C_1, C_2/C_1, \ldots, C_{t-1}/C_{t-2}$ являются простыми FG-модулями. Пусть $H = C_G(C_1) \cap C_G(C_2/C_1) \cap \ldots \cap C_G(C_{t-1}/C_{t-2})$. Поскольку группа G разрешима, фактор-группы $G/C_G(C_2/C_1), \ldots, G/C_G(C_t/C_{t-1})$ по теореме А.И. Мальцева (лемма 3.5 [20]) являются почти абелевыми. Отсюда следует, что фактор-группа G/H также почти абелева, и по лемме 7 $G/H \cong C_{q^\infty}$. Таким образом, ранг $r_p(H)$ бесконечен.

В результате мы получаем, что каждый элемент подгруппы H действует тривиально в каждом факторе C_{j+1}/C_j, $j=0,1, \ldots, t-1$. Отсюда следует, что H

нильпотентна. Если $\operatorname{char} F = 0$, то H не имеет кручения, если же $\operatorname{char} F = r > 0$, то H является ограниченной r-группой согласно предложению 1.C.3 [14] и результатам главы 8 [7], и поэтому в этом случае $p = r$. Лемма доказана.

Теперь мы получим нашу первую главную теорему о неабелевых группах, у которых каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного 0-ранга имеет конечную фундаментальную размерность. Как показывает наша теорема, таких групп не существует.

Теорема 2. *Пусть $G \leq GL(F,A)$ – неабелева разрешимая группа. Предположим, что каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного 0-ранга имеет конечную фундаментальную размерность. Тогда либо группа G имеет конечную фундаментальную размерность, либо ранг $r_0(G)$ конечен.*

Доказательство. Предположим противное, то есть предположим, что $\operatorname{ddim}_F(G)$ и $r_0(G)$ бесконечны. Согласно предложению 3.1 группа G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H без кручения, такую, что $G/H \cong C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q. Поскольку $r_0(G)$ бесконечен, $H = 1$. Пусть $1 = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq \ldots \leq H_t = H$ – верхний центральный ряд подгруппы H, каждый фактор которого не имеет кручения.

Предположим сначала, что группа G локально нильпотентна, и обозначим через T периодическую часть группы G. Поскольку $T \cap H = 1$, то либо $T \cong C_{q^\infty}$, либо T конечен. Изолятор подгруппы HT/T в группе G/T совпадает с G/T. Отсюда получаем, что локально нильпотентная группа без кручения G/T нильпотентна и имеет бесконечный 0-ранг (глава 15[5]). Следовательно, фактор-группа $G/G'T$ по теореме 26 [19] также имеет бесконечный 0-ранг. Однако по лемме 2.8 $G/G' \cong C_{q^\infty}$. Получили противоречие. Следовательно, группа G не является локально нильпотентной.

Теперь наша цель состоит в том, чтобы доказать, что произвольная разрешимая группа, не являющаяся локально нильпотентной, и удовлетворяющая заданным условиям, является произведением двух собственных неабелевых подгрупп бесконечного 0-ранга. Переходя к рассмотрению фактор-группы H/H_{t-1}, полагаем, что H является абелевой группой без кручения.

Пусть H является $\mathbf{Z}R$-модулем, где $R = G/G'$, который определен естественным образом. Обозначим через X $\mathbf{Q}$-делимую оболочку H, отсюда получаем, что X является $\mathbf{Q}R$-модулем. Пусть $1 \neq z \in R$, и пусть $\langle x \rangle$ – бесконечная циклическая группа. Тогда X является $\mathbf{Q}\langle x \rangle$-модулем, если мы определим действие x на X по правилу $ax = a^z$ для любого элемента $a \in X$. Групповое кольцо $\mathbf{Q}\langle x \rangle$ является областью главных идеалов, и поэтому z имеет конечный порядок. Следовательно, X является $\mathbf{Q}\langle x \rangle$–периодическим ограниченным модулем, то есть $\operatorname{Ann}_{\mathbf{Q}\langle x \rangle}(X) \neq 0$. Пусть I – идеал кольца $\mathbf{Q}\langle x \rangle$, X_I – совокупность всех элементов $a \in X$ таких, что $aI^n = 0$ для некоторого натурального $n \in \mathbf{N}$. Положим $X_I = \{a \in X | aI^n = 0\}$ для некоторго $n \in \mathbf{N}$. Назовем X_I I-компонентой модуля X, X_I является $\mathbf{Q}\langle x \rangle$-подмодулем модуля X. Так как $\mathbf{Q}\langle x \rangle$ является областью главных идеалов, получаем разложение $X = \oplus_{P \in \pi} X_P$, где π является конечным множеством максимальных идеалов кольца $\mathbf{Q}\langle x \rangle$. Если $\pi = \{(x-1)\mathbf{Q}\langle x \rangle\}$, то $X(x-1)^m = 0$ для некоторого $m \in \mathbf{N}$, и поэтому X<z> нильпотентно. Поскольку группа G не является локально нильпотентной, можно выбрать элемент $z \in R$ так, чтобы $\pi \neq \{(x-1)\mathbf{Q}<x>\}$. Положим $\sigma = \pi\backslash\{(x-1)\mathbf{Q}<x>\}$, $B = \oplus_{P\in\sigma}X_P$, и пусть C является $(x-1)\mathbf{Q}<x>$-компонентой X. Ввиду выбора элемента z получаем, что $B \neq 0$. Более того, $C_B(z) = 0$, и поэтому $C_{X/C}(z) = 0 = C_{X/C}(R)$. Поскольку группа R абелева, C является **Q**G-модулем, и, кроме того, каждая собственная подгруппа R конечна, тогда X/C является *Mc*-модулем над **Q**R в терминологии [13]. Для каждого $z \in R$ справедливо, что **Q**<z>-модуль X является полупростым, и по теореме Машке пересечение максимальных **Q**R-подмодулей модуля X/C тривиально. В частности, X/C обладает макимальными подгруппами, и поэтому X содержит максимальный **Q**R-подмодуль. Обозначим его через E.

Положим $V = E \cap H$, V является **Z**R-подмодулем модуля H. Поскольку H порождает X как **Q**R-модуль, мы получаем, что V = H. Более того, **Z**R-модуль H/V не является простым, так как, согласно лемме 5.26 [19], такие модули являются элементарными абелевыми, и H/V, являясь подгруппой группы X/V, не имеет кручения. Предположим, что W является **Z**R-подмодулем модуля H, причем $V < W$. Тогда $W \otimes_{\mathbf{Z}R} \mathbf{Q}R = W \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ является **Q**R-модулем, для которого E – собственный подмодуль. Следовательно, этот **Q**R-модуль совпадает с X. Таким образом, $W \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = H \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, и поэтому H/W является периодическим.

Выберем элемент $a \in H\backslash V$ так, чтобы $L = <a>^G V \neq H$. Тогда модуль H/L является периодическим, и, согласно результату [4], множество $\Delta = \{p \mid (L/V)^p \neq L/V\}$, где p – простое число, является бесконечным. Пусть r_1 и r_2 – два различных простых числа из Δ, которые отличны от q. Тогда $L_1/V = (L/V)^{r_1 r_2} \neq L/V$. Пусть U/L_1 – силовская $\{r_1, r_2\}'$-подгруппа группы H/L_1. Тогда фактор-группа G/U периодическая, и поэтому $r_0(U)$ бесконечен. Согласно теореме 1.D.4 [14] имеет место равенство $G/U = (H/U)(P/U)$, где H/U – нормальная подгруппа фактор-группы G/U, пересечение $(H/U) \cap (P/U)$ тривиально, и $P/U \cong R$. Следовательно, G является произведением двух собственных подгрупп H и P бесконечного 0-ранга. Найдется подгруппа $K < P$, такая, что фактор-группа K/U конечна, а подгруппа $H_1 = HK$ является собственной нормальной неабелевой подгруппой группы G. Рассмотрим случай абелевой подгруппы P. Согласно построению, подгруппа P не содержится в центре группы, и поэтому можно выбрать элемент g в подгруппе H, для которого $P_1 = <g>^P P$ является собственной неабелевой подгруппой группы G. В случае неабелевой подгруппы P полагаем $P_1 = P$. И тогда группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп H_1 и P_1 бесконечного 0-ранга. Противоречие с леммой 1(iii). Отсюда следует справедливость теоремы. Теорема доказана.

Когда $p \neq 0$, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $G \leq GL(F,A)$ *– неабелева разрешимая линейная группа и пусть* $p > 0$. *Предположим, что* $r_p(G)$ *и* $ddim_F G$ *бесконечны. Если каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную фундаментальную размерность, то группа G удовлетворяет следующим условиям:*

(i) $G = HQ$, *где H – нормальная подгруппа группы G,* $H \cap Q = E$, $Q \cong C_{q^\infty}$ *для некоторого простого числа q ,* $q \neq p$;

(ii) H является p-группой конечной фундаментальной размерности, причем char F = p;

(iii) K = H ∩ Z(G) – конечная подгруппа;

(iv) H/K – бесконечная элементарная абелева p-группа;

(v) H/K – минимальная нормальная погруппа фактор-группы G/K.

Доказательство. Согласно предложению 1, G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H, для которой $G/H \cong C_{q\infty}$ для некоторого простого числа q. Поскольку $r_p(G/H) \leq 1$, то подгруппа H имеет бесконечный p-ранг. Если подгруппа H неабелева, то ее фундаментальная размерность конечна. В случае абелевой подгруппы H, существует ее конечное расширение, являющееся неабелевым, откуда вытекает конечность фундаментальной размерности подгруппы H. В частности, группа G не является почти абелевой.

Сначала покажем, что char $F \neq 0$. Предположим, что char F = 0. Тогда согласно предложению 1 подгруппа H не имеет кручения. Как и в доказательстве теоремы 2, мы можем предположить, что группа G не является локально нильпотентной, а подгруппа H абелева, и H содержит G-инвариантную подгруппу V, такую, что фактор-группа H/V – рационально неприводимая абелева группа без кручения. Можно показать, что H содержит G-инвариантную подгруппу W, для которой $V \leq W$, и H/W является $\{r_1, r_2\}$-группой, где r_1, r_2 – различные простые числа, отличные от q. Следовательно, группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп, содержащих подгруппу W. Если $r_0(H/V)$ конечен, то и $r_p(H/V)$ конечен, и отсюда мы получаем, что оба ранга $r_p(V)$ и $r_p(W)$ бесконечны, что противоречит лемме 1 (iii). Если $r_0(H/V)$ бесконечен, то $r_0(W/V)$ также бесконечен, поскольку фактор-группа H/W периодическая. Тогда $r_p(W/V)$ бесконечен, и поэтому ранг $r_p(W)$ тоже бесконечен, и мы вновь получаем противоречие. Следовательно, char $F = p > 0$.

Согласно предложению 1 H – нильпотентная ограниченная p-группа, и $p \neq q$. Тогда по лемме 1.D.4 [14] G = HQ, где H – нормальная подгруппа группы G, $H \cap Q = E$, $Q \cong C_{q\infty}$. Если подгруппа H неабелева, то ее фундаментальная размерность конечна. Если же подгруппа H абелева, то существует ее конечное расширение H_1, являющееся неабелевым, и поэтому и в этом случае фундаментальная размерность подгруппы H конечна. В случае неабелевой подгруппы H полагаем $H_1 = H$. Таким образом, Q имеет бесконечную фундаментальную размерность. Если L – собственная G-инвариантная подгруппа группы H, то LQ является собственной подгруппой группы G, причем ddim_F LQ бесконечна. Если подгруппа LQ неабелева, то, согласно условию теоремы, ранг $r_p(LQ)$ конечен, и поэтому конечен ранг $r_p(L)$. Поскольку L является ограниченной нильпотентной p-группой, то L конечна. Следовательно, $G/C_G(L)$ конечна, и тогда ранг $r_p(C_G(L))$ бесконечен. Поскольку $Q \leq C_G(L)$, то $G = H_1C_G(L)$. Ввиду построения, $G \neq H_1$. Так как группа G не является почти абелевой, то централизатор $C_G(L)$ является неабелевым. Отсюда вытекает равенство $G = C_G(L)$. Таким образом, $L \leq Z(G)$. Получили противоречие с тем, что подгруппа LQ неабелева. Следовательно, подгруппа LQ абелева, а поскольку ранг $r_p(L)$ конечен, и $L \leq H$, то L конечна. В частности, $K = H \cap Z(G)$ является собственной подгруппой группы H. Следовательно, подгруппа K конечна, и фактор-группа H/K не содержит собственных G-инвариантных подгрупп. Отсюда следует, что H/K является минимальной нормальной подгруппой фактор-группы G/K. Поскольку H нильпотентна, то H/K является элементарной абелевой p-группой. Теорема доказана.

Говорят, что группа G имеет конечный абелев секционный ранг, если каждая абелева секция группы G имеет конечный p-ранг для всех $p \geq 0$. Отметим, что в [8] доказано, что для разрешимых (и даже для гиперабелевых) групп конечность абелева секционного ранга эквивалентна конечности абелева подгруппового ранга (напомним, что группа G имеет конечный абелев подгрупповой ранг, если все абелевы подгруппы группы G имеют конечный p-ранг для всех $p \geq 0$). В этом случае имеет место следующий результат.

Следствие 2. Пусть $G \leq GL(F,A)$ – неабелева разрешимая линейная группа бесконечного абелева секционного ранга. Предположим, что $ddim_F G$ бесконечна. Если каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного абелева секционного ранга имеет конечную фундаментальную размерность, то группа G удовлетворяет следующим условиям:

(i) $G = HQ$, где H – нормальная подгруппа группы G, $H \cap Q=E$, $Q \cong C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q;

(ii) H является p-группой конечной фундаментальной размерности, причем char $F = p$, $q \neq p$;

(iii) $K = H \cap Z(G)$ – конечная подгруппа;

(iv) H/K – бесконечная элементарная абелева p-группа;

(v) H/K – минимальная нормальная погруппа фактор-группы G/K.

Доказательство. Поскольку группа G разрешима и имеет бесконечный абелев секционный ранг, существует простое число p, для которого $r_p(G)$ бесконечен. Для этого простого числа p верно, что любая собственная неабелева подгруппа H бесконечного p-ранга имеет бесконечный абелев секционный ранг, следовательно, H имеет конечную фундаментальную размерность. Применим теперь теорему 3. Следствие доказано.

И в завершение рассмотрим группы бесконечного специального ранга. Говорят, что группа G имеет конечный специальный ранг $r(G) = r$, если r является наименьшим числом с тем свойством, что каждая конечно порожденная подгруппа группы G может быть порождена не более чем r элементами. Это определение было введено в [6]. Специальный ранг группы иногда называют рангом Прюфера–Мальцева. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4 *Пусть $G \leq GL(F,A)$ – неабелева разрешимая линейная группа бесконечного специального ранга. Предположим, что $ddim_F G$ бесконечна. Если каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного специального ранга имеет конечную фундаментальную размерность, то группа G удовлетворяет следующим условиям:*

(i) $G = HQ$, где H – нормальная подгруппа группы G, $H \cap Q = E$, $Q \cong C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q;

(ii) H является p-группой конечной фундаментальной размерности, причем char $F = p$, $q \neq p$;

(iii) $K = H \cap Z(G)$ – конечная подгруппа;

(iv) H/K – бесконечная элементарная абелева p-группа;

(v) H/K – минимальная нормальная погруппа фактор-группы G/K.

Доказательство. Если G имеет бесконечный абелев секционный ранг, а X – произвольная собственная неабелева подгруппа бесконечного абелева секционного ранга, то X имеет конечную фундаментальную размерность, и тогда справедливость теоремы следует из следствия 2. Поэтому предположим, что G имеет конечный абелев секционный ранг.

Пусть U – нормальная подгруппа группы G такая, что фактор-группа G/U – бесконечная почти абелева группа, и обозначим через V/U нормальную абелеву подгруппу G/U, для которой фактор-группа G/V конечна. Поскольку ранг $r_0(G)$ конечен, V/U содержит конечно порожденную подгруппу B/U, для которой фактор-группа V/B периодическая. Если $C/U = \mathrm{core}_{G/U}(B/U)$, то C/U также конечно порождена. Предположим, что G/U имеет бесконечный специальный ранг. Поскольку G имеет конечный абелев секционный ранг, то отсюда следует, что p-подгруппы фактор-группы V/C черниковские для каждого простого числа p. Таким образом, множество $\pi(V/C)$ бесконечно. Если D/C является силовской $\pi(G/V)$-подгруппой фактор-группы V/C, то фактор-группа V/D имеет бесконечный специальный ранг, и $G/D = (V/D)(W/D)$, где V/D – нормальная подгруппа группы G/D, $(V/D) \cap (W/D) = E$, причем фактор-группа W/D конечна, и пересечение $\pi(V/D) \cap \pi(W/D)$ пусто. Тогда фактор-группа V/D является произведением двух собственных G-инвариантных подгрупп V_1/D и V_2/D бесконечного специального ранга. Причем подгруппы V_1 и V_2 можно выбрать таким образом, чтобы подгруппы V_1W и V_2W являлись неабелевыми. Следовательно, $G = (V_1W)(V_2W)$, что противоречит лемме 1(iii). Поэтому группа G имеет конечную фундаментальную размерность. Противоречие с условием теоремы. Отсюда вытекает, что фактор-группа G/U имеет конечный специальный ранг, а поэтому специальный ранг подгруппы U бесконечен. Доказываем, что $G/U \cong C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q. Как и в теореме 3, G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H, такую, что $G/H \cong C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q. Если char $F = 0$, то H не имеет кручения. Поскольку группа G имеет конечный абелев секционный ранг, то $r_0(H)$ конечен. Отсюда вытекает, что H является группой без кручения конечного специального ранга, и поэтому в этом случае G имеет конечный специальный ранг. Противоречие.

Если char $F = p > 0$, то H является ограниченной p-группой. Поскольку G имеет конечный абелев секционный ранг, то ранг $r_p(G)$ также конечен. Следовательно, подгруппа H конечна, и G имеет конечный специальный ранг. Снова получаем противоречие. Теорема доказана.

В [16] построен пример 3.2 неабелевой разрешимой группы $G \leq GL(F,A)$ бесконечного ранга и бесконечной фундаментальной размерности, у которой любая собственная неабелева подгруппа бесконечного ранга имеет конечную фундаментальную размерность.

Библиографические ссылки

1. **Дашкова О.Ю.** Разрешимые группы конечного неабелева ранга//Укр. мат. журн. – 1990. – 42, № 2. – С. 159 – 164.
2. **Диксон М.Р.** Бесконечномерные линейные группы с ограничениями на подгруппы бесконечных рангов./М.П. Диксон, Л.А. Курдаченко, О.Ю.Дашкова // Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. – 2006. – 36, № 3. – С. 109 – 123.
3. **Зайцев Д.И.** Дополнения подгрупп экстремальных групп // Исследования групп по заданным свойствам подгрупп, К.: Ин-т матем. АН Украины, 1974. С. 72 – 130.
4. **Зайцев Д.И.** Произведения абелевых групп // Алгебра и логика. – 1980. – 19, № 2. – С. 94 – 106.
5. **Курош А.Г.** Теория групп. М., 1967. – 648 с.
6. **Мальцев А.И.** О группах конечного ранга // Мат. сб. – 1948. – 22, № 2. – С. 351 – 352.
7. **Фукс Л.** Бесконечные абелевы группы. М., 1974. – Т.1. – 336 с.
8. **Baer R.** Radical groups of finite abelian subgroup rank./H. Heineken // Illinois J. Math. – 1972. – Vol. 16, № 4. – P.533 – 580.
9. **Dashkova O.Yu.** Linear groups with rank restrictions on the subgroups of infinite central dimension./ O.Yu. Dashkova, M.R. Dixon, L.A. Kurdachenko // Journal of Pure and Applied Algebra. – 2007. – Vol. 208, № 3. – P. 785 – 795.
10. **Dixon M.R.** Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension./ M.R. Dixon, M.J. Evans, L.A. Kurdachenko // Journal Algebra. – 2004. – Vol. 277, № 1. – P. 172 – 186.
11. **Dixon M.R.** On some ranks of infinite groups./M.R. Dixon, L.A. Kurdachenko, N.V. Polyakov // Ricerche di Matematika. – 2006. – Vol. 56, № 1. – P. 43 – 59.
12. **Franciosi S.** The Shur property and groups with uniform conjugacy classes./F.de Giovanni, L.A. Kurdachenko // Journal Algebra. – 1995. – Vol. 174. – P. 823 – 847.
13. **Hall H.** The Edmonton Notes on Nilpotent Groups // Qeen Mary College Mathematics Notes. London, 1969. – 47 p.
14. **Kegel O.H.** Locally Finite Groups/ B.A.F. Wehrfritz // North–Holland Mathematical Library, North-Holland, Amsterdam, London. – 1973. – 210 p.
15. **Kurdachenko L.A.** Artinian modules over group rings./ J. Otal, I.Ya. Subbotin // Birg Hauser; Basel, Boston, Berlin. – 2007. – 248 p.
16. **Kurdachenko L.A.** Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension./ I.Ya. Subbotin // Publicacions Mat. – 2006. – Vol.50, № 1. – P. 103 – 131.
17. **Philips R.E.** Finitary linear groups: a survey. «Finite and locally finite groups» // NATO ASI ser. C Math. Phys. Sci., Kluver Acad. Publ., Dordreht. – 1995. – Vol. 471. – P. 111 – 146.
18. **Phillips R.E.** The structure of groups of finitary transformations // Journal Algebra. – 1988. – Vol. 119, № 2. – P.400 – 448.
19. **Robinson D.J.R.** Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972. – Vol.1, 2. – 464 p.
20. **Wehrfritz B.A.F.** Infinite linear Groups // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer–Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973. – 229 p.

Надійшла до редколегії 24 10 07

УДК 517.5

Е. В. Дерец

Днепродзержинский государственный технический университет

О НАИЛУЧШЕЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ КЛАССА $W^2H_1^\omega$

Доведено, що інтервальна квадратурна формула прямокутників є найкращою для класу функцій із заданою опуклою до гори мажорантою інтегрального модуля неперервності другої похідної.

Пусть H_1^ω - множество 2π-периодических измеримых функций $f(t)$ таких, что $\omega(f,t)_1 = \sup\limits_{|h|\le t}\int_0^{2\pi}|f(x+h)-f(x)|dx \le \omega(t)$, где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, $W^rH_1^\omega$ (r =1,2, ...) – множество 2π-периодических функций $f(t)$, у которых (r–1)–я производная $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и $f^{(r)}(t)\in H_1^\omega$. Рассмотрим квадратурные формулы вида

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{1}{2h}\int_{x_k-h}^{x_k+h} f(t)dt + R_n(f,\vec{c}_n,\vec{x}_n,h), \qquad (1)$$

где $\vec{c}_n = \{c_k\}_{k=1}^n$, $c_k \in R$ – коэффициенты, $\vec{x}_n = \{x_k\}_{k=1}^n$, $x_k \in [0,2\pi)$ – узлы, $h\in(0,\pi/n)$ и $R_n(f,\vec{c}_n,\vec{x}_n,h)$ – погрешность квадратурной формулы (1) на функции f. Погрешностью квадратурной формулы (1) на классе $\aleph$ называют величину $R_n(\aleph,\vec{c}_n,\vec{x}_n,h)=\sup\limits_{f\in\aleph} R_n(f,\vec{c}_n,\vec{x}_n,h)$. Квадратурная формула с узлами $\vec{x}_n^*$ и коэффициентами $\vec{c}_n^*$ называется наилучшей на классе $\aleph$, если

$$R_n(\aleph,h)=\inf_{\vec{c}_n,\vec{x}_n} R_n(\aleph,\vec{c}_n,\vec{x}_n,h) = R_n(\aleph,\vec{c}_n^*,\vec{x}_n^*,h).$$

Интервальные квадратурные формулы изучались в [1–3; 6; 7; 9 –11]. В [5] для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ и любого

$h\in(0,\pi/(4n)]$ найдена погрешность интервальной квадратурной формулы прямоугольников с узлами $x_k=\tau+2\pi(k-1)/n$, $k=1,\dots,n$, $\tau\in[0,2\pi/n)$ и коэффициентами $c_k=2\pi/n$, $k=1,\dots,n$ для класса $W^2H_1^{\omega}$. В настоящей работе показано, что при этих условиях формула прямоугольников является наилучшей для класса $W^2H_1^{\omega}$ среди всех формул вида (1), узлы которых удовлетворяют условию

$$x_1+h\le x_2-h<\dots<x_k+h\le x_{k+1}-h<\dots\le x_n-h<x_n+h\le x_1+2\pi-h.$$

Пусть $v(x)$ – неубывающая, $q(x)$ – невозрастающая непрерывные функции, заданные на отрезке $[-2\pi,2\pi]$ и обращающиеся в 0 только в точке $x=0$, R^m – m-мерное пространство с нормой $\|\xi\|=\sum\limits_{i=1}^{m}|\xi_i|$ $(\xi=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m))$.

Для любого ненулевого вектора $\xi\in R^m$ определим 2π-периодическую функцию $f(\xi,v,q,x)$ следующим образом

$$f(\xi,v,q,x)=\begin{cases}\min\{v(x-\eta_{k-1}),q(x-\eta_k)\}, & \text{если } \xi_k>0,\ x\in[\eta_{k-1},\eta_k),\\ \max\{v(x-\eta_k),q(x-\eta_{k-1})\}, & \text{если } \xi_k<0,\ x\in[\eta_{k-1},\eta_k),\\ f(\xi,v,q,x+2\pi) & \text{для всех } x,\end{cases}$$

где $\eta_0=0$, $\eta_k=2\pi\sum\limits_{i=1}^{k}|\xi_i|/\|\xi\|$, $k=1,2,\dots,m$.

Обозначим через $M^0_{2n,v,q}$ множество функций $f(\xi,v,q,x)$ $(\xi\in R^{2n}$, $\xi\ne0)$ в среднем равных нулю на периоде, $M^*_{2n,v,q}$ – множество функций $f\in M^0_{2n,v,q}$, имеющих ровно $2n$ перемен знака на периоде. Для любой функции $f\in L$ положим

$$J_rf=J_rf(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos(j(x-t)-r\pi/2)}{j^r}dt\quad(r=1,2,\dots);$$

$$f_h(x)=S_hf=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+t)dt\quad(h>0)$$

В дальнейшем нам потребуется следующее очевидное утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $\tilde{v}(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$ *– неубывающие,* $\tilde{q}(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ *– невозрастающие непрерывные функции, заданные на отрезке* $[-2\pi, 2\pi]$ *и обращающиеся в нуль только в точке* $x = 0$, *при этом для всех* $x \in [-2\pi, 2\pi]$ *справедливы неравенства* $v_1(x) \le \tilde{v}(x) \le v_2(x)$, $q_1 \le \tilde{q}(x) \le q_2(x)$; $\varepsilon > 0$ *- некоторое фиксированное число. Тогда существует число* $\lambda = \lambda(\varepsilon, v_1, v_2, q_1, q_2) > 0$, *не зависящее от точки* ξ *и функций* $\tilde{v}(x)$ *и* $\tilde{q}(x)$, *такое, что если* $f(\xi, \tilde{v}, \tilde{q}, x) \in M^0_{2n, \tilde{v}, \tilde{q}}$ *и функция* $S_h J_1 f(\xi, \tilde{v}, \tilde{q}, *)(x)$ *имеет минимум в точке* y_0, *при этом каждый из промежутков* $[y_0 - h - \varepsilon, y_0 + h + \varepsilon]$, $[y_0 - h, y_0 + h]$ *содержит ровно одну точку минимума* $x = x_0$ *функции* $J_1 f(\xi, \tilde{v}, \tilde{q}, x)$, *то промежуток* $[x_0 - \lambda, x_0 + \lambda]$ *не содержит точек максимума функции* $J_1 f(\xi, \tilde{v}, \tilde{q}, x)$.

Теорема 1. *Пусть* $v(x)$ *– неубывающая,* $q(x)$*– невозрастающая непрерывные функции, заданные на отрезке* $[-2\pi, 2\pi]$ *и обращающиеся в нуль только в точке* $x = 0$. *Для любого* $h \in (0, \pi/n)$, *удовлетворяющего условиям*

$$\max_{0 \le C \le 1} \left\{ \int_0^{2h} \min\{V(C,x), Q(C,x-2h)\} dx + \int_{2h}^{2\pi/n} \max\{V(C,x-2\pi/n), Q(C,x-2h)\} dx \right\} < 0 \quad (2)$$

$$\min_{0 \le C \le 1} \left\{ \int_0^{2h} \max\{V(C,x-2h), Q(C,x)\} dx + \int_{2h}^{2\pi/n} \min\{V(C,x-2h), Q(C,x-2\pi/n)\} dx \right\} > 0 \quad (3)$$

где $V(C,x) = \dfrac{v(x) - q(x)}{2} + C\dfrac{v(x) + q(x)}{2}$, $Q(C,x) = \dfrac{q(x) - v(x)}{2} + C\dfrac{v(x) + q(x)}{2}$

и любой системы точек $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, *для которой*

$$y_1 + h \le y_2 - h < y_2 + h \le y_3 - h < y_3 + h \le \dots \le y_n - h < y_n + h \le y_1 + 2\pi - h \quad (4)$$

существует функция $f(\xi, v, q, x) \in M^*_{2n, v, q}$, *для которой функция* $S_h J_1 f(\xi, v, q, *)(t + t_0)$ *принимает равные минимальные значения в точках* y_1, y_2, .., y_n (t_0 *– некоторое действительное число, зависящее от узлов* $\{y_i\}_{i=1}^n$).

Доказательство. Докажем утверждение теоремы в предположении, что все неравенства в (4) являются строгими (общий случай легко получить предельным переходом). В этом случае существует число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $y_{i+1} - y_i - 2h > \varepsilon_1$, $i = 1,2,...,n$, $y_{n+1} = y_1 + 2\pi$.

Пусть S^{2n+1} $(n = 1,2,...)$ – сфера с центром в нуле радиуса 2π в $(2n+1)$-мерном пространстве R^{2n+1}. Каждому вектору $\xi \in S^{2n+1}$ $(\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{2n+1}))$ поставим в соответствие вектор $\beta(\xi) = (\beta_1(\xi), \beta_2(\xi), ..., \beta_{2n+1}(\xi))$, где

$$\beta_i(\xi) = \operatorname{sign}\xi_i \cdot \left(|\xi_i| - \frac{\pi}{2(2n+1)}\right)_+ \Big/ \sum_{j=1}^{2n+1}\left(|\xi_j| - \frac{\pi}{2(2n+1)}\right)_+, \qquad i = 1,2,...,2n+1$$

и построим функции $G_1(\xi, v, q, x)$, $G_2(\xi, v, q, x)$ следующим образом:

если существует $k \in \{1,2,...,2n\}$ такое, что при всех $i = 1,2,...,2n$

$$\operatorname{sign}\xi_i \cdot \operatorname{sign}\xi_{i+1} = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad i \neq k, \\ 1, & \text{если} \quad i = k, \end{cases} \tag{5}$$

то положим

$$\lambda_i(\xi) = \begin{cases} \beta_i(\xi), & \text{если } i < k, \\ \beta_k(\xi) + \beta_{k+1}(\xi), & \text{если } i = k, \\ \beta_{i+1}(\xi) & \text{если } i > k \end{cases} \qquad \text{для всех } \ i = 1,2,...,2n\ ,$$

$$G_1(\xi, v, q, x) = f\big(\lambda(\xi), (v(x) - q(x))/2, (q(x) - v(x))/2, x\big);$$

если

$$\operatorname{sign}\xi_i \cdot \operatorname{sign}\xi_{i+1} = -1 \quad \text{для всех} \ \ i = 1,2,...,2n, \tag{6}$$

то положим

$$\lambda_i(\xi) = \begin{cases} \beta_1(\xi) + \beta_{2n+1}(\xi), & \text{если } i = 1, \\ \beta_i(\xi), & \text{если } i = 2,3,...,2n; \end{cases}$$

$$G_1(\xi, v, q, x) = f\big(\lambda(\xi), (v(x) - q(x))/2, (q(x) - v(x))/2, x + |\beta_{2n+1}(\xi)|\big),$$

для всех остальных точек $\xi \in S^{2n+1}$ положим

$$G_1(\xi, v, q, x) = f\big(\beta(\xi), (v(x) - q(x))/2, (q(x) - v(x))/2, x\big).$$

Далее, если для точки $\xi \in S^{2n+1}$ выполнено условие (5) либо (6), то положим

$$G_2(\xi, v, q, x) = G_1(\xi, v, q, x) + \left(f\left(\beta(\xi), \frac{v(x) - q(x)}{2}, \frac{q(x) - v(x)}{2}, x\right) - G_1(\xi, v, q, x)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\pi}{2(2n+1)}-\min_{1\le i\le 2n}|\xi_i|\right)_+\cdot\frac{2(2n+1)}{\pi},$$

во всех остальных случаях положим $G_2(\xi,v,q,x)=G_1(\xi,v,q,x)$.

Из способа построения функции $G_2(\xi,v,q,x)$ следует, что отображение $\varphi_1 : S^{2n+1}\to C_{[0,2\pi]}$, $\varphi_1(\xi)=G_2(\xi,v,q,x)$ непрерывно и нечетно, при этом при любом $\xi\in S^{2n+1}$ функция $G_2(\xi,v,q,x)$ имеет не более $2n$ перемен знака на $[0,2\pi)$. Пусть A – множество точек $\xi\in S^{2n+1}$ таких, что функция $G_2(\xi,v,q,x)$ имеет ровно $2n$ перемен знака на $[0,2\pi)$. При каждом $\xi\in A$ обозначим через $m(\xi)$ множество всех точек числовой оси, в которых $G_2(\xi,v,q,x)$ меняет знак с «– » на « + », $M(\xi)$ – множество всех точек, при переходе через которые $G_2(\xi,v,q,x)$ меняет знак с « + » на «– », $\gamma(\xi)\in S^{2n}$ – вектор, для которого

$$G_2(\xi,v,q,x)=f\big(\gamma(\xi),(v(x)-q(x))/2,(q(x)-v(x))/2,x+a(\xi)\big),$$

где $a(\xi)=\begin{cases}|\beta_{2n+1}(\xi)|, & \text{если} \quad \operatorname{sign}\xi_i\cdot\operatorname{sign}\xi_{i+1}=-1 \quad \text{для всех} \ \ i=1,2,\dots,n,\\ 0 \quad \text{для всех остальных} \ \xi. & \end{cases}$

Из способа построения функции $G_2(\xi,v,q,x)$ следует, что для всех $\xi\in A$ вектор $\gamma(\xi)$ существует и единственен.

Выберем $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1/3)$ так, чтобы неравенства (2) и (3) оставались в силе при замене h на $h+\varepsilon_2$ и положим

$$v_1(x)=\begin{cases}\min\{v(x),-v(-x),q(-x),-q(x)\}, & \text{если } x>0,\\ -\max\{v(-x),-v(x),q(x),-q(-x)\}, & \text{если } x<0,\end{cases}$$

$$v_2(x)=\begin{cases}\max\{v(x),-v(-x),q(-x),-q(x)\}, & \text{если } x>0,\\ -\min\{v(-x),-v(x),q(x),-q(-x)\}, & \text{если } x<0,\end{cases}$$

$v_1(0)=v_2(0)=0$, $q_2(x)=-v_1(x)$, $q_1(x)=-v_2(x)$ для всех x,

$\varepsilon_3=\lambda(\varepsilon_2,v_1,v_2,q_1,q_2)$ - число, описанное в лемме 1, $\varepsilon=\min\{\varepsilon_2/3,\varepsilon_3\}$.

Обозначим через A_1 множество точек $\xi\in A$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) при каждом $i=1,2,\dots,n$ $[y_i-h-\varepsilon,y_i+h+\varepsilon]\bigcap m(\xi)\neq\emptyset$,

2) найдется $i_0 \in \{1,2,...,n\}$ для которого $[y_{i_0} - h - \varepsilon, y_{i_0} + h + \varepsilon] \bigcap M(\xi) = \emptyset$.

Ясно, что $A_1 \bigcap A_2 = \emptyset$, где $A_2 = -A_1$. Для каждого $\xi \in A_1$ положим

$$G_3(\xi, v, q, x) = f\left(\gamma(\xi), \frac{v(x) - q(x)}{2} + C\frac{v(x) + q(x)}{2}, \frac{q(x) - v(x)}{2} + C\frac{v(x) + q(x)}{2}, x + a(\xi)\right),$$

где $C = C_1 \cdot C_2 \cdot C_3$, $C_1 = \min\left\{ \min_{1 \le i \le 2n} |\gamma_i(\xi)| / \varepsilon, 1 \right\}$,

$$C_2 = \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \min_{\substack{x' \in m(\xi) \\ x'' \in [y_i - h, y_i + h]}} |x' - x''|\right), \quad C_3 = \frac{1}{\varepsilon}\min\left\{ \max_{1 \le i \le n}\left(\min_{\substack{x' \in M(\xi) \\ x'' \in [y_i - h - \varepsilon, y_i + h + \varepsilon]}} |x' - x''| \right), \varepsilon \right\}$$

и построим отображение $\varphi_2 : S^{2n+1} \to C_{[0,2\pi]}$ следующим образом

$$\varphi_2(\xi, x) = \begin{cases} G_3(\xi, v, q, x), & \text{если } \xi \in A_1, \\ -G_3(-\xi, v, q, x), & \text{если } \xi \in -A_1, \\ G_2(\xi, v, q, x) & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко видеть, что отображение $\varphi_2 : S^{2n+1} \to C_{[0,2\pi]}$ непрерывно и нечетно. Выберем при каждом $k = 1,2,...$ точки $y_i^{(k)} \in (y_i, y_{i+1})$, $i = 1,2,...,n$ так, чтобы $\lim_{k \to \infty} y_i^{(k)} = y_i$ для всех $i = 1,2,...,n$ и построим на сфере S^{2n+1} векторно-значную функцию $\vec{\eta}(\xi) = (\eta_1(\xi), ..., \eta_{2n}(\xi))$ следующим образом:

$$\eta_1(\xi) = \int_0^{2\pi} \varphi_2(\xi, x)dx,$$

$$\eta_i(x) = \begin{cases} S_h J_1 \varphi_2(\xi, *)(y_j^{(k)}) - S_h J_1 \varphi_2(\xi, *)(y_j), & \text{если } i = 2j - \text{четно}, \\ S_h J_1 \varphi_2(\xi, *)(y_j) - S_h J_1 \varphi_2(\xi, *)(y_{j-1}^{(k)}), & \text{если } i = 2j - 1 > 1 \ - \text{нечетно}. \end{cases}$$

Поскольку отображение $\eta : S^{2n+1} \to S^{2n}$ непрерывно и нечетно, то в силу теоремы К. Борсука [8] существует точка $\tilde{\xi}^{(k)} \in S^{2n+1}$, в которой вектор $\vec{\eta}$ обращается в нуль. Выберем из последовательности $\left\{\tilde{\xi}^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $\varsigma \in S^{2n+1}$, тогда $S_h J_1 \varphi_2(\varsigma, *)(t)$ имеет равные значения в узлах $y_1, \ldots, y_n$, кроме того, производная $\frac{d}{dt}\left(S_h J_1 \varphi_2(\varsigma,*)(t)\right)$ в этих узлах обращается в ноль. Покажем, что разность $S_h J_1 \varphi_2(\varsigma,*)(t) - S_h J_1 \varphi_2(\varsigma,*)(y_1)$ не может принимать значения разных знаков. Предположим, что это не так. Возможны два случая.

1) На каждом промежутке $[y_i, y_{i+1}]$ $(i = 1,2,\dots,n)$ функция $S_h J_1 \varphi_2(\varsigma,*)(t)$ отлична от тождественной константы, тогда из сделанного предположения следует, что $S_h J_1 \varphi_2(\varsigma,*)(t)$ имеет более $2n$ точек перегиба на $[0,2\pi)$, а значит, $\varphi_2(\varsigma, t+h) - \varphi_2(\varsigma, t-h)$ имеет на $[0,2\pi)$ более $2n$ перемен знака, что невозможно.

2) Предположим, что найдется промежуток $[y_m, y_{m+1}]$, на котором функция $S_h J_1 \varphi_2(\varsigma,*)(t)$ является тождественной константой, тогда $\varphi_2(\varsigma, t+h) = \varphi_2(\varsigma, t-h)$ для всех $t \in [y_m, y_{m+1}]$. Рассмотрим $(2\pi - 2h)$-периодическую функцию

$$\Phi(t) = \begin{cases} \varphi_2(\varsigma, t), \text{если } t \in [0, y_m - h], \\ \varphi_2(\varsigma, t + 2h), \text{если } t \in [y_m - h, 2\pi - 2h], \\ \Phi(t + 2\pi - 2h) \text{ для всех } t. \end{cases}$$

Так как $y_{m+1} - y_m > 2h$, то $\Phi(t)$ получена из $\varphi_2(\varsigma, t)$ вырезанием четного количества подряд идущих « шапочек » и обладает аналогичными свойствами в узлах $y_1, y_2, \dots, y_m, y_{m+2} - 2h, y_{m+3} - 2h, \dots, y_n - 2h$. Повторяя описанный процесс, через конечное число шагов получим функцию, к которой применимы рассуждения, аналогичные случаю 1).

Таким образом, $S_h J_1 \varphi_2(\varsigma,*)(t) \ge S_h J_1 \varphi_2(\varsigma,*)(y_1)$ для всех t, либо $S_h J_1 \varphi_2(\varsigma,*)(t) \le S_h J_1 \varphi_2(\varsigma,*)(y_1)$ для всех t. Не ограничивая общности, можно считать, что $S_h J_1 \varphi_2(\varsigma,*)(t)$ принимает равные минимальные значения в точках $y_1, y_2, \dots, y_n$ (в противном случае рассмотрим точку $-\varsigma$). Нетрудно показать, что $\varsigma \in A$, кроме того, каждый промежуток $[y_i - h - \varepsilon_2, y_i + h + \varepsilon_2]$, $[y_i - h, y_i + h]$ содержит ровно один минимум функции $J_1 \varphi_2(\varsigma, x)$, а тогда в силу леммы 1 и выбора числа ε справедливо неравенство $\min\limits_{1 \le j \le 2n} |\gamma_j(\varsigma)| \ge \varepsilon$.

Далее, поскольку $\int\limits_0^{2\pi}\varphi_2(\varsigma,x)dx=0$, то найдется $i_0\in\{1,2,...,n\}$, для которого $[y_{i_0}-h-2\varepsilon, y_{i_0}+h+2\varepsilon]$ не содержит точек максимума функции $J_1\varphi_2(\varsigma,x)$, так как в противном случае из (2), (3) и способа выбора ε следует, что $\int\limits_0^{2\pi}\varphi_2(\varsigma,x)dx\neq 0$. Таким образом, $\varsigma\in A_1$, причем в точке ς $C_1=C_2=C_3=1$, поэтому $\varphi_2(\varsigma,x)=f(\gamma(\varsigma),v(x),q(x),x+a(\varsigma))$, то есть функция $\varphi_2(\varsigma,x-a(\varsigma))$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.

В случае, когда $v(x)$ и $q(x)$ – линейные функции, утверждение теоремы 1 получено в [9 и 2].

Теорема 2. *Для любого выпуклого вверх модуля непрерывности* $\omega(t)$ *и любого* $h\in(0,\pi/(4n))$ *интервальная квадратурная формула прямоугольников с узлами* $x_k^0=\tau+2\pi(k-1)/n$, $k=1,2,...,n$, $\tau\in[0,2\pi/n)$ *и коэффициентами* $c_k^0=2\pi/n$, $k=1,2,...,n$ *является наилучшей для класса* $W^2H_1^\omega$ *среди всех квадратурных формул вида (1), удовлетворяющих условию*

$$x_1+h\le x_2-h<x_2+h\le x_3-h<x_3+h\le...\le x_n-h<x_n+h\le x_1+2\pi-h. \quad (6)$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\tau=0$. Пусть $\psi(t)$ – $2\pi/n$-периодическая функция, равная в среднем нулю на периоде, определенная равенством

$$\psi''(t)=\begin{cases}\pi/(hn)-1, & \text{если} \quad t\in[-h,h],\\ -1, & \text{если} \quad t\in(h,2\pi/n-h),\end{cases}$$

$\mu\in[0,\pi/n]$ – нуль функции $\psi(t)$, $g_n(\omega,h,x)$ – $2\pi/n$-периодическая четная функция, определенная следующими равенствами

$$g_n(\omega,h,x_k^0)=0,\ k=1,2,...,n,$$

$$g_n''(\omega,h,x)=\begin{cases}\frac{1}{2n}\omega'(2x)+\gamma, & \text{если } x\in[0,\mu],\\ \gamma, & \text{если } x\in[\mu,\pi/n],\end{cases}$$

где $\gamma\in R$ – константа, определенная условием $\int\limits_0^{2\pi/n}g_n''(\omega,h,x)dx=0$.

Из теоремы и леммы 2 в [5] следует, что

$$R_n\left(W^2H_1^{\omega},\vec{c}_n^{\,0},\vec{x}_n^{\,0},h\right)=\int_0^{2\pi}\left(g_n(\omega,h,x)-\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}g_n(\omega,h,t)dt\right)dx .$$

Пусть $\zeta\in(0,\pi/n)$ - точка, в которой функция $g_n''(\omega,h,t)$ меняет знак. Положим

$$v_0(x)=\begin{cases}\int_0^x g_n''(\omega,h,t)dt, & \text{если } 0\le x\le\zeta,\\ \int_0^{\zeta} g_n''(\omega,h,t)dt, & \text{если } x>\zeta,\\ -v_0(-x), \text{ если } x<0,\end{cases}$$

$$q_0(x)=\begin{cases}\int_{\pi/n-x}^{\pi/n} g_n''(\omega,h,t)dt, & \text{если } 0\le x\le\pi/n-\zeta,\\ \int_{\zeta}^{\pi/n} g_n''(\omega,h,t)dt, & \text{если } x>\pi/n-\zeta,\\ -q_0(-x), \text{ если } x<0,\end{cases}$$

В силу нечетности $v_0(x)$ и $q_0(x)$ для этих функций неравенства (2) и (3) справедливы при любом $h\in(0,\pi/(4n))$, а тогда в силу теоремы 1 для любых узлов $\{x_i\}_{i=1}^n$, удовлетворяющих условию (6), существует функция $f(\xi_0,v_0,q_0,x)\in M^*_{2n,v_0,q_0}$, для которой $S_hJ_1f(\xi_0,v_0,q_0,*)(t+t_0)$ принимает равные минимальные значения в узлах $x_1,x_2,\dots,x_n$ (t_0 – некоторое действительное число, зависящее от узлов $\{x_i\}_{i=1}^n$). Следовательно, функция

$$J_1f(\xi_0,v_0,q_0,t+t_0)-\frac{1}{2h}\int_{x_1-h}^{x_1+h}J_1f(\xi_0,v_0,q_0,y+t_0)dy$$

обращает в ноль квадратурную сумму, при этом в силу [4, лемма 3] эта функция принадлежит классу $W^2H_1^{\omega}$. Таким образом, для любого набора коэффициентов $\vec{c}_n=\{c_k\}_{k=1}^n$, $c_k\in R$ справедливо неравенство

$$R_n(W^2H_1^\omega,\vec{c}_n,\vec{x}_n,h)\ge\int_0^{2\pi}\left(J_1f(\xi_0,v_0,q_0,t+t_0)-\frac{1}{2h}\int_{x_1-h}^{x_1+h}J_1f(\xi_0,v_0,q_0,y+t_0)dy\right)dt. \quad (7)$$

Пусть $\tau_1,\tau_2,...,\tau_{2n}$ – точки локальных экстремумов функции $J_1f(\xi_0,v_0,q_0,t+t_0)$, причем τ_{2k} – точки минимума, τ_{2k-1} – точки максимума ($k=1,2,...,n$), $\tau_1<\tau_2<...<\tau_{2n}<\tau_1+2\pi=\tau_{2n+1}$, тогда

$$\int_0^{2\pi}\left(J_1f(\xi_0,v_0,q_0,t+t_0)-\frac{1}{2h}\int_{x_1-h}^{x_1+h}J_1f(\xi_0,v_0,q_0,y+t_0)dy\right)dt\ge$$

$$\ge\sum_{k=1}^{n}\int_{\tau_{2k-1}}^{\tau_{2k+1}}\left(J_1f(\xi_0,v_0,q_0,t+t_0)-\frac{1}{2h}\int_{\tau_{2k}-h}^{\tau_{2k}+h}J_1f(\xi_0,v_0,q_0,y+t_0)dy\right)dt. \quad (8)$$

Для каждого $a>0$ определим на $[0,+\infty)$ вспомогательные функции $W(a,t)$, $G(a,t)$ следующим образом: если $a\in(0,\pi/n]$, то

$$W(a,t)=\begin{cases}\int_0^t\min\{v_0(x),q_0(x-a)\}dx, & \text{если } t\in[0,a]\\ \int_0^a\min\{v_0(x),q_0(x-a)\}dx, & \text{если } t>a,\end{cases}$$

если $a>\pi/n$, то $W(a,t)=W(\pi/n,t)$, $G(a,t)=\int_0^t\min\{v_0(x),q_0(x-a)\}dx$ для всех $a>0$. Зафиксируем значение $k\in\{1,2,...,n\}$. Возможны два случая:

1) $\min\{\tau_{2k}-\tau_{2k-1};\tau_{2k+1}-\tau_{2k}\}\le\pi/n$, тогда легко видеть, что

$$\int_{\tau_{2k-1}}^{\tau_{2k+1}}\left(J_1f(\xi_0,v_0,q_0,t+t_0)-\frac{1}{2h}\int_{\tau_{2k}-h}^{\tau_{2k}+h}J_1f(\xi_0,v_0,q_0,y+t_0)dy\right)dt\ge$$

$$\ge\int_0^{\tau_{2k+1}-\tau_{2k}}W(\tau_{2k+1}-\tau_{2k},t)dt+\int_0^{\tau_{2k}-\tau_{2k-1}}W(\tau_{2k}-\tau_{2k-1},t)dt-\frac{\tau_{2k+1}-\tau_{2k\ 1}}{2h}\int_{-h}^{h}g_n(\omega,h,t)dt; \quad (9)$$

2) $\min\{\tau_{2k}-\tau_{2k-1};\tau_{2k+1}-\tau_{2k}\}>\pi/n$, тогда

$$\int_{\tau_{2k-1}}^{\tau_{2k+1}}\left(J_1f(\xi_0,v_0,q_0,t+t_0)-\frac{1}{2h}\int_{\tau_{2k}-h}^{\tau_{2k}+h}J_1f(\xi_0,v_0,q_0,y+t_0)dy\right)dt\ge$$

$$\ge2\int_0^{(\tau_{2k+1}-\tau_{2k-1})/2}G((\tau_{2k+1}-\tau_{2k-1})/2,t)dt-\frac{\tau_{2k+1}-\tau_{2k\ 1}}{h}\int_0^{h}G\left(\frac{\tau_{2k+1}-\tau_{2k-1}}{2},t\right)dt\ge$$

$$\ge2\int_0^{(\tau_{2k+1}-\tau_{2k-1})/2}W((\tau_{2k+1}-\tau_{2k-1})/2,t)dt-\frac{\tau_{2k+1}-\tau_{2k-1}}{2h}\int_{-h}^{h}g_n(\omega,h,t)dt. \quad (10)$$

Первое неравенство в (10) можно получить, исследуя левую часть как функцию τ_{2k} (при фиксированных τ_{2k-1}, τ_{2k+1}), второе неравенство легко проверяется непосредственным сравнением интегралов.

Принимая во внимание (7)-(10) и то, что функция $\Psi(y) = \int_0^y W(y,t)dt$ выпукла вниз, приходим к неравенству

$$R_n(W^2H_1^{\omega}, \vec{c}_n, \vec{x}_n, h) \geq 2n \int_0^{\pi/n} W(\pi/n, t)dt - \frac{\pi}{h} \int_{-h}^{h} g_n(\omega, h, t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(g_n(\omega, h, x) - \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} g_n(\omega, h, t)dt \right) dx = R_n(W^2H_1^{\omega}, \vec{c}_n^{\,0}, \vec{x}_n^{\,0}, h),$$

откуда следует утверждение теоремы.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В.Ф.** Об одной задаче оптимизации приближенного интегрирования // Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск. – 1984. – С. 3–13.
2. **Бабенко В.Ф.** Об оптимальных интервальных квадратурных формулах на классах дифференцируемых периодических функцій/ В.Ф.Бабенко, Д.С. Скороходов// Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2007, № 8, вип. 12. – С. 16–25.
3. **Бородачев С.В.** Оптимизация «интервальных» квадратурных формул для классов $H^{\omega_+;\,\omega_-}$ // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 1998, вип. 3. – С. 19 – 26.
4. **Дерец Е.В.** Об оптимизации квадратурных формул для некоторых классов периодических дифференцируемых функций //Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 2005, №6, вип. 10. – С. 43–57.
5. **Дерец Е.В.** О погрешности интервальной квадратурной формулы прямоугольников для класса $W^2H_1^{\omega}$ // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2007, № 8, вип. 12. – С. 84–88.
6. **Кузьмина А.А.** Интервальные квадратурные формулы с кратными узловыми интервалами // Изв. вузов. 1980. №7. – С. 39–44.
7. **Шарипов Р.Н.** Наилучшие интервальные квадратурные формулы для классов Липшица // Конструктивная теория функций и функцион. анализ. Казань, 1983. – Вып. 4. – С. 124–132.
8. **Borsuk K.** Drei Satze uber die n -dimensionale euklidische Sphare // Fund. Math. 20. – 1933. – P. 177–191.
9. **Motornyi V. P.** On the best interval quadrature formula in the class of functions with bounded r^{th} derivative // East journal of approximations. – 1998. – Vol. 4 , №4. – P. 459–478.
10. **Omladic M.** On a new type of quadrature formulas /Omladic M., Pahor S., Suhadolc A. // Numer. Math. – 1976. – Bd. 25, № 4. – P. 421–426.
11. **Pittnauer Fr.** Interpolation mit Intervallfunktionalen / Pittnauer Fr., Reimer M. // Math. Z. – 1976. – Bd. 146, № 1. – P. 7–15.

Надійшла до редколегії 15 10.07

УДК 517.5

В. Г. Доронін , А. О. Лигун

Дніпропетровський національний університет

ПОВЕДІНКА ТОЧНИХ КОНСТАНТ У НЕРІВНОСТЯХ ТИПУ ДЖЕКСОНА

Проведено дослідження поведінки точних констант у нерівностях типу Джексона у просторі L_p.

Нехай $L_p(1 \le p \le \infty)$ – простір 2π-періодичних вимірних функцій f з скінченною нормою:

$$\|f\|_p = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right\}^{1/p}, \quad \|f\|_\infty = \sup \operatorname{vrai} |f(t)|.$$

Як завжди, нехай

$$E(f; \Im)_p := \inf\left\{ \|f - \varphi\|_p \mid \varphi \in \Im \right\}$$

– найкраще наближення функції $f \in L_p$ множиною $\Im \subset L_p$ у просторі L_p, зокрема, будемо писати:

$$E(f)_p := E\left(f; \mathbf{R}^1\right)_p;$$

$$E\ (\Re; \Im)_p := \sup\left\{E\ (f; \Im)_p \mid f \in \Re\right\}$$

– найкраще наближення множини $\Re$ множиною $\Im$ в просторі L_p.

Позначимо:

$f_{\delta m}$ – функція В. Стєклова порядку m з кроком δ від функції f :

$$f_{\delta 0} := f, \quad f_{\delta m}(t) := \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta/2}^{t+\delta/2} f_{\delta(m-1)}(u)\, du;$$

$f^{(-r)}$ – r-й 2π-періодичний інтеграл, який має нульове середньє значення на періоді, від функції $f \in L_1$, яка має нульове середньє значення на періоді $(f \perp 1)$;

$L_p^r\ (r = 1, 2, \ldots)$ – множина всіх r-х 2π-періодичних інтегралів, від функцій $f \in L_p$, таких що $f \perp 1$;

$$W_p^r := \left\{ \varphi \mid \varphi \in L_p^r,\ \left\|\varphi^{(r)}\right\|_p \le 1 \right\};$$

$$W_p^{r,*} := \left\{ \varphi \mid \varphi \in L_p^r,\ E\left(\varphi^{(r)}\right)_p \le 1 \right\} \ \left(W_p^r \subset W_p^{r,*}\right).$$

Нехай $\aleph_{r,m}(\Im; \delta)_{p,q}$ – найменша константа $\aleph$ у нерівності типу Джексона

$$E\ (f; \Im)_p \le \aleph\, \omega_m\left(f^{(r)}; \delta\right)_q,$$

де

$$\omega_m(f;t)_q := \sup\left\{ \left\| \Delta_\eta^m f(\cdot) \right\|_q \ \middle|\ |\eta| \le t \right\}$$

— інтегральний модуль гладкості функції f порядку m, а $\Delta_\eta^m f(x)$ – різниця порядку m функції f у точці x з кроком η.

Зрозуміло, що

$$\aleph_{r,m}(\Im;\delta)_{p,q} = \sup\left\{ \frac{E\ (f,\Im)_p}{\omega_m\left(f^{(r)};\delta\right)_q} \ \middle|\ f \in L_q^r, f \ne \mathrm{const} \right\}. \qquad (2)$$

Фундатором успішного розвитку теорії точних констант є М. П. Корнєйчук, який у просторі C неперервних 2π-періодичних функцій за наближення множиною $\mathbf{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів порядку $\le n-1$, довів [1], що для будь-якої $f \in C(f \ne \mathrm{const})$ виконується нерівність

$$E(f;\mathbf{T}_{2n-1})_\infty \le 1\cdot\omega_1(f;\delta)_\infty, \quad \left(n = 1, 2, ...; \quad \delta \ge \frac{\pi}{n}\right), \qquad (3)$$

в котрій константу 1 зменшити неможливо.

Величина $\aleph(\delta) := \aleph_{r,m}(\Im;\delta)_{p,q}$ при зростанні δ спадає до деякої точки (оптимальної точки мінімальної константи) $\delta_0 = \delta_0(\Im, r, m, p, q)$, а далі, потрапляючи на свій глобальний мінімум, стабілізується

$$\aleph(\delta) = \aleph(\delta_0) \quad (\delta \ge \delta_0).$$

Установлена точна нерівність М. П. Корнійчука (3) дозволяє локалізувати оптимальну точку мінімальної константи

$$\frac{\pi}{2n} \le \delta_0 \le \frac{\pi}{n}$$

і при цьому

$$\aleph_{0,1}(\mathbf{T}_{2n-1};\delta)_{\infty,\infty} = 1 \quad (\delta \ge \delta_0).$$

Отримати точні константи у нерівностях типу Джексона на даний момент вдалося не багатьом авторам [1; 5; 6; 8; 11; 13; 15].

Оптимальну точку, наскільки нам відомо, знайдено лише в двох випадках [6; 7].

Надати вичерпну відповідь на питання, чому дорівнює точна константа $\aleph(\delta)$ при $\delta < \delta_0$, навряд чи можливо. Тому має сенс отримання таких нерівностей, з яких буде визначатися порядок зростання $\aleph(\delta)$ при $\delta \to 0$.

Такий підхід у кількох випадках уже надав позитивний результат [11; 12; 14]. У даній роботі ми проводжуємо дослідження цього напрямку.

Доволі загальний результат містить наступна

Теорема 1. *Нехай* $r = 1, 2, \ldots$, $1 \le p, q \le \infty$, $0 < \alpha, \beta < \infty$, $\delta > 0$ *і* $\Im$ – *підпростір простору* L_p, *який містить константи. Тоді справджуються такі співвідношення:*

$$E\ (f; \Im)_p \le \omega_1\left(f^{(r)}; \delta/2\right)_q A_{r,*}(\Im) + \left(\frac{1}{\delta}\right)\omega_1\left(f^{(r)}; \delta\right)_q A_{r+1}(\Im) \quad \left(f \in L_q^r\right), \tag{4}$$

Крім того,

$$\max\left\{\left(\frac{1}{2}\right)A_{r,*}(\Im), \left(\frac{1}{\delta}\right)A_{r+1}(\Im)\right\} \le \aleph_{r,1}^{\alpha,\beta}(\Im; \delta)_{p,q} \le A_{r,*}(\Im) + \left(\frac{1}{\delta}\right)A_{r+1}(\Im), \tag{5}$$

де

$$A_{r,*}(\Im) := E\ \left(W_q^{r,*}; \Im\right)_p, \quad A_{r+m}(\Im) := E\ \left(W_q^{r+m}; \Im\right)_p. \tag{6}$$

За умови $q = \infty$ цей результат, майже в такому ж вигляді був отриманий [11], а потім деякі його модифікації [12; 14].

Зазначимо, що в умовах теореми 1 для фіксованого підпростору $\Im$ при $\delta \to 0$

$$\aleph_{r,1}(\Im; \delta)_{p,q} \sim \left(\frac{1}{\delta}\right)\ A_{r+1}(\Im). \tag{7}$$

Крім того, зауважимо, якщо послідовність N-вимірних підпросторів $\Im_N$ така, що при $k = 1, 2$

$$\frac{E\ \left(W_q^{r+k}; \Im_N\right)_p}{E\ \left(W_q^r; \Im_N\right)_p} \asymp \left(\frac{1}{N}\right)^k (N \to \infty) \tag{8}$$

(для багатьох підпросторів відомо, що це так, наприклад, для підпросторів $\mathbf{T}_{2n-1}$, тригонометричних поліномів та сплайнів $S_{2n,r+v}$), тоді, користуючись тим простим фактом, що

$$E\ \left(W_q^r; \Im\right)_p \le E\ \left(W_q^{r,*}; \Im\right)_p \le 2E\ \left(W_q^r; \Im\right)_p,$$

за умови

$$\delta = \delta_N \asymp \left(\frac{1}{N}\right)(N \to \infty), \tag{9}$$

внаслідок теореми 1 маємо

$$\aleph_{r,1}(\Im_N; \delta_N)_{p,q} \underset{N \to \infty}{\asymp} E\ \left(W_q^r; \Im_N\right)_p. \tag{10}$$

Доведення. Для довільної функції $x \in L_q^r$ за теоремою двоїстості для найкращих наближень [8, с. 43; 3, с. 25], маємо

$$E\ (x; \Im)_p = \sup\left\{ \int_0^{2\pi} x(t)\,\varphi(t)\,dt \quad | \quad \varphi \in L_{p'}, \quad \|\varphi\|_{p'} \le 1, \quad \varphi \perp \Im \right\} =$$

$$= \sup\left\{ \int_0^{2\pi} x^{(r)}(t)\,\varphi^{(-r)}(t)\,dt \quad | \quad \varphi \in L_{p'}, \quad \|\varphi\|_{p'} \le 1, \quad \varphi \perp \Im \right\} =$$

$$= \sup\left\{ \int_0^{2\pi} x^{(r)}(t)\,\varphi''(t)\,dt \quad | \quad \psi \in W_{p'}^{r+2}, \quad \psi^{(r+2)} \perp \Im \right\} = \tag{11}$$

$$= \sup\left\{ \int_0^{2\pi} f(t)\,\psi''(t)\,dt \quad | \quad \psi \in W_{p'}^{r+2}, \quad \psi^{(r+2)} \perp \Im \right\},$$

де позначено $f = x^{(r)}$, $\varphi = \psi^{(r+2)}$.

Будемо користуватися оцінками:

$$\int_0^{2\pi} f \cdot \psi''\,dt = \int_0^{2\pi} (f - f_\delta) \cdot \psi''\,dt + \int_0^{2\pi} f_\delta \cdot \psi''\,dt \le$$
$$\le \|f - f_\delta\|_q\,\|\psi''\|_{q'} + \int_0^{2\pi} f'_\delta \cdot \psi'\,dt. \tag{12}$$

Внаслідок того, що при будь-якому $\lambda \in \mathbf{R}^1$

$$\int_0^{2\pi} f'_\delta \cdot \psi'\,dt = \int_0^{2\pi} f'_\delta\,(\psi' - \lambda)\,dt \le \|f'_\delta\|_q\,\|\psi' - \lambda\|_{q'},$$

отримаємо

$$\int_0^{2\pi} f'_\delta \cdot \psi'\,dt \le \|f'_\delta\|_q\,E(\psi')_{q'}. \tag{13}$$

Відомі [2, с. 178; 4, с. 178] наступні оцінки для норм, які містять функції Стєклова:

$$\begin{cases} \|f - f_\delta\|_q \le \omega_1(f; \delta/2)_q, \\ \|f'_\delta\|_q \le \left(\dfrac{1}{\delta}\right)\omega_1(f; \delta)_q. \end{cases} \tag{14}$$

Із співвідношення (10), застосувавши до нього спочатку оцінки (12), (13) а потім (14), виводимо, що справджується нерівність

$$E\left(x;\Im\right)_p\le$$

$$\le\sup\left\{\omega_1\left(x^{(r)};\delta/2\right)_q\|\psi''\|_{q'}+\left(\frac{1}{\delta}\right)\omega_1\left(x^{(r)};\delta\right)_q E(\psi')_{q'}\,\middle|\,\psi\in W_{p'}^{r+2},\ \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\}. \tag{15}$$

Використовуючи відоме екстремальне співвідношення [2, с. 301], а потім теорему двоїстості для найкращих наближень [8, с. 43], запишемо наступний ланцюжок рівностей:

$$A_r:=\sup\left\{\|\psi''\|_{q'}\ \middle|\ \psi\in W_{p'}^{r+2},\quad \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\}=$$

$$=\sup\left\{\sup\left\{\int_0^{2\pi}\psi''(t)\,\theta(t)\,dt\ \middle|\ \|\theta(\cdot)\|_q\le1\right\}\ \middle|\ \psi\in W_{p'}^{r+2},\quad \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\}=$$

$$=\sup\left\{\sup\left\{\int_0^{2\pi}\psi''(t)\,[\theta(t)-\lambda]\,dt\ \middle|\ \|\theta(\cdot)\|_q\le1\right\}\ \middle|\ \psi\in W_{p'}^{r+2},\quad \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\}=$$

$$=\sup\left\{\sup\left\{\int_0^{2\pi}[\theta(t)-\lambda]^{(-r)}\psi^{(r+2)}(t)dt\ \middle|\ \psi\in W_{p'}^{r+2},\quad \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\}\ \middle|\ \|\theta(\cdot)\|_q\le1\right\}=$$

$$=\sup\left\{E\ \left([\theta(t)-\lambda]^{(-r)};\Im\right)_p\ \middle|\ \|\theta\|_q\le1\right\}=$$

$$=\sup\left\{E\ \left(y;\Im\right)_p\ \middle|\ y\in\Re\right\}, \tag{16}$$

де константу λ вибрано так, що $[\theta(t)-\lambda]\perp1$ і покладено

$$y=[\theta(t)-\lambda]^{(-r)},\quad \Re=\left\{y\,|\,y\in L_q^r,\left\|y^{(r)}+\lambda\right\|_q\le1\right\}.$$

Якщо $y\in\Re$, тоді

$$E\left(y^{(r)}\right)_q\le\left\|y^{(r)}+\lambda\right\|\le1.$$

Отже, $\Re\subset W_q^{r,*}$. З врахуванням цього із (16) випливає, що

$$A_r\le E\ \left(W_q^{r,*};\Im\right)_p=A_{r,*}(\Im). \tag{17}$$

Теорема двоїстості для найкращих наближень [8, с. 43], а потім знову ця теорема, дозволяє переконатися в тому, що

$$\sup\left\{E\left(\psi^{(1)}\right)_{q'}\ \middle|\ \psi\in W_{p'}^{r+2},\quad \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\}=$$

$$=\sup\left\{\sup\left\{\int_0^{2\pi}\psi^{(1)}\cdot f\,dt\ \middle|\ \|f\|_q\le1,\quad f\perp1\right\}\ \middle|\ \psi\in W_{p'}^{r+2},\quad \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\}=$$

$$=\sup\left\{\sup\left\{\int_0^{2\pi}\psi^{(r+2)}\cdot f^{(-(r+1))}\,dt\ \middle|\ \psi\in W_{p'}^{r+2},\quad \psi^{(r+2)}\perp\Im\right\}\ \middle|\ \|f\|_q\le1,\quad f\perp1\right\}=$$

$$= \sup\left\{ E\ \left(f^{(-(r+1))}; \wp\right)_p \ \mid\ \|f\|_q \le 1,\quad f \perp 1 \right\} =$$

$$= \sup\left\{ E\ (\varphi; \Im)_p \ \mid\ \left\|\varphi^{(r+1)}\right\|_q \le 1,\quad \varphi^{(r+1)} \perp 1 \right\} =$$

$$= \sup\left\{ E\ (\varphi; \Im)_p \ \mid\ \varphi \in W_q^{r+1} \right\} = E\ \left(W_q^{r+1}; \Im\right)_p = A_{r+1}(\Im). \tag{18}$$

Із оцінки (15), застосувавши до неї нерівність (17) та нерівність (18), отримуємо оцінку (4).

Внаслідок (2) із (4) випливає, що

$$\aleph_{r,1}(\Im; \delta)_{p,q} \le A_{r,*}(\Im) + \left(\frac{1}{\delta}\right) A_{r+1}(\Im) \tag{19}$$

і таким чином, у твердженні (5), регламентованному теоремою 1, оцінка зверху точної константи – доведена.

отже у твердженні (6) теореми 1 оцінка зверху точної константи — доведена.

Щоб отримати потрібні оцінки знизу, спочатку відмітимо, що

$$A_{r+1}(\Im) = \sup\left\{ \frac{E\ (x; \Im)_p}{\left\|x^{(r+1)}\right\|_q} \ \mid\ x \in L^{r+1},\quad x \ne \text{const} \right\}. \tag{20}$$

Крім того, із відомої в теорії скінченних різниць нерівності

$$\left\| \Delta_\delta^m f(\cdot) \right\|_q \le \delta^m \left\|f^{(m)}\right\|_q \quad \left(f \in L_q^m\right)$$

випливає, що

$$\omega_m \left(f^{(r)}; \delta\right)_q \le \delta^m \left\|f^{(r+m)}\right\|_q \quad \left(f \in L_q^{r+m}\right). \tag{21}$$

Із співвідношення (20), на підставі нерівності (21), отримаємо що

$$A_{r+1}(\Im) \le \delta\ \sup\left\{ \frac{E\ (x; \Im)_p}{\omega_1\left(x^{(r)}; \delta\right)_q} \ \mid\ x \in L_q^{r+1},\quad x \ne \text{const} \right\} \le$$

$$\le \delta\ \aleph_{r,1}(\Im; \delta)_{p,q}.$$

Отже, справедлива оцінка:

$$\left(\frac{1}{\delta}\right) A_{r+1}(\Im) \le \aleph_{r,1}(\Im; \delta)_{p,q}. \tag{22}$$

Подібно попередньому, беручи до уваги, по-перше, що

$$A_{r,*}(\Im) = \sup\left\{ \frac{E\ (x; \Im)_p}{E\left(x^{(r)}\right)_q} \ \mid\ x \in L_q^r,\quad x \ne \text{const} \right\}, \tag{23}$$

а, по-друге, що для будь-яких $x \in L_q^r$, $m = 1, 2, \ldots$, $\delta > 0$

$$\omega_m\left(x^{(r)}; \delta\right)_q \leq 2^m E\left(x^{(r)}\right)_q, \tag{24}$$

із (27), (28) виводимо наступну нерівність

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m A_{r,*}(\mathfrak{I}) \leq \aleph_{r,m}(\mathfrak{I}; \delta)_{p,q}. \tag{25}$$

Оцінка зверху (19) разом з оцінками знизу (22) та (25) при $m = 1$ дають твердження (5) теореми 1. Теорема 1 доведена.

Бібліографічні посилання

1. **Корнейчук Н.П.** Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 145, № 3. – С. 514 – 515.
2. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные задачи теории приближения. – М., 1976. –320 с.
3. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. – М., 1987. – 423 с.
4. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. – М., 1960. – 624 с.
5. **Черных Н. И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. мат. ин-та АН СССР. – 1967. – Т. 88. – С. 71 – 74.
6. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. – 1967. – Т. 2, № 5. – С. 513 – 522.
7. **Гаврилюк В.Т.** Приближение непрерывных периодических функций суммами Рогозинского и суммами Фурье. // Вопросы теор. прибл. функ. и ее прилож. – К., – 1976. – С. 46 – 60.
8. **Н.П. Корнейчук, А.А. Лигун , В.Г. Доронин** Аппроксимация с ограничениями. – К., 1982, – 250 с.
9. **Бабенко В.Ф.** Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн. – 1982. – Т. 34, № 4. – С. 409 – 416.
10. **Бабенко В.Ф.** Несимметричные экстремальные задачи теории приближения // ДАН СССР. – 1983. – Т.269, № 3. – С. 521 – 524.
11. **Лигун А.А.** Специальные вопросы теории приближений. – К., – 1990. – 74 с.
12. **Доронин В.Г.** О порядке роста точных констант в неравенствах типа Джексона для наилучших односторонних приближений // Межд. конф.: Калуга: Теория прибл., тезисы докл. – 1996. – С. 90 – 91.
13. **Ligun A.A.** Jackson's type inequalities // East J. Apprx. – 1996. – Vol. 2, № 2. – P. 235 – 244.
14. **Доронін В.Г.** Про порядок зростання точних констант у нерівностях типу Джексона для найкращих (α, β)-наближень // II Міжн. школа: Ряди Фур'є: Тези доп., – К., – 1997. – С. 47 – 48.
15. **Бабенко А.Г.** Прямые теоремы теории приближения в L_2 и родственные экстремальные задачи для положительно определенных функций // Дис. доктора физ.-мат. наук. – Екатеринбург, 2004, – 268 с.

Надійшла до редколегії 09 01.08

УДК 517.5

Е.Н. Карпова, Н.В. Парфинович

Днепропетровский национальный университет

О НАИЛУЧШИХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ СПЛАЙНАМИ

Знайдено точні асимптотичні рівності для найкращих несиметричних наближень класів W_1^r сплайнами з обмеженою старшою похідною.

Пусть L_p $(1 \le p \le \infty)$ – пространства 2π-периодических функций $f : IR \to IR$ с соответствующими нормами $\|f\|_p = \|f\|_{L_p}$. Если $f \in L_p$ и α и β – положительные числа, то положим

$$\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p, \text{ где } f_\pm(t) = \max\{\pm f(t), 0\}.$$

Если $M \subset L_p$ – некоторый класс функций, то величина

$$E(M,H)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{f \in M} \inf_{u \in H} \|f - u\|_{p,\alpha,\beta} \tag{1}$$

называется наилучшим (α, β) – приближением класса M множеством $H \subset L_p$ в метрике L_p. При $\alpha = \beta = 1$ величина (1) совпадает с обычным наилучшим L_p – приближением класса M (обозначение $E(M,H)_p$).

Наилучшее приближение функции $f \in L_p$ в метрике L_p подпространством констант будем обозначать

$$E(f)_p := \inf_{\lambda \in R} \|f - \lambda\|_p.$$

Пусть фиксировано множество $H \subset L_p$. Сопоставим функции $f \in L_p$ подмножества:

$$H_f^+ = \{u(t) : \ u \in H, \ \ u(t) \le f(t), \ \ 0 \le t \le 2\pi\},$$
$$H_f^- = \{u(t) : \ u \in H, \ \ u(t) \ge f(t), \ \ 0 \le t \le 2\pi\}.$$

Положим

$$E^\pm(f,H)_p = \begin{cases} \inf\{\|f-u\|_p : \ u \in H_f^\pm\}, & H_f^\pm \ne \emptyset, \\ \infty, \quad H_f^\pm = \emptyset, \end{cases}$$

$$E^\pm(M,H)_p = \sup_{f \in M} E^\pm(f,H)_p.$$

Величины $E^\pm(f,H)_p$ и $E^\pm(M,H)_p$ называются наилучшим приближением снизу (+) и сверху (−) функции $f \in L_p$ и класса $M \subset L_p$ соответственно.

Обозначим через W_p^r класс функций $f \in L_p$, у которых $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна ($f^{(r-1)} \in AC_{loc}$), и $\left\|f^{(r)}\right\|_p \le 1$, а через W_V^r – класс функций $f \in L_p$, у которых $f^{(r-1)} \in AC_{loc}$, а $\bigvee\limits_0^{2\pi}\left[f^{(r)}\right] \le 1$. Пусть еще $S_{2n,r}$ – пространство 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1, с узлами в точках $\frac{k\pi}{n}$, $k \in Z$.

Через $\varphi_{\lambda,r}(\alpha;\beta;t)$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$ будем обозначать $\frac{2\pi}{\lambda}$ – периодический интеграл порядка r с нулевым средним значением на периоде от четной $\frac{2\pi}{\lambda}$ – периодической функции $\varphi_{\lambda,0}(\alpha;\beta;t)$, которая для $t \in \left[0, \frac{\pi}{\lambda}\right)$ определяется следующим образом:

$$\varphi_{\lambda,0}(\alpha;\beta;t) = \begin{cases} \alpha, & 0 \le t < \pi\beta/(\alpha\lambda + \beta\lambda), \\ -\beta, & \pi\beta/(\alpha\lambda + \beta\lambda) \le t < \pi/\lambda \end{cases}.$$

В [1] В.Ф. Бабенко исследовал поведение при $n \to \infty$ последовательности величин $E(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n)W_V^{r-1})_1$, где $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ – невозрастающая последовательность положительных чисел, а именно, имеет место

Теорема А. *Пусть* $r = 3,4,\ldots$ *и* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– невозрастающая последовательность положительных чисел. Тогда при* $n \to \infty$ *справедливы соотношения*

$$E(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n)W_V^{r-1})_1 \asymp \begin{cases} n^{-r}\varepsilon_n^{1-r/2}, & \varepsilon_n n^2 \to \infty \\ n^{-2}, & \varepsilon_n n^2 = O(1) \end{cases}$$

В дальнейшем этот результат был уточнен [2;5] (вместо порядковых получены точные асимптотические равенства), в частности, справедлива

Теорема В. *Пусть* $r = 3,4,\ldots$ *и* $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– невозрастающая последовательность положительных чисел, такая, что* $\varepsilon_n n^2 \to \infty$ *и* $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда при* $n \to \infty$ *выполняется соотношение*

$$E(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n)W_V^{r-1})_1 = \frac{C_r}{n^r \varepsilon_n^{r/2-1}}(1+o(1)),$$

где

$$C_r = \left(\frac{\pi^2 K_{r-2}}{4r}\right)^{\frac{r}{2}} \left(\frac{r-2}{2K_r}\right)^{\frac{r}{2}-1}$$

и K_r *– константы Фавара [4, с. 105].*

Подробнее о вопросах изучения наилучших относительных приближений смотри, например, [5].

Целью данной работы является решение задачи о точной асимптотике величин $E(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W_V^{r-1})_{1;\alpha,\beta}$ и $E^{\pm}(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W_V^{r-1})_1$ для четных r.

Теорема 1. *Пусть* $r = 4,6,\ldots$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *невозрастающая последовательность положительных чисел, такая, что* $\varepsilon_n n^2 \to \infty$ *и* $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$E(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W_V^{r-1})_{1,\alpha,\beta} = \frac{C_r}{n^r \varepsilon_n^{r/2-1}}(1+o(1)),$$

где

$$C_r = \left(\frac{\pi^2 E(\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{4r}\right)^{\frac{r}{2}} \left(\frac{r-2}{2E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}\right)^{\frac{r-2}{2}}.$$

Теорема 2. *Пусть* $r = 4,6,\ldots$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ – *невозрастающая последовательность положительных чисел, такая, что* $\varepsilon_n n^2 \to \infty$ *и* $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$E^{\pm}(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W_V^{r-1})_1 = \frac{C_r}{n^r \varepsilon_n^{r/2-1}}(1+o(1)),$$

где

$$C_r = \left(\frac{K_1^3 K_{r-3}}{r}\right)^{\frac{r}{2}} \left(\frac{r-2}{2K_1 K_{r-1}}\right)^{\frac{r-2}{2}}$$

и K_r – *константы Фавара.*

Доказательство теоремы 1. Пусть

$$C = \left\{ c = (c_1, c_2, \ldots, c_{2n}) \in R^{2n} : \sum_{k=1}^{2n} c_k = 0,\ \sum_{k=1}^{2n} |c_k| \le 1 \right\}.$$

Так же, как и при доказательстве теоремы из [3], можем установить, что

$$E_n := E\left(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n) \cdot W_V^{r-1}\right)_{1,\alpha,\beta} =$$

$$= \sup_{g \in W^r_{\infty,\alpha^{-1},\beta^{-1}}} \left\{ E(g)_\infty - (1+\varepsilon_n) \cdot \sup_{c \in C} \sum_{k=1}^{2n} c_k\, g\left(\frac{\pi k}{n}\right) \right\}. \tag{2}$$

И далее, считая, что $t = 0$ – точка максимума функции $\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot)$, как в [3], получим $E_n \le \frac{1}{2} \sup\limits_{1 \le \lambda \le n} F_n(\lambda)$, где

$$F_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda^r} \left\{ \varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - (1+\varepsilon_n)\, \varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\right) - \right.$$

$$\left. -\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi) + (1+\varepsilon_n)\, \varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\pi + \frac{\lambda\pi}{2n}\right) \right\}.$$

Исследуем на экстремум функцию $F_n(\lambda)$. Для ее производной имеем:

$$F_n'(\lambda) = -\frac{r}{\lambda^{r+1}}\left\{\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - (1+\varepsilon_n)\,\varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\right) - \right.$$

$$\left.\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi) + (1+\varepsilon_n)\,\varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right\} +$$

$$+\frac{1+\varepsilon_n}{\lambda^{r+1}}\left\{-\varphi_{1,r-1}\left(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\cdot\frac{\lambda\pi}{2n} + \varphi_{1,r-1}\left(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\cdot\frac{\lambda\pi}{2n}\right\}$$

и

$$F_n'(1) = (1+\varepsilon_n)\left\{r\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)dt - \frac{\pi}{2n}\varphi_{1,r-1}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2n}\right) - \right.$$

$$\left. - r\int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{2n}}\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)dt + \frac{\pi}{2n}\varphi_{1,r-1}\left(\alpha,\beta;\pi+\frac{\pi}{2n}\right)\right\} + r\varepsilon_n\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - r\varepsilon_n\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi).$$

Так как слагаемое в фигурных скобках имеет порядок n^{-2} при $n\to\infty$, то можем считать, что при всех достаточно больших n будет $F_n'(1)>0$. Рассмотрим теперь

$$F_n'(n) = \frac{1+\varepsilon_n}{n^r}\left\{r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)dt - \frac{\pi}{2}\varphi_{1,r-1}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - r\int_{\pi}^{\pi+\frac{\pi}{2}}\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)dt + \frac{\pi}{2}\varphi_{1,r-1}\left(\alpha,\beta;\pi+\frac{\pi}{2}\right)\right\} + r\varepsilon_n\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) - r\varepsilon_n\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi).$$

Так как $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$, то при достаточно больших n знак $F_n'(n)$ будет определяться знаком слагаемого в фигурных скобках. Учитывая выпуклость функции $\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)$ при $r=4,6,\dots$, можем заключить, что $F_n'(n)<0$ при достаточно больших n.

Введем в рассмотрение функцию $\Phi_n(\lambda)=\lambda^{r+1}\cdot F_n'(\lambda)$. Для ее производной можем написать

$$\Phi_n'(\lambda) = \frac{\pi}{2n}(1+\varepsilon_n)\left\{(r-1)\varphi_{1,r-1}\left(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\right) - \frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-2}\left(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\right) - \right.$$

$$\left. -(r-1)\varphi_{1,r-1}\left(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda\pi}{2n}\right) + \frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-2}\left(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2n}(1+\varepsilon_n)\left\{(r-1)\int\limits_0^{\frac{\lambda\pi}{2n}} \varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;t)dt - \frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-2}\left(\alpha,\beta;\frac{\lambda\pi}{2n}\right)-\right.$$

$$\left.-(r-1)\int\limits_{\pi}^{\pi+\frac{\lambda\pi}{2n}} \varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;t)dt + \frac{\lambda\pi}{2n}\varphi_{1,r-2}\left(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda\pi}{2n}\right)\right\}$$

С учетом выпуклости при $r=4,6,...$ функции $\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\cdot)$, приходим к заключению, что $\Phi_n'(\lambda)<0$ для $\lambda\in(1,n)$, а следовательно, $\Phi_n(\lambda)$, а вместе с ней и $F_n'(\lambda)$, убывает на промежутке $(1,n)$. Но тогда найдется единственная точка $\lambda_n\in(1,n)$ такая, что $F_n'(\lambda_n)=0$, причем λ_n – точка максимума для функции $F_n(\lambda)$.

Необходимое условие экстремума функции $F_n(\lambda)$ в точке λ_n запишем в виде

$$(1+\varepsilon_n)\left\{r\int\limits_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}} \varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)dt - \frac{\lambda_n\pi}{2n}\varphi_{1,r-1}\left(\alpha,\beta;\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)-\right.$$

$$\left.-r\int\limits_{\pi}^{\pi+\frac{\lambda_n\pi}{2n}} \varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)dt + \frac{\lambda_n\pi}{2n}\varphi_{1,r-1}\left(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right\} =$$

$$= -r\varepsilon_n\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0) + r\varepsilon_n\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi). \tag{3}$$

Снова используя выпуклость функции $\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)$ при $r=4,6,...$, несложно получить следующие оценки:

$$-r\varepsilon_n(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)-\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)) \le 2(1+\varepsilon_n)(r-2)\int\limits_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}}\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)dt \le$$

$$\le -2(1+\varepsilon_n)(r-2)\frac{\left|\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2})\right|}{\pi}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2,$$

откуда

$$\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 \le \frac{\pi r\varepsilon_n E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{(1+\varepsilon_n)(r-2)\left|\varphi_{1,r-1}\left(\alpha,\beta;\frac{\pi}{2}\right)\right|}. \tag{4}$$

С другой стороны, из (3) можем получить

$$-r\varepsilon_n(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)-\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)) \ge 2(1+\varepsilon_n)(r-1)\int\limits_0^{\frac{\lambda_n\pi}{2n}}\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)dt \ge$$

$$\geq -(1+\varepsilon_n)(r-1)\left|\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;0)\right|\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2,$$

откуда

$$\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 \geq \frac{2r\varepsilon_n E\left(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot)\right)_\infty}{(1+\varepsilon_n)(r-1)\left|\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;0)\right|}. \qquad (5)$$

Тепер, сопоставляя (4) и (5), получаем, что

$$\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 \asymp \varepsilon_n$$

или

$$\lambda_n \asymp n\sqrt{\varepsilon_n}$$

при $n \to \infty$.

Нас будет интересовать асимптотическое равенство для λ_n при $n \to \infty$, поэтому, используя разложение по формуле Тейлора функции $\varphi_{1,r-1}(\alpha,\beta;t)$ в окрестности точек 0 и π, из (3) выводим

$$(1+\varepsilon_n)\left\{r\frac{\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;0)}{2}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 - \varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;0)\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 - r\frac{\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\pi)}{2}\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\pi)\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 + o\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2\right\} = -2r\varepsilon_n E\left(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot)\right)_\infty$$

Преобразуя последнее выражение, получим

$$(1+\varepsilon_n)(r-2)\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 E\left(\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\cdot)\right)_\infty(1+o(1)) = 2r\varepsilon_n E\left(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot)\right)_\infty,$$

откуда

$$\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2 = \frac{2r\varepsilon_n E\left(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot)\right)_\infty}{(1+\varepsilon_n)(r-2)E(\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}(1+o(1))$$

или

$$\lambda_n = \frac{2n}{\pi}\left(\frac{2r\varepsilon_n E\left(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot)\right)_\infty}{(1+\varepsilon_n)(r-2)E(\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}\right)^{\frac{1}{2}}(1+o(1)). \qquad (6)$$

Теперь, используя (6) и (3), с учетом разложения по формуле Тейлора, после несложных преобразований для E_n получим оценку:

$$E_n \leq \frac{1}{2}\sup_{1\leq\lambda\leq n} F_n(\lambda) = \frac{1}{2}F_n(\lambda_n) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda_n^r}\frac{1+\varepsilon_n}{r}(\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;0) - \varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\pi))\left(\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)^2(1+o(1)) =$$

$$=\frac{1}{n^r\varepsilon_n^{r/2-1}}\left(\frac{\pi^2E(\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{4r}\right)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{r-2}{2E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}\right)^{\frac{r-2}{2}}(1+o(1)). \qquad (7)$$

И необходимая оценка сверху получена.

Получим для E_n оценки снизу. Поступая так же, как и в [3], будем иметь

$$E_n \geq \frac{1}{2}\max_{m=1,2,\ldots,n} F_n(m),$$

где

$$F_n(m)=\frac{1}{m^r}\left\{\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)-(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\frac{m\pi}{2n}\right)-\right.$$

$$\left.-\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)+(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\pi+\frac{m\pi}{2n}\right)\right\}.$$

Выберем $m_n\in\{1,\ldots,n\}$ так, чтобы $m_n-1\leq\lambda_n\leq m_n$, тогда

$$\max_{m=1,2,\ldots,n}F_n(m)\geq F_n(m_n)=$$

$$=\frac{1}{(m_n-1)^r}\left(\frac{m_n-1}{m_n}\right)^r\left\{\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)-(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\frac{m_n\pi}{2n}\right)-\right.$$

$$\left.-\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)+(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\pi+\frac{m_n\pi}{2n}\right)\right\}\geq$$

$$\geq\frac{1}{\lambda_n{}^r}\left(\frac{m_n-1}{m_n}\right)^r\left\{\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;0)-(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)-\right.$$

$$\left.-\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\pi)+(1+\varepsilon_n)\varphi_{1,r}\left(\alpha,\beta;\pi+\frac{\lambda_n\pi}{2n}\right)\right\}.$$

Так же, как при получении оценок сверху, имеем

$$F_n(m_n)=\frac{2C_r}{\varepsilon_n^{r/2-1}n^r}\left(\frac{m_n-1}{m_n}\right)^r(1+o(1)).$$

Отметим, что при $n\to\infty$ $\lambda_n\to\infty$, а следовательно, и $m_n\to\infty$, а тогда можем написать

$$E_n\geq\frac{1}{2}F_n(m_n)=\frac{C_r}{\varepsilon_n^{r/2-1}n^r}(1+o(1)), \qquad (8)$$

где

$$C_r=\left(\frac{\pi^2E(\varphi_{1,r-2}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}{4r}\right)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{r-2}{2E(\varphi_{1,r}(\alpha,\beta;\cdot))_\infty}\right)^{\frac{r-2}{2}}. \qquad (9)$$

Таким образом, необходимая оценка сверху получена. Сопоставляя (7) и (8), приходим к равенству

$$E_n=\frac{C_r}{\varepsilon_n^{r/2-1}n^r}(1+o(1)),\quad n\to\infty,$$

где C_r определено равенством (9).

Теорема 1 доказана.

Отметим, что при $\alpha = \beta = 1$ мы получаем результат теоремы В.

Доказательство теоремы 2. Воспользовавшись тем фактом, что $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \varphi_{1,r}(1,\beta;t) = -2B_r(t)$ [4, с. 109], где

$$B_r(t) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-r} \cos\left(mt - \frac{\pi r}{2}\right) -$$

ядро Бернулли, получим

$$\lim_{\beta\to+\infty} E(\varphi_{1,r}(1,\beta;\cdot))_\infty = \lim_{\beta\to+\infty} \frac{1}{2}\left|\varphi_{1,r}(1,\beta;0) - \varphi_{1,r}(1,\beta;\pi)\right| = \left|B_r(\pi) - B_r(0)\right| = \frac{\pi}{2} K_{r-1},$$

где последнее равенство написано на основании соотношения из [4, с. 107].

Теперь, используя [4, предложение 1.5.9], полагая $\alpha = 1$ и переходя к пределу при $\beta \to +\infty$, из результата теоремы 1 при $n \to \infty$ получим

$$E^+(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W_V^{r-1})_1 = \frac{C_r}{n^r \varepsilon_n^{r/2-1}}(1+o(1)),$$

где

$$C_r = \left(\frac{K_1^3 K_{r-3}}{r}\right)^{\frac{r}{2}} \left(\frac{r-2}{2K_1 K_{r-1}}\right)^{\frac{r-2}{2}}.$$

Аналогично, устремляя α к $+\infty$, при $\beta = 1$, получим такое же равенство (при $n \to \infty$) для последовательности величин $E^-(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n) W_V^{r-1})_1$.

Теорема 2 доказана.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В.Ф.** О наилучших L_1 – приближениях сплайнами при наличии ограничений на их производные// Мат. заметки. 1992. – Т.51, вып. 5. С. 12 – 19.
2. **Бабенко В.Ф.** О наилучших L_1 – приближениях функциональных классов сплайнами при наличии ограничений на их производные/ В.Ф. Бабенко, Н.В. Парфинович// Укр. мат. журн. 1999. – Т.51, № 4. С. 435 – 444.
3. **Губанова В.В.** О точных значениях наилучших относительных несимметричных приближений классов периодических функций сплайнами/ В.В. Губанова, Н.В. Парфинович// Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. 2006. – Вип. 11, С. 21 – 28.
4. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. – М., 1987. – 424 с.
5. **Парфинович Н.В.** О точных ассимптотиках наилучших относительных приближений классов периодических функций сплайнами // Укр. мат. журн. 2001. – Т.53, № 4. С. 489 – 500.

Надійшла до редколегії 15 05 07

УДК 681.31

*П. І. Когут, **І. В. Нечай

*Дніпропетровський національний університет
**Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту

ДО ПИТАННЯ РЕГУЛЯРІЗАЦІЇ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Запропоновано спосіб регулярізації одного класу задач нескалярної оптимізації в банахових просторах, для випадку, коли векторнозначне відображення не є напівнеперервним знизу у певному сенсі, в наслідок чого, порушуються достатні умови розв'язності.

Допоміжні означення. Нехай X – рефлексивний простір, Y – банахів простір з нульовим елементом θ. Для довільної підмножини $Y_0 \subset Y$ будемо використовувати такі позначення: $IntY_0$ – її внутрішність, ∂Y_0 – її границю у просторі Y. Надалі вважатимемо, що Y напівупорядковано опуклим замкненим конусом Λ, тобто $x \le y \Leftrightarrow y - x \in \Lambda$. Крім цього, будемо розглядати конуси Λ тільки такі, що $\Lambda \cap (-\Lambda) = \theta$. Елемент y^* множини Y будемо називати Λ – мінімальним у множині Y_0, якщо не існує $y \in Y_0$ такого, що $y \le y^*$, $y^* \ne y$. Сукупність усіх таких елементів будемо позначати $\Lambda - MinY_0$. Аналогічно визначається Λ – максимальний елемент. Уведемо до Y два невласних елемента $-\infty$ і $+\infty$ і будемо вважати, що вони задовольняють таким умовам: 1) $-\infty \le y \le +\infty$, $\forall y \in Y$; 2) $\pm\infty - (\pm\infty) = \theta$. Через $\overline{\overline{Y}}$ позначимо $Y \cup \{\pm\infty\}$. Через $Y^{\bullet}$ будемо позначати напіврозширений простір: $Y^{\bullet} = Y \cup \{+\infty\}$.

Означення 1. Ефективним Λ-інфімумом множини Y_0 будемо називати множину Λ-мінімальних елементів замикання множини Y_0 у просторі Y, у разі коли ця множина не пуста, і множину $\{-\infty\}$ у протилежному випадку

$$\Lambda - Inf\, Y_0 = \begin{cases} \Lambda - Min(clY_0), & \Lambda - Min(clY_0) \ne \varnothing, \\ \{-\infty\}, & \Lambda - Min(clY_0) = \varnothing. \end{cases}$$

Основним об'єктом для досліджень будемо вважати відображення $f \cdot X_\partial \to Y$, де X_∂ – підмножина простору X. Можна з таким відображенням пов'язати відображення $\mathcal{Y} \cdot X \to Y^{\bullet}$, означене на всьому просторі X_∂, наступним чином:

$$\mathcal{Y}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X_\partial, \\ +\infty, & x \notin X_\partial. \end{cases}$$

Як буде видно з наступних означень, такі дві форми подання відображення можна вважати еквівалентними. Для відображень, що діють у напіврозширений простір: $f . X \to Y^{\bullet}$ є природнім наступне означення.

Означення 2. Нехай задано відображення $f \cdot X_{\partial} \to Y^{\bullet}$. Ефективною множиною відображення f будемо називати таку множину

$$Dom\ f = \{x \in X :\ f(x) \neq +\infty\}.$$

Означення 3. Ефективним Λ-інфімумом відображення $f . X \to Y^{\bullet}$ будемо називати підмножину яка є ефективним Λ – інфімумом образу $f(X)$ в Y.

Нехай дано послідовність $\{y_n\} \subset Y$. Позначимо через $L\{y_n\}$ множину всіх її граничних точок. Для необмежених знизу (зверху) множин будемо вважати, що $-\infty \in L\{y_n\}$ $(+\infty \in L\{y_n\})$. Для довільного відображення $f : X \to Y^{\bullet}$ уведемо до розгляду множину $L(f(x_0)) = \bigcup\limits_{\{x_n\} \to x_0} L\{f(x_n)\}$.

Означення 4. Λ – нижньою границею відображення $f : X \to Y^{\bullet}$ у точці $x_0 \in X$ будемо називати наступну множину

$$\Lambda - \liminf_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} L(f(x_0)) \cap \Lambda - \operatorname*{Inf}\limits_{x \in X} f(x), & L(f(x_0)) \cap \Lambda - \operatorname*{Inf}\limits_{x \in X} f(x) \neq \varnothing, \\ \Lambda - Inf\ L(f(x_0)), & L(f(x_0)) \cap \Lambda - \operatorname*{Inf}\limits_{x \in X} f(x) = \varnothing. \end{cases}$$

Задачею векторной оптимізації будемо називати трійку об'єктів:

$$\langle X_{\partial}, f, \Lambda \rangle, \qquad (1)$$

які пов'язані між собою умовою: на множині X_{∂}, яка є підмножиною простору X потрібно вказати ті елементи x^*, на яких реалізується ефективний Λ-інфімум відображення f $X_{\partial} \to Y$. Тобто множиною розв'язків задачі (1) будемо називати таку множину:

$$Sol(X_{\partial}, f, \Lambda) = \left\{ x^* \in X_{\partial} :\ f(x^*) \in \Lambda - \operatorname*{Inf}\limits_{x \in X_{\partial}} f(x) \right\}.$$

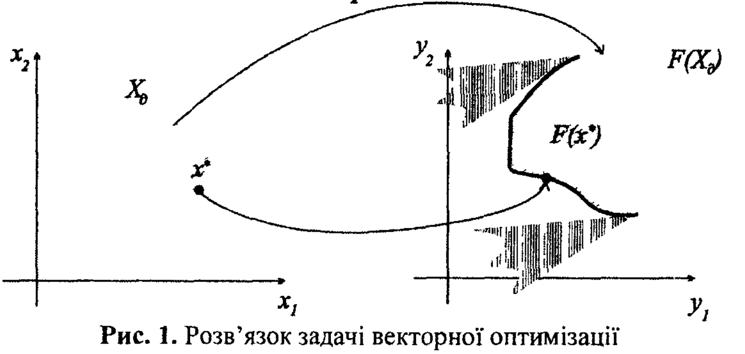

Рис. 1. Розв'язок задачі векторної оптимізації

Означення регулярізованої задачі векторної оптимізації. Для обгрунтованого введення означення регулярізованої задачі розглянемо спочатку прості приклади задач векторної оптимізації. Приклади 2 і 3 відносяться до того окремого випадку задачі (1), коли нескалярне відображення f має вигляд $f : X_\partial \to R^2$, де X_∂ є слабко замкненою і обмеженою підмножиною, а про конус Λ відомо таке: $\Lambda \subseteq R_+^2$. Зауважимо, що задача вказаного типу, взагалі кажучи, розв'язку може не мати.

Приклад 1. Нехай $X_\partial = [1;2]$, $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$, $f_i \cdot X_\partial \to R$, $\Lambda = R_+^2$,

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \begin{cases} 2, & x \in (1;2], \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що f_1 – неперервна, а f_2 не є напівнеперервною знизу. Запишемо формулу для f і побудуємо множину $f(X_\partial)$.

$$f(x) = \begin{cases} (x;1), & x \in (1;2], \\ (1;2), & x = 1. \end{cases}$$

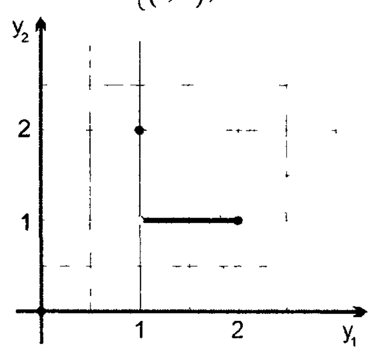

Рис. 2. Множина $f(X_\partial)$

Робимо висновок: $Sol(X_\partial, f, \Lambda) = \varnothing$.

Кожній задачі такого типу можна поставити у відповідність задачу $\langle X_\partial, \overline{f}, \Lambda \rangle$, в якій $\overline{f} = \begin{bmatrix} \mathcal{f}_1 \\ \mathcal{f}_2 \end{bmatrix}$, де $\mathcal{f}_i$ – напівнеперервні знизу регулярізації скалярних функцій f_i.

Відображення $\overline{f}$ будемо називати покомпонентною регулярізацією відображення f. Головна мета розглянутих нижче прикладів – показати, що покомпонентна регулярізація відображення f може привести до задачі властивості якої не є аналогічними тим, що має регулярізована задача у скалярному випадку. Наприклад, якщо припустити, що вихідна задача скалярної оптимізації мала розв'язок x^*, то ця точка буде також розв'язком і регулярізованої задачі. Проте, як показано у прикладі 2, при по компонентній регулярізації можна втратити розв'язок вихідної задачі.

Приклад 2. Нехай $X_\partial = [0;2]$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1), \\ 2, & x \in [1;2], \end{cases}$

$$\Lambda = \left\{ y \in R_+^2 : \ y_2 \le y_1 \right\}.$$

Тоді відображення f і $\overline{f}$ визначаються за формулами:

$$f(x) = \begin{cases} (x;1), & x \in [0;1), \\ (x;2), & x \in [1;2] \end{cases} \quad \text{і} \quad \overline{f}(x) = \begin{cases} (x;1), & x \in [0;1], \\ (x,2), & x \in (1;2]. \end{cases}$$

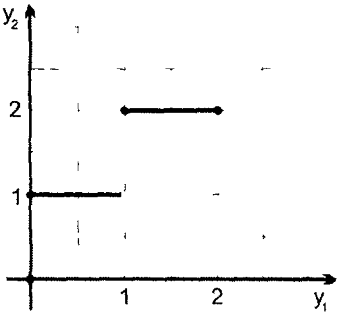

Рис. 3. Множина $f(X_\partial)$

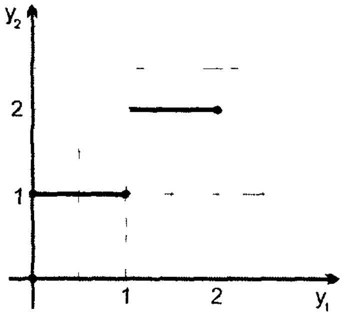

Рис. 4. Множина $\overline{f}(X_\partial)$

На рис 3 показано множину $f(X_\partial)$, а на рис. 4 – множину $\overline{f}(X_\partial)$. Можна встановити наступне співвідношення:

$$\{0;1\} = Sol(X_\partial, f, \Lambda) \supset Sol\left(X_\partial, \overline{f}, \Lambda\right) = \{0\}.$$

Зауважимо, що в 2 є справедливою рівність

$$\Lambda - \underset{x \in X_\partial}{Inf} \ f(x) = \Lambda - \underset{x \in X_\partial}{Inf} \ \overline{f}(x),$$

яка узгоджується зі скалярним випадком регулярізації оптимізаційної задачі. Проте, як показано у прикладі 3, ця рівність може не мати місця для задачі такого ж типу як задача із прикладу 2.

Приклад 3. Нехай $X_\partial = [1;3]$, $\Lambda = \left\{ y \in R_+^2 \cdot \ y_2 \le 2y_1 \right\}$,

$$f_1(x) = \begin{cases} 2, & x \in [1;2], \\ x-1, & x \in (2;3] \end{cases}, \quad f_1(x) = \begin{cases} 2, & x = 1, \\ x, & x \in (1,2], \\ 3, & x \in (2;3] \end{cases}$$

Тоді відображення f має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} (2;2), & x = 1, \\ (2;x), & x \in (1;2], \\ (x-1,3), & x \in (2;3]. \end{cases}$$

Побудуємо відображення $\overline{f}$. Спочатку розглянемо графіки функцій f_1 і f_2.

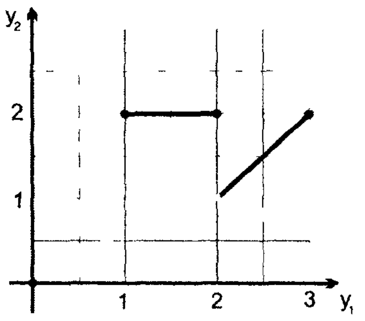

Рис. 5. Графік $f_1(x)$

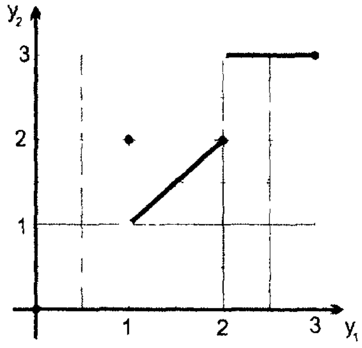

Рис. 6. Графік $f_2(x)$

Регулярізуючи f_1 і f_2, одержимо:

$$f_1(x)=\begin{cases}2, & x\in[1;2),\\ x-1, & x\in[2;3]\end{cases},\quad f_2(x)=\begin{cases}x, & x\in[1;2],\\ 3, & x\in(2;3]\end{cases}$$

Складаємо відображення $\overline{f}$:

$$\overline{f}(x)=\begin{cases}(1;2), & x=2,\\ (2;x), & x\in[1;2),\\ (x-1;3), & x\in(2;3].\end{cases}$$

Розглянемо множини $f(X_\partial)$ і $\overline{f}(X_\partial)$, щоб переконатися в тому, що ефективні Λ-інфімуми вихідного і одержаного відображення не співпадають.

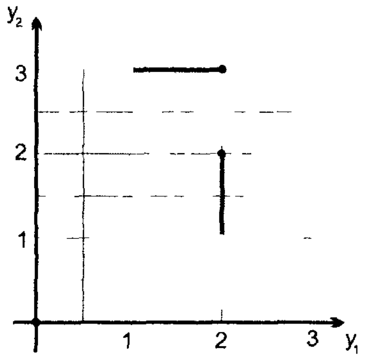

Рис. 7. Множина $f(X_\partial)$

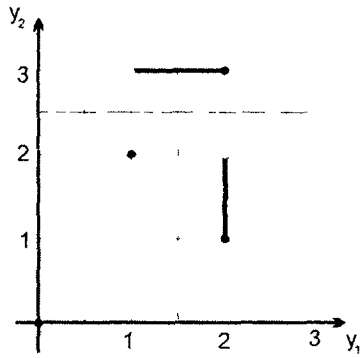

Рис. 8. Множина $\overline{f}(X_\partial)$

Ефективний інфімум відображення f – це множина:

$$\Lambda-\underset{x\in X_\partial}{Inf}\ f(x)=\{(1;3),(2;1)\},$$

ефективний Λ-інфімум відображення $\bar{f}$ є вже іншою множиною:

$$\Lambda-\underset{x\in X_\partial}{Inf}\ \bar{f}(x)=\{(1;2),(2;1)\}.$$

Множина розв'язків задачі $\langle X_\partial,\bar{f},\Lambda\rangle$: $Sol(X_\partial,f,\Lambda)=\{1;2\}$.

Звернемо увагу на особливості одержаних задач після по компонентної регулярізації в розглянутих прикладах. Перед тим як сформулювати означення регулярізованої задачі, підкреслимо вади, що мають місце в цих прикладах. Той факт, що розв'язки вихідної задачі можуть бути відсутніми серед розв'язків регулярізованої задачі може, деякою мірою компенсувати те, що про регулярізовану задачу, навідміну від вихідної буде відомо, що вона є розв'язною. У такому випадку будемо вважати, що мету (регулярізація вихідної задачі) майже досягнено. А результат «регулярізації» коли ефективні Λ-інфімуми даного і «регулярізованого» відображення не співпадають будемо сприймати таким, що потребує подальшого дослідження. Зокрема, в цій ситуації досить цікавим є питання: чи можна вважати розв'язки такої «погано» регулярізованої задачі як узагальнені в деякому сенсі розв'язки вихідної? Як буде показано далі, для прикладу 3 на це питання можна дати позитивну відповідь (див. приклад 7). Проте, в загальному випадку, такого стверджувати не можна.

Означення 5. Нехай задано задачу $P:\langle X_\partial,f,\Lambda\rangle$. Будемо називати задачу $\tilde{P}:\langle X_\partial,\tilde{f},\Lambda\rangle$ регулярізацією задачі P, якщо будуть виконуватися наступні умови:

1) $Sol\ \tilde{P}\neq\varnothing$,

2) $\tilde{f}(Sol\ \tilde{P})\subseteq\Lambda-\underset{x\in X_\partial}{Inf}\ f(x)$,

3) $Sol\ P\subseteq Sol\ \tilde{P}$.

Якщо задача $\tilde{P}$ буде мати тільки дві перші з означених властивостей, будемо називати її напіврегулярізацією задачі P.

Так, у прикладі 2, умови 1) і 2) виконуються, а умова 3) – порушується. У прикладі 3 порушується тільки умова 2). Таким чином задача $\langle X_\partial,\bar{f},\Lambda\rangle$ першого прикладу є напіврегулярізацією задачі $\langle X_\partial,f,\Lambda\rangle$, а в другому – ні. Надалі будемо вивчати таке питання: якщо маємо задачу (1), яким чином може бути одержана регулярізована (напіврегулярізована) задача $\tilde{P}\cdot\langle X_\partial,\tilde{f},\Lambda\rangle$ у сенсі означення 5. У скалярному випадку при вирішенні цього питання головну роль грає властивість напівнеперервності. До того ж при переході від задачі з даним відображенням до задачі з напівнеперервною регулярізацією цього відображення звуження множини розв'язків не можливо, оскільки напівнеперервність відображення в точці x_0 в задачі скалярної мінімізації є необхідною умовою належності цієї точки до множини розв'язків. Як показує приклад 2, напівнеперервність кожної з компонент відображення f не гарантує аналогічного результату у векторному випадку: f досягає Λ-інфімума в точці $x_0=1$, проте напівнеперервність обох функцій f_i не має місця. З іншого боку, регулярізуючи функції f_i, ми втрачаємо розв'язок $x_0 = 1$. Аналогію зі скалярним випадком усе ж такі можна побачити, якщо властивість напівнеперервності має відображення, а не кожна його компонента окремо.

Деякі відомі підходи до означення напівнеперервності векторнозначного відображення. Напівнеперервність функціонала якості у питанні знаходження достатніх умов розв'язності однокритеріальної задачі оптимізації грає вирішальну роль. Аналогічна ситуація буде мати місце у випадку векторнозначного критерію, проте для таких відображень означити напівнеперервність можна кількома способами.

Означення 6[6]. Відображення $f : X \to Y^{\square}$ називається *напівнеперервним знизу в точці* $x_0 \in DomF$, якщо для будь-якого околу V точки $f(x_0)$ в Y існує окіл U точки x_0 в X такий, що $f(U) \subset V + \Lambda \cup \{+\infty\}$. Відображення $f : X \to Y^{\square}$ називається *напівнеперервним знизу*, якщо воно є напівнеперервним знизу в кожній точці X_∂.

Твердження 1[2]. *Нехай X_∂ не пуста і компактна множина в X, $f \cdot X_\partial \to Y$ – напівнеперервне знизу відображення. Тоді $Sol(X_\partial, f, \Lambda) \neq \varnothing$.*

Відразу можна помітити надмірну жорсткість достатніх умов, наведених у твердженні 1. З метою послаблення цих вимог наведемо, ще таке означення.

Означення 7[6]. Відображення $f \cdot X \to Y^{\square}$ називається *(слабко) q-напівнеперервним знизу в точці* $x_0 \in Dom\ f$, якщо для будь-якого $b \in Y$ такого, що $b \not\geq f(x_0)$ існує (слабкий) окіл U точки x_0 в X такий, що $b \not\geq f(x)$, $\forall x \notin U \cap Dom\ f$.

Відомо [6], що якщо відображення $F : X \to Y^{\square}$ є напівнеперервним знизу в точці $x_0 \in Dom\ f'$, то воно є q-напівнеперервним знизу в цій точці, обернене твердження в загальному випадку хибне. Проте легко можна навести приклади відображень, які не є q-напівнеперервними знизу, проте $Sol(X_\partial, f, \Lambda) \neq \varnothing$.

Приклад 4. Нехай $f : [-3;-1] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $\Lambda = \mathbf{R}_+^2$,

$$f(x) = \begin{cases} (-x;2), & x \in [-3;-1) \\ (2;1), & x = -1 \end{cases}$$

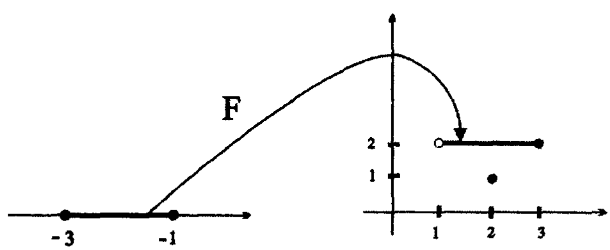

Рис 9. Відображення f

Це відображення не є q-напівнеперервним знизу в точці $x_0=-1$. Дійсно, візьмемо $b=\left(1\frac{1}{2};3\right)$. Очевидно $b\not\geq f(x_0)$ і не існує околу $U(x_0)$ точки x_0 такого, що $b\not\geq f(x)$ для всіх $x\in U(x_0)\cap X_\partial$. Проте, очевидно, що $\mathrm{Sol}(X_\partial,f,\Lambda)=\{-1\}$.

Проводячи далі аналогію зі скалярним випадком, зауважимо, що напівнеперервність знизу скалярної функції в точці є необхідною умовою належності цієї точки до множини розв'язків задачі мінімізації, проте для векторнозначного відображення з прикладу 4, q-напівнеперервність знизу порушується саме в тій точці x_0, яка є розв'язком задачі векторної оптимізації. Саме з цієї причини в даній роботі будемо дотримуватися іншого поняття напівнеперервності знизу векторнозначного відображення (означення 9). Для цього введемо ряд допоміжних означень.

Розширення класу напівнеперервних знизу відображень. У наступному означенні запропоновано нове поняття напівнеперервності, більш слабке ніж q-напівнеперервність. Використовуючи його, далі сформулюємо достатні умови розв'язності задачі (1).

Означення 8. Відображення $f:X_\partial\to Y$ будемо називати Λ_s*-напівнеперервним* знизу в точці $x_0\in X_\partial$, якщо $f(x_0)\in\Lambda-\underset{x\longrightarrow x_0}{\liminf}\, f(x)$.

Відображення $f:X_\partial\to Y$ будемо називати *слабко* Λ_s*-напівнеперервним* знизу в точці $x_0\in X_\partial$, якщо $f(x_0)\in\Lambda-\underset{x\xrightarrow{w}x_0}{\liminf}\, f(x)$.

З означеня 8 випливає, що будь-яке слабко Λ_s-напівнеперервне знизу відображення в точці $x_0\in X_\partial$, є також Λ_s-напівнеперервним знизу в цій точці. Якщо відображення f є Λ_s-напівнеперервним (слабко Λ-напівнеперервним) знизу в кожній точці $x\in X_\partial$, будемо називати f Λ_s-напівнеперервним (слабко Λ_s-напівнеперервним) знизу відображенням.

Означення 9.[2] Елемент $y^*\in Y_0\subset Y$ називається Λ-найменшим елементом (Λ-ідеальним мінімумом) множини Y_0, якщо $y^*\leq y$, $\forall y\in Y_0$. Будемо використовувати позначення: $y^*=\Lambda-I\,Min\,Y_0$.

Лема 1. *Нехай відображення* $f.\,X_\partial\to Y$ *слабко* q*-напівнеперервне знизу в точці* $x_0\in X_\partial$. *Тоді* $f(x_0)$ *є* Λ*-найменшим елементом множини* $L(f(x_0))$, *тобто*

$$f(x_0)=\Lambda-I\,Min\,L(f(x_0)).$$

Доведення. Нехай $y^*\in L(f(x_0))$, тоді існує послідовність $\{x_n\}\xrightarrow{w}x_0$ така, що $\{f(x_n)\}\xrightarrow{\tau}y^*$. Введемо до розгляду множину $B=\{b\in Y: b\not\geq f(x_0)\}$ і позначимо через $U_b(x_0)$ слабкий окіл точки x_0 такий, що $b \not\geq f(x)$, $\forall x \in U_b(x_0) \cap X_\partial$. Нехай $\tilde{U}(x_0) \square \bigcap_{b \in B} U_b(x_0)$, тоді існує $n^* \in \mathrm{N}$ таке, що

$$x_n \in \tilde{U}(x_0), \quad \forall n \geq n^*. \tag{2}$$

Доведемо, що $f(x_n) \notin B, \quad \forall n \geq n^*$. Для цього спочатку зробимо обернене припущення:

$$\text{існує } p \in \mathrm{N}, \ p \geq n^* \text{ таке, що } f(x_p) \in B, \tag{3}$$

тоді $f(x_p) \not\geq f(x)$, $\forall x \in U_{f(x_p)}(x_0) \cap X_\partial$. Оскільки справедливо включення $\left(\tilde{U}(x_0) \cap X_\partial\right) \subset \left(U_{f(x_p)}(x_0) \cap X_\partial\right)$, маємо

$$f(x_p) \not\geq f(x), \ \forall x \in \tilde{U}(x_0) \cap X_\partial. \tag{4}$$

Далі, враховуючи (3), одержимо: $f(x_p) \neq f(x_p)$. Таким чином, припущення (3) хибне, тому $f(x_n) \notin B, \ \forall n \geq n^*$, тобто $f(x_n) \geq f(x_0), \ \forall n \geq n^*$. Звідки, переходячи до слабкої границі, одержимо $f(x_0) \leq y^*$.

Теорема 1. *Нехай відображення* $f : X_\partial \to Y$ *слабко* q*-напівнеперервне знизу в точці* $x_0 \in X_\partial$. *Тоді* f *є слабко* Λ_s*-напівнеперервним знизу в точці* x_0.

Доведення. Згідно з лемою 1, виконується рівність

$$f(x_0) = \Lambda - I\,Min\ L(f(x_0)), \text{ тоді}$$

$$\Lambda - Inf\ L\left(f\left(x_0\right)\right) = \left\{\Lambda - I\,Min\ L(f(x_0))\right\} = \left\{f\left(x_0\right)\right\}.$$

Тому, згідно з означенням 4, $\Lambda - \liminf\limits_{x \xrightarrow{w} x_0} f\left(x\right) = \left\{\Lambda - IMin\ L\left(f\left(x_0\right)\right)\right\} = \left\{f\left(x_0\right)\right\}$.

Отже, за означенням 8, f є слабко Λ_s-напівнеперервним знизу в точці x_0.

Обернене твердження, як показує приклад 4 не вірне.

Достатні умови розв'язності задачі векторної оптимізації.

Теорема 2. *Нехай відображення* $f : X_\partial \to Y$ *є слабко* Λ_s*-напівнеперервним знизу, а множина* X_∂ *– слабко замкненою і обмеженою у просторі* X. *Тоді*

$$\Lambda - Sol\left(X_\partial, f, \Lambda\right) \neq \varnothing.$$

Доведення. За означеннями 6, 7, $\Lambda - \underset{x \in X_\partial}{Inf}\ f(x) \neq \varnothing$ (можливо $\Lambda - \underset{x \in X_\partial}{Inf}\ f(x) = \{-\infty\}$). Візьмемо довільний елемент $y^* \in \Lambda - \underset{x \in X_\partial}{Inf}\ f(x)$, тоді існує послідовність $\{y_n\} \subset f(X_\partial)$ така, що $\{y_n\} \longrightarrow y^*$. Розглянемо послідовність

$\{x_n\}=\{f^{-1}(y_n)\}$, яка за умовою є обмеженою. Враховуючи рефлексивність простору X, позначимо через $\{x_\mu\}$ таку підпослідовність послідовності $\{x_n\}$, що $\{x_\mu\}\xrightarrow{w}x^*$, де $x^*\in X$. Узявши до уваги той факт, що $\{x_n\}\subset X_\partial$ і те, що X_∂ – слабко замкнена, робимо висновок: $x^*\in X_\partial$. Оскільки відображення $f . X_\partial\to Y$ є слабко Λ_s-напівнеперервним знизу, справедливо включення

$$f\left(x^*\right)\in\Lambda-\liminf_{x\xrightarrow{w}x^*} f(x), \tag{5}$$

яке робить неможливим припущення $\Lambda-\underset{x\in X_\partial}{Inf}\ f(x)=\{-\infty\}$. Крім цього, очевидно, що $y^*\in L\left(f(x^*)\right)$, таким чином $y^*\in\left(L\left(f(x^*)\right)\cap\Lambda-\underset{x\in X_\partial}{Inf}\ f(x)\right)\neq\varnothing$. Тоді, за означенням 4, маємо таку тотожність

$$\Lambda-\liminf_{x\xrightarrow{w}x^*} f(x)=L\left(f\left(x^*\right)\right)\cap\Lambda-\underset{x\in X_\partial}{Inf}\ f(x). \tag{6}$$

З (5) і (6) випливає, що $f\left(x^*\right)\in\Lambda-\underset{x\in X_\partial}{Inf}\ f(x)$, тобто $x^*\in\Lambda-Sol\left(X_\partial,f,\Lambda\right)$.

Один підхід до регулярізації задачі векторної оптимізації. Будемо розглядати задачу $\langle X_\partial,f,\Lambda\rangle$, де X_∂ – обмежена і слабко замкнена множина в X. Така задача, взагалі кажучи, розв'язку може не мати. Проте, якщо припустити, що відображення f є Λ – обмеженим знизу, то така задача завжди буде мати узагальнені розв'язки у сенсі означення 10. Надалі збіжність у просторі X будемо розуміти як слабку.

Означення 11. Нехай задано відображення $f . X_\partial\to Y$. Будемо називати Λ_s-регулярізацією відображення f відображення, означене за формулою

$$\mathcal{f}_s(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\in\Lambda-\liminf\limits_{u\to x} f(u)\\ p, & \begin{cases} L(f(x))\cap\Lambda-\underset{u\in X_\partial}{Inf}\ f(u)=\varnothing,\exists p:\\ p<f(x),\quad p\in\Lambda-Inf\ L(f(x))\end{cases}\\ q, & \begin{cases} f(x)\notin\Lambda-\underset{u\in X_\partial}{Inf}\ f(u),\\ \exists q\in L(f(x))\cap\Lambda-\underset{u\in X_\partial}{Inf}\ f(u),\end{cases}\end{cases}$$

а задачу $\left\langle X_\partial,\mathcal{f}_s,\Lambda\right\rangle$ будемо називати Λ_s – задачею для задачі $\langle X_\partial,f,\Lambda\rangle$.

Твердження 2. *Для будь-якого відображення виду* $f\ X_\partial \to Y$ *його* Λ_s*-регуляризація* $\mathfrak{F}_s(x)$ *є* Λ_s*-напівнеперервним знизу відображенням:*

$$\mathfrak{F}_s(x) \in \Lambda - \liminf_{u \to x} \mathfrak{F}_s(u).$$

Доведення. З означення 11 випливає по-перше:

$$\mathfrak{F}_s(x) \in \Lambda - \liminf_{u \to x} f(u), \tag{7}$$

і по-друге: $\Lambda - Min\big(cl\ f(X_\partial)\big) = \Lambda - Min\big(cl\ \mathfrak{F}_s(X_\partial)\big)$, тому

$$\Lambda - \mathop{Inf}_{x \in X_\partial} f(x) = \Lambda - \mathop{Inf}_{x \in X_\partial} \mathfrak{F}_s(x).$$

Крім цього, легко бачити, що $L\big(\mathfrak{F}_s(x)\big) \subseteq L\big(f(x)\big)$. І справедливі такі співвідношення:

$$L\big(f(x)\big) \setminus L\big(\mathfrak{F}_s(x)\big) \not\subset \Lambda - \mathop{Inf}_{x \in X_\partial} f(x), \quad L\big(f(x)\big) \setminus L\big(\mathfrak{F}_s(x)\big) \not\subset \Lambda - Inf\, L\big(f(x)\big).$$

Таким чином маємо:

$$L\big(\mathfrak{F}_s(x)\big) \cap \Lambda - \mathop{Inf}_{x \in X_\partial} \mathfrak{F}_s(x) = L\big(f(x)\big) \cap \Lambda - \mathop{Inf}_{x \in X_\partial} f(x), \tag{8}$$

$$\Lambda - Inf\, L\big(f(x)\big) = \Lambda - Inf\, L\big(\mathfrak{F}_s(x)\big). \tag{9}$$

Тоді із (8) і (9) випливає, що $\Lambda - \liminf_{u \to x} \mathfrak{F}_s(u) = \Lambda - \liminf_{u \to x} f(u)$. Ураховуючи (7), одержимо необхідний висновок.

Наслідок. Справедливо включення $\mathfrak{F}_s\Big(Sol\big(X_\partial, \mathfrak{F}_s, \Lambda\big)\Big) \subseteq \Lambda - \mathop{Inf}_{u \in X_\partial} f(u)$.

Означення 10. Будемо називати $x^* \in X_\partial$ узагальненим розв'язком задачі (1), якщо існує послідовність $\{x_n\} \subset X_\partial$ така, що

$$\{x_n\} \to x^* \text{ і } \{f(x_n)\} \to y^* \in \Lambda - \mathop{Inf}_{x \in X_\partial} f(x).$$

Через $Gen\ Sol(X_\partial, f, \Lambda)$ будемо позначати множину всіх узагальнених розв'язків задачі (1).

Факт, сформульований у наслідку з твердження 3, означає, що розв'язками задачі $\langle X_\partial, \mathfrak{F}_s, \Lambda \rangle$ будуть узагальнені розв'язкі задачі $\langle X_\partial, f, \Lambda \rangle$.

Теорема 3. *Точка* ω^* *належить множині розв'язків задачі* $\langle X_\partial, f, \Lambda \rangle$ *тоді і тільки тоді коли* ω^* *належить множині розв'язків її* Λ_s *– задачі* $\langle X_\partial, \mathfrak{F}_s, \Lambda \rangle$ *і до того ж* $f(\omega^*) = \mathfrak{F}_s(\omega^*)$, *або більш скорочено:*

$$\omega^* \in Sol(X_\partial, f, \Lambda) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \omega^* \in Sol\left(X_\partial, \mathfrak{f}_s, \Lambda\right), \\ f\left(\omega^*\right) = \mathfrak{f}_s\left(\omega^*\right). \end{cases}$$

Доведення. Нехай $\omega^* \in Sol(X_\partial, f, \Lambda)$, тоді $f\left(\omega^*\right) \in \Lambda - \underset{u \in X_\partial}{Inf}\ f(u)$ і не існує $y \in cl\ f(X_\partial)$ такого, що $y < f\left(\omega^*\right)$. Згідно з означенням 11, маємо: $f\left(\omega^*\right) = \mathfrak{f}_s\left(\omega^*\right)$. Ураховуючи той факт, що $cl\ \mathfrak{f}_s(X_\partial) \subseteq cl\ f(X_\partial)$, одержимо $\omega^* \in Sol\left(X_\partial, \mathfrak{f}_s, \Lambda\right)$.

Нехай $\omega^* \in Sol\left(X_\partial, \mathfrak{f}_s, \Lambda\right)$ і $f\left(\omega^*\right) = \mathfrak{f}_s\left(\omega^*\right)$. Згідно з наслідком з твердження 3, $\mathfrak{f}_s\left(\omega^*\right) \in \Lambda - \underset{u \in X_\partial}{Inf}\ f(u)$, що в нашому випадку еквівалентно $f\left(\omega^*\right) \in \Lambda - \underset{u \in X_\partial}{Inf}\ f(u)$. Тобто $\omega^* \in Sol(X_\partial, f, \Lambda)$.

Наслідок. Справедливо включення: $Sol(X_\partial, f, \Lambda) \subseteq Sol\left(X_\partial, \mathfrak{f}_s, \Lambda\right)$.

Отже, згідно з означенням 5, у випадку коли X_∂ непуста слабко замкнена підмножина простору X, задача $\left\langle X_\partial, \mathfrak{f}_s, \Lambda \right\rangle$ є регулярізацію задачі $\left\langle X_\partial, f, \Lambda \right\rangle$.

Бібліографічні посилання

1. **Borwein J. M., Penot J. P., Thera M.** Conjugate Convex Operators.// Math. Anal. and Applic.-1984. 102, P. 399-414.
2. **Ehrgott M.** Multicriteria optimization. Springer. Berlin. 2005,302 c.
3. **Когут П. І.** Про топологічну збіжність над графіків у частково впорядкованих векторних просторах. // Математичні студії.-1999-Т12, №2. С.161-170.
4. **Красносельский М. А.** Положительные решения операторных уравнений.-М.,1962. 396 с.
5. **Mansour M., Metrane A., Thera M.** Lower Semicontinuous Regularization for Vector-valued Mappings. Universite de Limoges, Rapport de recherché n 2004-06. Depose le juin 2004.
6. **Penot J. P., Thera M.** Semi-continuous Mappings in General Topology. Arch.Math., 1982. Vol.38, P. 158-166.

Надійшла до редакції 15.01.08.

УДК 517.5

В. А. Кофанов

Днепропетровский национальный университет

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА А.А. ЛИГУНА НА ПРОСТРАНСТВА L_q, $q \in [0,1)$

Отримано узагальнення на ненормовані L_q - простори відомої нерівності А. А. Лигуна для похідних періодичних функцій.

Символом G обозначим отрезок, действительную ось R, или единичную окружность T, реализованную в виде отрезка $[0,2\pi]$ с отождествленными концами. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$, $0 \le p \le \infty$, измеримых функций $x: G \to \mathrm{R}$, таких что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int\limits_G |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & \text{если } 0 < p < \infty, \\ \operatorname{vrai}\sup\limits_{t \in G} |x(t)|, & \text{если } p = \infty, \end{cases}$$

и, если, $\mu G < \infty$, то

$$\|x\|_{L_0(G)} := \exp\left\{ (\mu G)^{-1} \int\limits_G \ln |x(t)| \, dt \right\}.$$

Через $L^r_\infty(G)$ обозначим пространство функций $x: G \to \mathrm{R}$, таких что $x^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_\infty(G)$. Положим $L^r_{\infty,\infty}(G) := L^r_\infty(G) \cap L_\infty(G)$ и через $W^r_{\infty,\infty}(G)$ обозначим множество функций $x \in L^r_\infty(G)$, таких, что $\|x^{(r)}\|_{L_\infty(G)} \le 1$. Ясно что, если $\mu G < \infty$, то $L^r_{\infty,\infty}(G) = L^r_\infty(G)$ и $W^r_{\infty,\infty}(G) = W^r_\infty(G)$. Вместо $\|x\|_{L_p(T)}$ будем писать $\|x\|_p$. Символом φ_r обозначим r-й 2π – периодический интеграл со средним значением на периоде равным нулю от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn}\sin t$.

Для функций $x \in L^r_\infty(T)$ хорошо известно и имеет много интересных приложений следующее неравенство А.А. Лигуна [1]

$$\|x^{(k)}\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}} \|x\|_\infty^{1-k/r} \|x^{(r)}\|_\infty^{k/r}, \; q \in [1,\infty), \; k, r \in \mathrm{N}, \; k < r. \tag{1}$$

В данной работе доказано, что (1) сохраняет силу и для $q \in [0,1)$, если r и k удовлетворяют неравенству

$$(r-k)\,\pi\,\|\varphi_{r-k}\|_\infty \le 2\,(r-k+1)\,\|\varphi_{r-k+1}\|_\infty. \qquad (2)$$

Условие (2) выполнено, в частности, в следующих случаях:
1) $r \ge 2,\ k = r-1$; 2) $r \ge 3,\ k = r-2$.

Нам потребуются некоторые вспомогательные сведения. Будем говорить, что функция $\varphi \in L^1_\infty[\alpha,\beta]$ является функцией сравнения для функции $f \in L^1_\infty[a,b]$, если $\|f\|_{L_\infty[a,b]} \le \|\varphi\|_{L_\infty[\alpha,\beta]}$, и из условия $|f(\xi)| = |\varphi(\eta)|$, $\xi \in [a,b], \eta \in [\alpha,\beta]$, вытекает неравенство $|f'(\xi)| \le |\varphi'(\eta)|$ (если указанные производные существуют).

Пусть q, $\gamma \in (0,1)$, а функция $\varphi \in L^1_\infty[0,1]$ удовлетворяет условиям $\varphi(0)=0,\ \varphi'(t)>0$ почти всюду на $(0,1)$, и

$$\gamma\,\varphi(1) \le \int_0^1 \varphi(t)dt. \qquad (3)$$

Через $K_\gamma(\varphi)$ обозначим класс функций $f \in L^1_\infty[0,1]$, таких что $f(0)=0,\ f'(t) \ge 0$ почти всюду на (0, 1), для которых φ является функцией сравнения.

Лемма А [2]. *Пусть* $q, \gamma \in (0,1)$, *а функция* φ *удовлетворяет описанным выше условиям. Тогда для любой функции* $f \in K_\gamma(\varphi)$ *выполнено неравенство*

$$\frac{\int_0^1 f^q(t)dt}{\left[\int_0^1 f(t)dt\right]^{\gamma q}} \le \frac{\int_0^1 \varphi^q(t)dt}{\left[\int_0^1 \varphi(t)dt\right]^{\gamma q}}. \qquad (4)$$

Для функции $f \in L_1[a,b]$ символом $r(f,t)$, $t \in [0,\ b-a]$ обозначим ее убывающую перестановку [3]. Положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$ и пусть $\overline{\varphi_{\lambda,r}}$ – сужение сплайна $\varphi_{\lambda,r}$ на $[\alpha, \alpha+\pi/\lambda]$, где α – нуль $\varphi_{\lambda,r}$.

Лемма 1. *Пусть* $\omega = \pi$, *и для чисел* $k, r \in N$, $k < r$, *выполнено условие (2). Тогда функция* $\varphi(t) := r(\overline{\varphi_{\varpi,r-k}}, 1-t)$, *определенная на* $[0,1]$, *удовлетворяет условиям леммы А, т. е.* $\varphi(0)=0,\ \varphi'(t)>0,\ t\in(0,1)$, *и выполнено неравенство* (3) *с* $\gamma = (r-k)/(r-k+1)$.

Доказательство. Выполнение соотношений $\varphi(0)=0,\ \varphi'(t)>0,\ t\in(0,\ 1)$, очевидно. Докажем неравенство (3). Для этого заметим, что

$$\varphi(1) = \|\varphi_{\varpi,r-k}\|_\infty = \varpi^{-(r-k)}\|\varphi_{r-k}\|_\infty$$

и

$$\int_0^1 \varphi(t)dt = \int_0^1 r(\overline{\varphi_{\varpi,r-k}},t)dt = \int_0^{\pi/\varpi}|\varphi_{\varpi,r-k}(t)|\,dt =$$
$$= 2^{-1}\varpi^{-(r-k)-1}\|\varphi_{r-k}\|_1 = 2\varpi^{-(r-k)-1}\|\varphi_{r-k+1}\|_\infty.$$

Из этих равенств видно, что для данной функции φ условие (3) совпадает с условием (2). Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* k , $r \in \mathbb{N}$, $k < r$, *удовлетворяют неравенству (2). Пусть далее* $x \in L^r_{\infty,\infty}(R)$, *а числа* a, b *таковы, что* $x^{(k)}(a)=x^{(k)}(b)=0$, *и* $|x^{(k)}(t)| > 0$ *для* $t \in (a, b)$. *Тогда для любого* $q \in (0,1)$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |x^{(k)}(t)|^q\,dt \le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\varphi_{r-k}(t)|^q\,dt \left(\frac{\|x\|_{L_\infty(R)}}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{r-k}{r}q} \|x^{(r)}\|^{\frac{k}{r}q}_{L_\infty(R)}. \tag{5}$$

Доказательство. Фиксируем $x \in L^r_{\infty,\infty}(R)$, и числа a *и* b, удовлетворяющие условиям теоремы. Так как неравенство (5) однородно, то можно считать, что

$$\|x^{(r)}\|_{L_\infty(R)} = 1. \tag{6}$$

Тогда $x \in W^r_{\infty,\infty}(R)$, и (5) можно переписать в виде

$$\frac{\frac{1}{b-a}\int_a^b |x^{(k)}(t)|^q\,dt}{\|x\|^{\frac{r-k}{r}q}_{L_\infty(R)}} \le \frac{\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} |\varphi_{\omega,r-k}(t)|^q\,dt}{\|\varphi_{\omega,r}\|^{\frac{r-k}{r}q}_\infty}, \tag{7}$$

причем, легко проверить, что правая часть (7) не зависит от ω. Заметим далее, что и левая часть неравенства (7) инвариантна относительно преобразования $x_\gamma(t) := \gamma^{-r} x(\gamma t)$. Поэтому мы можем считать, что $b - a = 1$.

Выберем λ из условия

$$\|x\|_{L_\infty(R)} = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty \tag{8}$$

и рассмотрим два случая: 1) $1 = b-a \le \pi/\lambda$; 2) $1 = b-a > \pi/\lambda$.

Пусть сначала $\lambda \le \pi$. Заметим, что из условия (8) ввиду теоремы сравнения Колмогорова [4] вытекает неравенство

$$\|x^{(k)}\|_{L_\infty(R)} \le \|\varphi_{\lambda,r-k}\|_\infty. \tag{9}$$

Пусть α – нуль сплайна $\varphi_{\lambda,r-k}$. Переходя, если нужно, к сдвигу функции x, можно считать, что $[a, b] \subset [\alpha, \alpha + \pi/\lambda]$. Тогда из (9) и условий $x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = = 0$ вследствие теоремы сравнения Колмогорова вытекает неравенство $|x^{(k)}(t)| \le |\varphi_{\lambda,r-k}(t)|$, $t \in (a, b)$. Поэтому для любого $q > 0$

$$\int_a^b |x^{(k)}(t)|^q\,dt \le \int_\alpha^{\alpha+\pi/\lambda} |\varphi_{\lambda,r-k}(t)|^q\,dt. \tag{10}$$

Выберем $c \in [a, b]$ так, чтобы

$$\int_a^c |x^{(k)}(t)|^q\,dt = \int_c^b |x^{(k)}(t)|^q\,dt. \tag{11}$$

Ввиду (10) и (11) существует $y \in [0, \pi/(2\lambda)]$, такое что

$$\int_a^c |x^{(k)}(t)|^q\,dt = \int_c^b |x^{(k)}(t)|^q\,dt = \int_\alpha^{\alpha+y} |\varphi_{\lambda,r-k}(t)|^q\,dt.$$

Отсюда, в силу теоремы сравнения Колмогорова, вытекают неравенства $c - a \ge y$, $b - c \ge y$. Кроме того, для любого $y \in [0, \pi/(2\lambda)]$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{y}\int_{\alpha}^{\alpha+y}|\varphi_{\lambda,\,r-k}(t)|^q\,dt \le \frac{2\lambda}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+\pi/(2\lambda)}|\varphi_{\lambda,\,r-k}(t)|^q\,dt$$

(ввиду монотонного возрастания по y левой части последнего неравенства). Поэтому

$$\int_a^b |x^{(k)}(t)|^q\,dt = \int_a^c |x^{(k)}(t)|^q\,dt + \int_c^b |x^{(k)}(t)|^q\,dt \le$$

$$\le \frac{c-a}{y}\int_{\alpha}^{\alpha+y}|\varphi_{\lambda,\,r-k}(t)|^q\,dt + \frac{b-c}{y}\int_{\alpha}^{\alpha+y}|\varphi_{\lambda,\,r-k}(t)|^q\,dt \le$$

$$\le (b-a)\frac{2\lambda}{\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+\pi/(2\lambda)}|\varphi_{\lambda,\,r-k}(t)|^q\,dt.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |x^{(k)}(t)|^q\,dt \le \frac{\lambda}{\pi}\int_0^{\pi/\lambda}|\varphi_{\lambda,\,r-k}(t)|^q\,dt. \tag{12}$$

Из (8) и (12) выводим

$$\frac{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b |x^{(k)}(t)|^q\,dt}{\|x\|_{L_\infty(R)}^{\frac{r-k}{r}q}} \le \frac{\dfrac{\lambda}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}}|\varphi_{\lambda,\,r-k}(t)|^q\,dt}{\|\varphi_{\lambda,\,r}\|_\infty^{\frac{r-k}{r}q}} = \frac{\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q\,dt}{\|\varphi_r\|_\infty^{\frac{r-k}{r}q}}.$$

Отсюда, ввиду (6), следует (5) в случае $\lambda \le \pi$.

Пусть теперь $\lambda > \pi$. Так как $b - a = 1$ согласно предположению, то, переходя, если нужно, к сдвигу функции x, можно считать, что a=0, b=1. Вместо неравенства (7) докажем в рассматриваемом случае более сильное неравенство

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 |x^{(k)}(t)|^q\,dt}{\left|\displaystyle\int_0^1 x^{(k)}(t)dt\right|^{\frac{r-k}{r-k+1}q}} \le \frac{\dfrac{\omega}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}|\varphi_{\omega,\,r-k}(t)|^q\,dt}{\left|\displaystyle\int_\beta^{\beta+\frac{\pi}{\omega}}\varphi_{\omega,\,r-k}(t)dt\right|^{\frac{r-k}{r-k+1}q}}, \tag{13}$$

где β – нуль сплайна $\varphi_{\omega,r-k}$, причем нетрудно видеть, что правая часть (13) не зависит от ω. Тот факт, что неравенство (13) сильнее, чем (7), вытекает из неравенства Колмогорова

$$\|x^{(k-1)}\|_{L_\infty(R)} \le \|\varphi_{r-k+1}\|_\infty \left(\frac{\|x\|_{L_\infty(R)}}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{r-k+1}{r}}$$

(здесь мы учли (6)). Пусть $\bar{x}$ – сужение x на [0,1], а $\overline{\varphi_{\omega,\,r-k}}$ – сужение $\varphi_{\omega,\,r-k}$ на [β, $\beta+\pi/\omega$]. Перепишем (13) в виде

$$\frac{\int_0^1 r^q(\overline{x^{(k)}},t)dt}{\left|\int_0^1 r(\overline{x^{(k)}},t)dt\right|^{\frac{r-k}{r-k+1}q}} \le \frac{\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} r^q(\overline{\varphi_{\omega,\,r-k}},t)dt}{\left|\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} r(\overline{\varphi_{\omega,\,r-k}},t)dt\right|^{\frac{r-k}{r-k+1}q}}.$$

Пусть $\overline{\varphi_{\lambda,\,r-k}}$ – сужение $\varphi_{\lambda,\,r-k}$ на $[\alpha, \alpha+\pi/\lambda]$, где α – нуль сплайна $\varphi_{\lambda,\,r-k}$. Ввиду неравенства (9) и теоремы сравнения Колмогорова сплайн $\overline{\varphi_{\lambda,\,r-k}}$ является функцией сравнения для $\overline{x^{(k)}}$. Тогда согласно теореме о производной перестановки [3, предложение 1.3.2], функция $r(\overline{\varphi_{\lambda,\,r-k}},t)$, определенная на $[0, \pi/\lambda]$, является функцией сравнения для перестановки $r(\overline{x^{(k)}},t)$, определенной на $[0, 1]$. Ввиду предположения

$\lambda > \pi$. Положим $\omega = \pi$. Тогда $\omega < \lambda$ и, следовательно, функция $r(\overline{\varphi_{\omega,\,r-k}},t)$ тем более будет функцией сравнения для $r(\overline{x^{(k)}},t)$. Переходя к возрастающим перестановкам $\varphi := r(\overline{\varphi_{\omega,\,r-k}},1-t)$ и $f(t) := r(\overline{x^{(k)}},1-t)$, получим функции $\varphi, f \in L^1_\infty[0,1]$, удовлетворяющие условиям леммы А с $\gamma = (r-k)/(r-k+1)$ (если принять во внимание лемму 1). По лемме А имеет место неравенство (4), которое, в данном случае, равносильно неравенству (13). Тем самым неравенство (7) и теорема 1 доказаны.

Теорема 2. *Пусть* $k, r \in N$, $k < r$, *удовлетворяют неравенству (2). Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty(T)$ *и произвольного* $q \in [0,1)$

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q \le \frac{\left\|\varphi_{r-k}\right\|_q}{\left\|\varphi_r\right\|_\infty^{1-k/r}}\left\|x\right\|_\infty^{1-k/r}\left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}. \tag{14}$$

Неравенство (14) точное и обращается в равенство для функций вида $x(t) = a\varphi_r(nt+b)$, $a, b \in R$, $n \in N$.

Доказательство. Так как для любой функции $f \in L_1(T)$ имеет место равенство $\| f \|_0 = \lim_{q\to 0} (2\pi)^{-1/q} \| f \|_q$ [5, с. 188], то достаточно доказать (14) для $q \in (0,1)$.

Фиксируем $x \in L^r_\infty(T)$ и пусть c – произвольный нуль производной $x^{(k)}$. Рассмотрим совокупность всех отрезков $[a_j, b_j] \subset [c, c+2\pi]$, таких, что $x^{(k)}(a_j) = x^{(k)}(b_j) = 0$, $|x^{(k)}(t)| > 0$, $t \in (a_j, b_j)$. Ясно, что

$$\sum_j (b_j - a_j) \le 2\pi, \qquad \left\|x^{(k)}\right\|_q^q = \sum_j \int_{a_j}^{b_j} |x^{(k)}(t)|^q\, dt. \tag{15}$$

Оценим интегралы в (15) при помощи неравенства (5). Положим

$$S := \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\varphi_{r-k}(t)|^q\, dt \left(\frac{\|x\|_{L_\infty(R)}}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{r-k}{r}q} \left\|x^{(r)}\right\|_{L_\infty(R)}^{\frac{k}{r}q}.$$

Заметим, что $2\int_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q\,dt = \|\varphi_{r-k}\|_q^q$. Теперь из (15) выводим оценку

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q^q \le \sum_j (b_j - a_j)\, S \le \|\varphi_{r-k}\|_q^q \left(\frac{\|x\|_{L_\infty(R)}}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{r-k}{r}q} \left\|x^{(r)}\right\|_{L_\infty(R)}^{\frac{k}{r}q},$$

которая равносильна неравенству (14). Точность неравенства (14) очевидна. Теорема доказана.

Через $S_{n,\ r}$ обозначим множество 2π-периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $i\pi/n$, $i\in Z$.

Теорема 3. *Пусть* $n, k, r\in N$, $k < r$, *и* k, r *удовлетворяют неравенству* (2). *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *и произвольного* $q \in [0,1)$

$$\left\|s^{(k)}\right\|_q \le n^k \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_\infty} \|s\|_\infty . \qquad (16)$$

Неравенство (16) точное и обращается в равенство для сплайнов $s(t) = a\varphi_{n,r}(t)$, $a \in R$.

Неравенство (16) в случае $q \ge 1$ доказано ранее для всех $k, r \in N$, $k < r$, В.М. Тихомировым [6] $(q = \infty)$ и А.А. Лигуном [7] $(q \in [1,\infty))$.

Теорема 3 выводится из теоремы 2 точно так же, как и в случае $q\ge 1$ [8, теорема 8.2.1].

Библиографические ссылки

1. **Ligun A.A.** Inequalities for upper bounds of functionals. // Analysis Math.– 1976.–2, №1.– С.11 – 40.
2. **Кофанов В.А.** Неравенства для производных в пространствах L_p // Укр. мат. журн. – 2008. – принято в печать.
3. **Корнейчук Н. П.** Экстремальные свойства полиномов и сплайнов / Н. П. Корнейчук, , В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун. – К., 1992, – 304 с.
4. **Колмогоров А. Н.** Избранные труды. Математика, механика. – М., 1985, – 470 с., С 252 – 263.
5. **Харди Г. Г.** Неравенства / Г. Г. Харди, , Д.Е. Литлвуд, Г. Полиа.– М., 1948,– 456 с.
6. **Тихомиров В.М.** Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений. // Успехи мат. наук.– 1960.–15, №3.– С.81– 120.
7. **Лигун А.А.** Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы. // Мат. заметки.– 1976.– 19, №6.– С.913 – 926.
8. **Бабенко В.Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов.– К., 2003.–592 с.

Надійшла до редколегії 13 03 08

УДК 517.5

А. Н. Пасько
Днепропетровский национальный университет

ОДНОСТОРОННЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С УЧЁТОМ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ НА ОТРЕЗКЕ

Отримані асимптотично точні оцінки наближення функцій деяких класів сингулярних інтегралів алгебраїчними поліномами з урахуванням положення точки на відрізку.

Пусть W^r_∞, r>0 – класс определённых на отрезке [–1; 1] функций f_r, представимых в виде

$$f_r(x)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}f(t)dt+P(x),$$

где Г(r) – гамма-функция Эйлера, функция f измерима и $|f(x)|\le 1$ почти всюду, а P(x) – алгебраический многочлен степени не выше [r–1].

Обозначим через $\breve{W}^r_\infty$ и $\overline{W}^r_\infty$ классы заданных на отрезке [–1;1] функций, представимых в виде

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{u(t)}{t-x}\rho(t)dt,\ x\in(-1;1)$$

(интеграл понимается в смысле главного значения), где $u\in W^r_\infty$, а $\rho(t)=\sqrt{1-t^2}$ для $\breve{W}^r_\infty$ и $\rho(t)=1$ для $\overline{W}^r_\infty$.

В 2001 году В.П. Моторный [1] доказал следующие теоремы

Теорема А. *Для любого числа r>0 и любой функции* $f\in\breve{W}^r_\infty$ *существует последовательность алгебраических полиномов* $P_{n,r}(x)$ *степени не выше* $n\ge r+1$, *такая, что для всех* $x\in[-1;1]$ *выполняется неравенство*

$$\left|f(x)-P_{n,r}(x)\right|\le\frac{\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1}+C_r\frac{\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^r\ln n}{n^{r+1}},\qquad(1)$$

где

$$\widetilde{K}_r=\frac{4\cos\frac{\pi r}{2}}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{r+1}},\qquad \text{если } 0<r\le 1/2, \text{ и}$$

$$\widetilde{K}_r=\frac{4}{\pi}\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2m+1)\gamma_r-\frac{r\pi}{2}\right)}{(2m+1)^{r+1}}\right|,\qquad \text{если } r>1/2,$$

а $\gamma_r \in (0;\pi]$ – корень уравнения $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\right)}{(2m+1)^r} = 0$.

Величина C_r зависит только от r.

Теорема В. *Пусть* $f \in \overline{W}_{\infty}^r$ *для некоторого натурального r, и на концах отрезка [–1;1] функция f(x) со всеми производными до r–1-го порядка включительно обращается в нуль. Тогда существует последовательность алгебраических полиномов* $P_{n,r}(x)$ *степени, не выше* $n \geq r$, *такая, что для всех* $x \in [-1;1]$ *выполняется неравенство*

$$\left|f(x) - P_{n,r}(x)\right| \leq \frac{\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + C_r \frac{\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}}, \tag{2}$$

где C_r зависит только от r.

В настоящей работе получены аналоги для односторонних приближений двух приведенных выше теорем, в случае, когда r – натуральное.

А именно имеют место две теоремы

Теорема 1. *Для любого натурального r и любой функции* $f \in \breve{W}_{\infty}^r$ *существует последовательность алгебраических полиномов* $P_{n,r}^{+}(x)$ *степени не выше* $n \geq 2r$, *такая, что для всех* $x \in [-1;1]$ *выполняется неравенство*

$$0 \leq P_{n,r}^{+}(x) - f(x) \leq \frac{2\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + C_r \frac{\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r} \ln n}{n^{r+1}}, \tag{3}$$

где C_r зависит только от r.

Теорема 2. *Пусть* $f \in \overline{W}_{\infty}^r$ *для некоторого натурального r, и на концах отрезка [–1;1] функция f(x) со всеми производными до r–1-го порядка включительно обращается в нуль. Тогда существует последовательность алгебраических полиномов* $P_{n,r}^{+}(x)$ *степени, не выше* $n \geq 2r$, *такая, что для всех* $x \in [-1;1]$ *выполняется неравенство*

$$0 \leq P_{n,r}^{+}(x) - f(x) \leq \frac{2\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + C_r \frac{\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}}, \tag{4}$$

где постоянная C_r зависит только от r.

Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобится следующая, полученная в [2] лемма.

Лемма 1. *Для любого* $r \in N$ *и любого натурального* $n \geq 2r$ *существует алгебраический полином* $h_{n,r}^{+}(x)$ *степени не выше n, удовлетворяющий неравенству*

$$0 \leq h_{n,r}^{+}(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r \leq \frac{2\pi r}{n}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}. \tag{5}$$

Перейдём к доказательству теоремы 1.

Пусть r – натуральное число и $f \in \breve{W}^r_\infty$. Тогда в силу (1) для последовательности многочленов $P_{n,r}(x)$, существование которой гарантируется теоремой А, выполняется неравенство

$$0 \le P_{n,r}(x) - f(x) + \frac{\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + C_r \frac{\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r \ln n}{n^{r+1}} \le$$

$$\le \frac{2\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + 2C_r \frac{\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^r \ln n}{n^{r+1}}. \tag{6}$$

Рассмотрим случай нечётного r. Умножив (5) на величину $C_r \frac{\ln n}{n^{r+1}}$ и сложив это неравенство с (6), получим, после несложных преобразований, что неравенство (3) удовлетворяется для многочлена

$$P^+_{n,r}(x) = P_{n,r}(x) + \frac{\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+1} + C_r h^+_{n,r}(x)\frac{\ln n}{n^{r+1}}.$$

Рассмотрим случай чётного r. Известно, что для любого n существует алгебраический многочлен $q_n(x)$, такой что

$$\left|\sqrt{1-x^2} - q_n(x)\right| \le \frac{\pi}{2n}.$$

Из этого следует, что для каждого $n \ge (r-2)/2$ существует многочлен $q^+_{n-\frac{r-2}{2}}(x)$, такой что

$$0 \le q^+_{n-\frac{r}{2}}(x) - \sqrt{1-x^2} \le \frac{\pi}{n-\frac{r}{2}}. \tag{7}$$

Сложив (6) с неравенством (5), умноженным на $C_r \frac{\ln n}{n^{r+1}}$, и неравенством (7), умноженным на $\frac{\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$, получим, что неравенство (3) удовлетворяется для многочлена

$$P^+_{n,r}(x) = P_{n,r}(x) + \frac{\widetilde{K}_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right) q^+_{n-\frac{r}{2}}(x) + C_r h^+_{n,r}(x)\frac{\ln n}{n^{r+1}}.$$

Теорема 1 доказана. Теорема 2 доказывается аналогичным образом.

Библиографические ссылки

1. **Моторный В.П.** Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами // Укр.. матем. журн. – 2001, Т. 53, №3. – С. 331 – 345.
2. **Пасько А.Н.** Одностороннее приближение функций с учётом положения точки на отрезке // Вісник Дніпропетр. Уні-ту. – 2005. Математика.– Вип. 10. – С. 86 – 91.

Надійшла до редколегії 24.01.08

УДК 517. 948. 5

Б.И. Пелешенко
Днепропетровский государственный аграрный университет

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ В ТЕРМИНАХ К-ФУНКЦИОНАЛОВ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ СЛАБЫХ ТИПОВ $\left(\Lambda_{\varphi_0,1},\Lambda_{\psi_0,\infty}\right)$, $\left(\Lambda_{\varphi_1,1},\Lambda_{\psi_1,1}\right)$

Отримана необхідиа та достатня умова в термінах К-функционалів пар просторів Лоренця для того, щоб квазилінійний оператор обмежено діяв із пари просторів Лоренця $(\Lambda_{\varphi_1 1}(\mathbf{R^n}),\Lambda_{\varphi_2 1}(\mathbf{R^n}))$ у пару просторів Лоренця $(\Lambda_{\psi_1\infty}(\mathbf{R^n}),\Lambda_{\psi_2\infty}(\mathbf{R^n}))$.

Обозначим через Φ объединение функции $signt$ и множества возрастающих выпуклых и вогнутых на полупрямой $[0,\infty)$ функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условиям $\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t)=\varphi(0)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$ и удовлетворяют Δ_2–условию в нуле и на бесконечности, то есть существует такое число $\gamma>0$, что для всех $t\in(0,\infty)$ выполняется неравенство $\varphi(2t)\le v\varphi(t)$. Для функции $\varphi(t)$ из множества Φ пусть $M_\varphi(t)=\sup\limits_{0<s<\infty}\dfrac{\varphi(st)}{\varphi(s)}\left(0<t<\infty\right)$ и γ_φ, δ_φ– ее нижний и верхний показатели растяжения. Если функция $\varphi(t)\in\Phi$ удовлетворяет Δ_2–условию в нуле и на бесконечности, тогда ее функция растяжения $M_\varphi(t)$ всюду конечная.

Пусть $f^*(t)$ обозначает невозрастающую перестановку модуля вещественной, измеримой по Лебегу на R^n функции $f(x)$.

Для функции $\varphi(t)\in\Phi$ и $a\in(0,\infty)$ пусть $\Lambda_{\varphi,a}(R^n)$ обозначается пространство Лоренца вещественных измеримых по Лебегу на пространстве R^n функций $f(x)$, для каждой из которых конечна квазинорма $\{\int\limits_0^\infty(f^*(t))^a d\varphi(t)\}^{\frac{1}{a}}$, если $\varphi(t)\ne signt$, $0<a<\infty$, и $\sup\limits_{0<t<\infty}f^*(t)\varphi(t)$, если $a=\infty$. Если $\varphi(t)=signt$, то $\Lambda_{\varphi,\infty}(R^n)=L_\infty(R^n)$, в случае, когда $0<p<\infty$, $\varphi(t)=t^{\frac{1}{p}}$, $\Lambda_{\varphi,a}(R^n)=L_{p,a}(R^n)$ и $L_{pp}(R^n)=L_p(R^n)$.

Квазилинейный оператор T, действующий из пространства Лоренца $\Lambda_{\varphi 1}(R^n)$ в пространство измеримых R^n функций, называется оператором слабого типа $(L_{\varphi 1}, L_{\psi\infty})$, если для всякой функции $f \in \Lambda_{\varphi 1}(R^n)$ и всех $t > 0$ выполняется неравенство $(Tf)^*(t)\psi(t) \le M \int_0^\infty f^*(t)d\varphi(t)$, где M не зависит от выбора f и t. Обозначим через $K(t; f; \Lambda_{\varphi_1,a}, \Lambda_{\varphi_2,a})$ К-функционал пары пространств Лоренца $(\Lambda_{\varphi_1,a}(R^n), \Lambda_{\varphi_2,a}(R^n))$.

В [9] получена следующая формула для К-функционала пары пространств $(L_1(R^n), L_\infty(R^n))$:

$$K(t, f; L_1, L_\infty) = \inf_{f(s)=u(s)+v(s)} (\|u\|_{L_1} + \|v\|_{L_\infty}) = \int_0^t f^*(s)ds,$$

$$f(s) \in L_1(R^n) + L_\infty(R^n) \text{ и } t > 0.$$

В [7] получено описание К-функционала для пары пространств Лоренца $(L_{pq}(R^n), L_{rs}(R^n))$, в частности, доказано, что если $0 < p < r < \infty$, $0 < q < s \le \infty$, то

$$K(t, f; L_{p1}, L_{r1}) \approx \int_0^{t^\alpha} (u^{1/p} f^*(u))\frac{du}{u} + t\int_{t^\alpha}^\infty (u^{1/p} f^*(u))^s \frac{du}{u} \text{ для } f \in L_{p1} + L_{r1},$$

$$K(t, f; L_{p\infty}, L_{r\infty}) \approx \sup_{0<u\le t} u^{\beta/p} f^*(u) + t \sup_{t\le u<\infty} u^{\beta/p} f^*(u) \text{ для } f \in L_{p\infty} + L_{r\infty},$$ где

$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$, $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{q} - \frac{1}{s}$.

В [8] указано необходимое и достаточное условие для того, чтобы пространство Лоренца $\Lambda_{\varphi 1}[0,1]$ было интерполяционным пространством для пары пространств Лоренца $(\Lambda_{\varphi_1 1}[0,1], \Lambda_{\varphi_2 1}[0,1])$ в случае, когда фундаментальные функции φ_1, φ_2, φ_3 выпуклые.

Кроме того, в [2] установлено, что $K(t, f; \Lambda_{\varphi 1}, L_\infty) \approx \int_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)ds$ для любого $t > 0$ и всех $f \in L_{\varphi 1}(R^n) + L_\infty(R^n)$, если фундаментальная функция φ вогнутая.

К. Беннетт и К. Рудник, используя установленное в [6] неравенство для квазилинейных операторов T слабых типов $(L_{p1}, L_{q\infty})$ и $(L_{r1}, L_{s\infty})$,

$0<p<r\le\infty$, $0<q<s\le\infty$ и указанное выше описание К-функционалов $K(t,f;L_{p1},L_{r1})$, $K(t,f;L_{q\infty},L_{s\infty})$, получили для функций $f(x)\in L_{p1}+L_{r1}$ и $t>0$ неравенство $K(t,Tf;L_{q\infty},L_{s\infty})\le CK(t,f;L_{p1},L_{r1})$.

В случае, когда $r\ne\infty$, из выполнения этого неравенства следует, что квазилинейный оператор T является оператором слабых типов $(L_{p1},L_{q\infty})$ и $(L_{r1},L_{s\infty})$.

В представленной работе получено описание К-функционалов пар пространств Лоренца $(\Lambda_{\varphi_1 1}(R^n),\Lambda_{\varphi_2 1}(R^n))$, $(\Lambda_{\varphi_1\infty}(R^n),\Lambda_{\varphi_2\infty}(R^n))$ с фундаментальными функциями $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4\in\Phi$. Для квазилинейных операторов T слабых типов $\left(\Lambda_{\varphi_0,1},\Lambda_{\psi_0,\infty}\right)$, $\left(\Lambda_{\varphi_1,1},\Lambda_{\psi_1,\infty}\right)$ установлено неравенство $K(t,Tf;L_{\psi_1\infty},L_{\psi_2\infty})\le CK(t,f;L_{\varphi_1 1},L_{\varphi_2 1})$ для всех $f\in L_{\varphi_1 1}(R^n)+L_{\varphi_2 1}(R^n)$ и $t>0$. Если $\varphi_2(t)\ne signt$, то из выполнения этого неравенства следует, что T – оператор слабых типов $\left(\Lambda_{\varphi_0,1},\Lambda_{\psi_0,\infty}\right)$, $\left(\Lambda_{\varphi_1,1},\Lambda_{\psi_1,\infty}\right)$.

Сформулируем полученные в работе основные утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in\Phi$, функция $\dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}$ возрастает на $(0,\infty)$ и $\gamma_{\varphi_1}<\delta_{\varphi_1}<\gamma_{\varphi_2}<\infty$. Тогда для любого $t>0$ и для всех функций $f(x)\in\Lambda_{\varphi_1}(R^n)+\Lambda_{\varphi_2}(R^n)$*

$$K\left(\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)},f;\Lambda_{\varphi_1},\Lambda_{\varphi_2}\right)\approx\left\{\int_0^t f^*(s)d\varphi_1(s)+\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}\int_0^t f^*(s)d\varphi_2(s)\right\}=$$

$$=\varphi_1(t)\left\{A_{\varphi_1}f^*(t)+B_{\varphi_2}f^*(t)\right\}.$$

Теорема 2. *Пусть $\psi_1(t),\psi_2(t)\in\Phi$, функция $\dfrac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}$ возрастает на $(0,\infty)$ и $0<\beta_{\psi_2}<\alpha_{\psi_1}<\infty$. Тогда существуют такие постоянные $D_1>0$, $D_2>0$, что всякой функции $f(x)\in M_{\overline{\psi}_1}(R^n)+M_{\overline{\psi}_2}(R^n)$ и для любого $t>0$ выполняется неравенство*

$$D_1\psi_1(t)\left\{C_{\psi_1}f^*(t)+D_{\psi_2}f^*(t)\right\}\le K\left(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)},f;M_{\overline{\psi}_1},M_{\overline{\psi}_2}\right)\le$$

$$\le D_2\psi_1(t)\left\{C_{\psi_1}f^*(t)+D_{\psi_2}f^*(t)\right\}.$$

Теорема 3. *Пусть функции* $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\psi_1(t),\psi_2(t)\in\Phi$, $\varphi_2(t)\neq signt$, $\delta_{\varphi_1}<\gamma_{\varphi_2}$, $\varphi_1(t)/\varphi_2(t)$ *возрастает,* $\psi_1(t)/\psi_2(t)$ *возрастает или убывает на* $(0,\infty)$, *области их значений есть* $(0,\infty)$, *и* $m(t)$ *– измеримое положительное решение уравнения*

$$\varphi_1\big(m(t)\big)/\varphi_2\big(m(t)\big)=\psi_1(t)/\psi_2(t).$$

Если T *– квазилинейный оператор, определенный на сумме пространств* $\Lambda_{\varphi_1}(R^n)+\Lambda_{\varphi_2}(R^n)$, *тогда следующие условия эквивалентные:*

1) T *является оператором слабых типов* $(\Lambda_{\varphi_1 1},\Lambda_{\psi_1\infty})$, $(\Lambda_{\varphi_2 1},\Lambda_{\psi_2\infty})$;

2) существует такая постоянная $C_5>0$, *что для всех* τ *из области значений функции* $\psi_1(t)/\psi_2(t)$ *и всех функций* $f(x)\in\Lambda_{\varphi_1}(R^n)+\Lambda_{\varphi_2}(R^n)$ *выполняется неравенство*

$$K(\tau;Tf;M_{\psi_1},M_{\psi_2})\ \le\ C_5K(\tau;f;\Lambda_{\varphi_1},\Lambda_{\varphi_2}).$$

Докажем следующие утверждения, используемые при доказательстве основных теорем.

Теорема 4. *Пусть* $f(x)\in\Lambda_\varphi(R^n)+\Lambda_\infty(R^n)$, *функция* $\varphi(t)\in\Phi$. *Тогда*

$$K(t;f;\Lambda_\varphi,\Lambda_\infty)\approx\int_0^{\varphi^{-1}(t)}f^*(\tau)d\varphi(\tau). \qquad (1)$$

Если $M_\varphi(t)$ *непрерывна справа в точке* $t=1$, *то соотношение* (1) *превращается в равенство.*

Доказательство. Для функции $f(x)\in\Lambda_\varphi(R^n)+\Lambda_\infty(R^n)$ и $t>0$ полагаем $f_0(x)=f(x)-f^*(\varphi^{-1}(t))$, если $|f(x)|>f^*(\varphi^{-1}(t))$, и $f_0(x)=0$ в другом случае; $f_1(x)=f(x)-f_0(t)$. Обозначим $E=\{x\in R^n:|f(x)|>f^*(\varphi^{-1}(t))\}$, тогда $mesE\le\varphi^{-1}(t)$. Пусть $mesE=\varphi^{-1}(t)$, тогда

$$K(t;f;\Lambda_\varphi,\Lambda_\infty)\le\|f_0\|_{\Lambda_\varphi}+t\|f_1\|_{L_\infty}=$$

$$=\int_0^{merE}\Big(f^*(\tau)-f^*(\varphi^{-1}(t))\Big)d\varphi(\tau)+tf^*(\varphi^{-1}(t))=$$

$$=\int_0^{\varphi^{-1}(t)}\Big(f^*(\tau)-f^*(\varphi^{-1}(\tau))\Big)d\varphi(\tau)+\int_0^{\varphi^{-1}(t)}f^*(\varphi^{-1}(\tau))d\varphi(\tau)=$$

$$= \int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(\tau)d\varphi(\tau).$$

Если $mesE < \varphi^{-1}(t)$, то имеет место равенство $f(\tau) = f^*(\varphi^{-1}(t))$ для всех $\tau \in (mesE, \varphi^{-1}(t))$, следовательно,

$$\int\limits_0^{merE} \left(f^*(\tau) - f^*(\varphi^{-1}(t))\right)d\varphi(\tau) = \int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} \left(f^*(\tau) - f^*(\varphi^{-1}(t))\right)d\varphi(\tau).$$

Докажем обратное неравенство. Предположим, что $f(x) = g(x) + h(x)$, где $g(x) \in L_1(R^n)$, $h(x) \in L_\infty(R^n)$. Для любого $\varepsilon \in (0,\ 1)$ и $s > 0$ $f^*(s) \le g^*((1-\varepsilon)s) + h^*(\varepsilon s)$ и

$$\int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)d\varphi(s) \le \int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} g^*((1-\varepsilon)s)d\varphi(s) + \int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} h^*(\varepsilon s)d\varphi(s) \le$$

$$\le \int\limits_0^{\infty} g^*((1-\varepsilon)s)d\varphi(s) + h^*(0)t = \int\limits_0^{\infty} g^*(\tau)d\varphi\left(\frac{\tau}{1-\varepsilon}\right) + t\,||h||_{L_\infty}. \tag{2}$$

Так как для любого $s > 0$ $\int\limits_0^{s} d\varphi\left(\frac{\tau}{1-\varepsilon}\right) = \varphi\left(\frac{s}{1-\varepsilon}\right) \le M_\varphi\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\int\limits_0^{s}\varphi(s)ds$, то тогда, воспользовавшись свойством 18 в [3, с.100] для невозрастающих функций, получаем

$$\int\limits_0^{\infty} g^*(\tau)d\varphi\left(\frac{\tau}{1-\varepsilon}\right) \le M_\varphi\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\int\limits_0^{\infty} g^*(\tau)d\varphi(\tau).$$

Тогда из неравенства (2) следует, что

$$\int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)d\varphi(s) \le M_\varphi\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\int\limits_0^{\infty} g^*(s)d\varphi(s) + t\,||h||_{L_\infty} \le$$

$$\le M_\varphi\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\left\{\int\limits_0^{\infty} g^*(s)d\varphi(s) + t\,||h||_{L_\infty}\right\} \le M_\varphi\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)K(t, f; \Lambda_\varphi, L\infty). \tag{3}$$

Так как $\varphi(t)$ возрастает и удовлетворяет Δ_2–условию в нуле и на бесконечности, то функция растяжения $M_\varphi(t)$ конечна в любой точке $t > 0$ и не убывает, то $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} M_\varphi((1-\varepsilon)^{-1})$ существует.

Если выполняется условие непрерывности справа функции $M_\varphi(t)$ в точке $t=1$, то, устремив ε к нулю и учитывая что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} M_\varphi\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)=M_\varphi(1)$, из неравенства (3) имеем

$$\int_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(\tau)d\varphi(\tau)\le \lim_{\varepsilon\to 0+} M_\varphi\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)K(t,f;\Lambda_\varphi,L\infty)\le K(t,f;\Lambda_\varphi,L\infty).$$

Теорема доказана.

В случае $\varphi(t)=t$ теорема 4 доказана в [9], а для вогнутых функций $\varphi(t)$ в [2].

Теорема 5. *Пусть* $\psi(t)\in\Phi$, *и* $f(x)\in\Lambda_{\psi,\infty}(R^n)+\Lambda_\infty(R^n)$.

Тогда

$$K(t;f;\Lambda_{\psi,\infty},\Lambda_\infty)\approx \sup_{0<\tau<\psi^{-1}(t)}(f^*(\tau)\psi(\tau)). \qquad (4)$$

Если $M_\psi(t)$ *непрерывна справа в точке* $t=1$, *то соотношение* (4) *имеет следующий вид*

$$\sup_{0<\tau<\psi^{-1}(t)}(f^*(\tau)\psi(\tau)\le K(t;f;\Lambda_{\psi,\infty},\Lambda_\infty)\le 2\sup_{0<\tau<\psi^{-1}(t)}(f^*(\tau)\psi(\tau)).$$

Доказательство. Пусть $f(x)\in\Lambda_{\psi,\infty}(R^n)+\Lambda_\infty(R^n)$ и $t>0$, полагаем $f_0(x)=f(x)-f^*(\psi^{-1}(t))$, если $|f(x)|>f^*(\psi^{-1}(t))$, и $f_0(x)=0$ в противоположном случае; $f_1(x)=f(x)-f_0(x)$.

Тогда $f_0(x)\in L_{\psi,\infty}(R^n)$, $f_1(x)\in L_\infty(R^n)$ и $f(t)=f_0(t)+f_1(t)$. Далее оцениваем

$$K(t;f;\Lambda_{\psi,\infty},\Lambda_\infty)\le \sup_{0<\tau<\psi^{-1}(t)}(f_0^*(\tau)\psi(\tau)+t\,||f_1||_{L_\infty})=$$

$$\le \sup_{0<\tau<\psi^{-1}(t)}(f^*(\tau)\psi(\tau))+tf(\psi^{-1}(t))\le 2\sup_{0<\tau<\psi^{-1}(t)}(f^*(\tau)\psi(\tau)).$$

Пусть $f(t)=g(t)+h(t)$, где $g(x)\in L_{\psi,\infty}(R^n)$ и $h(x)\in L_\infty(R^n)$, тогда для любого $\varepsilon\in(0,1)$ имеем

$$\sup_{0<\tau<\psi^{-1}(t)}(f^*(\tau)\psi(\tau))\le \sup_{0<\tau<\psi^{-1}(t)}\left\{g^*((1-\varepsilon)\tau)\psi(\tau)+h^*(\varepsilon\tau)\psi(\tau)\right\}\le$$

$$\le \sup_{0<s<\psi^{-1}(t)} M_\psi((1-\varepsilon)^{-1})\left\{g^*(s)\psi(s)+th^*(0)\right\}.$$

Взяв нижнюю грань по всем представлениям $f(t)=g(t)+h(t)$ и затем устремив $\varepsilon \to +0$, получаем

$$\sup_{0<s<\psi^{-1}(t)} (f^*(\tau)\psi(\tau) \le \lim_{\varepsilon\to 0+} M_\psi((1-\varepsilon)^{-1})K(t;f;\Lambda_{\psi,\infty},\Lambda_\infty).$$

Так как для функции $\psi(t)\in\Phi$ функция растяжения $M_\psi(t)$ не убывает, то $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} M_\psi((1-\varepsilon)^{-1})$ существует. Если $M_\psi(t)$ непрерывна справа в точке $t=1$, тогда

$$\sup_{0<s<\psi^{-1}(t)} (f^*(\tau)\psi(\tau)) \le K(t;f;\Lambda_{\psi,\infty},\Lambda_\infty).$$

Теорема 2 доказана.

Предложение 1. Пусть $\varphi(t)\in\Phi$, $\nu(t)$ – измеримая по Лебегу, положительная и возрастающая на полуоси $[0,\infty)$ функция такая, что

$\int\limits_0^1 M_\nu(t)t^{-1}dt + \int\limits_1^\infty \frac{dt}{tM_\nu(t)} < \infty$. Тогда для любой функции

$f(x)\in\Lambda_\varphi(R^n)+\Lambda_\infty(R^n)$

$$\int_0^\infty K(\varphi(t),f,\Lambda_\varphi,L_\infty)\frac{dt}{t\nu(t)} \approx \int_0^\infty f^*(t)\varphi'(t)\frac{dt}{\nu(t)}.$$

Доказательство. Пусть $f(x)\in\Lambda_\varphi(R^n)+\Lambda_\infty(R^n)$ и $t>0$. Оценим функционал

$$\int_0^\infty K(\varphi(t),f,\Lambda_\varphi,L_\infty)\frac{dt}{t\nu(t)} \le$$

$$\le C\int_0^\infty\left(\int_0^t f^*(s)d\varphi(s)\right)\frac{dt}{t\nu(t)} = C\int_0^\infty\left(\int_0^1 f^*(ut)d\varphi(ut)\right)\frac{dt}{t\nu(t)} =$$

$$= C\int_0^1\left(\int_0^\infty f^*(ut)\varphi'(ut)\frac{dt}{t\nu(t)}\right)du = C\int_0^1\left(\int_0^\infty f^*(\tau)\varphi'(\tau)\frac{d\tau}{\nu(\tau/u)}\right)\frac{du}{u} \le$$

$$\le C\int_0^1 M_\nu(u)\frac{du}{u}\int_0^\infty f^*(u)\varphi'(u)\frac{du}{\nu(u)} \le C\int_0^\infty f^*(u)\varphi'(u)\frac{du}{\nu(u)}.$$

С другой стороны, применяя теорему 1, получаем

$$\int_0^\infty K(\varphi(t), f, \Lambda_\varphi, L_\infty)\frac{dt}{t\nu(t)} \geq C\int_0^\infty\left(\int_0^t f^*(s)d\varphi(s)\right)\frac{dt}{t\nu(t)} =$$

$$= C\int_0^1\left(\int_0^\infty f^*(\tau)\varphi'(\tau)\frac{d\tau}{\nu(\tau/u)}\right)\frac{du}{u} \geq C\int_0^1\frac{du}{uM_\nu(u^{-1})}\int_0^\infty f^*(u)\varphi'(u)\frac{du}{\nu(u)} =$$

$$= C\int_1^\infty\frac{d\tau}{\tau M_\nu(\tau)}\int_0^\infty f^*(u)\varphi'(u)\frac{du}{\nu(u)} = C\int_0^\infty f^*(u)\varphi'(u)\frac{du}{\nu(u)}.$$

Предложение доказано.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть измеримая, положительная и возрастающая на полуоси $[0,\infty)$ функция $\mu(t)$ такова, что $\int_0^1 M_\mu(t)t^{-2}dt + \int_1^\infty \frac{dt}{M_\mu(t)} < \infty$,

и функция $\varphi(t) \in \Phi$ удовлетворяет условию теоремы 3.

Тогда для любой функции $f(x) \in \Lambda_\varphi(R^n) + \Lambda_\infty(R^n)$

$$\int_0^\infty K(\varphi(t), f, \Lambda_\varphi, L_\infty)\frac{dt}{t\mu(t)} \approx \int_0^\infty f^*(t)\varphi'(t)\frac{tdt}{\mu(t)}.$$

Предложение 3. Пусть функция $\psi(t) \in \Phi$ такова, что функция растяжения $M_\psi(t)$ конечна в некоторой точке $t_0 > 1$, $\nu(t)$ – измеримая, положительная и возрастающая на полуоси $[0,\infty)$ функция, удовлетворяющая условиям: $\nu(0) = 0$ и $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{\psi(t)}{\nu(t)} = 0$. Тогда для любой функции $f(x) \in \Lambda_{\psi,\infty}(R^n) + L_\infty(R^n)$ выполняется соотношение

$$\sup_{0<t<\infty}\left(\frac{1}{\nu(t)}K(\psi(t); f; \Lambda_{\psi,\infty}, L_\infty)\right) \approx \sup_{0<t<\infty}\left(f^*(t)\frac{\psi(t)}{\nu(t)}\right).$$

Доказательство. Пусть $f(x) \in \Lambda_{\psi,\infty}(R^n) + L_\infty(R^n)$ и $t > 0$. Применив теорему 2, имеем:

$$\sup_{0<t<\infty}\left(\frac{1}{\nu(t)}K(\psi(t); f; \Lambda_{\psi,\infty}, \Lambda_\infty)\right) \leq 2\sup_{0<t<\infty}\left(\frac{1}{\nu(t)}\sup_{0<\tau\leq t}(f^*(\tau)\psi(\tau))\right) \leq$$

$$\leq 2\sup_{0<\tau<\infty}\left(f^*(\tau)\frac{\psi(\tau)}{\nu(\tau)}\right).$$

Оценим снизу К-функционал

$$\sup_{0<t<\infty}\left(\frac{1}{\nu(t)}K(t;f,\Lambda_{\psi,\infty},\Lambda_\infty)\right)\ge C_4\sup_{0<t<\infty}\left(\frac{1}{\nu(t)}\sup_{0<\tau\le t}(f^*(\tau)\psi(\tau))\right)\ge$$

$$\ge C_4\sup_{0<t<\infty}\left(f^*(t)\frac{\psi(t)}{\nu(t)}\right).$$

Предложение 3 доказано.

Предложение 4. Пусть $\varphi_1(t),\varphi_2(t)\in\Phi$, $\delta_{\varphi_2}<\gamma_{\varphi_1}$, $\varphi_1(t)/\varphi_2(t)$ возрастает. Тогда существует такая функция $\varphi(t)\in\Phi$ и такие измеримые положительные возрастающие функции $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ на полуоси $(0,\infty)$, что

$$\varphi_1(t)=\int_0^t\varphi'(u)[\mu_1(u)]^{-1}du,\ \varphi_2(t)=\int_0^t\varphi'(u)[\mu_2(u)]^{-1}du.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ выпуклые, тогда производные $\varphi_1'(t)$, $\varphi_2'(t)$ существуют, положительные и возрастают почти всюду на полуоси $(0,\infty)$, а односторонние производные $\varphi_{il}'(t)$, $\varphi_{ir}'(t), i=1,2$, конечные положительные и возрастают во всех точках полуоси $(0,\infty)$. При этом $\varphi_{il}'(t)=\varphi_{ir}'(t)=\varphi_i'(t)$ во всех точках t, где производная $\varphi_i'(t)$ существует. Пусть $\mu(t)$ – возрастающая положительная и кусочно-непрерывная функция с конечным числом точек разрывов и $x>0$. Положим $\varphi(x)=\int_0^x\varphi_{1r}'(t)\varphi_{2r}'(t)\mu(t)dt$. Поскольку $\mu(t)$ суммируемая и функции $\varphi_{1r}'(t),\varphi_{2r}'(t)$ всюду конечные, суммируемые и ограниченные на любом отрезке $[0,x]$, то функция $\varphi(x)$ определена для всех $x\in(0,\infty)$ и почти всюду $\varphi'(x)=\varphi_{1r}'(x)\varphi_{2r}'(x)\mu(x)$ [4, с. 251, 234]. Из положительности и возрастания подынтегральной функции следует, что функция $\varphi(x)$ неотрицательная и выпуклая [4, с. 281].

Далее полагаем $\mu_1(t)=\varphi_{2r}'(t)\mu(t)$, $\mu_2(t)=\varphi_{1r}'(t)\mu(t)$, тогда

$$\varphi_1(x)=\int_0^x\varphi_{1r}'(t)dt=\int_0^x\varphi'(t)[\varphi_{2r}'(t)\mu(t)]^{-1}dt=\int_0^x\varphi'(t)\frac{dt}{\mu_1(t)},$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x\varphi_{2r}'(t)dt=\int_0^x\varphi'(t)[\varphi_{1r}'(t)\mu(t)]^{-1}dt=\int_0^x\varphi'(t)\frac{dt}{\mu_2(t)}.$$

Кроме того, $\varphi(x)=\int\limits_0^x \varphi_1'(t)\varphi_2'(t)\mu(t)dt$, так как $\varphi_{ir}'=\varphi_i'(t)\,(i=1,2)$ почти всюду.

Предложение доказывается аналогично в случаях, когда $\varphi_1(t)$ – выпуклая, $\varphi_2(t)$ – вогнутая функции или функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ вогнутые.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ удовлетворяют условию теоремы. Тогда, согласно с предложением 4, найдется такая функция $\varphi(t)\in\Phi$, и такие измеримые положительные возрастающие на полуоси $(0,\infty)$ функции $v_1(t)$, $v_2(t)$, что $\varphi_1'(t)=\varphi'(t)/v_1(t)$, $\varphi_2'(t)=\varphi'(t)/v_2(t)$. При этом функцию $\varphi(t)$ можно выбрать так, чтобы ее функция растяжения была конечной в некоторой точке $t_0>1$. По условию $0<\beta_{\varphi_2}<\alpha_{\varphi_1}<\infty$, поэтому можно выбрать такую функцию $v_1(t)$, чтобы интеграл $\int\limits_0^1 M_{v_1}(u)\frac{du}{u}$ сходился. Учитывая постоянство функции $f_1^*(w)$ на $[0,t]$, оценим интеграл $\int\limits_0^t f_1^*(w)\varphi'(w)\frac{dw}{v_1(w)}$.

Для любого $\tau>0$ имеем

$$\int\limits_0^\tau K(\varphi(s),f,\Lambda_\varphi,L_\infty)\frac{ds}{sv_1(s)}\ge C_3\int\limits_0^\tau\left(\int\limits_0^t f^*(s)d\varphi(s)\right)\frac{dt}{tv_1(t)}=$$

$$=C_3\int\limits_0^\tau f^*(s)\int\limits_s^\tau\frac{dt}{tv_1(t)}d\varphi(s)=C_3\int\limits_0^\tau f^*(s)\int\limits_1^{\tau/s}\frac{dt}{tv_1(st)}d\varphi(s)\ge$$

$$\ge C_3\int\limits_0^\tau f^*(s)\int\limits_1^2\frac{du}{uv_1(s)M_{v_1}(u)}d\varphi(s)=C_5\int\limits_0^{\tau/2} f^*(s)\frac{d\varphi(s)}{v_1(s)}\ge$$

$$\ge\frac{C_5}{2}\left\{\int\limits_0^{\tau/2} f^*(s)d\varphi_1(s)+\frac{1}{v-1}\int\limits_{\tau/2}^{\tau} f^*(s)d\varphi_1(s)\right\}=$$

$$=C_5\min\left\{1,\frac{1}{v-1}\right\}\int\limits_0^\tau f^*(s)d\varphi_1(s)=C_6\int\limits_0^\tau f^*(s)d\varphi_1(s).$$

Пусть $\gamma>0$, воспользовавшись предложением 1 и свойством K-функционала [1, с.85], получаем

$$\int_0^t f^*(s)d\varphi_1(s) \le C_6 \int_0^t K(\varphi(s), f, \Lambda_\varphi L_\infty)\frac{ds}{sv_1(s)} =$$

$$= C_7\gamma \left\{ \int_0^t K\left(\frac{\varphi(s)}{\gamma}, f_0, \Lambda_\varphi, L_\infty\right)\frac{ds}{sv_1(s)} + \int_0^t K\left(\frac{\varphi(s)}{\gamma}, f_1, \Lambda_\varphi, L_\infty\right)\frac{ds}{sv_1(s)} \right\} \le$$

$$\le C_8\gamma \left\{ \int_0^t \frac{ds}{sv_1(s)} \int_0^s f_0^*(\tau)\frac{d\varphi(\tau)}{\gamma_1} + \int_0^t \frac{ds}{sv_1(s)} \int_0^s f_1^*(\tau)\frac{d\varphi(\tau)}{\gamma_1} \right\} \le$$

$$\le C_8 \left\{ \int_0^t K(\varphi(s), f_0, \Lambda_\varphi, L_\infty)\frac{ds}{sv_1(s)} + \int_0^t \frac{ds}{sv_1(s)} \int_0^1 f_1^*(su)d\varphi(su) \right\} \le$$

$$\le C_8 \left\{ \| f_0 \|_{\Lambda_{\varphi_1}} + \int_0^1 du \int_0^{tu} f_1^*(w)\varphi'(w)\frac{dw}{uv_1(w/u)} \right\} \le$$

$$\le C_8 \left\{ \| f_0 \|_{\Lambda_{\varphi_1}} + \int_0^1 M_{v_1}(u)\frac{du}{u} \int_0^t f_1^*(w)\varphi'(w)\frac{dw}{v_1(w)} \right\}.$$

По условию функция $\dfrac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}$ возрастает, следовательно, для любого

фиксированного $t > 0$ и всех $\tau \in (0,t]$ $\varphi_2(t)\int_0^\tau d\varphi_1(u) \le \varphi_1(t)\int_0^\tau d\varphi_2(u)$. Тогда по свойству 18 [3, с. 100] для неотрицательных невозрастающих функций

$$\varphi_2(t)\int_0^t f_1^*(u/2)d\varphi_1(u) \le \varphi_1(t)\int_0^t f_1^*(u/2)d\varphi_2(u).$$

Воспользовавшись этим неравенством для функции $f^*(u)$, окончательно имеем

$$\int_0^t f^*(s)d\varphi_1(s) \le C_9 \left\{ \| f_0 \|_{\Lambda_{\varphi_1}} + \int_0^t f_1^*(w)d\varphi_1(w) \right\} \le$$

$$\le C_9 \left\{ \| f_0 \|_{\Lambda_{\varphi_1}} + \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}\int_0^t f_1^*(w)d\varphi_2(w) \right\}. \tag{5}$$

Далее оценим $\int_\tau^\infty f^*(w)d\varphi_2(w)$, для любого $\tau > 0$

$$\int_{\tau}^{\infty} K(\varphi(s), f, \Lambda_\varphi, L_\infty)\frac{ds}{s\nu_2(s)} \ge C_{10}\int_{\tau}^{\infty}\left(\int_0^s f^*(t)d\varphi(t)\right)\frac{ds}{s\nu_2(s)} =$$

$$= C_{10}\int_0^1\left(\int_{\tau u}^{\infty} f^*(w)\varphi'(w)\frac{dw}{\nu_2(w/u)}\right)\frac{du}{u} \ge C_{10}\int_0^1\left(\int_{\tau u}^{\infty} f^*(w)\varphi'(w)\frac{dw}{\nu_2(w)}\right)\frac{du}{uM_{\nu_2}(u^{-1})}.$$

Так как по условию теоремы интеграл $\int_0^1 \frac{du}{uM_{\nu_2}(u^{-1})}$ сходится, то

$$\int_{\tau}^{\infty} K(\varphi(s), f, \Lambda_\varphi, L_\infty)\frac{ds}{s\nu_2(s)} \ge C_{11}\int_{\tau}^{\infty} f^*(w)\varphi_2(w).$$

Тогда верна оценка

$$\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}\int_{\tau}^{\infty} f^*(s)d\varphi_2(s) \le \frac{1}{C_{11}}\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}\int_{\tau}^{\infty} K(\varphi(s), f, \Lambda_\varphi, L_\infty)\frac{ds}{s\nu_2(s)} \le$$

$$\le \frac{\gamma}{C_{11}}\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}\left\{\int_{\tau}^{\infty} K(\frac{\varphi(s)}{\gamma}, f_0, \Lambda_\varphi, L_\infty)\frac{ds}{s\nu_2(s)} + \int_{\tau}^{\infty} K(\frac{\varphi(s)}{\gamma}, f_1, \Lambda_\varphi, L_\infty)\frac{ds}{s\nu_2(s)}\right\} \le$$

$$\le C_{12}\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}\left\{\int_{\tau}^{\infty}\left(\int_0^1 f_0^*(su)d\varphi(su)\right)\frac{ds}{s\nu_2(s)} + \int_{\tau}^{\infty} K(\varphi, f_1, \Lambda_\varphi, L_\infty)\frac{ds}{s\nu_2(s)}\right\}. \quad (6)$$

Так как $\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}$ по условию возрастает, то $\varphi_1'(t)\varphi_2(t) - \varphi_2'(t)\varphi_1(t) \ge 0$ и

почти для всех $t > 0$ $\quad \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} \le \frac{\varphi_1'(t)}{\varphi_2'(t)} = \frac{\nu_2(t)}{\nu_1(t)}$. Тогда

$$\frac{\varphi_1(\tau)}{\varphi_2(\tau)}\int_{\tau}^{\infty}\left(\int_0^s f_0^*(t)d\varphi(t)\right)\frac{ds}{s\nu_2(s)} \le \int_{\tau}^{\infty}\frac{\varphi_1(s)}{\varphi_2(s)}\left(\int_0^s f_0^*(t)d\varphi(t)\right)\frac{ds}{s\nu_2(s)} \le$$

$$\le \int_{\tau}^{\infty}\left(\int_0^s f_0^*(t)d\varphi(t)\frac{ds}{s\nu_1(s)}\right) \le C_{13}\int_{\tau}^{\infty} K(\varphi(s), f_0, \Lambda_\varphi, L_\infty)\frac{ds}{s\nu_1(s)} \le C_{14} \| f_0 \|_{\Lambda_{\varphi_1}}.$$

С учётом полученных неравенств (5), (6) для любого представления функции $f(t) = g(t) + h(t)$, где $g(t) \in \Lambda_{\varphi_1}(R^n)$, $h(t) \in \Lambda_{\varphi_2}(R^n)$, имеем

$$\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}\int_0^t f^*(s)d\varphi_2(s) \le C_{13}\left\{\|g\|_{\Lambda_{\varphi_1}} + \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}\|h\|_{\Lambda_{\varphi_2}}\right\} \le C_{13}K\left(\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}, f, \Lambda_{\varphi_1}, \Lambda_{\varphi_2}\right).$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Для фундаментальных функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ пространств $M_{\overline{\psi}_1}(R^n)$, $M_{\overline{\psi}_2}(R^n)$ найдется функция $\psi(t) \in \Phi$ такая, что

$M_\psi(t_0)<\infty$ для некоторого числа $t_0>1$, и такие измеримые положительные возрастающие на полуоси $(0,\infty)$ функции $v_1(t)$, $v_2(t)$, что $\psi_1(t)=\psi(t)/v_1(t)$, $\psi_2(t)=\psi(t)/v_2(t)$. Кроме того, для любых функций $f_1(t)\in M_{\bar\psi_1}(R^n)$, $f_2(t)\in M_{\bar\psi_2}(R^n)$ выполняются равенства

$$\sup_{0<t<\infty} f_i^*(t)\psi_i(t)=\sup_{0<t<\infty} K(\psi,f_i;M_{\bar\psi},L_\infty)\frac{1}{v_i(t)},\ i=1,2.$$

Далее оценим функционал $K\left(\dfrac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)},f;M_{\bar\psi_1},M_{\bar\psi_2}\right)$. Так как функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ удовлетворяют Δ_2–условию, то для любого $t>0$

$$K\left(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)},f;M_{\bar\psi_1},M_{\bar\psi_2}\right)\le$$

$$\le\left\{M_4\sup_{0<t<\infty}\left(f_0^*(t)\psi_1(t)\right)+M_5\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\sup_{0<t<\infty}\left(f_1^*(t)\psi_2(t)\right)\right\}\le$$

$$\le C_3\psi_1(t)\left\{\sup_{0<u<\infty}\left(\frac{1}{v_1(u)}\sup_{0<\tau<u}\left(\frac{f_0^*(\tau)\psi(\tau)}{\psi_1(t)}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\psi_2(t)}\sup_{0<u<\infty}\left(\frac{1}{v_2(u)}\sup_{0<\tau<u}\left(f_1^*(\tau)\psi(\tau)\right)\right)\right\}\le$$

$$\le C_3\psi_1(t)\left\{\sup_{0<\tau<t}\left(\frac{f_0^*(\tau)\psi(\tau)}{\psi_1(t)v_1(\tau)}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\psi_2(t)}\sup\left(\sup_{0<\tau\le t}\left(\frac{f_1^*(t)\psi(\tau)}{v_2(\tau)}\right),\sup_{t<\tau<\infty}\left(\frac{f_1^*(\tau)\psi(\tau)}{v_2(\tau)}\right)\right)\right\}.$$

Воспользовавшись определением операторов C_{ψ_1}, D_{ψ_2}, получаем

$$K\left(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)},f;M_{\bar\psi_1},M_{\bar\psi_2}\right)\le C_3\psi_1(t)\left\{C_{\psi_1}(f_0^*(t))+f_1^*(t)+D_{\psi_2}(f_1^*(t)\right\}\le$$

$$\le C_3\psi_1(t)\left\{2C_{\psi_1}(f^*(t))+D_{\psi_2}(f^*(t)\right\}.$$

Далее установим оценку К-функционала снизу; для любого $t>0$ имеем

$$C_{\psi_1}f^*(t)\psi_1(t)=\sup_{0<u<t}(f^*(u)\psi_1(u))\le$$

$$\le\sup_{0<u\le t}(f_0^*(u/2)\psi_1(u))+\sup_{0<u\le t}(f_1^*(u/2)\psi_1(u))\le$$

$$\le M_4\sup_{0<\tau\le t/2}(f_0^*(\tau)\psi_1(\tau))+\sup_{0<\tau\le t/2}(f_1^*(\tau)\psi_2(\tau)\frac{\psi_{1(2\tau)}\psi_1(\tau)}{\psi_1(\tau)\psi_2(\tau)}).$$

Так как $\psi_1(\tau)/\psi_2(\tau)$ возрастает, то

$$C_{\psi_1} f^*(t)\psi_1(t) \le M_4 \left(\sup_{0<\tau\le t/2} (f_0^*(\tau)\psi_1(\tau)) + \sup_{0<\tau\le t/2} (f_1^*(\tau)\psi_2(\tau)) \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} \right).$$

Аналогично оцениваем при любом $t \in (0,\infty)$

$$D_{\psi_2} f^*(t)\psi_2(t) = \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} \sup_{0<\tau<\infty} (f^*(\tau)\psi_2(\tau)) \le$$

$$\le \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} \left\{ \sup_{t<\tau<2t} (g^*(\tau/2)\psi_2(\tau)) + \sup_{t<\tau<\infty} (h^*(\tau/2)\psi_2(\tau)) \right\} \le$$

$$\le M_2 \left\{ M_1 \sup_{t/2<u<t} (g^*(u)\psi_1(u)) + \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} \sup_{t/2<u<\infty} (h^*(u)\psi_2(u)) \right\}.$$

Учитывая полученные неравенства, имеем для любого $t > 0$

$$\psi_1(t)\left\{ C_{\psi_1} f^*(t) + D_{\psi_2} f^*(t) \right\} \le$$

$$\le C_4 \left\{ \sup_{0<u<\infty} (g^*(u)\psi_1(u)) + \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} \sup_{0<u<\infty} (h^*(u)\psi_2(u)) \right\}.$$

Взяв нижний предел по всем разложениям $f(t) = g(t) + h(t)$ функции $f(x)$, окончательно получаем

$$\psi_1(t)\left\{ C_{\psi_1} f^*(t) + D_{\psi_2} f^*(t) \right\} \le C_4 K \left(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}, f; M_{\bar{\psi}_1}, M_{\bar{\psi}_2} \right).$$

Доказательство теоремы 3. Пусть оператор T является оператором слабого типа $(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1)$. Вначале рассмотрим случай, когда функция $\psi_1(t)/\psi_2(t)$ возрастает. Из утверждения теоремы 1 в [5] следует, что для всякой функции $f(x) \in \Lambda_{\varphi_0}(R^n) + \Lambda_{\varphi_1}(R^n)$ и любого $t > 0$ выполняется неравенство

$$\psi_1(t)\left\{ C_{\psi_1} (Tf)^*(t) + D_{\psi_2} (Tf)^*(t) \right\} \le$$

$$\le C\varphi_1(m(t))\left\{ A_{\varphi_1} f^*(m(t)) + B_{\varphi_2} f^*(m(t)) \right\}.$$

С учётом оценок, установленных в теоремах 6,7 для К-функционалов, получаем

$$K\left(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}, Tf; M_{\bar{\psi}_1}, M_{\bar{\psi}_2} \right) \le D_2 \psi_1(t)\left\{ C_{\psi_1} (Tf)^*(t) + D_{\psi_2} (Tf)^*(t) \right\} \le$$

$$\le D_2 C\psi_1(m(t))\left\{ A_{\varphi_1} f^*(m(t)) + B_{\varphi_2} f^*(m(t)) \right\} \le C_7 K \left(\frac{\varphi_1(m(t))}{\varphi_2(m(t))}, f; \Lambda_{\varphi_1}, \Lambda_{\varphi_2} \right).$$

Полагая $\tau = \psi_1(t)/\psi_2(t) = \varphi_1(m(t))/\varphi_2(m(t))$, получаем требуемое неравенство.

Если функция $\psi_1(t)/\psi_2(t)$ убывает, то воспользуемся вторым неравенством в утверждении теоремы 1 в [5]

$$\psi_2(t)\left\{C_{\psi_2}(Tf)^*(t)+D_{\psi_1}(Tf)^*(t)\right\}\le$$
$$\le C\varphi_2(m(t))\left\{A_{\varphi_1}f^*(m(t))+B_{\varphi_2}f^*(m(t))\right\}.$$

Тогда для всякой функции $f(x)\in\Lambda_{\varphi_0}(R^n)+\Lambda_{\varphi_1}(R^n)$ и любого $t>0$

$$\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}K\left(\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)},Tf;M_{\bar\psi_2},M_{\bar\psi_1}\right)\le D_2\psi_1(t)\left\{C_{\psi_2}(Tf)^*(t)+D_{\psi_1}(Tf)^*(t)\right\}\le$$

$$\le D_2C\varphi_1(m(t))\left\{A_{\varphi_1}f^*(m(t))+B_{\varphi_2}f^*(m(t))\right\}\le C_7K\left(\frac{\varphi_1(m(t))}{\varphi_2(m(t))},f;\Lambda_{\varphi_1},\Lambda_{\varphi_2}\right).$$

Учитывая, что $\tau=\psi_1(t)/\psi_2(t)=\varphi_1(m(t))/\varphi_2(m(t))$, получаем

$$\tau K\left(\tau^{-1},Tf;M_{\bar\psi_2},M_{\bar\psi_1}\right)\le CK\left(\tau,f;\Lambda_{\varphi_1},\Lambda_{\varphi_2}\right).$$

Так как из определения K-функционала [1, с.54] следует, что для любого $\tau>0$

$$\tau K\left(\tau^{-1},Tf;M_{\bar\psi_2},M_{\bar\psi_1}\right)=K\left(\tau,Tf;M_{\bar\psi_1},M_{\bar\psi_2}\right),$$

то окончательно получаем

$$K\left(\tau,Tf;M_{\bar\psi_1},M_{\bar\psi_2}\right)\le CK\left(\tau,f;\Lambda_{\varphi_1},\Lambda_{\varphi_2}\right).$$

Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. **Берг Й**. Интерполяция пространств. Введение./ Й. Берг, Й. Лёфстрём // – М., 1980. – 261 с.
2. **Дмитриев В.И.** К интерполяционной теореме.// ДАН СССР. 1974. – Т.215, №3. – С. 518–521.
3. **Крейн С.Г**. Интерполяция линейных операторов. / С. Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М.Семёнов // – М., 1978. – 400 с.
4. **Натансон И.П**. Теория функций вещественной переменной. – М., 1974. – 480 с.
5. **Пелешенко Б.И.** Об операторах слабого типа $(\varphi_0,\psi_0,\varphi_1,\psi_1)$ // Праці Укр. мат. Конгресу - 2001. Функціональний аналіз. – К., 2002. – С. 234 –244.
6. **Bennett C.** On Lorentz – Zygmund spases. / C. Bennett, K. Rudnick// – Warszawa, 1980. – 73p.
7. **Holmstedt T.** Interpolation of quasi-normed spaces// Math. Skand. – 1970. – 26. – P. 177–199.
8. **Lorentz G.G.** Interpolation theorems for operators in function spaces/ G.G. Lorentz, T.J. Shimogaki // Functional Anal. – 1968. – 2. – P. 31–51.
9. **Peetre J.** Nouvelles propriétés d'éspaces d'interpolation// C.R. Acad. Sci. Paris. – 1963. – 256. – P. 1424–1426.

Надійшла до редколегії 20 03 08

УДК 519.254

В.А. Перепелица, И.В. Козин, С.В. Курапов

Запорожский национальный университет

МЕТОДЫ КЛАССИФИКАЦИИ И АЛГОРИТМЫ РАСКРАСКИ ГРАФА

Досліджується зв'язок між класифікаціями на скінченій множини і задачею розфарбування графів. Розглянуто критерій оптимальності для класифікацій спеціального виду h-класифікацій, що побудовані на базі міри близькості. Показано, що задача пошуку оптимальної h-класифікації може бути зведена до задачі розфарбування вершин графа неспільності в мінімально можливе число кольорів. Розглянуті алгоритми правільного розфарбування вершин графа.

Задача классификации – задача возникающая практически при любых прикладных исследованиях, когда необходимо большое количество исследуемых объектов разбить на типы по определенным признакам. Хотя проблема разбиения, кажется достаточно простой, задача классификации, в большинстве случаев, является сложной и противоречивой.

Одной из основных задач классификации является проблема выбора критерия оптимальности, по которому можно судить о качестве той или иной классификации. Проблеме выбора критерия посвящены многочисленные исследования [1; 4]. Однако и до сих пор она не имеет четкого обоснования. Качество классификации оценивается обычно исходя из некоторых естественных предположений о природе рассматриваемой задачи.

ПРОБЛЕМА ОПТИМАЛЬНОСТИ. В [4] рассмотрен ряд подходов к проблеме построения классификаций. В частности, отметим следующее: одна из её основных проблем возникает в связи с тем, что для большинства практических задач для определения классов используется, как правило, не отношение эквивалентности, а отношение толерантности между классифицируемыми объектами. Это, в свою очередь, порождает неоднозначность классификации и её зависимость от выбранных представителей классов.

Тем не менее, существуют механизмы, которые позволяют снизить степень неопределенности при классификации объектов. Для этого вводится критерий качества, благодаря которому удается сопоставить между собой различные варианты разбиения на классы. Решив задачу оптимизации по выбранному критерию, иногда удается практически однозначно получить разбиение на классы для исследуемых множеств объектов.

Большинство способов классификации основано на введении меры близости между элементами с последующим правилом разбиения на классы относительно этой меры. Например, следующий критерий [6] требует увеличения расстояния между классами $X_1, X_2, ..., X_n$ и уменьшения диаметров классов

$$V(X_1, X_2, ..., X_n) = \frac{\min\limits_{x \in X_i, y \in X_j, i \neq j} \rho(x,y)}{\max\limits_{x \in X_i, y \in X_i} \rho(x,y) + 1} \to \max .$$

Здесь $\rho(x,y)$ – мера близости элементов x и y.

В этой же работе предложено представлять задачу разбиения на классы как оптимизационную задачу на комбинаторном пространстве разбиений. Пусть задано конечное множество X, подлежащее разбиению. Мощность множества X равна n. Пусть A_n -- множество всевозможных разбиений множества X. На множестве A_n введена метрика

$$\rho_{AN}(x,y) = \max_{\zeta \in x} \min_{\eta \in y} \rho\ (\zeta,\eta) + \max_{\eta \in y} \min_{\zeta \in x} \rho\ (\zeta,\eta)$$

Здесь $x, y \in A_n$, $x = (\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_s)$ – классы элементов множества X; $\rho(\zeta\ \eta)$ – расстояние между элементами $\eta, \zeta \in X$ Задача состоит в отыскании такой классификации.

МЕРЫ БЛИЗОСТИ И АЛГОРИТМЫ РАСКРАСКИ. Мерой близости между элементами на множестве X будем называть неотрицательную симметричную функцию

$$\rho : X \times X \to R^1_+,$$

то есть функцию, для которой справедливы следующие свойства:

$$\forall x, y \in X \quad \rho(x,y) \geq 0$$
$$\forall x, y \in X \quad \rho(x,y) = \rho(y,x)$$

Если при этом найдется положительное число $h > 0$, такое, что

$$\forall x, y \in X, x \neq y \quad \Rightarrow \quad \rho(x,y) \geq h,$$

то будем говорить, что мера близости обладает свойством отделимости.

Меру близости будем называть ограниченной сверху, если $\exists H \ \forall x, y \in X \ \rho(x,y) \leq H$. Очевидно, что для конечных множеств мера близости всегда ограничена сверху.

В отличие от метрики, для меры близости не предполагается выполнение неравенства треугольника. Ряд классификаций, основанных на мерах близости достаточно подробно рассматриваются в [4].

Будем предполагать, что на множестве X задана мера близости. Выберем положительное число $h > 0$. h-классификацией на основе заданной меры близости будем называть такое разбиение множества X на классы $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, для которого справедливы следующие свойства:

$$\forall X_i \in \Delta \ \forall x, y \in X_i, \ \rho(x,y) < h$$
$$\forall X_i, X_j \in \Delta, i \neq j \ \exists x \in X_i, \exists y \in X_j \ \rho(x,y) \geq h$$

Другими словами, все элементы одного класса должны быть достаточно близки друг к другу, напротив, в различных классах найдутся элементы, которые в достаточной степени удалены друг от друга.

Ограничимся для простоты лишь классификациями на конечных множествах.

Очевидно, что если мера множества обладает свойством отделимости, то для достаточно малых h, h-классификация будет состоять из всех одноэлементных подмножеств множества X. Наоборот, если мера близости ограничена сверху на X, то при больших значениях h, классификация будет состоять лишь из одного класса, который совпадает со всем множеством X. Между этими крайними случаями будет существовать достаточно много различных h-классификаций.

h-классификацию будем называть оптимальной, если число классов в этой классификации минимально по сравнению с другими h-классификациями для заданного числа h.

Определим граф h-несовместности $G_h(X)$ для исследуемого множества X следующим образом: вершинами графа служат элементы множества X, две вершины $x, y \in X$ соединены ребром в том и только в том случае, когда $\rho(x,y) \geq h$

Очевидно, что всякой h-классификации множества X соответствует разбиение вершин графа $G_h(X)$ на классы таким образом, что любые две вершины одного класса являются несмежными. Наоборот, в любых двух различных классах найдутся две смежные между собой вершины.

Каждому такому разбиению вершин графа $G_h(X)$ соответствует определенная раскраска его вершин. При этом все вершины одного класса раскрашены в один цвет и любые две вершины разных классов имеют различные цвета. На оборот, каждая правильная раскраска вершин графа $G_h(X)$ (любые две смежные вершины раскрашены в разные цвета) порождает соответствующую h-классификацию на множестве X.

Теорема. *Число классов оптимальной h-классификации на множестве X совпадает с хроматическим числом графа h-несовместности $G_h(x)$.*

Доказательство. Для доказательства напомним, что хроматическим числом графа минимальное число красок, которое необходимо для раскрашивания его вершин так, чтобы никакие смежные вершины не были раскрашены одинаково. Таким образом, если удалось разбить вершины графа $G_h(X)$, на классы, так что никакие две вершины одного класса не смежны, то далее каждый класс может быть раскрашен в свой цвет. Следовательно, число классов в любой (а значит и в оптимальной) классификации не меньше хроматического числа графа. С другой стороны, если k-хроматическое число графа $G_h(X)$, то граф можно правильно раскрасить в k цветов и, соответственно, разбить его вершины на k классов эквивалентности.

АЛГОРИТМ РАСКРАСКИ ГРАФОВ. Раскраску графа G и нахождение хроматического числа графа G, можно представить как задачу покрытия всех вершин X графа G независимыми множествами вершин F [5]. Пусть таких множеств m. Тогда можно задать матрицу инциденций $M = [m_{ij}]$ размером ($n \times m$) для гиперграфа $\Gamma = (X,U;P)$, где $m_{ij}=1$, если вершина x_i принадлежит j – независимому множеству вершин, и $m_{ij}=0$ в противном случае. В гиперграфе $\Gamma = (X,U;P)$, X – множество вершин ($card\, X = n$), U – множество гиперребер ($card\, U = m$), P – m-местный предикат. Для построения всех раскрасок применяется метод Магу[5], где каждая вершина представляется дизъюнкцией гиперребер, инцидентных данной вершине, и объединение всех вершин через конъюнкцию. Далее выделяются, минимальные по длине термы. Однако данный метод вычисляет не только минимальные по длине термы, но и более длинные термы, производя, с точки зрения вычисления хроматического числа графа G, ненужные вычисления.

Рассмотрим алгоритм получения термов только минимальной длины.

Количество гиперребер, инцидентных вершине x, в гиперграфе Γ будем называть локальной степенью вершины и обозначать $\rho(x)$. Для каждого гиперребра u и произвольного подмножества $Q\subseteq X$ вершин графа определим число $k_Q(u)$ – количество вершин в множестве Q, инцидентных ребру u. Будем обозначать относительную норму вершины $q_Q(x)=\sum_{u\in U(x)} k_Q(u)$, $U(x)$ – множество гиперребер инцидентных вершине x. Таким образом, с каждой вершиной $x\in Q$ можно связать пару действительных чисел $d_Q=(\rho(x), q_Q(x))$.

В процессе работы алгоритма последовательно выбираются гиперребра, так чтобы мощность множества раскрашенных вершин состояло как можно из большего количества вершин, а количество цветов было минимальным. Для этого все множество вершин X, в процессе работы алгоритма, разбивается на два подмножества Z и Q. Где Z – подмножество раскрашенных вершин, а Q – подмножество не раскрашенных вершин. В свою очередь подмножество Z состоит из ряда непересекающихся подмножеств Z_1, $Z_2,\ldots$, $Z_{\gamma(G)}$ характеризующих цвета раскраски.

Рассматриваемый алгоритм аналогичен методу ветвей и границ, на каждом шаге выбирается гиперребро u из множества гиперребер, инцидентных некоторой вершине $x\in Q$. Причем вершина x должна иметь минимальное значение $\rho(x)$ и, при равных значениях ρ, максимальное значение $q_Q(x)$. Введем для каждого гиперребра u характеристику p, которую будем называть индексом включения в подмножество Z. Каждому гиперребру сопоставим пару чисел $(k_Q(u),p)$. В процессе работы алгоритма характеристика p, для гиперребер, находящихся в подмножестве Q, будет меняться.

Опишем алгоритм. В начальном состоянии подмножество $Z=\varnothing$, $Q=X$ – подмножество всех вершин графа G, $\gamma(G)=0$. Индекс p для всех гиперребер полагаем равным 0. Номер текущей раскраски $s=0$.

Шаг 1: [Ранжировка вершин в подмножестве Q]. Производим ранжировку всех вершин по возрастанию величины $\rho(x)$ и, при равных значениях $\rho(x)$, по убыванию величины $q(x)$. Переходим на шаг 2.

Шаг 2: [Формирование подмножества Z_s]. Увеличиваем значение s на единицу. Если $s>\gamma(G)$ и $\gamma(G)\neq 0$, то алгоритм заканчивает работу. В противном случае выбираем из не расссмотренных гиперребер, гиперребро u инцидентное вершине x из подмножества Q, имеющее минимальное значение $\rho(x)$ и, при равных ρ, максимальное значение $q(x)$. Если таких гиперребер несколько, то выбираем из них то, для которого значение $k(u)$ максимально. Выбранную вершину x будем называть главной вершиной в подмножестве Z_s. Для выбранного гиперребра u и главной вершины в подмножестве Z_s положим $p=-s$, для остальных гиперребер инцидентных главной вершине x характеристика p остается без изменений. Далее, в подмножестве Q отыскиваются вершины, инцидентные выбранному гиперребру u Все характеристики p гиперребер u_l, инцидентных выбранным вершинам изменяются на $p_l=s$. Выбранные вершины и принадлежащие им гиперребра помещаются в подмножество Z_s. Если после этого подмножество $Q=\varnothing$, то формируется множество гиперребер, состоящее из гиперребер имеющих отрицательную величину индекса p. Если $\gamma(G) = 0$, то полагаем $\gamma(G) = s$ и переходим на шаг 3. Если $Q \neq \varnothing$, то во всех гиперребрах u подмножества Q происходит пересчет величин $k_Q(u)$. Далее переходим на шаг 1.

Шаг 3: [Переформирование подмножества Q]. Если для какой-нибудь главной вершины из подмножества Z_t, начиная с последнего s, не исчерпан перебор всех гиперребер, то подмножества Z_t и выше, включаются обратно в подмножество Q с пересчетом всех характеристик $w_t = (k_Q(u_t), p_t = 0)$, гиперребер по измененному множеству Q. Текущее значение s принимает значение $t-1$ и переходим на шаг 1. Если исчерпаны все гиперребра для главной вершины x при $t=1$, то алгоритм заканчивает работу.

В результате работы алгоритма будет выделен набор подмножеств гиперребер покрывающих все вершины графа G. Минимальное по количеству гиперребер подмножество характеризует раскраску с хроматическим числом $\gamma(G)$.

Работу алгоритма раскраски проиллюстрируем на примере графа G, представленного следующей матрицей смежности (табл.1):

Таблица 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	X_6	X_7	X_8	x_9
x_1		1		1			1		
x_2	1		1	1					
x_3		1							
x_4	1	1						1	
x_5						1		1	
x_6					1				1
x_7	1							1	
x_8				1	1		1		1
x_9						1		1	

Множество независимых вершин F:

$F_1=\{x_3, x_4, x_5, x_7, x_9\}$; $F_2=\{x_2, x_7, x_9\}$; $F_3=\{x_2, x_6, x_8\}$; $F_4=\{x_3, x_4, x_6, x_7\}$; $F_5=\{x_2, x_6, x_7\}$; $F_6=\{x_1, x_3, x_5, x_9\}$; $F_7=\{x_1, x_3, x_6, x_8\}$.

Применим метод Магу для выделения термов раскраски:

$(F_6 \vee F_7)\&(F_2 \vee F_3 \vee F_5)\&(F_1 \vee F_4 \vee F_6 \vee F_7)\&(F_1 \vee F_4)\&(F_1 \vee F_6)\&(F_3 \vee F_4 \vee F_5 \vee F_7)\&$
$(F_1 \vee F_2 \vee F_4 \vee F_6)\&(F_3 \vee F_7)\&(F_1 \vee F_2 \vee F_6)=$
$F_1\&F_2\&F_7 \vee F_1\&F_3\&F_6 \vee F_1\&F_3\&F_7 \vee F_1\&F_5\&F_7 \vee F_3\&F_4\&F_6 \vee F_2\&F_4\&F_6\&F_7 \vee$
$\vee F_4\&F_5\&F_6\&F_7$.

Как видно хроматическое число данного графа равно 3. Данной раскраски соответствуют следующие покрывающие подмножества

$Y_1=\{F_1,F_2,F_7\}$; $Y_2=\{F_1,F_3,F_6\}$; $Y_3=\{F_1,F_3,F_7\}$; $Y_4=\{F_1,F_5,F_7\}$; $Y_5=\{F_3,F_4,F_6\}$.

Перейдем к описанию алгоритма.

Произведем ранжировку вершин согласно характеристики d (табл.2).

Таблица 2

		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	d
Q	x_4	5,0			4,0				d_4=(2,41)
	x_5	5,0					4,0		d_5=(2,41)
	x_1						4,0	4,0	d_1=(2,32)
	x_8			3,0				4,0	d_8=(2,25)
	x_9	5,0	3,0				4,0		d_9=(3,50)
	x_2		3,0	3,0		3,0			d_2=(3,27)
	x_3	5,0			4,0		4,0	4,0	d_3=(4,73)
	x_7	5,0	3,0		4,0	3,0			d_7=(4,59)
	x_6			3,0	4,0	3,0		4,0	d_6=(4,50)

Выделим гиперребро u_1, инцидентное главной вершине x_4. Выделенное множество вершин $\{x_4,x_5,x_9,x_3,x_7\}$ поместим в подмножество Z_1, для оставшихся гиперребер в подмножестве Q пересчитаем значение $k_Q(u)$ (тбл.3).

Таблица 3

		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	d
Z_1	x_4	5,-1			4,+1				d_4=(2,41)
	x_5	5,+1					4,+1		d_5=(2,41)
	x_9	5,+1	3, +1				4,+1		d_9=(3,50)
	x_3	5, +1			4,+1		4,+1	4,+1	d_3=(4,73)
	x_7	5,+1	3,+1		4,+1	3,+1			d_7=(4,59)
Q	x_8			3,0				3,0	d_8=(2,18)
	x_1						1,0	3,0	d_2=(2,10)
	x_2		1,0	3,0		2,0			d_2=(3,14)
	x_6			3,0	1,0	2,0		3,0	d_2=(4,23)

Выделим гиперребро u_3, инцидентное главной вершине x_8. Выделенное множество вершин $\{x_8,x_2,x_6\}$ поместим в подмножество Z_2, для оставшихся гиперребер в подмножестве Q пересчитаем значение $k_Q(u)$(табл.4)

Таблица 4

		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	d
Z_1	x_4	5,-1			4,+1				d_4=(2,41)
	x_5	5,+1					4,+1		d_5=(2,41)
	x_9	5,+1	3, +1				4,+1		d_9=(3,50)
	x_3	5,+1			4,+1		4,+1	4,+1	d_3=(4,73)
	x_7	5,+1	3,+1		4,+1	3,+1			d_7=(4,59)
Z_2	x_8			3,-1				3,0	d_8=(2,18)
	x_2		1,+1	3,+1		2,+1			d_2=(3,14)
	x_6			3,+1	1,+1	2,+1		3,+1	d_6=(4,23)
Q	x_1						1,0	1,0	d_1=(2,2)

Выделим гиперребро u_6, инцидентное главной вершине x_1. Выделенное множество вершин $\{x_1\}$ поместим в подмножество Z_3. Подмножество Q пусто (табл.5).

Таблица 5

		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	U_7	d
Z_1	X_4	5,-1			4,+1				d_4=(2,41)
	X_5	5,+1					4,+1		d_5=(2,41)
	X_9	5,+1	3, +1				4,+1		d_9=(3,50)
	X_3	5, +1			4,+1		4,+1	4,+1	d_3=(4,73)
	X_7	5,+1	3,+1		4,+1	3,+1			d_7=(4,59)
Z_2	X_8			3,-2				3,+2	d_8=(2,18)
	X_2		1,+2	3,+2		2,+2			d_2=(3,14)
	X_6			3,+2	1,+2	2,+2		3,+2	d_6=(4,23)
Z_3	X_1						1,-3	1,0	d_1=(2,2)

Выделим подмножество покрывающих гиперребер $\{u_1, u_3, u_6\}$.

Гиперребра, инцидентные главной вершине x_1, для формирования Z_3 еще не перебраны. Возвращаем подмножество Z_3 в подмножество Q. Выбираем гиперребро u_7 в главной вершине x_1. Выделенное множество вершин $\{x_1\}$ поместим в подмножество Z_3. Подмножество Q пусто. Выделим подмножество покрывающих гиперребер $\{u_1, u_3, u_7\}$.

Для следующего шага гиперребра в главной вершине x_1 для формирования Z_3 уже перебраны. Возвращаем подмножество Z_3 и Z_2 в подмножество Q, и для гиперребер в подмножестве Q пересчитаем значение $k_Q(u_q)$ (табл. 6 –7)

Таблица 6

		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	d
Z_1	x_4	5,-1			4,+1				d_4=(2,41)
	x_5	5,+1					4,+1		d_5=(2,41)
	x_9	5,+1	3, +1				4,+1		d_9=(3,50)
	x_3	5, +1			4,+1		4,+1	4,+1	d_3=(4,73)
	x_7	5,+1	3,+1		4,+1	3,+1			d_7=(4,59)
Z_2	x_8			3,+2				3,+2	d_8=(2,18)
	x_2		1,+2	3,+2		2,+2			d_2=(3,14)
	x_6			3,+2	1,+1	2,+2		3,+2	d_6=(4,23)
Z_3	x_1						1,0	1,-3	d_1=(2,10)

Таблица 7

		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	d
Z_1	x_4	5,-1			4,+1				d_4=(2,41)
	x_5	5,+1					4,+1		d_5=(2,41)
	x_9	5,+1	3, +1				4,+1		d_9=(3,50)
	x_3	5, +1			4,+1		4,+1	4,+1	d_3=(4,73)
	x_7	5,+1	3,+1		4,+1	3,+1			d_7=(4,59)
Q	x_8			3,-2				3,0	d_8=(2,18)
	x_2		1,0	3,0		2,0			d_2=(3,14)
	x_6			3,0	1,0	2,0		3,0	d_6=(4,23)
	x_1						1,0	3,0	d_1=(2,10)

Выделим гиперребро u_7, инцидентное главной вершине x_8. Выделенное множество вершин $\{x_8,x_2,x_6\}$ поместим в подмножество Z_2, для оставшихся гиперребер в подмножестве Q изменим значение $k_Q(u_q)$ (табл.8)

Таблица 8

		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	d
Z_1	x_4	5,-1			4,+1				d_4=(2,41)
	x_5	5,+1					4,+1		d_5=(2,41)
	x_9	5,+1	3, +1				4,+1		d_9=(3,50)
	x_3	5,+1			4,+1		4,+1	4,+1	d_3=(4,73)
	x_7	5,+1	3,+1		4,+1	3,+1			d_7=(4,59)
Z_2	x_8			3,0				3,-2	d_8=(2,18)
	x_1						1,+2	3,+2	d_1=(2,10)
	x_6			3,+2	1,+2	2,+2		3,+2	d_6=(4,23)
Q	x_2		1,0	1,0		1,0			d_2=(3,3)

Выделим гиперребро u_2 инцидентное главной вершине x_2. Выделенное множество вершин $\{x_2\}$ поместим в подмножество Z_3. Подмножество Q пусто. Формируем подмножество покрывающих гиперребер $\{u_1,u_7,u_2\}$.

На следующем шаге формируется уже известное подмножество покрывающих гиперребер $\{u_1,u_7,u_3\}$. Далее формируется подмножество покрывающих гиперребер $\{u_1,u_7,u_5\}$

Так как все гиперребра для главных вершин Z_2 и Z_3 перебраны, то подмножества Z_1, Z_2 и Z_3 возвращаются в подмножество Q с пересчетом значений (табл. 9).

Таблица 9

		u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	d
Q	x_4	5,0			4,-1				d_4=(2,41)
	x_5	5,0					4,0		d_5=(2,41)
	x_1						4,0	4,0	d_1=(2,32)
	x_8			3,0				4,0	d_8=(2,25)
	x_9	5,0	3,0				4,0		d_9=(3,50)
	x_2		3,0	3,0		3,0			d_2=(3,27)
	x_3	5,0			4,0		4,0	4,0	d_3=(4,73)
	x_7	5,0	3,0		4,0	3,0			d_7=(4,59)
	x_6			3,0	4,0	3,0		4,0	d_6=(4,50)

Выделим гиперребро u_4 инцидентное главной вершине x_4. Выделенное множество вершин $\{x_4,x_3,x_7,x_6\}$ поместим в подмножество Z_1. По аналогии, проводя дальнейшие вычисления, до тех пор пока $Q\neq\varnothing$, формируем подмножество покрывающих гиперребер $\{u_4,u_6,u_3\}$.

Выделенные покрывающие подмножества

$$Y_1=\{u_1,u_2,u_7\};\ Y_2=\{u_1,u_3,u_6\};\ Y_3=\{u_1,u_3,u_7\};\ Y_4=\{u_1,u_5,u_7\};\ Y_5=\{u_3,u_4,u_6\}$$

совпадают с подмножествами выделенными методом Магу.

ФРАГМЕНТАРНЫЙ АЛГОРИТМ РАСКРАСКИ ГРАФА. К сожалению, задача раскраски вершин графа в минимальное число цветов является *NP*-полной. Поэтому имеет смысл искать простые приближенные алгоритмы раскраски. Рассмотрим один из таких алгоритмов, основанный на идее фрагментарного похода [3]. В соответствии с [3] определим множество фрагментов следующим образом: фрагментом будем считать любое правильно раскрашенное подмножество множества вершин графа $G_h(x)$.

Упорядочим вершины графа $G_h(x)$ произвольным образом и выполним следующую процедуру раскрашивания. Будем последовательно сравнивать очередную вершину с уже построенными классами в том порядке, в котором эти классы возникали. Если вершина не смежна ни с одной из вершин существующего класса, то она помещается в этот класс и раскрашивается в соответствующий классу цвет. Если вершина имеет смежные вершины в любым из уже построенных классов, то она помещается в новый очередной класс и раскрашивается, соответственно, в новый цвет, который не использовался при окраске других вершин.

Безусловно, такой алгоритм является приближенным, результат его работы зависит от первоначально выбранного упорядочения вершин. Однако простота и быстрота реализации делают этот алгоритм весьма действенным инструментом при решении практических задач классификации на конечных множествах.

Библиографические ссылки

1. **Айвазян С.А.** Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности/С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер. И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин// М. 1989.– 607 с.
2. **Козин И.В.** Фрагментарные алгоритмы в системах поддержки принятия решений// Питання прикладної математики і математичного моделювання. Зб. наук. праць – Д. 2005. – С.131 – 137.
3. **Козин И.В.** Алгоритмы оптимальной классификации//И.В. Козин, С.В. Курапов// Вісник Запорізького нац. ун –ту. – №1. – 2005.– С. 25 – 29.
4. **Ким Дж. О.** Факторный, дискриминантный и кластерный анализ/Дж.О Ким, Ч.У. Мюллер, У.Р. Клекка// М. 1989. – 215 с.
5. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход.–. М., 1978. – 432 с.
6. **Сергиенко И.В.** Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – К.1988. – 472 с.

Надійшла до редколегії 28 02 08

УДК 517.5

М.Е. Ткаченко, В.Н. Трактинская

Днепропетровский национальный университет

УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ ЭЛЕМЕНТА НАИЛУЧШЕГО L_1-ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ПОДПРОСТРАНСТВОМ ПОСТОЯННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Отримані умови єдиності елемента найкращого L_1-наближення неперервних на метричному компакті векторнозначних функцій підпростором сталих відображень.

Пусть Q – метрический компакт, Σ – σ-поле борелевских подмножеств Q и μ – неотрицательная, конечная, безатомная мера, положительная на любом непустом открытом подмножестве Σ.

Через $C_1(Q)$ обозначим пространство непрерывных функций $f : Q \to \mathbf{R}$ с нормой

$$\|f\|_1 = \int_Q |f(x)| d\mu(x),$$

через $\mathbf{R}_1^m$ – пространство векторов $\bar{f} = (f_1,...,f_m)$ с нормой $\|\bar{f}\| = \sum_{i=1}^m |f_i|$,

а через $C_1(Q, \mathbf{R}_1^m)$ – пространство вектор-функций $\bar{f} : Q \to \mathbf{R}_1^m$ с нормой

$$\|\bar{f}\|_1 = \sum_{i=1}^m \int_Q |f_i(x)| d\mu(x),$$

где $\bar{f} = (f_1,...,f_m)$, $f_i \in C_1(Q)$, $i = 1,...,m$.

Пусть $\bar{f} \in C_1(Q, \mathbf{R}_1^m)$, $H \subset C_1(Q)$. Величину

$$E(\bar{f}, H)_1 = \inf\{\|\bar{f} - \bar{u}\|_1 : \bar{u} = (u,...,u), \quad u \in H\} \tag{1}$$

будем называть наилучшим L_1-приближением вектор-функции $\bar{f}$ множеством H, а функцию из H, реализующую точную нижнюю грань в правой части равенства (1), – элементом наилучшего L_1-приближения $\bar{f}$ в H.

Совокупность всех элементов наилучшего L_1-приближения функции $\bar{f}$ в H будем обозначать $P_H(\bar{f})$, а множество нулей функции f через Z_f.

Нам понадобится обобщение теоремы 2 из [2] на случай непрерывных на метрическом компакте функций.

Пусть

$$H' = \{\bar{h} = (h_1,...,h_m) \in C_1(Q, \mathbf{R}_1^m) : \exists p_{\bar{h}} \in H \quad \forall x \in Q \quad |h_i(x) = p_{\bar{h}}(x)|, \quad i = \overline{1,m}\}.$$

Теорема А. *Пусть* H *– конечномерное подпространство* $C_1(Q)$ *Любая* *функция* $\bar{f} \in C_1(Q, \mathbf{R}_1^m)$ *имеет единственный элемент наилучшего* L_1-*приближения в H тогда и только тогда, когда любая функция* $\bar{h} \in H'$ *имеет единственный элемент наилучшего* L_1-*приближения в H.*

Кроме того, нам необходимо будет обобщение критерия единственности элемента наилучшего L_1-приближения на случай непрерывных на метрическом компакте функций, который сразу вытекает из теоремы A, а также из теоремы 1 и леммы 3 из [2].

Теорема B. *Пусть* H – *конечномерное подпространство* $C_1(Q)$ *Любая функция* $\bar{f} \in C_1(Q, \mathbf{R}_1^m)$ *имеет единственный элемент наилучшего* L_1-*приближения в H тогда и только тогда, когда для любой функции* $\bar{h} \in H'/\{\bar{0}\}$ *существует функция* $p \in H$ *такая, что*

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{Q \setminus Z_{h_i}} p(x) \operatorname{sgn} h_i(x) d\mu(x) > \sum_{i=1}^{m} \int_{Z_{h_i}} |p(x)| d\mu(x) \ . \qquad (2)$$

Далее в качестве приближающего пространства будем рассматривать подпространство постоянных отображений

$$H_0 = \{f \in C_1(Q): \ f(x) = a, \ \ \forall x \in Q, \ \ a \in \mathbf{R}\}.$$

Будем рассматривать вопросы единственности элемента наилучшего L_1-приближения для функций из $C_1(Q, \mathbf{R}_1^m)$ подпространством H_0. Такая задача для функций со значениями в строго нормированном банаховом пространстве рассматривалась в [1]. Заметим, что пространство $\mathbf{R}_1^m$ не является строго нормированным.

Теорема 1. *Пусть Q – односвязный метрический компакт Тогда подпространство* H_0*:*

1) *не является множеством единственности элемента наилучшего* L_1-*приближения для пространства* $C_1(Q, \mathbf{R}_1^m)$, *если m = 2k;*
2) *является множеством единственности элемента наилучшего* L_1-*приближения для пространства* $C_1(Q, \mathbf{R}_1^m)$, *если m = 2k+1.*

Доказательство.

1) Пусть $m = 2k$.

Рассмотрим функцию $\bar{h} = (h_1, \dots, h_{2k})$ такую, что $\forall x \in Q$, $a \in \mathbf{R}$

$$h_i(x) = \begin{cases} a, & i = \overline{1,k} \ , \\ -a, & i = \overline{k+1, 2k}. \end{cases}$$

Ясно, что $\bar{h} \in H'$

Рассмотрим для $\bar{a} = (a, \dots, a)$ нормы:

$$\| \bar{h}(x) - \bar{a} \|_1 = \sum_{i=1}^{2k} \int_Q |h_i(x) - a| d\mu(x) = \sum_{i=1}^{k} \int_Q |a - a| d\mu(x) + \sum_{i=k+1}^{2k} \int_Q |-2a| d\mu(x) = 2|a| \cdot k \cdot \mu(Q) ;$$

$$\| \bar{h}(x) - (-\bar{a}) \|_1 = \sum_{i=1}^{2k} \int_Q |h_i(x) + a| d\mu(x) = \sum_{i=1}^{k} \int_Q |2a| d\mu(x) = 2|a| \cdot k \cdot \mu(Q).$$

Для $\bar{b} = (b,...,b)$, $\forall b \in \mathbf{R}$

$$\| \bar{h}(x) - \bar{b} \|_1 = \sum_{i=1}^{2k} \int_Q |h_i(x) - b| d\mu(x) = \sum_{i=1}^{k} \int_Q |a - b| d\mu(x) + \sum_{i=k+1}^{2k} \int_Q |a + b| d\mu(x) =$$

$$= k \cdot |a - b| \mu(Q) + k \cdot |a + b| \mu(Q) = k \cdot \mu(Q)(|a - b| + |a + b|) \geq 2|a| \cdot k \cdot \mu(Q).$$

Таким образом, получили, что $a, -a \in P_{H_0}(\bar{h})$, а значит, пространство H_0 не является множеством единственности элемента наилучшего L_1-приближения для H', а по теореме А и для $C_1(Q, \mathbf{R}_1^m)$.

2) Пусть $m = 2k+1$.

По теореме В H_0 – подпространство единственности элемента наилучшего L_1-приближения для пространства $C_1(Q, \mathbf{R}_1^{2k+1})$ тогда и только тогда, когда $\forall \bar{h} \in H'/\{\bar{0}\}$ $\exists a_0 \in \mathbf{R}$:

$$\sum_{i=1}^{2k+1} \int_{Q \setminus Z_{h_i}} a_0 \operatorname{sgn} h_i(x) d\mu(x) > \sum_{i=1}^{2k+1} \int_{Z_{h_i}} |a_0| d\mu(x).$$

Пусть $\bar{h}$ – произвольная функция множества H', тогда $\exists a_h \in R$: $|h_i(x)| = |a_h|$, $i = \overline{1,2k+1}$, $\forall x \in Q$.

Обозначим

$$N = \{i : a_h \cdot h_i(x) < 0 \}, \qquad M = \{i : a_h \cdot h_i(x) > 0\}.$$

Так как $i = \overline{1,2k+1}$, то $\operatorname{card} N \neq \operatorname{card} M$.

Если $\operatorname{card} M > \operatorname{card} N$, то в качестве a_0 возьмём a_h, тогда

$$\sum_{i=1}^{2k+1} \int_{Q \setminus Z_{h_i}} a_h \operatorname{sgn} h_i(x) d\mu(x) = \sum_{i \in M} \int_Q |a_h| d\mu(x) - \sum_{i \in N} \int_Q |a_h| d\mu(x) =$$

$$= |a_h| \cdot \mu(Q)(\operatorname{card} M - \operatorname{card} N) > 0.$$

Если $\operatorname{card} M < \operatorname{card} N$, то достаточно взять $a_0 = -a_h$. По теореме В H_0 является подпространством единственности элемента наилучшего L_1-приближения для пространства $C_1(Q, \mathbf{R}_1^{2k+1})$.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть метрический компакт* $Q = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j$, *где* Q_j *– связные компакты. Тогда*

1) *если m=2k, то подпространство* H_0 *не является множеством единственности элемента наилучшего* L_1*-приближения для* $C_1(Q, \mathbf{R}_1^m)$;

2) *при* $m=2k+1$ *подпространство* H_0 *является множеством единственности элемента наилучшего* L_1*-приближения для* $C_1(Q,\mathbf{R}_1^m)$*, если метрический компакт Q удовлетворяет условию, что для любого набора целых чисел* k_j *таких, что* $|k_j|$ *- нечётные числа,* $|k_j| \le 2k+1$,

$$\sum_{j=1}^{m} k_j \cdot \mu(Q_j) \ne 0.$$

Доказательство.

1) Пусть $m = 2k$.

Множество H' будет иметь вид:

$$H' = \{\bar{h} = (h_1,\dots,h_{2k}) \mid \exists a_{\bar{h}} \in \mathbf{R}: \quad \forall x \in \bigcup_{j=1}^{n} Q_j \quad |h_i(x)| = |a_{\bar{h}}|, \quad i = \overline{1,2k}\}.$$

Пусть функция $\bar{h}_0 = (h_1,\dots,h_{2k})$ такая, что для некоторого $a_0 \in \mathbf{R}_+$, $\forall x \in Q$

$$h_i(x) = \begin{cases} a_0, & i = \overline{1,k}, \\ -a_0, & i = \overline{k+1,2k}. \end{cases}$$

Ясно, что $\bar{h}_0 \in H'$.

Тогда $\forall a \in \mathbf{R}$ левая часть неравенства (2)

$$\sum_{i=1}^{2k} \int_{Q\setminus Z_{h_i}} a \ \operatorname{sgn} h_i(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{k} \int_{Q} a d\mu(x) - \sum_{i=k+1}^{2k} \int_{Q} a d\mu(x) = ka \cdot \mu(Q) - ka \cdot \mu(Q) = 0.$$

Так как $h_i(x) \ne 0$, $\forall x \in Q$, то $Z_{h_i} = \varnothing$, и $\forall a \in \mathbf{R}$ $\sum_{i=1}^{2k} \int_{Z_{h_i}} |a| d\mu(x) = 0$.

Таким образом, получили отрицание необходимого условия в теореме В, а, следовательно, H_0 не является подпространством единственности элемента наилучшего L_1-приближения для $C_1(Q,\mathbf{R}_1^{2k})$.

2) Пусть m = 2k+1 и метрический компакт Q удовлетворяет указанному условию.

Пусть $\bar{h}$ – произвольная функция H', тогда $\exists a_h \in \mathbf{R}$: $|h_i(x)| = |a_h|$, $\forall x \in Q$, $i = \overline{1,2k+1}$.

Так как $\bar{h} \ne \bar{0}$, то $a_h \ne 0$, $Z_{h_i} = \varnothing$ и $\sum_{i=1}^{2k+1} \int_{Z_{h_i}} |a_h| d\mu(x) = 0$.

Введём обозначения:

$$A_i = \left\{ x \in \bigcup_{j=1}^{n} Q_j : h_i(x) = a_h \right\}, \qquad B_i = \left\{ x \in \bigcup_{j=1}^{n} Q_j : h_i(x) = -a_h \right\}.$$

Заметим, что A_i и B_i совпадают с какой-либо компонентой связности Q_j, некоторым их объединением или пустым множеством, и

$$\sum_{i=1}^{2k+1}\mu(A_i)+\sum_{i=1}^{2k+1}\mu(B_i)=(2k+1)\cdot\sum_{j=1}^{n}\mu(Q_j) \quad (3)$$

Покажем, что $\sum_{i=1}^{2k+1}\mu(A_i)\neq\sum_{i=1}^{2k+1}\mu(B_i)$. Предположим, что выполняется равенство, тогда в силу (3)

$$2\sum_{i=1}^{2k+1}\mu(B_i)=(2k+1)\cdot\sum_{j=1}^{n}\mu(Q_j).$$

В силу выбора множеств B_i существует набор $M=\{j_1,...,j_s\}\subset\{1,...n\}$: $\sum_{i=1}^{2k+1}\mu(B_i)=\sum_{j\in M}m_j\cdot\mu(Q_j)$, где $m_j\in\mathbf{N}$, $m_j\leq 2k+1$, $j\in M$.

Тогда

$$2\sum_{j\in M}m_j\mu(Q_j)-(2k+1)\sum_{j=1}^{n}\mu(Q_j)=0,$$

или

$$(2k-2m_j+1)\sum_{j\in M}\mu(Q_j)+(2k+1)\sum_{j\notin M}\mu(Q_j)=0,$$

причём $2k-2m_j+1\in[-2k-1;2k+1]$, что противоречит условию, наложенному на метрический компакт Q. Таким образом, $\sum_{i=1}^{2k+1}\mu(A_i)\neq\sum_{i=1}^{2k+1}\mu(B_i)$.

Если $\sum_{i=1}^{2k+1}\mu(A_i)>\sum_{i=1}^{2k+1}\mu(B_i)$, то возьмём в неравенстве (2) в качестве $p=a_h$

$$\sum_{i=1}^{2k+1}\int_{Q\backslash Z_{h_i}}a_h\operatorname{sgn}h_i(x)d\mu(x)=\sum_{i=1}^{2k+1}\Big(\int_{A_i}a_h\operatorname{sgn}h_i(x)d\mu(x)+\int_{B_i}a_h\operatorname{sgn}h_i(x)d\mu(x)\Big)=$$

$$=\sum_{i=1}^{2k+1}\Big(\int_{A_i}|a_h|d\mu(x)-\int_{B_i}|a_h|d\mu(x)\Big)=|a_h|\Big(\sum_{i=1}^{2k+1}\mu(A_i)-\sum_{i=1}^{2k+1}\mu(B_i)\Big)>0.$$

Если $\sum_{i=1}^{2k+1}\mu(A_i)<\sum_{i=1}^{2k+1}\mu(B_i)$, то достаточно взять $p=-a_h$.

В силу теоремы В H_0 является подпространством единственности элемента наилучшего L_1-приближения для пространства $C_1(Q,\mathbf{R}_1^{2k+1})$.

Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В.Ф.** Достатні умови єдиності елемента найкращого L_1-наближення для функцій зі значеннями у банаховому просторі / В.Ф. Бабенко, М.Є. Ткаченко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. —Вип.8. —2003. —С. 19 – 25.
2. **Горбенко М.Е.** О единственности элемента наилучшего несиметричного приближения векторнозначных функцій в метрике L_1// Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. —Вип.3. —1998. —С. 33 – 41.

Надійшла до редколегіï 1 02 08

УДК 517.9

P.I. Kogut, T.N. Rudyanova
Dnipropetrovsk National University, Dnipropetrovsk State Finance Academy

ON THE WEAKLY-$*$ DENSE SUBSETS IN $L^\infty(\Omega)$

Abstract. In this paper we study the density property of the compactly supported smooth functions in the space $L^\infty(\Omega)$. We show that this set is dense with respect to the weak-$*$ convergence in variable spaces.

Let Ω be an open bounded domain in R^2 with a Lipschitz boundary $\partial\Omega$. Throughout the paper we suppose that Ω is a measurable set in the sense of Jordan. Let $C_0^\infty(\Omega)$ be the set of smooth functions with a compact support in Ω. It is well known that the set $C_0^\infty(\Omega)$ is not dense in $L^\infty(\Omega)$, that is, the assertion

«... for any $f \in L^\infty(\Omega)$ can be found a sequence $\{u_k \in C_0^\infty(\Omega)\}_{k=1}^\infty$ such that $u_k \to f$ strongly in $L^\infty(\Omega)$ as $k \to \infty$ ...»

is not true, in general. So, the main question we are going to study in this paper is the following: how can the density concept of the locally convex space C_0^∞ be interpreted in $L^\infty(\Omega)$? As we will see later it can be done through the concept of the weak- $*$ convergence in the variable spaces.

To begin with, we define the so-called graph-like structure on the domain Ω . Let Y be the following set $Y = [0;1)^2 = [0;1) \times [0;1)$.

Definition 1. *We say that the set Y is the cell of periodicity for some graph F on R^2 if Y contains a «star»-structure such that:*

(i) all edges of this structure have a common point $M \in \operatorname{int} Y$; each edge is a line-segment and all end-points of these edges belong to the boundary of Y;

(ii) in the set of end-points (vertices) there exist pairs $\underline{(M_i;M_k)}$ such that $x_1^{M_i} = x_1^{M_k}$ or $x_2^{M_i} = x_2^{M_k}$.

As follows from the condition (ii) we admit the existence of isolated vertices in the Y -periodic graph F on R^2. Let $\varepsilon \in E = (0,\varepsilon^0]$ be a small parameter. We assume that ε varies in a strictly decreasing sequence of positive numbers which converge to 0.

Definition 2. *We say that F_ε is an ε-periodic graph on R^2 if*

$$F_\varepsilon = \varepsilon F = \{\varepsilon x : x \in F\}.$$

It is clear that the cell of periodicity for Ω_ε is εY. Let

$$I^{ed} = \{I_j, j = 1,2...,K\} \tag{1}$$

be the set of all edges on Y. Let Ω be an open bounded domain in R^2 with a Lipschitz boundary such that

$$\Omega = \{(x_1,x_2) : x_1 \in \Gamma_l, 0 < x_2 < \gamma(x_1)\}, \tag{2}$$

where $\Gamma_1 = (0,a)$, $\gamma \in C^1([0,a])$, *and* $0 < \gamma_0 = inf_{x_1 \in [0,a]} \gamma(x_1)$. *Then* $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, *where* $\Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1$.

Definition 3. *We say that* Ω_ε *has an* ε*-periodic graph-like structure if* $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap F_\varepsilon$.

Our next step is to describe the geometry of the set Ω_ε in terms of so-called singular measures in R^2. To do so, we will follow the Zhikov's approach ([3]-[5]).

For every segment $I_i \in I^{ed}$, $i = 1,2,\ldots,K$ we denote by μ_i its corresponding Lebesgue measure. Now we define the Y-periodic Borel measure μ in R^2 as follows

$$\mu = \sum_{i=1}^{K} g_i \cdot \mu_i \text{ on } Y; \tag{3}$$

where $g_1, g_2, \ldots, g_K$ are non-negative weights such that $\int_Y d\mu = 1$.

Thus the support of the measure μ is the union of all edges $I_i \in I^{ed}$, each of which is a 1-dimensional manifold in R^2. Since the homothetic contraction of the plane at ε^{-1} takes the grid F to $F_\varepsilon = \varepsilon F$, we introduce a «scaling» ε-periodic measure μ_ε as follows

$$\mu_\varepsilon(B) = \varepsilon^2 \mu\left(\varepsilon^{-1} B\right) \text{ for every Borel set } B \subset R^2. \tag{4}$$

Then

$$\int_{\varepsilon Y} d\mu_\varepsilon = \varepsilon^2 \int_Y d\mu = \varepsilon^2.$$

Hence the measure μ_ε is weakly convergent to the Lebesgue measure L^2, that is

$$d\mu_\varepsilon \xrightarrow{w} dx \Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R^2} \varphi \, d\mu_\varepsilon = \int_{R^2} \varphi \, dx \tag{5}$$

for every $\varphi \in C_0^\infty(R^2)$ (see Zhikov [3] for a proof).

We define the space $L^\infty(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ in the way: $y_\varepsilon \in L^\infty(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ if and only if y_ε is a μ_ε-measurable function on Ω and there exists a constant $M > 0$ such that $| y_{\varepsilon(x)} | \le M$ μ_ε-every where in Ω.

Definition 4. *We say that a sequence* $\{ y_\varepsilon \in L^\infty(\Omega, d\mu_\varepsilon) \}_{\varepsilon \to 0}$ *is uniformly bounded if* $sup_{\varepsilon > 0} \| y_\varepsilon \|_{L^\infty(\Omega, d\mu_\varepsilon)} < +\infty$.

Definition 5. *A uniformly bounded sequence* $\{ y_\varepsilon \in L^\infty(\Omega, d\mu_\varepsilon) \}_{\varepsilon \to 0}$ *is said to be weakly-∗ convergent in the variable space* $L^\infty(\Omega, d\mu_\varepsilon)$ *to* $y \in L^\infty(\Omega)$ *if*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \varphi \, y_\varepsilon \, d\mu_\varepsilon = \int_\Omega \varphi \, y \, dx \textit{ for every } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

(in the symbols $y_\varepsilon \xrightarrow{w^*} y$*).*

We begin with the following result:

Theorem 6. *Let $\{y_\varepsilon\}_{\varepsilon\to 0}$ be any bounded sequence in the variable space $L^\infty(\Omega, d\mu_\varepsilon)$. Then this sequence is relatively compact with respect to the weak-* convergence in $L^\infty(\Omega, d\mu_\varepsilon)$.*

Proof. Let us set

$$l_\varepsilon(\varphi) = \int_\Omega y_\varepsilon \varphi \, d\mu_\varepsilon \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Then, by the Hölder inequality, we have

$$|l_\varepsilon(\Omega)| \le \int_\Omega |y_\varepsilon||\varphi| d\mu_\varepsilon \le \|y_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega, d\mu_\varepsilon)} \int_\Omega |\varphi| d\mu_\varepsilon . \tag{6}$$

Hence

$$|l_\varepsilon(\varphi)| \le \|y_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega, d\mu_\varepsilon)} \|\varphi\|_{C(\Omega)} \mu_\varepsilon(K),$$

where by K we denote a support of φ in Ω. Since $d\mu_\varepsilon \xrightarrow{w} dx = dL^2$ in the space of Radone measures and

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mu_\varepsilon(K) \le L^2(K) \text{ for every compact subset of } \Omega$$

(see Zhikov [3]), it follows that

$$|l_\varepsilon(\varphi)| \le 2\,\|\varphi\|_{C(\Omega)}\, \mu(K) \sup_{\varepsilon>0} \|y_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega, d\mu_\varepsilon)}$$

for $\varepsilon > 0$ small enough. On the other hand, the set

$$T(K) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \sup\varphi \subseteq K\}$$

is separable with respect to the norm $\|\varphi\|_{C(\Omega)}$. Then, due to the Cantor diagonal method, it can be easy proved that the sequence $\{l_\varepsilon(\cdot)\}_{\varepsilon\to 0}$ consists a subsequence which is pointwise convergent on *T(K)*. As a result, there exists a subsequence of values $\varepsilon_j \to 0$ such that

$$\lim_{j\to\infty} l_{\varepsilon_j}(\varphi) = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{7}$$

Taking into account the inequality (6), we conclude

$$|l(\varphi)| \le \sup_{\varepsilon>0} \|y_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega, d\mu_\varepsilon)} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega |\varphi| \, d\mu_\varepsilon = \sup_{\varepsilon>0} \|y_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega, d\mu_\varepsilon)} \int_\Omega |\varphi| dx.$$

So, $l(\cdot)$ is the linear continuous functional on $L^1(\Omega)$. Hence, the following representation holds true

$$l(\varphi) = \int_\Omega \upsilon \varphi \, dx$$

where υ is some element of $L^\infty(\Omega)$. Thus, in view of (7), υ is a weak-* limit of the subsequence $\{y_{\varepsilon_j}\}_{j=1}^\infty$ in the variable space $L^\infty(\Omega, d\mu_\varepsilon)$.

Now we are in a position to state the main result of our paper.

Theorem 7. *For any element* $y \in L^{\infty}(\Omega)$ *there can be found a sequence of smooth functions* $\{y_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\Omega)\}_{\varepsilon>0}$ *satisfying the conditions:*

$$|y_{\varepsilon}| \leq \| y \|_{L^{\infty}(\Omega)} \text{ for every } \varepsilon \in E; \ y_{\varepsilon} \xrightarrow{w^*} y \text{ in } L^{\infty}(\Omega, d\mu_{\varepsilon}) \text{ as } \varepsilon \to 0 \tag{8}$$

Proof. Let y be any element of $L^{\infty}(\Omega)$. We set $c = \| y \|_{L^{\infty}(\Omega)}$. Since $L^{\infty}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ and the space of smooth functions $C^{\infty}(\Omega)$ is dense in $L^2(\Omega)$ it follows that there is a sequence $\{y_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\Omega)\}$ satisfying the conditions:

$$|y_{\varepsilon}| \leq c \text{ for every } \varepsilon \in E; \ \| y_{\varepsilon} - y \|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

Therefore

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega} \varphi y_{\varepsilon} dx = \int_{\Omega} \varphi y dx \text{ for every } \varphi \in C_0(\overline{\Omega}) \tag{9}$$

Further we note that $y_{\varepsilon} \in L^{\infty}(\Omega, d\mu_{\varepsilon})$ (as a smooth function) and hence $|y_{\varepsilon}| \leq c \, \mu_{\varepsilon}$-almost everywhere. We have to show that $y_{\varepsilon} \to y$ weakly-$*$ in $L^{\infty}(\Omega, d\mu_{\varepsilon})$, i.e.

$$\int_{\Omega} \varphi y_{\varepsilon} d\mu_{\varepsilon} \to \int_{\Omega} \varphi y dx \text{ for every } \varphi \in C_0^{\infty}(R^2). \tag{10}$$

We partition the domain Ω into the sets εY_j, where Y_j is periodic covering of R^2 by the cell Y. Then

$$\int_{\Omega} \varphi y_{\varepsilon} d\mu_{\varepsilon} = \sum_{J} \int_{\varepsilon Y_j} \varphi y_{\varepsilon} d\mu_{\varepsilon} + \sum \int_{\Omega \cap \varepsilon Y_j} \varphi y_{\varepsilon} d\mu_{\varepsilon} \tag{11}$$

where the second sum is calculated over the set of the 'boundary' squares such that $\varepsilon Y_j \cap \partial\Omega \neq 0$. By Mean Value Theorem, for each index j there exist points x_j in the cells εY_j such that

$$\int_{\varepsilon Y_j} \varphi y_{\varepsilon} d\mu_{\varepsilon} = \varphi(x_j) y_{\varepsilon}(x_j) \int_{\varepsilon Y_j} d\mu_{\varepsilon} = \varphi(x_j) y_{\varepsilon}(x_j) \varepsilon^2 \int_{Y} d\mu = \varphi(x_j) y_{\varepsilon}(x_j) \varepsilon^2 \quad \forall j.$$

Then in view of (11), we get

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi y_{\varepsilon} d\mu_{\varepsilon} &= \left(\sum_j \varphi(x_j) y_{\varepsilon}(x_j) \varepsilon^2 - \int_{\Omega} \varphi y_{\varepsilon} dx \right) + \sum \int_{\Omega \cap \varepsilon Y_j} \varphi y_{\varepsilon} d\mu_{\varepsilon} + \int_{\Omega} \varphi y_{\varepsilon} dx = \\ &= I_1 + I_2 + \int_{\Omega} \varphi y_{\varepsilon} dx. \end{aligned} \tag{12}$$

Note that

$$|I_2| = \left| \sum \int_{\Omega \cap \varepsilon Y_j} \varphi y_{\varepsilon} d\mu_{\varepsilon} \right| \leq \sup_{j \in D(\varepsilon)} \left(\sup_{x \in \Omega \cap \varepsilon Y_j} |\varphi| |y_{\varepsilon}| \right) \varepsilon^2 D(\varepsilon) \leq c \, \| \varphi \|_{C(\Omega)} \, \varepsilon^2 D(\varepsilon),$$

where $D(\varepsilon)$ is the quantity of the 'boundary' squares, and $\varepsilon^2 D(\varepsilon) \to 0$ by Jordan's measurability property of the set $\partial\Omega$. Hence $I_2 \to 0$ as ε tends to zero.

Now we show that $I_1 \to 0$. To do so, we note that

$$|I_1| = \left|\sum_j \varphi(x_j)y_\varepsilon(x_j)\varepsilon^2 - \int_\Omega \varphi y_\varepsilon dx\right| \le \left|\sum_j \left(\varphi(x_j)y_\varepsilon(x_j) - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\varepsilon Y_j} \varphi\, y_\varepsilon dx\right)\varepsilon^2\right| + \left|\sum \int_{\Omega \cap \varepsilon Y_j} \varphi\, y_\varepsilon dx\right| \le$$

$$\le \sum_j \left|\varphi(x_j)y_\varepsilon(x_j) - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\varepsilon Y_j} \varphi\, y_\varepsilon dx\right|\varepsilon^2 + c\,\|\varphi\|_{C(\Omega)}\,\varepsilon^2 D(\varepsilon)$$

Let us suppose the converse, that is,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_j \left|\varphi(x_j)y_\varepsilon(x_j) - \varepsilon^{-2}\int_{\varepsilon Y_j} \varphi\, y_\varepsilon dx\right|\varepsilon^2 > 0 .$$

Since Ω is bounded, it is contained in a number of squares εY_j smaller than C/ε^2, where C does not depend on ε. So, there exist a constant $C^* > 0$ and a value $\varepsilon^* > 0$ such that

$$\left|\varphi(x_j)y_\varepsilon(x_j) - \varepsilon^{-2}\int_{\varepsilon Y_j} \varphi\, y_\varepsilon dx\right| \ge C^* \tag{13}$$

(for an infinite number of indices j for every fixed ε). Hence the extremely wild oscillations is present in the sequence $\{\varphi y_\varepsilon\}$. However ([1],[2]), if we have the very rapid fluctuations in the functions $\{\varphi y_\varepsilon\}$, then the convergence $\varphi y_\varepsilon \to \varphi y$ almost everywhere in Ω is excluded.

This fact immediately reflects the failure of the strong convergence $\varphi y_\varepsilon \to \varphi y$ in $L^2(\Omega)$ as $\varepsilon \to 0$. Indeed, by the initial assumptions, we have

$$|y_\varepsilon| \le c \text{ for every } \varepsilon \in E,\ \varphi y_\varepsilon \to \varphi y \text{ in } L^1(\Omega),$$

$$\text{and } \|\varphi y_\varepsilon - \varphi y\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \text{ as } \varepsilon \to 0 \text{ for any } \varphi \in C_0^\infty(R^2).$$

Let A be any subset of Ω with $|A| \ne 0$. Then, by Valadier's Theorem [2], $\varphi y_\varepsilon \to \varphi y$ strongly if and only if the following criterion is satisfied: $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon^0 > 0, \exists B \subset A$ with $|B| \ne 0$ such that

$$|B|^{-1}\int_B \left|\varphi y_\varepsilon - |B|^{-1}\int_B \varphi y_\varepsilon dx\right| dx < \delta \quad \forall \varepsilon < \varepsilon^0 .$$

Hence, for any $\varepsilon < \varepsilon^0$ there is a square $\varepsilon Y_j \subset B$ such that

$$\varepsilon^{-2}\int_{\varepsilon Y_j} \left|\varphi y_\varepsilon - \varepsilon^{-2}\int_{\varepsilon Y_j} \varphi y_\varepsilon dx\right| dx < \delta .$$

Since the functions φy_ε are continuous and uniformly bounded it follows that for any point x_j of εY_j satisfying the condition

$$\varphi(x_j)y_\varepsilon(x_j)-\varepsilon^{-2}\int\limits_{\varepsilon Y_j}\varphi y_\varepsilon dx\neq 0.$$

there can be found a constant $A_* > 0$ satisfying

$$\varepsilon^{-2}\int\limits_{\varepsilon Y_j}\left|\varphi y_\varepsilon-\varepsilon^{-2}\int\limits_{\varepsilon Y_j}\varphi y_\varepsilon dx\right|dx=A_*\left|\varphi(x_j)y_\varepsilon(x_j)-\varepsilon^{-2}\int\limits_{\varepsilon Y_j}\varphi y_\varepsilon dx\right|.$$

Hence

$$\left|\varphi(x_j)y_\varepsilon(x_j)-\varepsilon^{-2}\int\limits_{\varepsilon Y_j}\varphi y_\varepsilon dx\right|<A_*^{-1}\delta$$

and we come into conflict with (13). So, our supposition was wrong and we get

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_j\left|\varphi(x_j)y_\varepsilon(x_j)-\varepsilon^{-2}\int\limits_{\varepsilon Y_j}\varphi y_\varepsilon dx\right|\varepsilon^2=0.$$

As a result, we have $I_1 \to 0$. Thus, summing up the results obtained above and the relations (12), (9), we come to the desired identity (10).

References

1.**Evans L.**, Weak Convergence methods for Nonlinear Partial Differential Equations, Regional Conference Seriaes in Mathematics, No. 74, AMS, 1990.

2.**Valadier M.**, Oscillations et compacité forte dans L^1, Sém. Anal. Convexe, 21(1991), 7.1-7.10.

3.**Zhikov V.V.**, On an extension of the method of two-scale convergence and its applications, Sbornik: Mathematics, 191:7(2000), 973-1014.

4. **Zhikov V.V.**, Weighted Sobolev spaces, Sbornik: Mathematics, 189:8(1998), 27-58.

5 **Zhikov V.V.**, Homogenization of elastitic problems on singular structures, Izvestija: Math., 66:2(2002), 299-365.

Надійшла до редколегії 14 01 2008

УДК 517.9

С.В.Чернышенко

Днепропетровский национальный университет

МЕТОД МОМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ МОДЕЛЯМИ ЛОГИСТИЧЕСКОГО ТИПА

Досліджено проблему оптимального керування двома нелінійними моделями математичної екології: логістичної моделі та моделі розвитку у ворожому середовищі. Розглянуто чотири постановки задачі оптимального керування, розглянуто два критерії якості (квадратичний та лінійний). Рішення отримано або аналітично, або чисельно, методом послідовних наближень.

1. Постановка проблемы и ее актуальность. Обзор состояния проблемы. Проблема оптимального управления нелинейными дифференциальными системами является актуальной и недостаточно изученной. Классические подходы, такие как использование принципа максимума Л.С.Понтрягина [10] или динамического программирования Р.Беллмана [3] дают возможность решения лишь ограниченного множества задач. Это же справедливо и для метода моментов Н.Н.Красовского [8], который позволяет удобно получать оптимальные управления для линейных систем с квадратичным критерием качества. Для существенно нелинейных систем на основе названных методик разрабатываются приближенные методы, позволяющие найти, как правило, квазиоптимальные решения. Используются либо приближенные формулы, либо ищутся стационарные решения, как предельные значения итерационных процессов [14, 16].

Вопросам построения приближенных решений нелинейных задач управления посвящена обширная литература. Назовем, например, монографии [1,2,14]. Достаточно много публикаций посвящены также применению методов теории оптимального управления к решению экологических проблем [6,7,9,11,12,15]. В то же время спектр проблематики настолько широк, что для сколь-нибудь полного ее охвата потребуется еще немало усилий специалистов соответствующего профиля. В частности, не решены вопросы, связанные с определением оптимальных управлений с линейным и квадратичным критерием качества для одномерных нелинейных моделей математической экологии. Настоящая работа вносит определенный вклад в решение этой математической проблемы.

Кроме теоретического значения, полученные результаты могут найти применение и в практической природоохранной деятельности. Вопрос о применении формальных математических методов в экологических исследованиях, для повышения их эффективности, давно стоит остро [5,23]. Это особенно справедливо для условий экологически неустойчивых местообитаний, подверженных техногенному прессу, как это имеет место в условиях степного Приднепровья [13]. Математические методы оптимального управления могут найти применение, например, при планировании работ по лесной рекультивации [20] или оптимизации использования пестицидов [18].

В статье будут рассмотрены методы оптимального управлениями одномерными нелинейными моделями математической экологии, которые могут использоваться для описания динамических процессов в биогеоценозах – логистическая модель [22] и модель развития во враждебной среде [19]. Хотя, естественно, они дают лишь схематичное описание динамики экосистем, все же интегральный учет динамики системы может существенно дополнить традиционные методы, базирующихся на статической оценке текущего состояния биогеоценоза.

2. Базовые определения и постановка задачи. В качестве простейшей модели управления экосистемой рассматривается логистическая модель [22]. Принимается вполне реалистичное предположение, что коэффициент роста увеличивается при увеличении $u(t)$ – интенсивности работ по улучшению экологических условий («функции ухода»), и его значение при $u\to\infty$ стремится к ограниченной величине $r>0$, характеризующей максимальные репродуктивные возможности экосистемы. Простейшей функцией, качественно описывающей такое поведение, является гипербола:

$$\frac{dx}{dt}=r\left(1-\frac{x}{\upsilon+u(t)}\right)x \qquad (1)$$

Емкость среды составляет $(\upsilon+u)$. Когда параметр $\upsilon>0$, биогеоценоз может существовать и без ухода за ним (без рекультивационных работ). Для модели (1) можно говорить о том, что происходит управление за счет изменения емкость среды. Будем рассматривать модель на промежутке времени $[t_0,T]$ и дополним начальным условием

$$x(t_0)=x_0\,. \qquad (2)$$

Числовая характеристика $x(t)$ экосистемы в данной модели представляет собой некоторую количественную характеристику его состояния в ходе рекультивации. Например, это может быть величина биомассы или количество достигших зрелости древесных растений на единицу площади.

Поскольку процесс рекультивации является, по сути, эколого-экономическим процессом, его модель должна отражать как экологические параметры [4], так и экономические затраты на проведение рекультивации, т.е. критерий качества управления должен оценивать материальные затраты на рекультивацию. Например, может использоваться квадратичный критерий общего вида

$$I_0[u,v,x]=\int_0^T\left(\alpha_1(t)u(t)+\alpha_2(t)u^2(t)\right)dt\,, \qquad (3)$$

число квадратичный функционал, при использовании которого говорят о задаче “с минимальной энергией”:

$$I_0[u]=\int_0^T u^2(t)dt\,. \qquad (4)$$

или же линейный функционал

$$I_0[u] = \int_{t_0}^{T} \alpha(t) u(t) dt . \qquad (5)$$

Здесь $\alpha_i(t)$ – положительные функции, задающие стоимость управления в момент t.

Основным требованием к динамике системы является достижение к моменту времени T некоторого заданного уровня:

$$x(T)=x_T . \qquad (6)$$

Более общим является множество требований к параметрам БГЦ не только в конечный момент времени, но и в некоторые промежуточные моменты:

$$x(t_i) = x_i, \quad t_i < T, \quad i = \overline{1, n-1}. \qquad (7)$$

Приведем четыре основные постановки задач об оптимизации процесса рекультивации:

А. *Задача о минимизации затрат.* Требуется минимизировать затраты $I[u,v]$ при выполнении условий (2), (6), (7).

Б. *Задача о быстродействии.* Необходимо минимизировать время $(T-t_0)$ достижения состояния (6). На затраты накладывается ограничение вида

$$I[u,v] \le M^2, \qquad (8)$$

где M^2 – заданная величина.

В. *Задача на эффективность.* Рассматривается лишь для одномерных моделей. Требуется обеспечить максимально возможное значение $x(T)$ фазовой координаты к заданному моменту времени T, не выходя за границы средств (8) на рекультивацию.

Г. *Определение критических значений показателей БГЦ.* Рассматривается для одномерных моделей. Требуется рассчитать минимально возможное начальное значение $x(t_0)$, при котором возможно, не выходя за границы имеющихся средств (условие (8)), достичь заданного уровня x_T к заданному моменту времени T.

3. Управление логистической моделью. При постановке задачи оптимального управления об увеличении фазовой координаты с величины (2) до величины (6) может использоваться критерии качества (4) или (5). Рассмотрим случай модели (1), когда $\upsilon = 0$. Изобразим графически зависимость коэффициента a от величины $w = u/x$, задающей величину доступных ресурсов на единицу биомассы экосистемы. Для модели (1) эта зависимость имеет качественный вид, изображенный на рис. 1.

Получим другой, более удобный для решения задач вид модели процесса рекультивации, близкий к (1). Оценив границы изменения биомассы БГЦ $[x_1,x_2]$ и экологической емкости $[u_1,u_2]$, на конечном промежутке $[w_1=u_1/x_2 \ , \ w_2=u_2/x_1]$ (см. рис. 1) функцию $a(w)$ можно аппроксимировать логарифмической функцией $z \cdot \ln w$, где z - положительная константа. Хотя логарифм не обладает асимптотическими свойствами исходной функции, при не очень больших w_2 качественное соответствие имеет место.

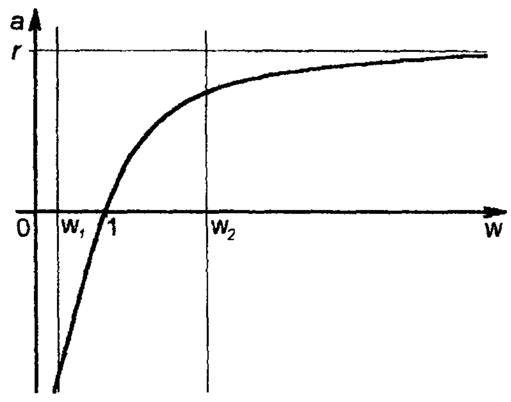

Рис. 1. Зависимость коэффициента роста экосистемы интенсивности работ по улучшению экологических условий на единицу биомассы экосистемы.

Уравнение (1) приобретает вид:

$$\frac{dx}{dt} = z(\ln u - \ln x)x \tag{9}$$

Величина z через параметры исходной модели (1) может быть получена путем минимизации среднеквадратического отклонения функции $z \cdot \ln w$ от функции $r(1\text{-}1/w)$ на промежутке $[w_1, w_2]$:

$$z = r\frac{\ln^2 w_2 - \ln^2 w_1 + 2w_2(\ln w_2 - 1) - 2w_1(\ln w_1 - 1)}{2w_2\left(\ln^2 w_2 - 2\ln w_2 + 2\right) - 2w_1\left(\ln^2 w_1 - 2\ln w_1 + 2\right)}. \tag{10}$$

В свою очередь, приблизим первый член в правой части модели (9) на промежутке $[u_1, u_2]$ функцией $p\left(\sqrt{u} - 1\right)$, где p - положительный коэффициент. Связь между коэффициентами p и z также устанавливаем путем минимизации среднеквадратического уклонения на промежутке $[u_1, u_2]$:

$$p = \frac{2}{3}z\frac{u_2\left[2\sqrt{u_2}(3\ln u_2 - 2) - 9(\ln u_2 - 1)\right] - u_1\left[2\sqrt{u_1}(3\ln u_1 - 2) - 9(\ln u_1 - 1)\right]}{u_2\left[3u_2 - 8\sqrt{u_2} + 9\right] - u_1\left[3u_1 - 8\sqrt{u_1} + 9\right]}. \tag{11}$$

При сделанных предположениях модель процесса примет вид

$$\frac{dx}{dt} = \left[p\left(\sqrt{u} - 1\right) - z\ln x\right]x \tag{12}$$

Отметим, что как величины r и υ в модели (1), так и величины p и z в модели (12) могут зависеть от времени t .

Оценивая затраты на управление функционалом (5), рассмотрим для моделей (1), (12) задачи управления А-Г . Введем в рассмотрение новую переменную $y(t) = \ln x(t)$ и новую управляющую функцию

$$U(t) = \sqrt{\alpha(t)u(t)}. \tag{13}$$

Тогда уравнение (12) перепишется в виде

$$\frac{dy}{dt}=-z(t)y+\frac{p(t)}{\sqrt{\alpha(t)}}U(t)-p(t) \qquad (14)$$

а целевой функционал примет обычный квадратичный вид (4)

Выпишем решение задачи (14), (2):

$$y(t)=\mathrm{E}^{-1}(t)\left[\ln x_0+\int_{t_0}^{T}\mathrm{E}(\theta)p(\theta)\left(\frac{U(\theta)}{\sqrt{\alpha(\theta)}}-1\right)d\theta\right],\qquad \mathrm{E}(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}z(\theta)d\theta\right). \qquad (15)$$

Подставив (15) в ограничения (7), получим линейные ограничения на управление $U(t)$. Используя стандартную процедуру метода моментов [8], получаем решение задачи. В случае, когда $n=1$, оптимальное управление имеет вид

$$U(t)=\frac{p(t)\mathrm{E}(t)}{\sqrt{\alpha(t)}}\left[\ln x_T\mathrm{E}(T)-\ln x_0+\int_{0}^{T}\mathrm{E}(\theta)p(\theta)d\theta\right]\left[\int_{0}^{T}\frac{p^2(\theta)\mathrm{E}^2(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\right]^{-1} \qquad (16)$$

Значение целевого функционала (4) на оптимальном управлении в этом случае равно

$$I^*=\left[\ln x_T\mathrm{E}(T)-\ln x_0+\int_{t_0}^{T}\mathrm{E}(\theta)p(\theta)d\theta\right]^2\left[\int_{t_0}^{T}\frac{p^2(\theta)\mathrm{E}^2(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta\right]^{-1}$$

Вернувшись к старым переменным, из (16) получим решение задачи А.

В соответствии со стандартной методикой [8] величину T в задаче Б (задаче о быстродействии) определяем из условия $I^*=M^2$, т.е. из уравнения

$$M^2\int_{t_0}^{T}\frac{p^2(\theta)\mathrm{E}^2(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta=\left[\ln x_T\mathrm{E}(T)-\ln x_0+\int_{t_0}^{T}\mathrm{E}(\theta)p(\theta)d\theta\right]^2,$$

которое может быть решено одним из численных методов. Оптимальное управление определяется затем из (16).

При рассмотрении задачи В воспользуемся неравенством

$$\ln x_T>\mathrm{E}^{-1}(T)\left[\ln x_0-\int_{t_0}^{T}\mathrm{E}(\theta)p(\theta)d\theta\right],$$

которое отражает тот факт, что значение x_T, полученное в результате решения задачи управления, должно быть больше, чем значение $x(T)$, достигаемое при отсутствии управления. В силу этого неравенства величина I^* монотонно возрастает при увеличении x_T. Следовательно, максимальное значение x_T достигается при максимально возможном значении M^2 величины I^*. Из (16) получаем максимальное значение $\ln x_T$, по которому можем определить максимальное x_T:

$$\ln x_t=\mathrm{E}^{-1}(T)\left\{\ln x_0-\int_{t_0}^{T}\mathrm{E}(\theta)p(\theta)d\theta-\sqrt{M^2\int_{t_0}^{T}\frac{p^2(\theta)\mathrm{E}^2(\theta)}{\alpha(\theta)}d\theta}\right\}$$

Аналогично решается задача Г. Минимально возможное значение начальной биомассы БГЦ определяется формулой:

$$\ln x_0 = \ln x_T \mathrm{E}(T) + \int_{t_0}^{T} \mathrm{E}(\theta) p(\theta) d\theta - \sqrt{M^2 \int_{t_0}^{T} \frac{p^2(\theta)\mathrm{E}^2(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta}\,.$$

Оптимальное управление после определения x_T или x_0 находим из (16).

Таким образом, решение задач А, В, Г для модели (12) удается получить в аналитическом виде, а решение задачи Б сводится к решению трансцендентного уравнения, к которому, как обычно, применяем комбинированный метод Ньютона-Канторовича [17].

В отличие от (12), уравнение (1) является существенно нелинейным. Рассмотрим численное решение задачи А для этого уравнения методом пошаговой линеаризации [16]. Заменой управляющей функции (13) приведем целевой функционал (5) к квадратичному виду (4) и перепишем уравнение (1) в новых переменных

$$\frac{dx}{dt} = r(t)x - \frac{\alpha(t)r(t)}{U^2(t)}x^2 \tag{17}$$

Задавшись начальным приближением $\{x^{(0)}(t),\ u^{(0)}(t)\}$ к решению задачи, линеаризуем правую часть уравнения (17) для каждого t в окрестности $\{x^{(0)}(t),\ u^{(0)}(t)\}$:

$$\frac{dx}{dt} = r(t)\left(1 - 2\alpha(t)\frac{x^{(0)}(t)}{\left(U^{(0)}(t)\right)^2}\right)x + 2\alpha(t)r(t)\frac{\left(x^{(0)}(t)\right)^2}{\left(U^{(0)}(t)\right)^3}U + \alpha(t)r(t)\left(\frac{x^{(0)}(t)}{U^{(0)}(t)}\right)^2 \tag{18}$$

Решение линейной задачи (18), (2), (6), (7), (4) производится методом сведения к проблеме моментов. Затем уравнение (15) линеаризуется в окрестности полученного решения $\{x^{(1)}(t),\ u^{(1)}(t)\}$ и т.д. Для ускорения сходимости применялась модификация обобщенного метода секущих [21, 24].

Предложенными методами был просчитан ряд тестовых примеров. Был выбран периодически изменяющийся коэффициент роста, имитирующий сезонные изменения скорости роста экосистемы:

$$r(t) = 6 + 5\sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{19}$$

Функции $z(t)$ и $p(t)$ в модели (12), пропорциональные функции роста (19), определялись из (10), (11). Интервалы для аппроксимации функций были выбраны следующими: $x\in[10;20]$, $u\in[0{,}2;\ 20]$.

Для обеих моделей была решена задача А. Ставилась задача о переводе системы из состояния $x_0=10$, $t_0=0$ в состояние $x_T=20$, $T=1$. Полагалось, что стоимость работ по уходу за экосистемой не изменяется с течением времени: $\alpha(t)\equiv 1$.

На рис. 2 изображено решение задачи оптимального управления для модели (1) (линия 1) и модели (12) (линия 2). Имеет место экспоненциальный рост затрат на уход по мере роста экосистемы, однако при достижении определенного уровня может быть рекомендовано определенное снижение интенсивности ухода, что связано с первую очередь с учетом годовой цикличности экологических условий в формуле (19).

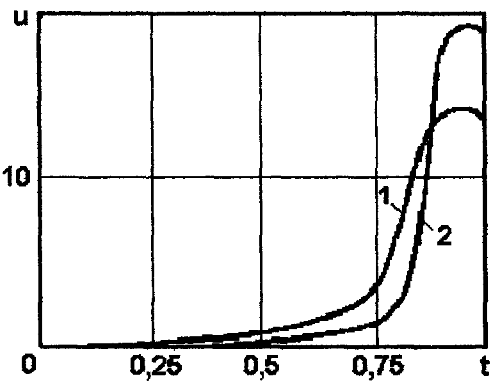

Рис. 2. Оптимальное управление. Задача А для модели (1) (линия 1) и модели (12) (линия 2).

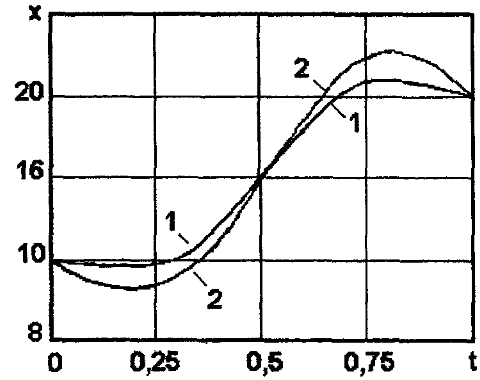

Рис.3. Динамика экосистемы при оптимальной интенсивности ухода в модели (1) (линия 1) и модели (12) (линия 2).

На рис. 3 показана динамика биомассы для задач с такой же постановкой, но дополненной дополнительным условием типа (7): $x(0{,}5)=16$. Низкий уровень затрат на уход за экосистемой в начале процесса приводит к медленному темпу ее развития (или даже частичному его регрессу) на этом этапе. Затем происходит быстрый рост биомассы БГЦ, возможно, даже с некоторым превышением требуемой величины (также в силу учета сезонных колебаний продуктивности).

Исходной модели (1) соответствуют более равномерные режимы рекультивационных работ, чем ее линейному аналогу (12). В целом же для моделей с согласованными в указанном смысле коэффициентами решения задач управления оказались близкими, что подтверждает корректность предлагаемой методики линеаризации.

4. Управление моделью развития во враждебной среде. Воспользуемся для описания процесса рекультивации моделью развития во враждебной среде [19]:

$$\frac{dx}{dt}=r\left(1-\left(\frac{2x-K-C}{K-C}\right)^2\right)x \tag{20}$$

В отличие от логистической модели, которая имеет одно устойчивое (равное K) и одно неустойчивое (нулевое) положение равновесия, модель (20) имеет два устойчивых (K и нулевое) и одно неустойчивое (C) положения равновесия. То, в какое из устойчивых положений равновесия приходит экосистема, зависит от ее начальной биомассы x. Если это значение меньше C, то биомасса будет стремиться к нулю, если больше – точкой притяжения окажется K. При $C=0$ динамика уравнения (20) сходна с динамикой обычного логистического уравнения.

Уравнение (20) описывает ситуацию, когда при малой биомассе экосистема не может существовать и для успешного развития ей нужно достичь некоторого критического уровня, задаваемого параметром C. В качестве «враждебной среды» выступают неблагоприятные абиотические условия.

Рассмотрим вначале задачу об управлении системой не путем ухода, а за счет привнесения в нее дополнительной биомассы (например, путем лесонасаждений). На основе модели (20) записываем:

$$\frac{dx}{dt}=r\left(1-\left(\frac{2x-K-C}{K-C}\right)^2\right)\cdot x+v(t) \tag{21}$$

Здесь, как и в случае логистической модели, естественно принять $r>0$.

При $v\neq 0$ среди трех положений равновесия уравнения (20) ни один не равен нулю, что затрудняет их поиск (необходимо решать кубическое уравнение). Естественно, при малых v в (21) наблюдается тот же эффект «переключения». Применение к модели (21) метода пошаговой линеаризации дает формулу:

$$\frac{dx}{dt}=\left(r-\lambda\left(x_t-\frac{K+C}{2}\right)\left(3x_t-\frac{K+C}{2}\right)\right)\cdot x+v(t)+2\lambda\left(x_0-\frac{K+C}{2}\right)x_t^2\ , \tag{22}$$

где $\lambda=4r/(K\text{-}C)^2$. В упрощенном виде уравнение (22) можно переписать:

$$\frac{dx}{dt}=\left(r-\lambda\left(x_t-\frac{K+C}{2}\right)^2\right)\cdot x+v(t)$$

Применяя этот подход и используя для ускорения сходимости модификацию обобщенного метода секущих [24], решим задачу (21), (2), (6), (3) со значениями параметров:

$$t_0=0;\ T=5;\ x_0=1;\ r=1;\ K=10;\ C=2;$$

На рис. 4, 5 приведены результаты расчетов для трех различных требований к биомассе экосистемы в конечный момент времени ($1\text{–}x_T=2$; $2\text{–}x_T=6$; $3\text{–}x_T=10$).

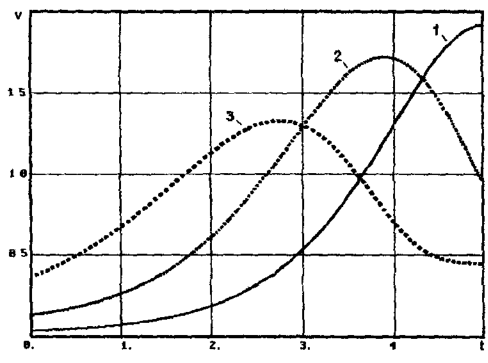

Рис. 4. Оптимальное управление для модели (21) при различных требований к конечной биомассе.

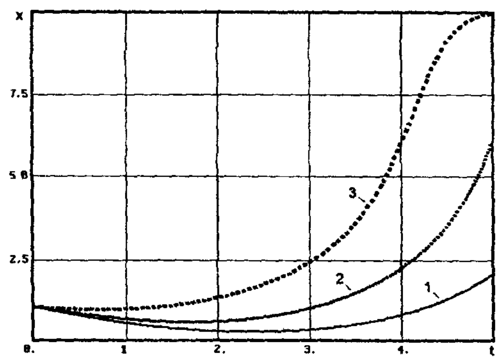

Рис.5. Динамика фазовых координат для модели (21) при различных требований к конечной биомассе.

Рассмотрим для модели (20) задачу об управлении путем улучшения экологических условий. Предполагая коэффициент роста линейно зависящим от интенсивности управления, получим модель системы в виде:

$$\frac{dx}{dt}=r\left(a+u(t)-\left(\frac{2x-K-C}{K-C}\right)^2\right)\cdot x \qquad (23)$$

Емкость среды определяется формулой

$$x=(K+C)+\sqrt{a+u}(K-C)$$

однако не при любом управлении система будет стремиться к этому положению равновесия. При малых значениях u, когда

$$u<(K+C)^2\,(K\text{-}C)^2-a$$

система будет развиваться и стремиться заполнить экологическую нишу лишь при

$$x>(K+C)-\sqrt{a+u}(K-C),$$

при меньших же начальных биомассах экосистема будет регрессировать.

Для выделения нелинейного члена в модели типа (23) естественно перейти к логарифмическим координатам $y=\ln x$. Модель принимает вид

$$\frac{dy}{dt}=r\left(a+u(t)-\left(\frac{2e^y-K-C}{K-C}\right)^2\right)$$

Метод пошаговой линеаризации приводит к использованию формулы:

$$\frac{dy}{dt}=-2\lambda x_t\left(x_t-\frac{K+C}{2}\right)\cdot y+r(a+u(t))+\lambda\left(x_0-\frac{K+C}{2}\right)\left[x_0(2\ln x_0-1)+\frac{K+C}{2}\right]$$

где λ определяется аналогично (22).

На рис. 6, 7 представлены решения задачи (23), (2), (6), (4) при следующих значениях параметров: $t_0=0$; $T=5$; $x_0=1$; $r=1$; $a=0{,}3$; $K=300$; $C=5$; и при различных требованиях к конечной биомассе (1 – $x_T=1$; 2 – $x_T=6$; 3 – $x_T=10$).

Следует отметить, что в отличие от логистической модели, модель развития во враждебной среде приводит к рекомендациям о большей интенсивности управления не в конце, а в начале процесса. Это, связано, вероятно, с целесообразностью как можно раньше превысить критическое значение, позволяющее "запустить" процессы саморазвития системы.

На рис. 8, 9 показана зависимость затрат на управление в зависимости от требований к конечной биомассе в моделях (21) и (23) соответственно. Для первой модели в силу стремления системы к нулевому равновесию при малых значениях биомассы, управление при малых x_T не требует больших затрат. Максимальные затраты соответствуют значению $x_T=5$. Затем, поскольку для $x>2$ система стремиться к значению биомассы $K=10$, происходит снижение затрат. Для модели же (23) затраты на уход монотонно растут с увеличением требований к биомассе БГЦ.

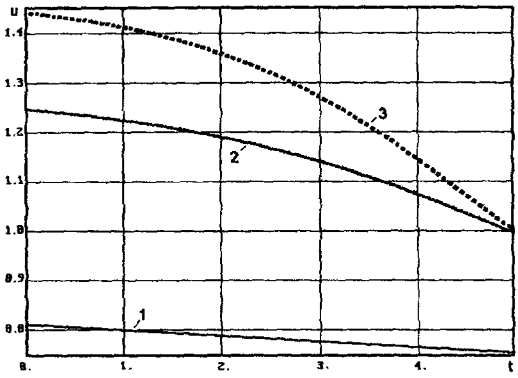

Рис. 6. Оптимальное управление для модели (23) при различных требованиях к конечной биомассе.

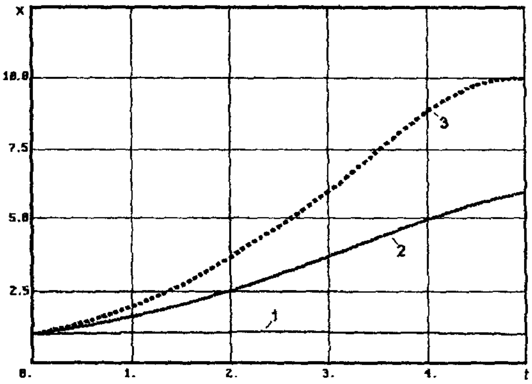

Рис.7. Динамика фазовых координат для модели (23) при различных требованиях к конечной биомассе.

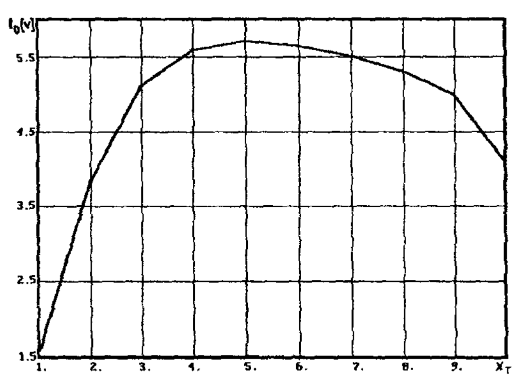

Рис. 8. Значение функционала затрат для модели (21) в зависимости от требований к конечной биомассе.

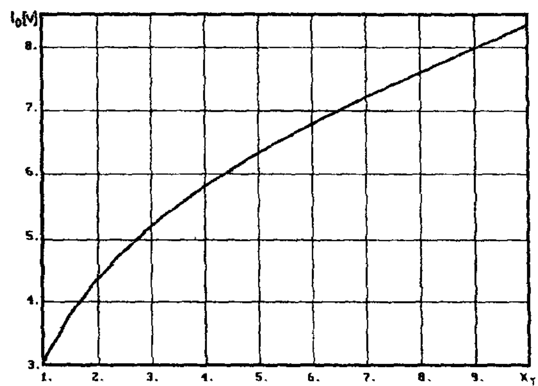

Рис.9. Значение функционала затрат для модели (23) в зависимости от требований к конечной биомассе.

5. Выводы. Таким образом, в работе рассмотрены четыре постановки задач оптимального управления для одномерных нелинейных моделей математической экологии: логистической модели (1) и модели развития во враждебной среде (20). Рассматривался линейный критерий качества (5) и нелинейный – (4). Для первой модели построена аппроксимация, сводящаяся к линейной, и получены точные решения.

Показана близость решения приближенной задачи и исходной. Для второй модели решение находилось приближенно, с использованием итерационных методов решения нелинейных уравнений, каких как обобщенный метод секущих и комбинированный метод Ньютона-Канторовича. Приведены результаты численного расчета решений задачи, показана их корректность с точки зрения смысла исходной модели.

Дальнейшее развитие методики планируется как в направлении уточнения постановки задачи управления, в частности, путем уточнения вида целевого функционала, так и развития методики для применения к моделям с другим типом нелинейности.

Библиографические ссылки

1. **Алексеев В.М.** Оптимальное управление / В.М.Алексеев, В.М.Тихомиров, С.В.Фомин. – М.: Наука, 1979. – 224 с.
2. **Антомонов Ю.Г.** (ред.) Методы анализа и синтеза биологических систем управления – К.: Вища шк., 1983. – 272 с.
3. **Беллман Р.** Динамическое программирование. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 400 с.
4. **Ван-Рийн М.** О некоторых теоретических и методических аспектах проблемы окружающей среды // Экономическая и внеэкономическая оценка воздействия человека на окружающую среду. – М., 1981. – С. 80-83.
5. **Глушков В.М.** Беседы об управлении / В.М.Глушков, Г.М.Добров, В.И.Терещенко.– М.: Наука,1974.– 224 с
6. **Гурман В. И.** (ред.) Модели управления природными ресурсами – М.: Наука, 1981. – 264 с.
7. **Заславский Б.Г.** Управление экологическими системами / Б.Г.Заславский, Р.А.Полуэктов. – М. Наука, 1988. – 296 с.
8. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
9. **Новосельцев В.Н.** Теория управления и биосистемы. – М.: Наука, 1978. – 320 с.
10. **Понтрягин Л. С.** Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко.– М.: Наука, 1969.– 384 с.
11. **Свирежев Ю.М.** О математических моделях биологических сообществ и связанных с ними задачах управления и оптимизации // Математическое моделирование в биологии. – М., 1975. – С. 30-52.
12. **Тимченко И.Е.** Управление эколого-экономическими системами / И.Е.Тимченко, Е.М.Игумнова, А.А.Прималенный. – Севастополь: Гидрофизика, 1999. – 180 с.
13. **Травлеев А.П.** Научные основы техногенной биогеоценологии // Биогеоценологические исследования лесов техногенных ландшафтов степной зоны. – Днепропетровск, 1989.– С. 4-9.
14. **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978. – 488 с.
15. **Холинг К.С.** (ред.) Экологические системы. Адаптивная оценка и управление – М.: Мир, 1981. – 400 с.
16. **Чернышенко С.В.** Итерационный метод сведения нелинейной задачи оптимального управления к проблеме моментов // Дифференциальные уравнения и их приложения. – Днепропетровск, 1982. – С. 132–138.
17. **Чернышенко С.В.** Теорема о сходимости комбинированного метода Ньютона-Канторовича // Методы решения нелинейных задач и обработки данных. – Днепропетровск, 1985. – С. 193–199.

18. **Чернышенко С.В.** Некоторые математические аспекты проблемы оптимизации затрат пестицидов при угнетении популяций вредителей // Вопросы степного лесоразведения и научные основы лесной рекультивации земель. – Днепропетровск, 1985. – С. 104–110.

19. **Чернышенко С.В.** Моделирование конкурентных замещений в фитоценозах // Екологія та ноосферологія. – 2000. – Т.9, № 1. – С. 107–121.

20. **Чернышенко С.В.** Задачи оптимального управления процессами лесной рекультивации нарушенных земель // Екологія та ноосферологія. – 2003. – Т.13, № 1–2. – С. 136–150.

21. **Gragg U.B.** A stable variant of the secant method for solving nonlinear equations / U.B.Gragg, G.W.Stewart // SIAM J. Numer. Analys. – 1976. – Vol. 13, № 6. – P. 889-903.

22. **Hoppensteadt F.C.** Mathematical methods of population biology. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982. – 149 p.

23. **Krebs C.J.** Ecological methodology. – N.Y., Harlow: Addison Westly, 1999. – 620 p.

24. **Martinez J.M.** Combination of the sequential secant method and Broyden's method with projected updates / Martinez J.M., Lopes T.S. // Computing. – 1980. – Vol. 25, № 4. – P. 379-386.

Поступила в редколлегию 14.04.2008.

ЗМІСТ