Заснований 1993

Дніпропетровський національний університет

90 років 1918–2008

ISSN 9125 0912

ВІСНИК Дніпропетровського університету

№ 6/1 Т. 18 2010

Серія: МАТЕМАТИКА

Випуск 15

ISSN 9125 0912

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ВІСНИК

Дніпропетровського університету

Заснований 1993

Дніпропетровський національний університет

Науковий журнал

№ 6/1 Том 18 2010

Серія: МАТЕМАТИКА

Випуск 15

Дніпропетровськ
Видавництво
Дніпропетровського
національного університету

УДК 517

Друкується за рішенням вченої ради Дніпропетровського національного університету згідно з затвердженим планом видань 2010 р.

Изложены результаты исследований по вопросам теории приближений функций действительного переменного, алгебре, уравнениям математической физики, а также по их применению к решению задач.

Для научных сотрудников, а также аспирантов и студентов старших курсов.

Викладено результати досліджень з питань теорії наближень функцій дійсної змінної, алгебри, рівняниям математичної фізики, а також їхнього застосування до розв'язування задач.

Для наукових співробітників, а також аспірантів та студентів старших курсів.

ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". № 15. 2010. Вип. 15. С. 3 – 10

ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ И НАУЧНОЕ ТВОРЧЕСТВО СЕРГЕЯ МИХАЙЛОВИЧА НИКОЛЬСКОГО
(краткий очерк)

Выдающемуся математику и педагогу, академику Российской Академии наук, старейшему и одному из наиболее выдающихся выпускников Днепропетровского университета Сергею Михайловичу Никольскому 30 апреля 2010 года исполнилось 105 лет.

Сергею Михайловичу принадлежат фундаментальные результаты в функциональном анализе, теории приближения функций, теории вложения функциональных пространств, теории квадратурных формул, вариационных методах решения уравнений с частными производными. Он является автором более 300 научных публикаций, в том числе трех монографий, которые неоднократно переиздавались и переведены на многие иностранные языки, трех учебников для ВУЗов, семи учебников для школ.

С. М. Никольский является признанным главой созданной им школы по теории функций и ее приложениям, имеет многочисленных учеников и последователей, многие из которых создали свои научные школы во многих республиках бывшего Советского Союза. Так, в Днепропетровском университете действует школа по теории приближений, ядро которой составляют ученики Николая Павловича Корнейчука, а в Киеве – школа, созданная Владиславом Кирилловичем Дзядыком. Более 75 учеников Сергея Михайловича защитили кандидатские и докторские диссертации, ряд его учеников стали членами Российской и Национальных академий наук. Отметим, что, по крайне мере, пятеро учеников Сергея Михайловича, защитивших докторские диссертации являются выпускниками Днепропетровского университета, трое из них – члены Национальной академии наук Украины. Членами Национальных академий наук стал также ряд «научных внуков» Сергея Михайловича. В 2006 году вышел первый том избранных трудов С. М. Никольского [1]. Он открывается вступительной статьей О. В. Бесова, М. С. Никольского, С. И. Похожаева и С. А. Теляковского, где приведены основные моменты жизненного пути Сергея Михайловича и дан краткий обзор научного творчества. Естественно, мы будем использовать материалы, содержащиеся в этой статье. Сергей Михайлович написал ряд воспоминаний о различных периодах своей жизни (см., например, [2]). Одна из таких книг воспоминаний специально посвящена днепропетровскому периоду его жизни [3]. Желающие больше узнать о жизни Сергея Михайловича могут обратиться к этим воспоминаниям. Отметим, что книги [1] и [3] можно найти в библиотеке Днепропетровского университета.

Выдающийся вклад внес С. М. Никольский в совершенствование системы образования в Советском Союзе, России, Украине. Лекции, прочитанные им за более чем шестидесятилетний период преподавательской деятельности, серия учебников для высшей и средней школы, написанные им самим и в соавторстве, вошли в золотой фонд отечественной и мировой литературы по математике, благодаря их высокому научному уровню и доступности изложения.

С. М. Никольский – академик АН СССР, Венгерской АН, Польской АН, Краковской академии наук и искусств, Национальной академии наук республики Казахстан, лауреат Сталинской премии, двух Государственных премий СССР, Государственной премии Украины, Премии правительства Российской Федерации, премии имени П. Л. Чебышева АН СССР, премии имени А. Н. Колмогорова РАН, премии имени М. В. Остроградского НАН Украины, премии МГУ имени М. В. Ломоносова, золотой медали имени Больцано Чешской АН, золотой медали имени И. М. Виноградова АН СССР, медали имени Коперника Польской АН, награжден медалью «За оборону Москвы», медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной войне», орденами Трудового Красного Знамени, Ленина, Октябрьской революции, «За заслуги перед отечеством» II степени.

С. М. Никольский – заслуженный профессор Московского университета, почетный доктор Днепропетровского и Киевского университетов, почетный профессор Московского физико-технического института. В настоящее время Сергей Михайлович – советник президента РАН, профессор механико-математического факультета МГУ, профессор МФТИ, член Президиума Научно-методического Совета по математике при Министерстве науки и образования Российской Федерации.

Сергей Михайлович Никольский родился 30 (17) апреля 1905 г. в городке Завод Талица Пермской губернии (ныне Талица – город в Свердловской области) в семье помощника лесничего. Детство его прошло на западе тогдашней России, в Сувалковской губернии. В 1913 – 1914 гг. он учился в местной гимназии, затем в гимназии г. Чернигова. В 1918 г. В связи с назначением отца на новую работу в Шипов Лес Воронежской губернии С. М. Никольский оставил школу и продолжал образование под руководством отца, который обучал его математике, физике и естественным наукам. В это время С. М. Никольский уже работал в лесничестве, а потом в совхозе помощником садовника. В 1921 г. семья Никольских вернулась в Чернигов, где Сергей Михайлович стал работать в губполитпросвете и одновременно учиться в техникуме.

В 1925 г. по командировке профсоюза С. М. Никольский поступил в Екатеринославский институт народного образования на физико-математический факультет, окончил его в 1929 г. и был оставлен при институте (который вскоре был преобразован в Днепропетровский университет) ассистентом кафедры математического анализа. С момента окончания университета до начала учебного года он несколько месяцев проработал в г. Днепродзержинск (тогда – Каменское). В 1932 г. Сергей Михайлович становится заведующим кафедрой математики в Транспортном институте, продолжая одновременно большую работу в Днепропетровском университете.

В 20–30-е годы прошлого века в Днепропетровске было свое Математическое общество, которое приглашало известных математиков из других городов для чтения лекций по математике студентам и преподавателям вузов. Систематически, на протяжении десяти лет, приезжали в Днепропетровск А. Н. Колмогоров и П. С. Александров. Сергей Михайлович был постоянным слушателем их лекций . Скоро он стал одним из учеников Андрея Николаевича Колмогорова.

В 1933 г. С. М. Никольский поступил в аспирантуру и был командирован в Московский государственный университет. Он большую часть времени проводил в Математическом кабинете МГУ, посещал семинары А. Н. Колмогорова, В. Л. Гончарова, А. И. Плеснера, Л. А. Люстерника и других. В 1935 г. успешно защитил кандидатскую диссертацию в области функционального анализа и, вернувшись в Днепропетровский университет, возглавил работу кафедры теории функций. Под влиянием А. Н. Колмогорова С. М. Никольский продолжал заниматься функциональным анализом и начал работу в области теории приближения функций. Кроме того, А. Н. Колмогоров организовал для молодежи Днепропетровска семинар по теории приближений. В его отсутствие семинар продолжал работать под руководством С. М. Никольского. Уже первые результаты Сергея Михайловича по теории приближений получили высокую оценку специалистов, работавших в этой области. Несколько участников семинара получили новые результаты и опубликовали их в научных журналах. Все это немало способствовало созданию в Днепропетровске сильной математической школы в области теории приближений.

В 1940 г. С. М. Никольский поступил в докторантуру Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. До лета 1941 года, то есть до войны, Сергей Михайлович завершил работу над докторской диссертацией. Во время войны, в первые ее месяцы, он активно участвовал в противопожарных мероприятиях, а затем почти два месяца работал на строительстве оборонительных сооружений под Малоярославцем. За эту деятельность Сергей Михайлович был награжден медалью «За оборону Москвы».

В конце октября 1941 г. С. М. Никольский переехал в Казань, куда был эвакуирован Математический институт им. В. А. Стеклова. После успешной защиты в январе 1942 г. докторской диссертации по теории приближения функций полиномами был оставлен в институте в должности старшего научного сотрудника. Во время войны ему приходилось кроме теоретических исследований проводить и прикладные исследования, связанные с военной тематикой. В Математическом институте им. В. А. Стеклова он и работает до настоящего времени: с 1943 по 1962 г. был заместителем директора, а с 1962 г. по 1988 г. заведовал отделом теории функций, в настоящее время является сотрудником этого отдела.

В 1968 г. С. М. Никольский избран членом-корреспондентом АН СССР, а в 1972 – действительным членом АН СССР.

С. М. Никольский постоянно уделял много времени педагогической работе. С 1943 по 1947 г. он заведовал кафедрой математики в Московском автодорожном институте, а с 1947 г. являлся профессором Московского физико-технического института (в 1950 – 1954 гг. заведовал кафедрой высшей математики). Его лекции имели большую притягательную силу и неизменно пользовались успехом у студентов.

С. М. Никольским написан курс «Математического анализа» в двух томах, который вышел в 1973 г. Этот, ставший классическим, курс неоднократно переиздавался, переведен на многие иностранные языки.

Совместно с Я. С. Бугровым Сергей Михайлович написал серию учебников для технических вузов, которые пользуются большой популярностью.

С. М. Никольский является одним из создателей советского Реферативного журнала по математике, был его первым главным редактором. Он принимает самое активное участие в общественной жизни научных учреждений. Так в течение многих десятилетий он был заместителем ответственного редактора, а затем – ответственным редактором Трудов Математического института АН СССР и РАН. Долгое время он был членом, а затем председателем экспертного совета ВАК по математике, членом пленума ВАК. С. М. Никольский возглавил с советской стороны организацию советско-венгерского (теперь российско-венгерского) журнала «Analysis Mathematica». Он является главным редактором российской секции редколлегии этого журнала. С. М. Никольский является почетным главным редактором журнала «East Journal on Approximation», почетным редактором журнала «Approximation Theory and its Application» (Китай) и многих других научных изданий.

Перейдем к краткому описанию научных результатов С. М. Никольского. При этом, мы уделим главное внимание именно результатам по теории приближений. Именно они оказали определяющее влияние на становление Днепропетровской школы теории приближений.

Первые исследования С. М. Никольского посвящены теории линейных операторов в банаховом пространстве. Он обогатил эту область новой постановкой вопроса: он формулирует необходимые и достаточные условия, при которых для линейного уравнения справедлива теория Фредгольма. В пределах так называемой области Фредгольма он с исчерпывающей полнотой изучает условия, при которых спектр ограниченного линейного оператора является сплошным или дискретным. Эти результаты С. М. Никольского получили применение в теории сингулярных интегральных уравнений, а его исследования в указанной постановке послужили основанием для развития целого направления в функциональном анализе в ряде работ отечественных и иностранных авторов.

Большой цикл работ С. М. Никольского относится к теории приближения функций. С середины 30-х годов после одной работы А. Н. Колмогорова возникла задача получать точные и асимптотически точные оценки приближений. С. М. Никольский впервые широко начал изучение таких задач и в случае тригонометрических приближений успешно решил ряд первоочередных проблем. Возникший затем вопрос о получении оценок такого же рода в непериодическом случае потребовал преодоления новых трудностей. С. М. Никольскому удалось получить первый асиптотически точный результат в этой области: оценку наилучшего приближения алгебраическими многочленами функций с ограниченной первой производной. Отметим, что С. М. Никольский получил асимптотически точные оценки, зависящие не только от степени многочлена, но и от положения точки на отрезке, на котором производится аппроксимация (с улучшением порядка приближения вблизи концов отрезка). Этот результат привел С. М. Никольского к мысли о том, что для приближений на отрезке $[-1,1]$ алгебраическими многочленами степени n можно получить результаты, аналогичные тригонометрическому случаю, если вместо $1/n$ для приближений периодических функций рассматривать приближения алгебраическими многочленами со скоростью

$$\sqrt{\frac{1-x^2}{n}+\frac{1}{n^2}}\,.$$

Это направление получило развитие в работах многих математиков, первыми среди которых были ученики С. М. Никольского А. Ф. Тиман и В. К. Дзядык. В 1951 г. А. Ф. Тимман доказал соответствующую прямую теорему, а в 1956 г. В. К. Дзядык установил обратные теоремы. Тем самым была доказана справедливость сформулированной выше гипотезы С. М. Никольского. Существенный вклад в развитие этого направления исследований внес также ученик С. М. Никольского В. П. Моторный. Сюда же примыкают более поздние работы С. М. Никольского по оценкам приближения многочленами дифференцируемых функций многих переменных.

Особо отметим работу С. М. Никольского по приближению в среднем (1946 г.), в которой он выяснил связь задач теории приближения функций тригонометрическими полиномами в метриках C и L и показал, что для классов функций, представимых в виде свертки, ядро которой удовлетворяет не очень ограничительным условиям, соответствующие задачи о верхних гранях приближений в C и L имеют одинаковые решения. Но, несмотря на глубину и интерес полученных в этом направлении результатов, значение этой работы намного шире. В ней, Сергей Михайлович установил свои знаменитые теоремы двойственности, которые сыграли значительную роль в решении ряда трудных задач теории приближения функций. На них существенно опирался Н. П. Корнейчук при нахождении верхних граней наилучших приближений на классах функций, производная которых порядка r имеет заданную мажоранту модуля непрерывности. Без сомнения, эта работа С. М. Никольского оказала одно из самых сильных влияний на всех представителей Днепропетровской школы теории приближений.

Кроме того, в ряде работ, выполненных С. М. Никольским в тот же период, дается ряд тонких асимптотических оценок для приближения индивидуальных функций, имеющих заданные особенности. И в этих работах С. М. Никольским получен ряд принципиально новых результатов.

Отметим еще две статьи С. М. Никольского и оригинальную книгу по теории квадратурных формул. В них впервые (в одномерном случае) дана теория наилучших квадратурных формул для классов функций, а для ряда конкретных классов получены окончательные оценки. В середине XX века исследования по приближению сплайнами только начинались, и в своих работах по теории квадратурных формул С. М. Никольский фактически получил один из первых точных результатов о приближении функций сплайнами. Упомянутая книга «Квадратурные формулы» выдержала четыре издания на русском языке и переведена на многие иностранные языки. Информацию о дальнейшем развитии исследований по теории наилучших квадратурных формул можно найти в написанном Н. П. Корнейчуком «Добавлении» к книге «Квадратурные формулы», а также в работе [4].

Существенный вклад С. М. Никольский внес также в теорию линейных методов суммирования рядов Фурье (1948 г.), в теорию приближения функций на сфере сферическими полиномами (1983 – 1989 гг.), приближении функций на многообразиях (начиная с 1990 г.).

Большой цикл работ С. М. Никольского относится к теории приближений функций многих переменных и теоремам вложения. Им получены новые точные, в смысле порядка, неравенства для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа. Эти неравенства дают возможность изучить методами теории приближений как связи между различными дифференциальными свойствами функции в разных метриках, так и связи между дифференциальными свойствами функции, рассматриваемой на подпространствах разного числа измерений. На основе указанных методов С. М. Никольский существенно развил теорию вложения классов дифференцируемых функций многих переменных, основы которой были созданы С. Л. Соболевым.

Ряд исследований С. М. Никольского посвящен вопросам продолжения функций за пределы области задания (с кусочно-гладкой границей) с сохранением ее дифференциальных свойств. Получены также существенные результаты по вопросу продолжения функций, заданных на гладких или кусочно-гладких многообразиях, на области более высокого числа измерений. Исследования С. М. Никольского по теории приближения функций многих переменных и теоремам вложения подытожены им в монографии, получившей высокую оценку специалистов и ставшую сразу же настольной книгой математиков, работающих в этой области (С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М., Наука, 1965). За эту монографию С. М. Никольский был удостоен в 1972 г. Премии им. П. Л. Чебышева АН СССР.

С. М. Никольским проводились также исследования по прямым вариационным методам. Основываясь на своих теоремах о продолжении функций, он установил условия на функцию, заданную на кусочно-гладкой границе области, достаточные для разрешимости первой краевой задачи для полигармонического уравнения. Эти условия с точностью до произвольного $\varepsilon > 0$ совпадают с соответствующими необходимыми условиями, полученными ранее С. Л. Соболевым. Вопрос об отыскании решения краевой задачи вариационным методом в указанном случае приобрел, благодаря этому, полностью законченный смысл, так как только после этого стало возможным судить о применимости вариационного метода в достаточно широком числе случаев лишь по свойствам граничной функции.

В дальнейшем, в работах С. М. Никольского и его учеников в ряде случаев было выяснено в терминологии Н-классов точное соответствие (необходимые и достаточные условия) между дифференциально-разностными свойствами решения краевой задачи и ее граничных условий. Ряд работ С. М. Никольского посвящен обоснованию решения вариационным методом первой краевой задачи для достаточно общих уравнений эллиптического типа и даже выходящих за рамки эллиптического и гипоэллиптического типа. К ним же примыкает цикл работ по вариационной задаче Гильберта в n-мерном пространстве.

Ряд исследований С. М. Никольского посвящен изучению дифференциальных свойств вплоть до границы решений задачи Дирихле для линейного уравнения эллиптического типа второго (и более высокого) порядка с сильным вырождением на границе. Эти исследования базируются на предложенном им оригинальном методе «регулярных мостов».

В 1993 г. Сергей Михайлович обращается к следующей проблеме: выяснить, при каких условиях решение эллиптического уравнения с краевыми условиями, являющимися следами многочлена и соответствующих его производных, является также многочленом. Для случая области, ограниченной эллипсоидом второго порядка, и соответствующего эллиптического оператора L Сергей Михайлович показывает, что для всякого многочлена P решение краевой задачи с условиями Дирихле, индуцированными этим многочленом, само является многочленом. Этот результат явился нетривиальным обобщением классического результата (для операторов Лапласа и шара) как на случай операторов произвольного порядка, так и на случай нового класса областей. Известные методы доказательства этого классического результата оказываются неприменимыми для операторов высшего порядка, и Сергей Михайлович предлагает свой вариационный метод доказательства с использованием тонких результатов из алгебраической геометрии.

В дальнейшем (2001 г.) Сергей Михайлович развивает свой подход, охватывая самосопряженные эллиптические уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами и с правой частью, являющейся многочленом. Используя полученные результаты, он распространяет классический метод Лапласа решения эллиптического уравнения второго порядка с правой частью на случай более общих операторов произвольного порядка.

В последнее время (начиная с 2005 г.) Сергей Михайлович активно занимается проблемой регулярности решений вариационных задач на основе прямых вариационных методов.

Библиографические ссылки

1. **Никольский С. М.** Избранные труды. В трех томах, Том 1. Теория приюлижений, М., Наука, 2006. – 432 с.
2. **Никольский С. М.** Мой век/С.М. Никольський – М., Фазис, 2005. – 320 с.
3. **Никольский С. М.** Воспоминания о Днепропетровске /С.М. Никольський –Д., Изд-во Днепропетр. ун-та, 1998. – 64 с.
4. **Моторный В. П.** Исследования Днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул /В.П. Моторный// Укр. матем. журн. 1990. Т.42, № 1. С. 18 – 33.

В. Ф. Бабенко, В. П. Моторный

ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". № 15. 2010. Вип. 15. С. 11 – 17

ЖИЗНЕННЫЙ ПУТЬ И НАУЧНОЕ ТВОРЧЕСТВО НИКОЛАЯ ПАВЛОВИЧА КОРНЕЙЧУКА

В этом году исполнилось бы 90 лет со дня рождения академика Национальной академии наук Украины Николая Павловича Корнейчука. Он создал и эффективно руководил мощной научной школой, большинство представителей которой являются выпускниками Днепропетровского университета. Эта школа за последние 50 лет достигла выдающихся успехов, прежде всего, в таких разделах теории аппроксимации, как наилучшее приближение полиномами и сплайнами, поперечники функциональных классов, наилучшие квадратурные формулы, оптимальная апроксимация функционалов и операторов, наилучшее приближение при наличии ограничений, несимметричные приближения, информацонные аспекты теории апроксимации. По крайней мере, половина точных результатов в теории аппроксимации, полученных в мире, принадлежат Н. П. Корнечуку и его ученикам.

Николай Павлович Корнейчук родился 22 января 1920 года в селе Бобрик Петриковского района Гомельской области (Беларусь) в крестьянской семье. Окончив в 1938 г. Гомельский индустриальнопедагогический техникум, работал учителем математики в г. Турове. С 1940 по 1949 гг. он служил в рядах Советской Армии, воевал на фронтах Великой Отечественной войны, был дважды ранен, награжден орденами Отечественной войны 1-й степени и Красной Звезды.

После демобилизации Н. П. Корнейчук работает учителем математики в г. Павлограде (Днепропетровская область) и одновременно учится заочно на физико-математическом факультете Днепропетровского университета. В 1955 году с отличием закончил университет. С 1955 г. он учится в аспирантуре на кафедре математического анализа ДГУ под руководством Михаила Дмитриевича Калашникова, который ввел его в круг идей школы по теории приближений, основанной еще в довоенные годы в Днепропетровске А. Н. Колмогоровым и С. М. Никольским. В 1959 г. Н. П. Корнейчук защищает кандидатскую диссертацию.

Относительно поздно вступив на путь научных исследований, Николай Павлович Корнейчук очень скоро заявил о себе в математическом мире. В 1961 г. ему удалось решить известную задачу Фавара о точном значении наилучшего равномерного приближения тригонометрическими полиномами классов Гельдера. Уже решение этой задачи принесло ему известность у нас в стране и за рубежом. Ее решение, в отличие от известных к тому времени точных результатов по аппроксимации классов функций с ограниченной старшей производной, не могло быть получено с помощью линейного метода приближения. Н. П. Корнейчук, впервые для точного решения задач аппроксимации функциональных классов тригонометрическими полиномами, применил метод промежуточного приближения. Он получил точные оценки уклонения классов NW_∞^1, $N>0$, от класса Гельдера и для оценки аппроксимации классов NW_∞^1, $N>0$, тригонометрическими полиномами воспользовался результатами Фавара-Ахиезера-Крейна. Вскоре после этого, он также нашел наилучшие равномерные приближения тригонометрическими полиномами классов H^ω функций с заданной выпуклой вверх мажорантой $\omega(t)$ модуля непрерывности, а также точную констану в неравенстве Джексона для наилучших равномерных приближений непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами. Эти результаты, мало с чем сравнимые по изяществу, формулируются следующим образом:

$$E\left(H^\omega, T_{2n-1}\right)_{C_{2\pi}} = \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad и \quad E\left(f, T_{2n-1}\right)_{C_{2\pi}} \le \omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Продолжая исследования по наилучшим приближениям тригонометрическими полиномами классов периодических функций Н,П. Корнейчук нашел также наилучшее равномерное приближение тригонометрическими полиномами классов W^1H^ω функций с выпуклой вверх мажорантой модуля непрерывности производных первого порядка.

В 1963 году Н. П. Корнейчук успешно защищает докторскую диссертацию на заседании Ученого Совета Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. В этом же году он возглавил кафедру теории функций Днепропетровского университета. В 60-е годы начинает формироваться и научная школа Н.П. Корнейчука. Его ученики днепропетровского периода (до 1974 г.) – А. И. Половина, Н. П. Хорошко, В.Т. Мартынюк, Н.Е. Лушпай, В.Л. Великин, В.В. Липовик, А.А. Женсыкбаев, Л. Г. Хомутенко, И.И. Безвершенко, В. Ф. Сторчай, В. Г. Доронин, В. И. Рубан, А. А. Лигун, В. Ф. Бабенко. Из них защитили докторские диссертации А. А. Женсыкбаев, А. А. Лигун, В. Ф. Бабенко.

Особенностью научного творчества М.П.Корнейчука всегда была нацеленность на заведомо трудные проблемы, работа над которыми требовала от него создания новых методов исследования экстремальных задач теории приближений. Пожалуй самым значительным вкладом Н.П. Корнейчука в математику является создание теории Σ-перестановок. Схематически определение Σ-перестановки можно описать так. Рассматривается подходящее представление функции в виде суммы простых функций, для каждой из которых берется перестановка в убывающем порядке (перестановка Харди). Σ-перестановкой $\Phi(f,t)$ функции f называется сумма перестановок Харди простых функций, входящих в рассматриваемое представление функции f. Замечательное свойство перестановок Харди состоит в том, что они сохраняют L_p-нормы ($1 \le p \le \infty$) функций. Σ-перестановки Корнейчука обладают другим замечательным свойством. Они сохраняют L_1-норму и, одновременно, вариацию рассматриваемой функции. Доказанные Н.П. Корнейчуком в 1970 г. теоремы сравнения Σ-перестановок и перестановок Харди, составили, наряду с теоремами двойственности, основу созданного им метода исследования экстремальных задач теории аппроксимации, который позволил ему полностью решить задачу о приближении тригонометрическими полиномами классов $W^r H^\omega$ (r – произвольное натуральное число) дифференцируемых периодических функций с заданной выпуклой вверх мажорантой модуля непрерывности r – й производной в равномерной и интегральной метриках. Надо сказать, что этот метод оказался чрезвычайно плодотворным и при исследовании многих других экстремальных задач анализа и, в частности, теории аппроксимации.

С 1974 года Н. П. Корнейчук заведует отделом в Институте математики НАН Украины. Воспитывая новых учеников в Киеве, он не порывает связей с Днепропетровском, продолжая возглавлять и координировать исследования по теории приближений в Днепропетровском университете. Ученики Н. П. Корнейчука киевского периода (1974 – 2003 гг.) – это Н. А. Назаренко, С. В. Переверзев, М. Ш. Шабозов, А. М. Авакян, С. Б. Вакарчук, А. М. Минарченко, Ж. Е. Мирзанов. И. Я. Тыригин, А. Л. Хижа, М. Ю. Савкина, О. В. Поляков, С. Г. Солодкий, О. В. Моторная.

Следует отметить, что большинство из них – выпускники Днепро-петровского университета. Из учеников Николая Павловича киевского периода защитили докторские диссертации С. В. Переверзев, М. Ш. Шабозов, С. Б. Вакарчук, С. Г. Солодкий. Трое из них – выпускники Днепропетровского университета.

Исследования Н. П. Корнейчука охватывают все более и более широкий круг экстремальных задач теории приближения. Разработанные Н. П. Корнейчуком методы решения экстремальных задач и полученные глубокие результаты, оказали глубокое влияние на развитие теории приближений, позволили самому Н. П. Корнейчуку и его ученикам успешно решить ряд трудных и давно поставленных экстремальных задач теории приближений. Большинство точных результатов по аппроксимации функций полиномами и сплайнами, оптимизации квадратур, вычислению поперечников функциональных классов, оптимальному восстановлению функций и функционалов, односторонней аппроксимации функциональных классов, многие результаты о точных неравенствах для норм промежуточных производных (неравенствах типа Колмогорова), исследованию экстремальных свойств полиномов и сплайнов (сплайнов минимального дефекта, идеальных сплайнов и моносплайнов), полученных за последние три десятилетия, существенным образом связаны с научным творчеством Н. П. Корнейчука.

Перечислим здесь только некоторые результаты, полученные самим Николаем Павловичем с помощью развития и усовершенствования созданных им методов исследования. Это

- Точные значения наилучших приближений в пространствах с равномерной и интегральной метриками тригонометрическими полиномами и сплайнами на классах W^rH^ω дифференцируемых функций с заданной мажорантой модуля непрерывности старшей производной фиксированного порядка;
- Точные значения приближений интерполяционными сплайнами и сплайнами наилучшего приближения в интегральной метрике классов дифференцируемых функций;
- Точное решение задачи приближения класса W^rH^ω выпуклым множеством W^rKH^1 дифференцируемых функций с ограниченной старшей производной;
- Поперечники классов W^rH^ω и экстремальность подпространств полиномов и сплайнов;
- Оптимальные по узлам и коэффициентам квадратурные и кубатурные формулы на классах функций з заданной мажорантой модуля непрервности;
- Точные значения приближений интерполяционными сплайнами в интегральной метрике классов функций W^rH^ω;

- Точные константы в неравенствах типа неравенств Джексона при апроксимации функций полиномами и сплайнами;
- Решение задач оптимального кодирования и восстановления функций как в одномерном случае, так и векторозначных функций;
- Доказательство оптимальности интерполяционных сплайнов минимального дефекта на класах функций $W^r KH^1$ при одновременном восстановлении функции и ее производной в пространствах $L_p, 1 \le p \le \infty$.

В 90-е годы главный вектор работ Н.П.Корнейчука был направлен на информационные аспекты теории приближений. Информационный подход к различным задачам теории аппроксимации дает возможность значительно полнее использовать ее методы и результаты при решении задач оптимального восстановления математических объектов по неполной информации. Направления деятельности Николая Павловича в этот период таковы:

- Оптимальное восстановление функций и операторов,
- Адаптивный подход в задачах восстановления,
- Сложность аппроксимационных задач,
- Информативность функционалов.

До конца своей жизни не прекращал Николай Павлович работать над классическими задачами аппроксимации, экстремальными задачами анализа. Более подробно о научных достижениях Н. П. Корнейчука, их развитии в работах его последователей можно прочесть в работах [1] – [3].

Нельзя не отметить значительный вклад Н. П. Корнейчука в создание монографий по теории аппроксимации. Опубликованные им монографии подытоживают результаты собственных исследований Н. П. Корнейчука и исследований его учеников. Все эти монографии сразу после выхода получали широкую известность среди специалистов по теории апроксимации и численному анализу. Популярность этих монографий объясняется не только их высоким уровнем, но и исключительной ясностью и доступностью изложения, тщательным подбором материала. Одна из этих монографий написана по заказу всемирно известной серии «Encyclopedia of Mathematics and its Applications» и опубликована издательством Кембриджского университета. Отметим, что к монографиям этой серии заранее выдвигаются два требования: содержание должно иметь непреходящий интерес, а ясность изложения должна сделать предмет доступным широкому кругу читателей. Следует отметить, что все монографии, написанные Николаем Павловичем, безусловно удлвлетворяли этим требованиям. Перечислим эти монографии.

- Экстремальные задачи теории приближения.–М., Наука, 1976.– 320 с.
- Сплайны в теории приближения. – М., Наука, 1984. – 352 с.
- Точные константы в теории приближения. – М., Наука, 1987. – 424 с.

- Exact constants in approximation theory. Ser. Encyclopedia Math. and Appl. – Cambridge Univ. Press, 1991. – 38. – P.452
- О новых результатах по задачам теории квадратур. Дополнение // Квадратурные формулы / С.М. Никольский. – М., 1979. – 143-249
- Аппроксимация с ограничениями. – Киев., Наук. думка, 1982. – 250 с. (совместно с В. Г. Дорониным и А. А. Лигуном).
- Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев., Наук. думка, 1992. – 304 с. (совместно с В. Ф. Бабенко и А.А. Лигуном).
- Неравенства для производных и их приложения. – Киев., Наук. думка, 2003, (совместно с В. Ф. Бабенко, В. А. Кофановым, С. А. Пичуговым)

Научные и педагогические достижения Николая Павловича Корнейчука высоко оценены как в нашей стране, так и за ее пределами. В 1967 г. он был награжден орденом Ленина. В 1972 г. избран членом-корреспондентом АН Украины. За цикл научных работ по экстремальным задачам теории приближений в 1973 году Николай Павлович Корнийчук получил (лично), по представлению Математического института АН СССР Государственную премию СССР. Это была первая такая премия по математике, полученная украинским ученым в области теории приближений. В 1980 г. Н.П. Корнейчук был награжден орденом Трудового Красного Знамени. В 1994 г. за цикл научных работ по теории сплайнов и их применениям в оптимизации приближений Н. П. Корнейчуку (вместе с С. М. Никольським, В. П. Моторным, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигуном и В. Л. Великиным) присуждена Государственная премия Украины в области науки и техники. В 1998 г. Николай Павлович избран академиком Национальной академии наук Украини. В 2001 г. получил премию Остроградского.

Высокие человеческие качества и математичский талант ученого завоевали Н. П. Корнейчуку авторитет и уважение научной общественности. Его избирают Президентом Киевского математического общества, заместителем академика-секретаря Отделения математики АН Украины, председателем специализированного совета по защите докторских диссертаций, заместителем главного редактора «Украинского математического журнала», членом редколлегии «East Journal on Approximations». Долгие время Н. П. Корнейчук был председателем экспертного совета ВАК по математике.

22 июля 2003 Николай Павлович Корнейчук ушел из жизни. Но и сегодня коллектив математиков научной школы Н. П. Корнейчука продолжает вести активные научные исследования в самых важных направлениях теории аппроксимации. Его ученики и научные «внуки» успешно работают во многих городах Украины, а также во многих станах Европы, Азии, Америки. В настоящее время в Днепропетровском университете работают такие ученики Николая Павловича как В. Ф. Бабенко, В. Л. Великин, В.И. Рубан, В. Г. Доронин, О. В. Поляков, А. Л. Хижа. Его научными «внуками» являются В. Н. Трактинская,

А. А. Руденко, М. Б. Вакарчук, Н. В. Парфинович, М. Е. Ткаченко, М. С. Чурилова. С. В. Савела.

Все, кто знал Николая Павловича, хранят светлую память об этом замечательном ученом и человеке.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В. Ф.** Исследования по точному решению экстремальных задач теории наилучшего приближения / В. Ф. Бабенко, А..А.Лигун // Укр. матем. журн. 1990. Т. 42, № 1. С. 4 – 17.
2. **Моторый В. П.** Исследования Днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул /В.П. Моторный// Укр. матем. журн. 1990. Т. 42, № 1. С. 18 –33.
3. **Великин В. Л.** Об исследованиях по экстремальных задачах сплайн-аппроксимации / В.Л.Великин, Н.А.Назаренко// Укр. матем. журн. 1990. Т. 42, № 1. С. 34 – 59.
4. **Бабенко В.Ф.** О работах Н. П. Корнейчука, выполненных в 1990 – 1999 годах / В.Ф.Бабенко, А.А.Лигун, В.П.Моторный // Укр. матем. журн. 2000. Т. 52, № 1. С. 5 – 8.
5. **Бабенко В.Ф.** Исследования днепропетровских математиков по неравенствам для производных периодических функций и их приложениям /В.Ф. Бабенко// Укр. матем. журн. 2000. Т. 52, № 1. С. 9 –29.

В. Ф. Бабенко, В. П. Моторный

ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". № 6/1. 2010. Вип.15. С. 18 -27

УДК 517.5

В.Ф. Бабенко [*,**] , Д.А. Левченко [*]

**Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара,*

***Институт прикладной математики и механики НАН Украины*

НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Доведені нові точні нерівності типу Колмогорова для гіперсингулярного інтеграла з однорідною характеристикою вигляду $\Omega(t)=\operatorname{sgn}\prod_{k=1}^{m} t_k$ **функцій багатьох змінних з простору Гьольдера.**

Ключові слова: гіперсингулярний інтеграл, однорідна характеристика, модуль неперервності.

Доказаны новые точные неравенства типа Колмогорова для гиперсингулярного интеграла с однородной характеристикой вида $\Omega(t)=\operatorname{sgn}\prod_{k=1}^{m} t_k$ **функций многих переменных из пространства Гельдера.**

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл, однородная характеристика, модуль непрерывности.

New sharp Kolmogorov type inequalities for hypersingular integrals with homogeneous characteristic in form $\Omega(t)=\operatorname{sgn}\prod_{k=1}^{m} t_k$ **for multivariate functions from Hölder spaces are obtained.**

Key words: hypersingular integral, homogeneous characteristic, module of continuous.

Неравенства для норм промежуточных производных функций одной переменной важны для многих областей математики (математический анализ, теория аппроксимации, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория некорректных задач, теория оптимальных алгоритмов и др.). К настоящему времени известно значительное количество точных неравенств типа Колмогорова для функций одной переменной. С соответствующими результатами можно ознакомиться, например, по [3; 1]. Случай функций многих переменных изучен в значительно меньшей степени. По поводу известных точных неравенств типа Колмогорова сошлемся на работы [2; 5; 7; 9; 11].

В ряде вопросов математического анализа и его приложений возникает потребность наряду с производными и интегралами целых порядков рассматривать также производные и интегралы дробных порядков. Следует отметить, что точное решение экстремальных задач анализа и, в частности, теории аппроксимации, связанных с дробными производными и интегралами, встречаются со значительными трудностями. По этой причине известно совсем немного точных неравенств типа Колмогорова для дробных производных функций одной и многих переменных [4; 6; 10; 12]. Ряд точных неравенств для дробных производных функций одной и многих переменных получен только в последнее время.

Во многих случаях дробные степени дифференциальных операторов реализуются в виде сингулярных интегралов. Данная работа посвящена получению некоторых точных неравенств типа Колмогорова для гиперсингулярных интегралов со знакопеременной характеристикой.

Через $C(R^n)$ обозначим пространство всех непрерывных ограниченных функций $f{:}R^n \to R$ с нормой

$$\|f\|_C := \sup\{|f(u)| : u \in R^n\}.$$

Для заданного модуля непрерывности $\omega(t)$ через $H^\omega(R^n)$ обозначим пространство функций $f \in C(R^n)$, для которых

$$\|f\|_{H^\omega} := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(|x-y|)} < \infty,$$

где для $u \in R^n$

$$|u| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}.$$

В случае, когда $\omega(t)=t^\beta$, $\beta \in (0,1]$, то вместо $H^\omega(R^n)$ будем писать $H^\beta(R^n)$.

Если $\omega(t)$ модуль непрерывности, для которого

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt < \infty, \qquad (1)$$

то для любого $h>0$ определим величину

$$I_{\omega,\alpha}(h) := \int_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\alpha}} dt.$$

Дробная производная Рисса порядка $\alpha \in (0,1)$ функций $f{:}R^n \to R$ определяется [8] так

$$(D^\alpha f)(u) := \frac{1}{d_{n,1}(\alpha)} \int_{R^n} \frac{f(u)-f(u-t)}{|t|^{n+\alpha}} dt, \qquad (2)$$

где

$$d_{n,1}(\alpha) = \frac{\pi^{1+\frac{n}{2}}}{2^\alpha \Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}.$$

Отметим [8], что производная Рисса реализует дробную степень оператора Лапласа

$$D^{\alpha}f=(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}f,$$

где

$$\Delta f=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial u_k^2}.$$

Будем рассматривать более общую чем (2) конструкцию вида [8]

$$\left(D_{\Omega}^{\alpha}f\right)(u):=\frac{1}{d_{n,1}(\alpha)}\int_{R^n}\frac{f(u)-f(u-t)}{|t|^{n+\alpha}}\Omega(t')dt, \tag{3}$$

где функция $\Omega(t')$ $(t'=t/|t|)$ не зависит от f и называется однородной характеристикой.

В [12] доказаны следующие точные неравенства типа Колмогорова для гиперсингулярного интеграла порядка α $(0<\alpha<\beta\le 1)$ с однородной характеристикой, в случае когда Ω неотрицательна и интегрируема на единичной сфере $S^{n-1}\subset R^n$ для любой функции $f\in H^{\omega}(R^n)$ и $h>0$:

$$\left\|D_{\Omega}^{\alpha}f\right\|_C\le\frac{1}{d_{n,1}(\alpha)}\int_{S^{n-1}}\Omega(t')dt'\left(I_{\omega,\alpha}(h)\|f\|_{H^{\omega}}+\frac{2\|f\|_C}{\alpha h^{\alpha}}\right), \tag{4}$$

$$\left\|D_{\Omega}^{\alpha}f\right\|_C\le\frac{2^{1-\frac{\alpha}{\beta}}\beta}{\alpha(\beta-\alpha)d_{n,1}(\alpha)}\int_{S^{n-1}}\Omega(t')dt'\|f\|_C^{1-\frac{\alpha}{\beta}}\|f\|_{H^{\beta}}^{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Минимизируя по h правую часть неравенства (4), нетрудно получить следующее неравенство

$$\left\|D_{\Omega}^{\alpha}f\right\|_C\le\frac{1}{d_{n,1}(\alpha)}\int_{R^n}\frac{\min\left\{2\|f\|_C;\|f\|_{H^{\omega}}\,\omega(|t|)\right\}}{|t|^{n+\alpha}}\Omega(t')dt.$$

В данной работе будем рассматривать гиперсингулярный интеграл (3) с характеристикой $\Omega(t)=\operatorname{sgn}\prod_{k=1}^{m}t_k$, $1\le m\le n$.

Для вектора $t=(t_1,\ldots,t_n)\in R^n$ обозначим через $\Delta_{t_ie_i}f(u)$ разность функции $f(u)$ по переменной u_i с шагом t_i

$$\Delta_{t_ie_i}f(u)=f(u+t_ie_i)-f(u-t_ie_i)$$

где $\{e_1,\ldots,e_n\}$ – стандартный базис в R^n. Пусть

$$\Delta_t^m f(u)=\Delta_{t_1e_1}\circ\cdots\circ\Delta_{t_me_m} f(u)\ -$$

смешанная разность функции f(u) с шагом t по первым m переменным. Несложно показать, что

$$\left(D_\Omega^\alpha f\right)(u)=\frac{1}{d_{n,1}(\alpha)}\int_{R^{n-m}}\left(\int_{R_+^m}\frac{\Delta_t^m f(u+\tilde{t}^{n-m})}{|t|^{n+\alpha}}dt^m\right)d\tilde{t}^{n-m}, \qquad (5)$$

где $t=\left(t^m,\tilde{t}^{n-m}\right)$,

$$t^m=\sum_{i=1}^m t_ie_i,\quad \tilde{t}^{n-m}=\sum_{i=m+1}^n t_ie_i,\quad dt^m=dt_1\ldots dt_1,\quad d\tilde{t}^{n-m}=dt_{m+1}\ldots dt_n,$$

$$R_+^m=\left\{t\in R^m: t_i\geq 0,\ i=1,\ldots,m\right\}$$

Рассмотрим задачу о точной оценке $\left\|D_\Omega^\alpha f\right\|_C$ для функций $f\in H^\omega\left(R^n\right)$. Нами доказана

Теорема. *Пусть* $\alpha\in(0,1)$ *и выпуклый вверх модуль непрерывности* $\omega(t)$ *таковы, что выполнено условие* (1). *Тогда для любой функции* $f\in H^\omega\left(R^n\right)$ *и* $h>0$ *имеют место точные неравенства:*

$$\left\|D_\Omega^\alpha f\right\|_C\leq\frac{2^{n-1}}{d_{n,1}(\alpha)}\int_{R_+^n}\frac{\min\left\{2\|f\|_C;\|f\|_{H^\omega}\,\omega\left(2\min\limits_{1\leq i\leq m}\{t_i\}\right)\right\}}{|t|^{n+\alpha}}dt, \qquad (6)$$

$$\left\|D_\Omega^\alpha f\right\|_C\leq\frac{\alpha 2^{n-1}}{d_{n,1}(\alpha)}B_m^n\left(2^\alpha I_{\omega,\alpha}(2h)\|f\|_{H^\omega}+\frac{2\|f\|_C}{\alpha h^\alpha}\right), \qquad (7)$$

где

$$B_m^n=\underbrace{\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty}_{n-m}\left(\underbrace{\int_1^\infty\cdots\int_1^\infty}_{m}\frac{du^m}{|u|^{n+\alpha}}\right)d\tilde{u}^{n-m}.$$

Функция

$$f_h(t)=\frac{1}{2}\Omega(t')\omega\left(2\min\left\{h,|t_1|,\ldots,|t_m|\right\}\right)$$

Является экстремальной для неравенств (6) *и* (7).

Доказательство. Из представления (5) очевидным образом получается

$$\left|\left(D_\Omega^\alpha f\right)(u)\right|=\frac{1}{d_{n,1}(\alpha)}\int_{R^{n-m}}\left(\int_{R_+^m}\frac{\left|\Delta_t^m f(u+\tilde{t}^{n-m})\right|}{|t|^{n+\alpha}}dt^m\right)d\tilde{t}^{n-m}. \qquad (8)$$

Для оценки $\left|\Delta_t^m f\left(u+\tilde{t}^{n-m}\right)\right|$ будем использовать следующие неравенства:

$$\left|\Delta_t^m f\left(u+\tilde{t}^{n-m}\right)\right| \le 2^m \|f\|_C,$$

$$\left|\Delta_t^m f\left(u+\tilde{t}^{n-m}\right)\right| \le 2^{m-1}\omega\left(2|t_i|\right)\|f\|_{H^\omega}, \quad i=1,\ldots,m.$$

Объединяя эти оценки, получим

$$\left|\Delta_t^m f\left(u+\tilde{t}^{n-m}\right)\right| \le 2^{m-1}\min\left\{2\|f\|_C;\|f\|_{H^\omega}\,\omega\left(2\min_{1\le i\le m}\{|t_i|\}\right)\right\}.$$

Отсюда и из (8) получаем следующее неравенство

$$\left|\left(D_\Omega^\alpha f\right)(u)\right| \le \frac{2^{n-1}}{d_{n,1}(\alpha)}\int_{R_+^n}\frac{\min\left\{2\|f\|_C;\|f\|_{H^\omega}\,\omega\left(2\min_{1\le i\le m}\{t_i\}\right)\right\}}{|t|^{n+\alpha}}dt. \tag{9}$$

Покажем, что для любой функции $f\in H^\omega\left(R^n\right)$ ее гиперсингулярный интеграл непрерывно зависит от u.

Пусть

$$\omega(f,\theta):=\sup_{|u|\le\theta}\|f(\cdot)-f(\cdot+u)\|_C.$$

Применяя неравенство (9) к разности $f(u)-f(u+\delta)$, $\delta\in R^n$, получаем

$$\left|\left(D_\Omega^\alpha f\right)(u)-\left(D_\Omega^\alpha f\right)(u+\delta)\right| \le \frac{2^{n-1}}{d_{n,1}(\alpha)}\int_{R_+^n}\frac{\min\left\{2\omega(f,|\delta|);\|f\|_{H^\omega}\,\omega\left(2\min_{1\le i\le m}\{t_i\}\right)\right\}}{|t|^{n+\alpha}}dt.$$

Отметим, что семейство функций

$$\frac{\min\left\{2\omega(f,|\delta|);\|f\|_{H^\omega}\,\omega\left(2\min_{1\le i\le m}\{t_i\}\right)\right\}}{|t|^{n+\alpha}}$$

равномерно стремится к нулю на любом множестве векторов t таких, что $t_i\in[\sigma_i,\infty)$ $(\sigma_i>0,\ i=1,\ldots,m;\ \sigma_i\ge 0,\ i=m+1,\ldots,n)$, и интеграл

$$\int_{R_+^n}\frac{\min\left\{2\omega(f,|\delta|);\|f\|_{H^\omega}\,\omega\left(2\min_{1\le i\le m}\{t_i\}\right)\right\}}{|t|^{n+\alpha}}dt$$

равномерно сходится.

Следовательно,

$$\left|\left(D_\Omega^\alpha f\right)(u)-\left(D_\Omega^\alpha f\right)(u+\delta)\right| \to 0, \quad |\delta| \to 0,$$

что и доказывает непрерывность $\left(D_\Omega^\alpha f\right)(u)$ для всех $u \in R^n$. Тогда в силу произвольности $u \in R^n$, получаем (6).

Далее, обозначим через I интеграл

$$I = \int_{R_+^n} \frac{\min\left\{2\|f\|_C; \|f\|_{H^\omega}\, \omega\left(2\min\limits_{1\le i\le m}\{t_i\}\right)\right\}}{|t|^{n+\alpha}} dt.$$

Разобьем пространство R_+^n множествами $(h>0)$

$$A_0=\left\{t \in R_+^n\colon \min\{h,t_1,\ldots,t_m\} = h\right\},$$

$$A_j=\left\{t \in R_+^n\colon \min\{h,t_1,\ldots,t_m\} = t_j\right\}.$$

Так как $R_+^n = \bigcup\limits_{j=1}^m A_j$, то

$$I \le 2\|f\|_C\, I_0 + \|f\|_{H^\omega} \sum_{j=1}^m I_j,$$

где

$$I_0 = \int_{A_0} \frac{dt}{|t|^{n+\alpha}}, \qquad I_j = \int_{A_j} \frac{\omega(2t_j)}{|t|^{n+\alpha}} dt.$$

Ясно, что

$$I_0 = \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n-m} \left(\underbrace{\int_h^\infty \cdots \int_h^\infty}_{m} \frac{du^m}{|u|^{n+\alpha}} \right) d\tilde{u}^{n-m} = \frac{1}{h^\alpha} \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n-m} \left(\underbrace{\int_1^\infty \cdots \int_1^\infty}_{m} \frac{dt^m}{|t|^{n+\alpha}} \right) d\tilde{t}^{n-m} = \frac{1}{h^\alpha} B_m^n.$$

Интегралы I_j вычисляются одинаково. Вычислим, например, I_m

$$I_m = \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n-m} \left[\int_0^h \omega(2u_m) \left(\underbrace{\int_{u_m}^\infty \cdots \int_{u_m}^\infty}_{m-1} \frac{du^{m-1}}{|u|^{n+\alpha}} \right) du_m \right] d\tilde{u}^{n-m} =$$

$$= \int_0^h \frac{\omega(2y)}{y^{1+\alpha}} dy \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{n-m} \left(\underbrace{\int_1^\infty \cdots \int_1^\infty}_{m-1} \frac{dt^{m-1}}{\left(1+t_1^2+\ldots+t_{n-1}^2\right)^{\frac{n+\alpha}{2}}} \right) d\tilde{t}^{(n-1)-(m-1)} =$$

$$=2^{\alpha} I_{\omega,\alpha}(2h) \underbrace{\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}}_{n-m} \left(\underbrace{\int_1^{\infty}\cdots\int_1^{\infty}}_{m-1} \frac{dt^{m-1}}{\left(1+t_1^2+\ldots+t_{n-1}^2\right)^{\frac{n+\alpha}{2}}} \right) d\tilde{t}^{(n-1)-(m-1)} = \frac{2^{\alpha} I_{\omega,\alpha}(2h)}{m} B_m^n,$$

где $d\tilde{t}^{(n-1)-(m-1)} = dt_m \ldots dt_{n-1}$. Поясним последнее равенство.

$$B_m^n = \underbrace{\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}}_{n-m} \left(\underbrace{\int_1^{\infty}\cdots\int_1^{\infty}}_{m} \frac{du^m}{|u|^{n+\alpha}} \right) d\tilde{u}^{n-m} = \underbrace{\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}}_{n-m} \left(\sum_{k=1}^{m} \int_1^{\infty} \left[\underbrace{\int_{u_k}^{\infty}\cdots\int_{u_k}^{\infty}}_{m-1} \frac{(du^m)^*}{|u|^{n+\alpha}} \right] du_k \right) d\tilde{u}^{n-m} =$$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}}_{n-m} \left(m\int_1^{\infty} \left[\underbrace{\int_{u_m}^{\infty}\cdots\int_{u_m}^{\infty}}_{m-1} \frac{du^{m-1}}{|u|^{n+\alpha}} \right] du_m \right) d\tilde{u}^{n-m} = m\int_1^{\infty} \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \underbrace{\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}}_{n-m} \left(\underbrace{\int_1^{\infty}\cdots\int_1^{\infty}}_{m-1} \frac{dt^{m-1}}{\left(1+t_1^2+\ldots+t_{n-1}^2\right)^{\frac{n+\alpha}{2}}} \right) d\tilde{t}^{(n-1)-(m-1)}$$

$$= \frac{m}{\alpha} \underbrace{\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}}_{n-m} \left(\underbrace{\int_1^{\infty}\cdots\int_1^{\infty}}_{m-1} \frac{dt^{m-1}}{\left(1+t_1^2+\ldots+t_{n-1}^2\right)^{\frac{n+\alpha}{2}}} \right) d\tilde{t}^{(n-1)-(m-1)},$$

откуда

$$\underbrace{\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}}_{n-m} \left(\underbrace{\int_1^{\infty}\cdots\int_1^{\infty}}_{m-1} \frac{dt^{m-1}}{\left(1+t_1^2+\ldots+t_{n-1}^2\right)^{\frac{n+\alpha}{2}}} \right) d\tilde{t}^{(n-1)-(m-1)} = \frac{\alpha}{m} B_m^n.$$

Выше через $(du^m)^*$ было обозначено

$$(du^m)^* = du_1 \ldots du_{k-1} du_{k+1} \ldots du_m.$$

Таким образом

$$I \le \alpha B_m^n \left(2^{\alpha} I_{\omega,\alpha}(2h) \|f\|_{H^{\omega}} + \frac{2\|f\|_C}{\alpha h^{\alpha}} \right).$$

Из последней оценки и из (6) следует (7).

Теперь покажем, что функция $f_h(t)$ $(h > 0)$ обращает (6) и (7) в равенства. Из определения $f_h(t)$ очевидно, что

$$\|f_h\|_C = \frac{\omega(2h)}{2}.$$

Покажем, что

$$\|f_h\|_{H^{\omega}} \le 1.$$

Рассмотрим случай, когда для разных векторов $x,y\in R^n$ $\Omega(x')$ и $\Omega(y')$ одного знака. Пускай $|x_i|=\min\{|x_1|,\dots,|x_m|\}$ и $|y_j|=\min\{|y_1|,\dots,|y_m|\}$. Возможны следующие варианты (делая оценку сверху будем использовать полуаддитивность $\omega(t)$):

1) если $|y_j|\le|x_i|\le h$, то

$$|f_h(x)\text{-}f_h(y)|=\frac{1}{2}\left|\omega\left(2|x_i|\right)\text{-}\omega\left(2|y_j|\right)\right|=\frac{1}{2}\left[\omega\left(2|x_i|\right)\text{-}\omega\left(2|y_j|\right)\right]\le\frac{1}{2}\left[\omega\left(2|x_j|\right)\text{-}\omega\left(2|y_j|\right)\right]\le$$
$$\le\frac{1}{2}\omega\left(2|x_j|\text{-}2|y_j|\right)\le\frac{1}{2}\omega\left(2|x_j\text{-}y_j|\right)\le\omega\left(|x_j\text{-}y_j|\right)\le\omega\left(|x\text{-}y|\right);$$

2) если $|x_i|\le|y_j|\le h$, то

$$|f_h(x)\text{-}f_h(y)|=\frac{1}{2}\left|\omega\left(2|x_i|\right)\text{-}\omega\left(2|y_j|\right)\right|=\frac{1}{2}\left[\omega\left(2|y_j|\right)-\omega\left(2|x_i|\right)\right]\le\frac{1}{2}\left[\omega\left(2|y_i|\right)-\omega\left(2|x_i|\right)\right]\le$$
$$\le\frac{1}{2}\omega\left(2|y_i|\text{-}2|x_i|\right)\le\frac{1}{2}\omega\left(2|x_i\text{-}y_i|\right)\le\omega\left(|x_i\text{-}y_i|\right)\le\omega\left(|x\text{-}y|\right);$$

3) если $|y_j|\le h\le|x_i|$, то

$$|f_h(x)\text{-}f_h(y)|=\frac{1}{2}\left|\omega\left(2h\right)\text{-}\omega\left(2|y_j|\right)\right|=\frac{1}{2}\left[\omega(2h)\text{-}\omega\left(2|y_j|\right)\right]\le\frac{1}{2}\left[\omega\left(2|x_j|\right)\text{-}\omega\left(2|y_j|\right)\right]\le$$
$$\le\frac{1}{2}\omega\left(2|x_j|\text{-}2|y_j|\right)\le\frac{1}{2}\omega\left(2|x_j\text{-}y_j|\right)\le\omega\left(|x_j\text{-}y_j|\right)\le\omega\left(|x\text{-}y|\right);$$

4) если $|x_i|\le h\le|y_j|$, то

$$|f_h(x)\text{-}f_h(y)|=\frac{1}{2}\left|\omega\left(2|x_i|\right)\text{-}\omega\left(2h\right)\right|=\frac{1}{2}\left[\omega(2h)\text{-}\omega\left(2|x_i|\right)\right]\le\frac{1}{2}\left[\omega\left(2|y_i|\right)\text{-}\omega\left(2|x_i|\right)\right]\le$$
$$\le\frac{1}{2}\omega\left(2|y_i|\text{-}2|x_i|\right)\le\frac{1}{2}\omega\left(2|x_i\text{-}y_i|\right)\le\omega\left(|x_i\text{-}y_i|\right)\le\omega\left(|x\text{-}y|\right);$$

5) если $h\le|x_i|,|y_j|$, то

$$|f_h(x)\text{-}f_h(y)|=\frac{1}{2}\left|\omega(2h)\text{-}\omega(2h)\right|=0\le\omega\left(|x\text{-}y|\right).$$

Пусть теперь $\Omega(x')$ и $\Omega(y')$ разных знаков, тогда найдется индекс $1\le k_0\le m$ такой, что x_{k_0} и y_{k_0} будут иметь разные знаки, поэтому

$$|x_{k_0}|+|y_{k_0}|=|x_{k_0}\text{-}y_{k_0}|.$$

Используя выпуклость $\omega(t)$ будем иметь

$$|f_h(x)-f_h(y)| \le \frac{1}{2}\left[\omega\left(2|x_{k_0}|\right)+\omega\left(2|y_{k_0}|\right)\right] \le \omega\left(|x_{k_0}|+|y_{k_0}|\right) = \omega\left(|x_{k_0}-y_{k_0}|\right) \le \omega\left(|x-y|\right).$$

Таким образом показано, что для любых $x,y \in R^n$

$$|f_h(x)-f_h(y)| \le \omega\left(|x-y|\right)$$

или

$$\|f_h\|_{H^\omega} \le 1.$$

Применим к $f_h(t)$ неравенство (7):

$$\|D_\Omega^\alpha f_h\|_C \le \frac{\alpha 2^{n-1}}{d_{n,1}(\alpha)} B_m^n \left(2^\alpha I_{\omega,\alpha}(2h) + \frac{\omega(2h)}{\alpha h^\alpha}\right).$$

С другой стороны, используя определение (3) (отметим, что попарное перересечение множеств A_j $(j=0,\dots,m)$ имеет нулевую меру Лебега)

$$\|D_\Omega^\alpha f_h\|_C \ge \left|\left(D_\Omega^\alpha f_h\right)(0)\right| = \frac{2^{n-1}}{d_{n,1}(\alpha)} \int_{R_+^n} \frac{\omega\left(2\min_{1\le i\le m}\{h,t_i\}\right)}{|t|^{n+\alpha}} dt=$$

$$= \frac{2^{n-1}}{d_{n,1}(\alpha)}\left(\omega(2h) I_0 + \sum_{j=1}^m I_j\right) = \frac{\alpha 2^{n-1}}{d_{n,1}(\alpha)} B_m^n \left(2^\alpha I_{\omega,\alpha}(2h) + \frac{\omega(2h)}{\alpha h^\alpha}\right)$$

и точность неравенства (7) доказана. Точность (7) влечет точность (6). Теорема полностью доказана.

Если $\omega(t)=t^\beta$, тогда справедливо

Следствие. *Пусть* $0<\alpha<\beta \le 1$, *тогда для любой функции* $f \in H^\beta(R^n)$ *и* $h>0$ *имеют место точные неравенства*

$$\|D_\Omega^\alpha f\|_C \le \frac{2^n}{h^\alpha d_{n,1}(\alpha)} B_m^n \left(\frac{\alpha 2^{\beta-1}}{\beta-\alpha}\|f\|_{H^\omega} + \|f\|_C\right), \qquad (10)$$

$$\|D_\Omega^\alpha f\|_C \le \frac{2^{n-(1-\beta)\frac{\alpha}{\beta}}}{d_{n,1}(\alpha)} \frac{\beta}{\beta-\alpha} B_m^n \|f\|_C^{1-\frac{\alpha}{\beta}} \|f\|_{H^\beta}^{\frac{\alpha}{\beta}} \qquad (11)$$

с экстремальной функцией

$$f_h(t)=2^{\beta-\alpha}\left(\min\{h,|t_1|,\dots,|t_m|\}\right)^\beta.$$

Доказательство. Отметим, что для $\omega(t)=t^\beta$

$$I_{\omega,\alpha}(2h) = \int_0^{2h} \frac{t^\beta}{t^{1+\alpha}} dt = \frac{2^{\beta-\alpha}}{\beta-\alpha} h^{\beta-\alpha}.$$

Из этого и из неравенства (7) немедленно следует (10), а положив в (10)

$$h=2^{\frac{1}{\beta}-1}\|f\|_C^{\frac{1}{\beta}}\|f\|_{H^\beta}^{-\frac{1}{\beta}}$$

получим (11). Точность неравенств (10) и (11) проверяется аналогично тому, как это делалось в теореме выше. Следствие доказано.

Библиографические ссылки

1. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи /В.В. Арестов// Усп. мат. наук. – 1996. – 51, № 6. – С.88–124.
2. **Бабенко В.Ф.** О точных неравенствах типа Колмогорова для функций двух переменных /В.Ф. Бабенко// Доп. НАН України. – 2000. –№ 5. – С.7–11.
3. **Бабенко В.Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов. 2003.
4. **Бабенко В.Ф.** Про нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку/ В.Ф. Бабенко, М.С. Чурілова // Вісник Дніпропетровського університету. Математика, вип. 6, 2001, С.16–20.
5. **Буслаев А.П.** О неравенствах для производных в многомерном случае/ А.П. Буслаев, В.М. Тихомиров // Мат. заметки. –1979. – 25, №1. – С.59–74.
6. **Гейсберг С.П.** Обобщение неравенства Адамара /С.П. Гейсберг// Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций: Сб. науч. тр. ЛОМИ. – Ленинград. –1965. – 50 – С.42–54.
7. **Коновалов В.Н.** Точные неравенства для норм функций, третьих частных и вторых смешанных производных /В.Н. Коновалов// Мат. заметки. –1978. – 23, № 1. – С.67–78.
8. **Самко С.Г.** Интегралы и производные дробного порядка и их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев – Минск, 1987, 304 с.
9. **Тимошин О.А.** Точные неравенства между нормами производных второго и третьего порядков /О.А. Тимошин// Докл. РАН. –1995. –344, № 1. – С.20–22.
10. **Arestov V.V.** Inequalities for fractional derivates on the half-line / V.V. Arestov// Approximation theory, Banach Center Publications. – 1979. – 4. – PWN, Warsaw. P. – 19–34.
11. **Babenko V.F.** Multivariate inequalities of Kolmogorov type and thier applications / V.F. Babenko, V.A. Kofanov, S.A. Pichugov, // Proc. of Manheim Conf. «Multivariate Approximation and Splines», 1996 / G. Nurnberger, J. Schmidt, G. Walz (eds.) . – 1997. – P.1–12.
12. **Babenko V.F.** Kolmogorov type inequalities for hypersingular integrals with homogeneous characteristic/ V.F. Babenko, M.S. Churilova, // Banach Journal of Mathematics. - Vol. 1,№ 1, p. 1–10.

Надійшла до редколегії 06.04.10

ISSN №9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія «Математика». № 6/1.2010. Вип. 15. С. 28 – 37.

УДК 517.5

В.Ф. Бабенко*,**, Т.Ю. Лескевич*

*Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

**Институт прикладной математики и механики НАН Украины

ПОГРЕШНОСТЬ ПРИ ИТНЕРПОЛЯЦИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ ПОЛИЛИНЕЙНЫМИ СПЛАЙНАМИ

Знайдене точне значення похибки при інтерполяції полілінійними сплайнами класів функцій багатьох змінних, які визначаються заданим опуклим вверх модулем неперервності.

Ключові слова: полілінійна функція, модуль неперервності, інтерполяція.

Найдено точное значение погрешности при интерполяции полилинейными сплайнами классов функций многих переменных, которые определяются заданным выпуклым вверх модулем непрерывности.

Ключевые слова: полилинейная функция, модуль непрерывности, интерполяция.

The exact value of error of interpolation some classes of multivariate functions, which are determined by given convex upwards majorant of module of continuity, by multilinear splines is obtained.

Key words: multilinear function, module of continuity, interpolation.

Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^n$ точек $x=\left(x^1,\dots,x^n\right)$, для которых

$$|x|_q := \sqrt[q]{\sum_{j=1}^{n}\left|x^j\right|^q}\ ,$$

где $1\le q<\infty$ и

$$|x|_\infty := \max_{1\le j\le n}\left|x^j\right|.$$

Пусть $\mathbf{R}_+^n=\{x\in\mathbf{R}^n : x^i>0,\ i=1,\dots,n\}$. Элемент $b\in\mathbf{R}_+^n$ определяет в пространстве $\mathbf{R}^n$ n-мерный промежуток

$$P=[0,b]=\prod_{i=1}^{n}[0,b^i].$$

Пусть для каждого $i=1,\dots,n$ задано разбиение отрезка $[0,b^i]$

$$c_i^0=0<c_i^1<\ldots<c_i^{k_i}=b^i.$$

Промежутки вида

$$M=\prod_{i=1}^{n}[c_i^{j_i-1},c_i^{j_i}],\ 0<j_i\le k_i,\ i=1,\dots,n \qquad (1)$$

порождают разбиение T промежутка P.

Пусть $L:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ полилинейная (n-линейная) функция, то есть функция линейная по каждой переменной при фиксированных значениях остальных переменных. Полилинейным сплайном будем называть непрерывную функцию $S: P \to \mathbf{R}$, сужение $S|_M$ которой на произвольный промежуток $M \in T$ совпадает с сужением на M некоторой полилинейной функции $L: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Полилинейный сплайн однозначно определяется своими значениями в вершинах разбиения T. Произвольной функции $f: P \to \mathbf{R}$ поставим в соответствие полилинейный сплайн $S(f): P \to \mathbf{R}$ такой, что $S(f)|_{T^0} = f|_{T^0}$, где T^0 – множество вершин разбиения T, то есть $S(f)$ интерполирует f в вершинах разбиения T.

Через $H_P^{\omega,q}$ будем обозначать класс функций $f: P \to \mathbf{R}$ таких, что

$$\forall x, y \in P \quad |f(x) - f(y)| \le \omega\left(|x - y|_q\right) ,$$

где $\omega(t)$ – заданный выпулый вверх модуль непрерывности, $1 \le q \le \infty$.

Введем следующее обозначение

$$E_T(H) = \sup_{f \in H_P^{\omega,q}} \max_{x \in P} |f(x) - S(f, x)|.$$

Обозначим через $d_q(M)$ – диаметр n-мерного промежутка M, и положим

$$d_q(T) = \max_{M \in T} d_q(M).$$

В [8] в случае функций двух переменных был получен следующий результат:

$$E_T\left(H_P^{\omega,2}\right) = \omega\left(\frac{1}{2} d_2(T)\right).$$

Другие известные результаты об отклонении интерполяционных линейных и полилинейных сплайнов на классах функций двух и большего числа переменных приведены в [1 – 4; 6 – 10].

В данной работе получены точные значения отклонения интерполяционных полилинейных сплайнов на классах функций $H_P^{\omega,q}$, $1 \le q \le 3$, и $H_P^{\omega,\infty}$.

Теорема 1. *Если* $\omega(t)$ *– выпулый вверх модуль непрерывности, то для* $1 \le q \le 3$ *имеет место следующее утверждение:*

$$E_T\left(H_P^{\omega,q}\right) = \omega\left(\frac{1}{2} d_q(T)\right).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный n-мерный промежуток $M \in T$. Не нарушая общности, будем считать, что в выбранной системе координат промежуток M имеет вид:

$$M = \prod_{i=1}^{n} [0, \overline{x}^i].$$

Каждой вершине этого промежутка поставим в соответствие множество $J \subset \{1,2,\dots,n\}$, которое содержит номера нулевых координат данной вершины, и через J' обозначим дополнение множества J до множества $\{1,2,\dots,n\}$, то есть множество номеров ненулевых координат данной вершины. Вершину промежутка M, которой соответствует множество J, будем обозначать через x_J.

Для каждого $J \subset \{1,2,\dots,n\}$ рассмотрим функцию

$$P_J(x) = \frac{1}{V} \prod_{i \in J} \left(\overline{x}^i - x^i\right) \prod_{j \in J'} x^j,$$

где $V = \prod_{i=1}^{n} \overline{x}^i$ – объем промежутка M. Функции $P_J(x)$ обладают следующими свойствами:

1. $\forall x \in M \quad 0 \le P_J(x) \le 1$,
2. $P_{J_1}\left(x_{J_1}\right) = 1$ и $P_{J_1}\left(x_{J_2}\right) = 0$, если $J_2 \ne J_1$,
3. $\forall x \in M \quad \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{|J|=k} P_J(x) \equiv 1$. (2)

Используя функции $P_J(x)$ сплайн $S(f)$ можно представить в виде

$$S(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{|J|=k} f(x_J) P_J(x). \tag{3}$$

Рассмотрим

$$|f(x) - S(f, x)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \sum_{|J|=k} f(x_J) P_J(x) \right|. \tag{4}$$

Используя (2) и (4), получим

$$|f(x) - S(f, x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \sum_{|J|=k} \left(f(x) - f(x_J)\right) P_J(x) \right| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \sum_{|J|=k} |f(x) - f(x_J)| P_J(x) \le \sum_{k=0}^{n} \sum_{|J|=k} \omega \left(\sqrt[q]{\sum_{p=1}^{n} \left| x_J^p - x^p \right|^q} \right) P_J(x).$$

Поскольку $\omega(t)$ и $\sqrt[q]{t}$ при $1 \le q \le 3$ – выпуклые вверх функции, $\omega(t)$ – возрастающая функция и верно (2), то, применяя неравенство Иенсена, получим

$$\left|f(x)-S(f,x)\right| \le \omega\left(\sqrt[q]{\sum_{k=0}^{n}\sum_{|J|=k}\sum_{p=1}^{n}\left|x_J^p - x^p\right|^q P_J(x)}\right). \tag{5}$$

Положим для $x \in M$

$$F_q(x) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{|J|=k}\sum_{p=1}^{n}\left|x_J^p - x^p\right|^q P_J(x). \tag{6}$$

Учитывая (5), будем иметь

$$\max_{x\in M}\left|f(x)-S(f,x)\right| \le \omega\left(\sqrt[q]{\max_{x\in M} F_q(x)}\right). \tag{7}$$

Преобразуем функцию $F_q(x)$, предварительно поменяв порядок суммирования

$$F_q(x) = \frac{1}{V}\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{J:|J|=k,\,p\in J}\left(x^p\right)^q\left(\overline{x}^p - x^p\right)\prod_{i\in J,\,i\ne p}\left(\overline{x}^i - x^i\right)\prod_{j\in J'} x^j + \right.$$

$$\left. + \sum_{J:|J|=k,\,p\notin J}\left(\overline{x}^p - x^p\right)^q x^p \prod_{i\in J}\left(\overline{x}^i - x^i\right)\prod_{j\in J',\,j\ne p} x^j\right).$$

Обозначим через J_p при $p = 1,\dots,n$ множества индексов

$$J_p = \begin{cases} J, & p \notin J \\ J\setminus\{p\}, & p \in J \end{cases}$$

и через J_p' – дополнение J_p до $\{1,2,\dots,n\}\setminus\{p\}$. Учитывая, что $P_{J_p}(x) = \dfrac{\overline{x}^p}{V}\prod_{i\in J_p}\left(\overline{x}^i - x^i\right)\prod_{j\in J_p'} x^j$, и пользуясь свойством (2), последнее равенство можно переписать в виде

$$F_q(x) = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\overline{x}^p}\left(\left(x^p\right)^q\left(\overline{x}^p - x^p\right)\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|J_p|=k} P_{J_p}(x) + \left(\overline{x}^p - x^p\right)^q x^p \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|J_p|=k} P_{J_p}(x)\right) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\overline{x}^p}\left(\left(x^p\right)^q\left(\overline{x}^p - x^p\right) + \left(\overline{x}^p - x^p\right)^q x^p\right) = \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\overline{x}^p}\left(\overline{x}^p - x^p\right)^{q+1}\left(\left(\frac{x^p}{\overline{x}^p - x^p}\right)^q + \frac{x^p}{\overline{x}^p - x^p}\right).$$

Далее воспользуемся неравенством [6, с.334]

$$2^q\left(t^q + t\right) \le (1+t)^{q+1},\ t \ge 0,\ 0 < q \le 3$$

при $t = \dfrac{x^p}{\overline{x}^p - x^p}$ и $1 \le q \le 3$. Получим

$$F_q(x) \le \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2^q\,\overline{x}^p}\left(\overline{x}^p - x^p\right)^{q+1}\left(1 + \frac{x^p}{\overline{x}^p - x^p}\right)^{q+1} = \sum_{p=1}^{n}\left(\frac{\overline{x}^p}{2}\right)^q = F_q(\widetilde{x}),$$

где $\widetilde{x} = \left(\widetilde{x}^1, ..., \widetilde{x}^n\right)$, $\widetilde{x}^p = \dfrac{\overline{x}^p}{2}$, $p = 1, ..., n$. Значит

$$\max_{x \in M} F_q(x) = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{\overline{x}^p}{2} \right)^q = |\widetilde{x}|_q^q ,$$

а поскольку $|\widetilde{x}|_q = \dfrac{1}{2} d_q(M)$, то

$$\sqrt[q]{F_q(\widetilde{x})} = \frac{1}{2} d_q(M).$$

Значит, учитывая (7) $\forall f \in H_P^{\omega,q}$

$$\max_{x \in M} |f(x) - S(f,x)| \le \omega\left(\sqrt[q]{F_q(\widetilde{x})}\right) = \omega\left(\frac{1}{2} d_q(M)\right).$$

Поскольку последнее верно для всех промежутков из разбиения T, то

$$\max_{x \in P} |f(x) - S(f,x)| \le \max_{M \in T} \omega\left(\frac{1}{2} d_q(M)\right) = \omega\left(\frac{1}{2} d_q(T)\right).$$

Для завершения доказательства осталось получить оценку снизу для величины $E_T(H_P^{\omega,q})$. Пусть промежуток $\overline{M}$ такой, что $d_q(\overline{M}) = d_q(T)$ и x_0 – центр описанного около $\overline{M}$ n-мерного шара относительно $|\cdot|_q$. Построим для $x \in P$ функцию

$$f_0(x) = \begin{cases} \omega\left(\dfrac{1}{2} d_q(T) - |x - x_0|_q\right), & |x - x_0|_q \le \dfrac{1}{2} d_q(T); \\ 0, & |x - x_0|_q > \dfrac{1}{2} d_q(T). \end{cases}$$

Функция $f_0(x)$ принадлежит классу $H_P^{\omega,q}$, поэтому

$$E_T(H_P^{\omega,q}) \ge \max_{x \in \overline{M}} |f_0(x) - S(f_0,x)| = \max_{x \in \overline{M}} |f_0(x)| \ge |f_0(x_0)| = \omega\left(\frac{1}{2} d_q(T)\right).$$

Учитывая оценки сверху и снизу, получим $E_T(H_P^{\omega,q}) = \omega\left(\dfrac{1}{2} d_q(T)\right)$.

Теорема доказана.

Пусть далее P представляет собой n-мерный куб $P = [0,b]^n$, и пусть задано разбиение каждого отрезка $[0,b]$ точками $a_k = \dfrac{kb}{N}$, $k = 0, ..., N$.

Тогда n-мерные кубы вида $M = \prod_{i=1}^{n} [a_{k_i - 1}, a_{k_i}]$, $1 \le k_i \le N$, $i = 1, ..., n$ порождают разбиение P.

Теорема 2. *Если* $\omega(t)$ – *выпулый вверх модуль непрерывности, то, в случае* $P=[0,b]^n$, $n\ge 3$, *имеет место следующее утверждение:*

$$E_T\left(H_P^{\omega,\infty}\right)=\max_{\substack{0\le x^2\le\frac{a}{2},\\ x^{i+1}\le x^i,\ i=\overline{2,n-1}}}\left(\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n\right).$$

Доказательство. Не нарушая общности, рассмотрим тот куб M, который в выбранной системе координат имеет вид:

$$M=\prod_{i=1}^{n}\left[0,\frac{b}{N}\right].$$

Разобъем промежуток M на 2^n-симплексов, определяемых следующими гиперплоскостями:

$$x^1+x^2=\frac{b}{N},\qquad x^{i+1}=x^i, i=\overline{1,n-1}. \tag{9}$$

Рассмотрим сначала симплекс M_1, определяемый системой

$$\begin{cases} x^1+x^2\le\dfrac{b}{N}\\ x^{i+1}\le x^i, i=\overline{1,n-1}.\end{cases} \tag{10}$$

Как и раньше будем использовать представление интерполяционного полилинейного сплайна в виде (3). Учитывая свойство (2), получим следующую оценку

$$|f(x)-S(f,x)|=\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\sum_{|J|=k}f(x_J)P_J(x)\right|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{n}\sum_{|J|=k}|f(x)-f(x_J)|P_J(x)\le\sum_{k=0}^{n}\sum_{|J|=k}\omega\left(|x-x_J|_\infty\right)P_J(x). \tag{11}$$

Для $x\in M_1$ введем следующее обозначение

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{|J|=k}\omega\left(|x-x_J|_\infty\right)P_J(x). \tag{12}$$

Покажем, пользуясь методом математической индукции, что для рассматриваемых x имеет место равенство

$$F(x)=\left(\frac{N}{b}\right)^n\left(\omega\left(x^1\right)\left(\frac{b}{N}-x^1\right)+\omega\left(\frac{b}{N}-x^1\right)x^1\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+$$

$$+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n. \quad (13)$$

Для проверки выполнения базиса индукции при $n=3$ необходимо преобразовать $\left|x-x_J\right|_\infty$ с учетом неравенств системы (10) и применить к полученному выражению свойство (2).

Предположение индукции будет иметь вид:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|Q|=k}\omega\left(\left|x-x_Q\right|_\infty\right)P_Q(x)=\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\left(\omega\left(x^1\right)\left(\frac{b}{N}-x^1\right)+\omega\left(\frac{b}{N}-x^1\right)x^1\right)\prod_{i=2}^{n-1}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+$$

$$+\sum_{p=2}^{n-2}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p}\omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n-1}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^{n-1}\right)x^{n-1},$$

где $Q\subset\{1,2,\ldots,n-1\}$.

Разобъем функцию (12) на сумму двух групп слагаемых. Первая группа включает те слагаемые, для которых $n\in J$, в этом случае, с учетом (10), $\left|x-x_J\right|_\infty$ не зависит от x^n. Вторая группа включает те слагаемые, для которых $n\notin J$, в этом случае $\left|x-x_J\right|_\infty=a-x^n$. Таким образом

$$F(x)=\frac{N}{b}\left(\frac{b}{N}-x^n\right)\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|Q|=k}\omega\left(\left|x-x_Q\right|_\infty\right)P_Q(x)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|Q|=k}P_Q(x).$$

К первой сумме применим предположение индукции, а ко второй – свойство (2), и получим равенство (13). Значит, согласно принципу математической индукции, (13) верно для любого натурального n.

Поскольку $\omega(t)$ – выпуклая вверх функция, то, применив неравенство Иенсена, из (13) получим

$$F(x)\le\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\omega\left(\frac{N}{b}\cdot 2\left(\frac{b}{N}-x^1\right)x^1\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+$$

$$+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n\le$$

$$\le\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+$$

$$+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n.$$

Учитывая последнее неравенство и равенство (12), из неравенства (11) получим

$$\max_{x\in M_1}\left|f(x)-S(f,x)\right|\le\max_{x\in M_1}\left(\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\right.$$

$$+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n\Bigg)\le$$

$$\le\max_{\substack{0\le x^2\le\frac{a}{2}\\ x^{i+1}\le x^i,\, i=\overline{2,n-1}}}\left(\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n\right)=$$

$$=\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x_0^i\right)+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x_0^p\right)x_0^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x_0^i\right)+$$

$$+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x_0^n\right)x_0^n,$$

где $x_0=\left(\frac{a}{2},x_0^2,x_0^3,\dots,x_0^n\right)$ – экстремальная точка.

Для остальных симплексов, на которые разбивается промежуток M гиперплоскостями (9) тот же результат может быть получен при замене переменных. Поэтому и на всем исходном множестве P имеет место оценка

$$\max_{x\in P}\left|f(x)-S(f,x)\right|\le\max_{\substack{0\le x^2\le\frac{a}{2}\\ x^{i+1}\le x^i,\, i=\overline{2,n-1}}}\left(\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n\right).$$

Для завершения доказательства осталось получить оценку снизу для величины $E_T(H_P^{\omega,\infty})$. Построим для $x\in P$ функцию

$$f_0(x)=\begin{cases}\omega\left(|x-x_0|_\infty\right), & x\in M_1;\\ 0, & x\notin M_1.\end{cases}$$

Функция $f_0(x)$ принадлежит классу $H_P^{\omega,\infty}$, поэтому

$$E_T(H_P^{\omega,\infty})\ge\max_{x\in M_1}\left|f_0(x)-S(f_0,x)\right|\ge\left|f_0(x_0)-S(f_0,x_0)\right|=\left|S(f_0,x_0)\right|.$$

Из представления интерполяционного полилинейного сплайна в виде (3), равенств (12) и (13), получим

$$S(\tilde{f}_0,x_0)=\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1}\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x_0^i\right)+$$

$$+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1}\omega\left(\frac{b}{N}-x_0^p\right)x_0^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x_0^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x_0^n\right)x_0^n.$$

Значит

$$E_T(H_P^{\omega,\infty}) \ge \left(\frac{N}{b}\right)^{n-1} \omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x_0^i\right)+$$

$$+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1} \omega\left(\frac{b}{N}-x_0^p\right)x_0^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x_0^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x_0^n\right)x_0^n=$$

$$=\max_{\substack{0\le x^2\le \frac{a}{2}\\ x^{i+1}\le x^i,\, i=\overline{2,n-1}}}\left(\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1} \omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1} \omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n\right).$$

Учитывая оценки сверху и снизу, получим

$$E_T\left(H_P^{\omega,\infty}\right)=\max_{\substack{0\le x^2\le \frac{a}{2},\\ x^{i+1}\le x^i,\, i=\overline{2,n-1}}}\left(\left(\frac{N}{b}\right)^{n-1} \omega\left(\frac{b}{2N}\right)\prod_{i=2}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=2}^{n-1}\left(\frac{N}{b}\right)^{n-p+1} \omega\left(\frac{b}{N}-x^p\right)x^p\prod_{i=p+1}^{n}\left(\frac{b}{N}-x^i\right)+\frac{N}{b}\omega\left(\frac{b}{N}-x^n\right)x^n\right).$$

Теорема доказана.

Теорема 3. *Если* $\omega(t)$ *– выпулый вверх модуль непрерывности, то, в случае* $P=[0,b]^2$, *имеет место следующее утверждение:*

$$E_T\left(H_P^{\omega,\infty}\right)=\frac{N}{b}\max_{0\le x\le \frac{b}{2N}}\left(\omega\left(\frac{b}{2N}\right)\left(\frac{b}{N}-x\right)+\omega\left(\frac{b}{N}-x\right)x\right).$$

Доказательство теоремы 3 с очевидными упрощениями повторяет доказательство теоремы 2.

Покажем, что результат теоремы 3 не совпадает с результатом теоремы 1, то есть равенство $E_T\left(H_P^{\omega,\infty}\right)=\omega\left(\frac{1}{2}d_\infty(T)\right)$ места не имеет. Для этого найдем величину отклонения интерполяционных полилинейных сплайнов на классе функций $H_P^{\omega,\infty}$ в случае $P=[0,b]\times[0,b]$, и $\omega(t)=t$

$$E_T\left(H_P^{\omega,\infty}\right)=\max_{0\le x^2\le \frac{1}{2}}\left(\frac{b}{2N}\left(\frac{b}{N}-x^2\right)+\left(\frac{b}{N}-x^2\right)x^2\right)=\frac{9}{16}\cdot\frac{b}{N},$$

причем наибольшее значение достигается при $x^2=\frac{b}{4N}$. Однако в данном случае $\omega\left(\frac{1}{2}d_{\infty}(T)\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{N}$.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В.Ф.** Интерполяция непрерывных отображений кусочно-линейными / В.Ф. Бабенко // Мат. заметки – 1978. – 24, №1. – С. 43–52.
2. **Бабенко В.Ф.** Об интерполяции многогранными функциями / В.Ф. Бабенко, А.А. Лигун // Мат. заметки – 1975. – 18, №6. – С. 803–814.
3. **Вакарчук С.Б.** К интерполяции билинейными сплайнами / С.Б. Вакарчук // Мат. заметки – 1990 – 47, №5. – С. 26–30.
4. **Вакарчук С.Б.** Некоторые вопросы одновременной аппроксимации функций двух переменных и их производных интепроляционными билинейными сплайнами / С.Б. Вакарчук, К.Ю. Мыскин // Укр. мат. журнал – 2005 – 57, №2. – С.147–157.
5. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближений / Н.П. Корнейчук – М., – 1987. С. 424.
6. **Малоземов В.Н.** Об отклонении ломаных / В.Н. Малоземов // Вестн. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия – 1966. – №7. – С.150–153.
7. **Сторчай В.Ф.** Об отклонении ломаных в метрике L_p / В.Ф. Сторчай // Мат. заметки – 1969 – 5, №1. – С. 31–37.
8. **Сторчай В.Ф.** Приближение функций двух переменных многогранными функциями в равномерной метрике // Изв. вузов. Математика – 1973 – 8. – С. 84–88.
9. **Шабозов М.Ш.** О погрешности интерполяции билинейными сплайнами / М.Ш. Шабозов // Укр. мат. журнал – 1994 – 46, №11. – С.1554–1560.
10. **Шабозов М.Ш.** Точные оценки одновременного приближения функций двух переменных и их производных билинейными сплайнами / М.Ш. Шабозов // Мат. заметки – 1996 – 59, №1. – С. 142–152.

Надійшла до редколегії 1.04.10

ISSN N 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". N 6/1/ 2010. Вип. 15. С. 38 – 48.

УДК 517.5

В.Ф. Бабенко, Н.В. Парфинович

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО АДАМАРУ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА ПОЛУОСИ

Одержано нові точні нерівності для дробових похідних за Адамаром для функцій, визначених на півосі.

Ключові слова: точна нерівність, дробова похідна, норма, функція.

Получены новые точные неравенства для дробных производных по Адамару для функций, определенных на полуоси.

Ключевые слова: точное неравенство, дробная производная, норма, функция.

New exact inequalities for Hadamard fraction derivatives of functions, defined on the half-line, are obtained.

Key words: exact inequality, fractional derivative, norm, function.

Точные неравенства типа Колмогорова, оценивающие нормы промежуточных производных через нормы самой функции и ее старшей производной, играют важную роль во многих областях математики. Для производных целых порядков получено большое количество результатов такого типа [1–3]. В то же время, для решения широкого круга задач требуется исследование производных дробных порядков. Неравенства типа Колмогорова в случае дробных производных изучены в значительно меньшей степени и, главным образом, для дробных производных в смысле Римана-Лиувилля [8, с. 85] и Маршо [8, с.95]. Обзор некоторых известных результатов в этом направлении можно найти, например, в [4;6; 10; 11; 13].

Дробные производные по Адамару [8, с.252] порядка $\alpha \in (0,1)$ функции $f : R_+ \to R$ определяются формулами:

$$(D_+^\alpha f)(x) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f(x)-f(t)}{\left(\ln \frac{x}{t}\right)^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{f(x)-f(xt)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t},$$

$$(D_-^\alpha f)(x) := \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^\infty \frac{f(x)-f(t)}{\left(\ln \frac{t}{x}\right)^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_1^\infty \frac{f(x)-f(xt)}{(\ln t)^{1+\alpha}} \frac{dt}{t}.$$

Через $C(R_+) = C(0,+\infty)$ будем обозначать пространство всех непрерывных и ограниченных функций $f: R_+ \to R$ с нормами

$$\|f\|_{C(R_+)} := \sup_{x\in R_+} |f(x)|,$$

а через $L_\infty(R_+)$ – пространство измеримых функций $f: R_+ \to R$ таких, что

$$\|f\|_{L_\infty(R_+)} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in R_+} |f(x)| < +\infty.$$

Пусть еще $L^1_\infty(R_+)$ – это пространство локально абсолютно непрерывных функций $f \in C(R_+)$ таких, что $f' \in L_\infty(R_+)$, а $L^D_\infty(R_+)$ – пространство локально абсолютно непрерывных функций $f \in C(R_+)$, таких, что $Df \in L_\infty(R_+)$, где $Df = xf'(x)$ для $x \in R_+$.

В [5] получены точные неравенства типа Колмогорова, оценивающие производные по Адамару $|(D^\alpha_\pm f)(x)|$ функций $f \in L^1_\infty(R_+)$ через $\|f\|_{C(R_+)}$ и $\|f'\|_{L_\infty(R_+)}$.

В данной работе мы приводим точные неравенства типа Колмогорова, оценивающие производные по Адамару $|(D^\alpha_\pm f)(x)|$ и нормы производных $\|D^\alpha_\pm f\|_{L_\infty(R_+)}$ функций $f \in L^D_\infty(R_+)$ через $\|f\|_{C(R_+)}$ и $\|Df\|_{L_\infty(R_+)}$.

Теорема. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$. *Для любой функции* $f \in L^D_\infty(R_+)$ *и любого* $x \in R_+$ *справедливо точное неравенство*

$$\left|(D^\alpha_+ f)(x)\right| \le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(2\|f\|_{C(R_+)}\frac{|\ln h|^{-\alpha}}{\alpha} + \|Df\|_{L_\infty(R_+)}\frac{|\ln h|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right), \qquad (1)$$

если $0 < h < 1$, *и точное неравенство*

$$\left|(D^\alpha_- f)(x)\right| \le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(2\|f\|_{C(R_+)}\frac{(\ln h)^{-\alpha}}{\alpha} + \|Df\|_{L_\infty(R_+)}\frac{(\ln h)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right), \qquad (2)$$

если $h > 1$.

Неравенства (1) и (2) обращаются в равенства для функций

$$g_{x,h}^{+}(u)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{h}, & 0<u<hx,\\ \ln\dfrac{u}{xh}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{h}, & hx\le u\le x,\\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{h}, & u>x\end{cases}\quad \text{и}\quad g_{x,h}^{-}(u)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\ln h, & 0<u<x,\\ \ln\dfrac{u}{x}-\dfrac{1}{2}\ln h, & x\le u\le hx,\\ \dfrac{1}{2}\ln h, & u>hx\end{cases}$$

соответственно.

Из (1) и (2) следует точное неравенство

$$\left\|D_{+}^{\alpha}f\right\|_{L_\infty(R_+)}\le\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(2\|f\|_{C(R_+)}\frac{|\ln h|^{-\alpha}}{\alpha}+\|Df\|_{L_\infty(R_+)}\frac{|\ln h|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right), \tag{3}$$

если $0<h<1$, *и точное неравенство*

$$\left\|D_{-}^{\alpha}f\right\|_{L_\infty(R_+)}\le\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(2\|f\|_{C(R_+)}\frac{(\ln h)^{-\alpha}}{\alpha}+\|Df\|_{L_\infty(R_+)}\frac{(\ln h)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right), \tag{4}$$

если $h>1$.

Минимизируя по h правые части (3) и (4), получим

Следствие 1. *Пусть* $\alpha\in(0,1)$. *Для любой функции* $f\in L_\infty^D(R_+)$ *справедливы точные неравенства*

$$\left\|D_{\pm}^{\alpha}f\right\|_{L_\infty(R_+)}\le\frac{2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\|Df\|_{L_\infty(R_+)}^{\alpha}\|f\|_{C(R_+)}^{1-\alpha}. \tag{5}$$

Через $UL_\infty^D(R_+)$ обозначим единичный шар в пространстве $L_\infty^D(R_+)$. Рассмотрим функцию

$$\Omega\left(\delta, UL_\infty^D(R_+)\right):=\sup_{\substack{f\in UL_\infty^D(R_+)\\ \|f\|_{C(R_+)}\le\delta}}\left\|D_{\pm}^{\alpha}f\right\|_{C(R_+)},\qquad \delta\ge 0. \tag{6}$$

Функция (6) называется модулем непрерывности оператора $D_{\pm}^{\alpha}$ на множестве $UL_\infty^D(R_+)$.

Из следствия 1 получаем

Следствие 2. *Пусть* $\alpha\in(0,1)$. *Для всех* $\delta>0$

$$\Omega\left(\delta, UL^{D}_{L_\infty(R_+)}\right) := \frac{2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\delta^{1-\alpha}.$$

Задача отыскания модуля непрерывности для данного оператора на данном множестве тесно связана с задачей о приближении неограниченного оператора ограниченными. Рассмотрим общую постановку этой задачи.

Пусть X и Y – банаховы пространства, $\Lambda(X,Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов $S: X \to Y$ и $A: X \to Y$ – оператор (не обязательно линейный) с областью определения $D_A \subset X$. Пусть также $Q \subset D_A$ – некоторый класс элементов.

Для $N > 0$ величина

$$E_N(A,Q) = \inf_{\substack{S\in\Lambda(X,Y)\\ \|S\|\le N}} \sup_{x\in Q} \|Ax - Sx\|_Y \tag{7}$$

называется наилучшим приближением оператора A на множестве Q линейными операторами $S: X \to Y$, такими что $\|S\| = \|S\|_{X\to Y} \le N$.

Задача состоит в отыскании величины (7) и экстремального оператора, т. е. оператора, реализующего $\inf$ в правой части (7). Эта задача возникла в исследованиях С.Б. Стечкина в 1965 г. Постановка задачи, первые важные результаты и ее решение для дифференциальных операторов малых степеней представлены в [9]. Обзор дальнейших результатов можно найти, например, в [1;2].

Функция

$$\Omega(\delta, Q) := \sup_{\substack{x\in Q\\ \|x\|_X\le\delta}} \|Ax\|_Y, \quad \delta \ge 0,$$

называется модулем непрерывности оператора A на множестве Q.

Отметим, что это определение обобщает приведенное выше определение модуля непрерывности оператора $D^{\alpha}_{\pm}$ на множестве $UL^{D}_{\infty}(R_+)$.

Ясно, что задача вычисления функции $\Omega(\delta, Q)$ для данного оператора является абстрактной версией задачи о неравенстве Колмогорова. С.Б. Стечкин [9] доказал, что

$$E_N(A,Q) \ge \sup_{\delta\ge 0}\{\Omega(\delta,Q) - N\delta\}. \qquad (8)$$

Неравенство (8) показывает связь между задачей Стечкина и неравенствами типа Колмогорова.

Следующая теорема дает решение задачи Стечкина для оператора $D^{\alpha}_{\pm}$ на множестве $UL^{D}_{\infty}(R_{+})$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$. *Для данного* $N > 0$ *пусть* $h_N \in R_{+}$ *удовлетворяет условию*

$$\frac{2}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\ln h_N\right|^{-\alpha} = N. \qquad (9)$$

Тогда

$$E_N\left(D^{\alpha}_{\pm}, UL^{D}_{\infty}(R_{+})\right) = \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{2^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\Gamma^{\frac{1}{\alpha}}(1-\alpha)}\cdot\frac{1}{N^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}.$$

Кроме того, операторы

$$(T^{+}_{h_N} f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{h_N}\frac{f(x)-f(tx)}{\left|\ln t\right|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}$$

и

$$(T^{-}_{h_N} f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{h_N}^{\infty}\frac{f(x)-f(tx)}{\left|\ln t\right|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}$$

являются экстремальными операторами в случаях $(D^{\alpha}_{+} f)$ *и* $(D^{\alpha}_{-} f)$ *соответственно.*

Неравенства для промежуточных производных тесно связаны с задачей Колмогорова о необходимых и достаточных условиях существования функции, для которой данные числа являются верхними гранями абсолютных значений ее производных соответствующих порядков (см., [12;7]). Обзор известных результатов см., напр., в [3].

Мы рассматриваем задачу Колмогорова в следующей постановке. Требуется найти необходимые и достаточные условия на числа M_0, M_1, M_α, обеспечивающие существование функции $f \in L^{D}_{\infty}(R_{+})$, такой что

$$\|f\|_{C(R_+)} = M_0, \quad \|D_\pm^\alpha\|_{L_\infty(R_+)} = M_\alpha, \quad \|Df\|_{L_\infty(R_+)} = M_1 .$$

Теорема 3. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$ *и* M_0, M_1, M_α – заданные числа. Для существования функции $f \in L_\infty^D(R_+)$, такой что

$$\|f\|_{C(R_+)} = M_0, \quad \|D_\pm^\alpha\|_{L_\infty(R_+)} = M_\alpha, \quad \|Df\|_{L_\infty(R_+)} = M_1 ,$$

необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$M_\alpha \le \frac{2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} M_1^\alpha M_0^{1-\alpha} . \tag{10}$$

Доказательство теоремы 1. Проведем сначала доказательство для случая $(D_+^\alpha f)$. Для произвольного $x \in R_+$ и $0 < h < 1$ имеем

$$\left|(D_+^\alpha f)(x)\right| = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \int_0^1 \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \right| \le$$

$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\left| \int_0^h \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \right| + \left| \int_h^1 \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \right| \right). \tag{11}$$

Сначала оценим первое слагаемое в (11).

$$\left| \int_0^h \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \right| \le 2\|f\|_{C(R_+)} \int_0^h \frac{1}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} = \frac{2\|f\|_{C(R_+)} \, |\ln h\,|^{-\alpha}}{\alpha} . \tag{12}$$

Для оценки второго слагаемого в (11) сначала отметим, что

$$f(x) - f(tx) = \int_{tx}^{x} f'(u)du \; .$$

Тогда

$$\left| \int_h^1 \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \right| = \left| \int_h^1 \int_{tx}^x \frac{uf'(u)du}{u|\ln t|^{1+\alpha}} \frac{dt}{t} \right| \le \|Df\|_{L_\infty(R_+)} \left| \int_h^1 \frac{d\,|\ln t\,|}{|\ln t|^{1+\alpha}} \int_{tx}^x \frac{du}{u} \right| \le$$

$$\le \|Df\|_{L_\infty(R_+)} \frac{|\ln h|^{1-\alpha}}{1-\alpha} . \tag{13}$$

Подставляя (12) и (13) в (11), для каждого $x \in R_+$ и $0 < h < 1$ получим неравенство (1).

Теперь проверим точность этого неравенства.

Пусть $x \in R_+$ и $0 < h < 1$, имеем:

$$\left\|g^+_{x,h}\right\|_{C(R_+)} = \frac{1}{2}|\ln h|$$

и

$$\left\|Dg^+_{x,h}\right\|_{L_\infty(R_+)} = 1.$$

Далее

$$\left|(D^\alpha_+ g^+_{x,h})(x)\right| = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^1 \frac{g^+_{x,h}(x) - g^+_{x,h}(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^h \frac{g^+_{x,h}(x) - g^+_{x,h}(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t} + \int_h^1 \frac{g^+_{x,h}(x) - g^+_{x,h}(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(-\ln\frac{1}{h}\int_0^h \frac{d\,|\ln t\,|}{|\ln t|^{1+\alpha}} + \int_h^1 \frac{\ln\frac{1}{t}}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{\ln\frac{1}{h}}{\alpha}\,|\ln h\,|^{-\alpha} + \frac{|\ln h|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(2\left\|g^+_{x,h}\right\|_{C(R_+)}\frac{|\ln h\,|^{-\alpha}}{\alpha} + \left\|Dg^+_{x,h}\right\|_{L_\infty(R_+)}\frac{|\ln h\,|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right).$$

Таким образом, для любых $x \in R_+$ и $0 < h < 1$ функция $g^+_{x,h}$ обращает неравенство (1) в равенство.

Рассмотрим теперь случай $(D^\alpha_- f)$. Для произвольного $x \in R_+$ и $h > 1$, действуя, как и при оценке $\left|(D^\alpha_+ f)(x)\right|$, имеем

$$\left|(D_-^\alpha f)(x)\right| = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left|\int_1^\infty \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le$$

$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\left|\int_1^h \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| + \left|\int_h^\infty \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right|\right). \tag{14}$$

Сначала оценим второе слагаемое в (14)

$$\left|\int_h^\infty \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le 2\|f\|_{C(R_+)}\int_h^\infty \frac{dt}{(\ln t)^{1+\alpha}t} = \frac{2\|f\|_{C(R_+)}}{\alpha}(\ln h)^{-\alpha}. \tag{15}$$

Теперь перейдем к оценке первого слагаемого

$$\left|\int_1^h \frac{f(x)-f(tx)}{(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| = \left|\int_1^h\int_{tx}^x \frac{uf'(u)du}{u(\ln t)^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right| \le \|Df\|_{L_\infty(R_+)}\left|\int_1^h \frac{d\ln t}{(\ln t)^{1+\alpha}}\int_{tx}^x \frac{du}{u}\right| \le$$

$$\le \|Df\|_{L_\infty(R_+)}\frac{(\ln h)^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \tag{16}$$

Подставляя (15) и (16) в (14), для каждого $x \in R_+$ и $h > 1$ получим неравенство (2).

Аналогично доказательству точности неравенства (1) проверяется, что неравенство (2) при любых $x \in R_+$ и $h > 1$ обращается в равенство для функции $g_{x,h}^-$.

Теорема доказана.

Доказательство следствия 1. Для доказательства (5) положим $H = |\ln h|$. Тогда в случае (D_+^α) из (3) получим

$$\left\|D_+^\alpha f\right\| \le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\left(2\|f\|_{C(R_+)}\frac{H^{-\alpha}}{\alpha} + \|Df\|_{L_\infty(R_+)}\frac{H^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right). \tag{17}$$

Пусть $F(H) = 2\|f\|_{C(R_+)}\dfrac{H^{-\alpha}}{\alpha} + \|Df\|_{L_\infty(R_+)}\dfrac{H^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Для производной $F(H)$ имеем

$$F'(H) = -2\|f\|_{C(R_+)}H^{-\alpha-1} + \|Df\|_{L_\infty(R_+)}H^{-\alpha}.$$

Необходимое условие экстремума запишется

$$-2\|f\|_{C(R_+)}H^{-\alpha-1} + \|Df\|_{L_\infty(R_+)}H^{-\alpha} = 0,$$

откуда

$$H_{min} = \frac{2\|f\|_{C(R_+)}}{\|Df\|_{L_\infty(R_+)}},$$

где H_{min} – точка минимума функции $F(H)$.

Подставляя H_{min} в выражение для $F(H)$, получим

$$\min_H F(H) = \frac{2\|f\|_{C(R_+)}}{\alpha}\left(\frac{2\|f\|_{C(R_+)}}{\|Df\|_{L_\infty(R_+)}}\right)^{-\alpha} + \frac{\|Df\|_{L_\infty(R_+)}}{1-\alpha}\left(\frac{2\|f\|_{C(R_+)}}{\|Df\|_{L_\infty(R_+)}}\right)^{1-\alpha} =$$

$$= \frac{2^{1-\alpha}}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C(R_+)}^{1-\alpha}\|Df\|_{L_\infty(R_+)}^{\alpha}. \qquad (18)$$

Теперь, переходя к inf по H в (17) и используя (18), получим (5). Случай (D_-^α) рассматривается аналогично.

Следствие доказано.

Доказательство теоремы 2. Ясно, что оператор $(T_{h_N}^+ f)(x) = \dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^{h_N}\frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}$ является ограниченным оператором из $C(R_+)$ в $C(R_+)$ и, кроме того, $\left\|T_{h_N}^+\right\| \le N$. Для каждого $f \in UL_\infty^D(R_+)$ оценим уклонение $\left\|D_+^\alpha f - T_{h_N}^+ f\right\|_{C(R_+)}$. Имеем

$$\left\|D_+^\alpha f - T_{h_N}^+ f\right\|_{C(R_+)} \le \left\|\frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_h^1 \frac{f(x)-f(tx)}{|\ln t|^{1+\alpha}}\frac{dt}{t}\right\| \le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\|Df\|_{L_\infty(R_+)}\frac{|\ln h|^{1-\alpha}}{1-\alpha} \le$$

$$\le \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{|\ln h|^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma^{\frac{1}{\alpha}}(1-\alpha)N^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{1-\alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{2^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\Gamma^{\frac{1}{\alpha}}(1-\alpha)}\cdot\frac{1}{N^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}$$

Таким образом, оценка сверху для $E_N\left(D_+^\alpha, UL_\infty^D(R_+)\right)$ получена. Получим оценку снизу. Из (8) имеем

$$E_N\left(D_+^\alpha, UL_\infty^D(R_+)\right) \ge \sup_{\delta>0}\left\{\Omega\left(\delta, UL_\infty^D(R_+)\right) - N\delta\right\}.$$

Используя следствие 2 и условие (9), получим

$$E_N\left(D_+^\alpha, UL_\infty^D(R_+)\right) \geq \sup_{\delta>0}\left\{\frac{2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\delta^{1-\alpha} - N\delta\right\} = \sup_{\delta>0} G(\delta). \qquad (19)$$

Необходимое условие экстремума для функции $G(\delta)$ имеет вид

$$\frac{2^{1-\alpha}\delta^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} - N = 0,$$

откуда получаем выражение для точки максимума δ_{max} функции $G(\delta)$

$$\delta_{max} = \left(\frac{2^{1-\alpha}}{N\Gamma(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \qquad (20)$$

Сопоставляя (19) и (20), получим необходимую оценку снизу

$$E_N\left(D_+^\alpha, UL_\infty^D(R_+)\right) \geq \frac{2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{2^{1-\alpha}}{N\Gamma(1-\alpha)}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - N\left(\frac{2^{1-\alpha}}{N\Gamma(1-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} =$$

$$= \frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{2^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{\Gamma^{\frac{1}{\alpha}}(1-\alpha)}\cdot\frac{1}{N^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}.$$

Аналогично устанавливается справедливость утверждения теоремы 2 в случае $(D_-^\alpha f)$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что справедливо неравенство (10) и выберем $0 < L_0 \leq M_0$ так, чтобы

$$M_\alpha = \frac{2^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} M_1^\alpha L_0^{1-\alpha}.$$

Положим $M_1 = 1$. Рассмотрим функцию $g_{h,x}^+$, где h удовлетворяет условию $h = e^{-2L_0}$. Для этой функции имеем:

$$\left\|g_{h,x}^+\right\|_{C(R_+)} = L_0, \quad \left\|Dg_{x,h}^+\right\|_{L_\infty(R_+)} = 1,$$

$$\left\|D_+^\alpha g_{h,x}^+\right\|_{L_\infty(R_+)} = \frac{|\ln h|^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \frac{(2L_0)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = M_\alpha.$$

Теперь построим функцию $g(u) = g_{h,x}^+(u) + M_0 - L_0$. Ясно, что $g \in L_\infty^D(R_+)$ и

$$\|g\|_{C(R_+)} = M_0, \quad \|Dg\|_{L_\infty(R_+)} = M_1, \quad \|D_+^\alpha g\|_{L_\infty(R_+)} = M_\alpha .$$

Аналогично, рассмотрев функцию $g(u) = g_{h,x}^-(u) + M_0 - L_0$, покажем, что теорема верна и в случае $(D_-^\alpha f)$.

Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи/ В.В. Арестов// Усп. мат. наук – 1996. – 51, № 6. – С. 88 – 124.
2. **Арестов В.В.** Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными/ В.В. Арестов, В.Н. Габушин// Известия вузов. Математика. 1995. – № 11. С. 44 – 66.
3. **Бабенко В.Ф.** Неравенства для производных и их приложения/ В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов – К., 2003. – 590 с.
4. **Бабенко В.Ф.** Про нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку/ В.Ф. Бабенко, М.Г. Чурілова// Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 2001. Вип. 6. – С. 16 – 20.
5. **Бабенко В.Ф.** О неравенствах типа Колмогорова для дробных производных по Адамару функций, заданных на полуоси/ В.Ф. Бабенко, Н.В. Парфинович// Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 2009. Вип. 6/1. – С. 31 – 35.
6. **Гейсберг С.П.** Обощение неравенства Адамара. Исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций/ С.П. Гейсберг// Сб. Науч. Тр. ЛМИ. – 1965. – 50. – С.42 – 54.
7. **Колмогоров А.Н.** О неравенствах между верхними гранями промежуточных производных произвольных функцій на бесконечном интервале/ А.Н. Колмогоров// Избранные труды. Математика, механіка. – 1985. – С. 252–263.
8. **Самко С.Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев – Минск, 1987. – 650 с.
9. **Стечкин С.Б.** Наилучшие приближения линейных операторов/ С.Б. Стечкин // Матем. заметки – 1967. – 1, № 2. – С. 137–148.
10. **Чурілова М.С.** Нерівності типу Колмогорова для похідних дробового порядку та їх застосування в теорії апроксимації: дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук/ М.С. Чурілова – Д., 2006. – 150 с.
11. **Arestov V.V.** Inequalities for fractional derivatives on the half-line/ V.V. Arestov// Approximation theory, Banach center publications. – 1979. – Vol. 4. – P. 19 – 34.
12. **Kolmogorov A.N.** On inequalities between the upper bounds of the successive derivatives of an arbitrary function on an infinite interval/ , A.N. Kolmogorov// Uchenye Zapiski MGU. – 1939. – V. 30, № 3. – C. 3–13.
13. **Magaril-Il'yaev G.G.** On the Kolmogorov inequality for fractional derivatives on the half-line/ G.G. Magaril-Il'yaev, V.M. Tikhomirov// Anal. Math. – 1981. – Vol. 7, № 1. – P. 37 – 47.

Надійшла до редколегії 30.03.10

ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". № 6/1. 2010. Вип. 15. С. 49 –58.

УДК № 517.5

В. Ф. Бабенко*,**, С.В.Савела*

* *Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара*

** *Институт прикладной математики и механики НАН Украины*

ОЦЕНКИ АППРОКСИМАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА ПОДПРОСТРАНСТВАМИ, ПОРОЖДЕННЫМИ ЗАДАННЫМ РАЗЛОЖЕНИЕМ ЕДИНИЦЫ

Знайдені точні нерівності типу Джексона-Черниха для апроксимації у гільбертових просторах.

Ключові слова: найкраще наближення, точні нерівності, гільбертовий простір, розклад одиниці, група унітарних операторів.

Получены точные неравенства типа Джексона-Черныха для аппроксимации в гильбертовых пространствах.

Ключевые слова: наилучшее приближение, точные неравенства, гильбертово пространство, разложение единицы, группа унитарных операторов.

The exact inequalities of the Jackson-Chernih type of the approximation in the Hilbert space are obtained.

Key words: best approximation, exact inequalities, Hilbert space, expansion unit, group unitary operators.

Пусть C и L_p $(1\le p \le \infty)$ пространства 2π-периодических функций $f: R \to R$ с соответствующими нормами $\| f\|_C$ и $\| f\|_{L_p} = \| f\|_p$. Пусть $X = C$ или $X = L_p$. Как известно, модулем непрерывности функции $f \in X$ в пространстве X называется функция

$$\omega(f; t)_X = \sup_{|u|\le t} \| f(\cdot+u)-f(\cdot) \|_X, \qquad t \ge 0;$$

а величина

$$E(f, \mathbf{N})_X = \inf_{\eta\in N} \| f-\eta \|_X$$

называется наилучшим приближением функции $f \in X$ подпространством $\mathbf{N}\subset X$.

Для наилучших равномерных приближений непрерывных 2π-периодических функций тригонометрическими полиномами порядка не выше $(n-1)$ в 1911 году Д. Джексон [1] доказал, что

$$E(f, T_{2n-1})_C \le \chi\, \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \qquad (n = 1, 2,\ldots),$$

где константа χ не зависит ни от функции f, ни от n. Эти, а также аналогичные им соотношения в других функциональных пространствах и с модулем гладкости любого порядка известны в теории приближений как теоремы (или неравенства) Джексона.

Первое точное неравенство такого вида было получено Н.П. Корнейчуком в 1962 году [6], который доказал, что

$$E(f, \mathcal{T}_{2n-1})_C < \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_C, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Точные неравенства типа Джексона в пространстве L_2 получены в 1967 году Н.И. Черных [9; 10]. Им, в частности, было доказано, что для любой функции f из L_2, которая не является константой (с точностью до множества меры нуль), имеет место неравенство

$$E(f, \mathcal{T}_{2n-1})_{L_2} < \frac{1}{\sqrt{2}}\, \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)_{L_2} \qquad n = 1, 2, \ldots , \tag{1}$$

причем для произвольного фиксированного n константа $\frac{1}{\sqrt{2}}$ неулучшаема.

В упомянутой работе Н.И. Черных [9] в качестве промежуточного результата получено также неулучшаемое неравенство

$$E^2(f, \mathcal{T}_{2n-1})_2 \le \frac{n}{4}\int_0^{\pi/n} \omega^2(f;t)_2 \sin nt\, dt, \tag{2}$$

представляющее и самостоятельный интерес.

Аналогичные результаты для наилучших L_2-приближений функций $f \in L_2(\boldsymbol{R})$ целыми функциями експоненциального типа σ получены И.И. Ибрагимовым и Ф.Г. Насибовым [5], а также, независимо, В.Ю. Поповым [7]. В.Ф. Бабенко и Г.С. Жигановой [3] были получены точные неравенства типа Джексона для наилучших L_2-приближений функций $f \in L_2(\boldsymbol{R})$ частными суммами рядов по системе вейвлет Шеннона-Котельникова.

В ряде работ М.Л. Горбачука, Я.И. Грушки и С.М. Торбы [4; 8] были, в частности, получены неравенства типа Джексона для наилучших приближений элементов гильбертова пространства целыми векторами экспоненциального типа некоторого оператора. Однако, утверждений о точности констант в полученных неравенствах в упомянутых работах нет.

В данной работе мы получим точные неравенства типа (1) и (2) в случае приближения элементов гильбертова пространства подпространствами, порожденными заданным разложением единицы и укажем условия точности полученных неравенств.

Пусть H – комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$, в котором задано разложение единицы, то есть однопараметрическое семейство проектирующих операторов E_s $(-\infty < s < \infty)$, удовлетворяющее условиям:

1) $E_u \cdot E_v = E_s$ где $s = \min\{u, v\}$;

2) $E_{s-0} = E_s$ $(-\infty < s < \infty)$ в смысле сильной сходимости;

3) $E_{-\infty} = 0$, $E_{+\infty} = I$.

Будем рассматривать оценки наилучшего приближения элементов $f \in H$ подпространствами вида

$$W_\sigma = \left\{ \int_{-\infty}^{\sigma} dE_s g \ : \ g \in H \right\}, \quad \sigma > 0,$$

т. е. величины

$$E_\sigma(f) = \inf_{g \in W_\sigma} \| f - g \|.$$

Заданное разложение единицы порождает группу унитарных операторов [2, § 73]

$$U_t f = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} dE_s f, \qquad (0 \le t < \infty)$$

(интеграл в правой части – это операторный интеграл Стилтьеса).

Для $t \ge 0$ определим функцию $\omega(f; t) = \sup_{|\delta| \le t} \| U_\delta f - If \|$, которая является естественным аналогом модуля непрерывности функции f из пространства L_2.

Теорема 1. *Пусть $f \in H$. Тогда для любого $\sigma > 0$ справедливо неравенство*

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi/\sigma} \| U_t f - f \|^2 \sin(\sigma t) dt \right)^{1/2}. \tag{3}$$

Если разложение единицы таково, что для любого положительного ε $E_{\sigma+\varepsilon} - E_\sigma \ne 0$, то неравенство (3) является неулучшаемым.

При доказательстве этого и последующих результатов будем использовать модифицированный метод изложенный в [9; 10].

Доказательство. Элемент f гильбертова пространства H представим в виде $f = \int_{-\infty}^{\infty} dE_s f$. Тогда имеем

$$E_\sigma^2(f) = \int_{\sigma}^{\infty} d(E_s f, f). \tag{4}$$

Рассмотрим разность

$$U_t f - f = -\int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{ist}) dE_s f$$

и

$$\| U_t f - f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | 1 - e^{ist} |^2 \, d(E_s f, f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos ts) d(E_s f, f) \geq$$

$$\geq 2 \int_{\sigma}^{\infty} (1 - \cos ts) d(E_s f, f).$$

Таким образом, учитывая (4), получаем

$$\| U_t f - f \|^2 \geq 2\, E_\sigma^2(f) - 2 \int_{\sigma}^{\infty} \cos(ts) d(E_s f, f),$$

$$E_\sigma^2(f) \leq \frac{1}{2} \| U_t f - f \|^2 + \int_{\sigma}^{\infty} \cos(ts) d(E_s f, f).$$

Умножая обе части последнего неравенства на функцию $\sin(\sigma t)$ и интегрируя обе части полученного неравенства по промежутку $\left[0; \frac{\pi}{\sigma}\right]$, получаем

$$\int_0^{\pi/\sigma} \sin(\sigma t) E_\sigma^2(f) dt \leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi/\sigma} \| U_t f - f \|^2 \sin(\sigma t) dt +$$

$$+ \int_0^{\pi/\sigma} \int_{\sigma}^{\infty} \sin(\sigma t) \cos(st) d(E_s f, f) dt. \tag{5}$$

Рассмотрим последний интеграл:

$$\int_\sigma^\infty\left(\int_0^{\pi/\sigma}\sin(\sigma t)\cos(st)dt\right)d(E_sf,f) = \int_\sigma^\infty\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/\sigma}[\sin(\sigma+s)t+\sin(\sigma-s)t]dt\right)d(E_sf,f) =$$

$$= \int_\sigma^\infty\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma+s}+\frac{1}{\sigma-s}+\frac{\cos s\pi/\sigma}{\sigma+s}+\frac{\cos s\pi/\sigma}{\sigma-s}\right]d(E_sf,f) =$$

$$= \int_\sigma^\sigma\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{s\pi}{\sigma}\right)\frac{2\sigma}{(\sigma-s)(\sigma+s)}d(E_sf,f)\,.$$

Если $s > \sigma$, то $\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{s\pi}{\sigma}\right)\frac{2\sigma}{(\sigma-s)(\sigma+s)} \le 0$, поэтому второе слагаемое в неравенстве (5) неположительно и

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sigma}{2}\int_0^{\pi/\sigma}\| U_tf - f\|^2 \sin(\sigma t)dt\right)^{1/2}.$$

Осталось доказать точность данного неравенства. Для этого рассмотрим ненулевые элементы пространства H

$$f_{\sigma,\varepsilon} = \int_\sigma^{\sigma+\varepsilon} dE_sf\,,$$

где σ – фиксированная величина, а ε – произвольное положительное число. Тогда, согласно определению $f_{\sigma,\varepsilon}$,

$$E_\sigma^2(f_{\sigma,\varepsilon}) = \int_\sigma^{\sigma+\varepsilon} d(E_sf,f)$$

и

$$\| U_t f_{\sigma,\varepsilon} - f_{\sigma,\varepsilon}\|^2 = 2\ E_\sigma^2(f_{\sigma,\varepsilon}) - 2\int_\sigma^{\sigma+\varepsilon}\cos(ts)d(E_sf,f)\,.$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, но уже для элемента $f_{\sigma,\varepsilon} \in H$, получим

$$\int_0^{\pi/\sigma}\| U_tf_{\sigma,\varepsilon} - f_{\sigma,\varepsilon}\|^2 \sin(\sigma t)dt = 2\ E_\sigma^2(f_{\sigma,\varepsilon})\ \frac{2}{\sigma}\ -\ 2\int_\sigma^{\sigma+\varepsilon}\left(\int_0^{\pi/\sigma}\cos(st)\sin(\sigma t)dt\right)d(E_sf,f)\,.$$

Рассмотрим интеграл в правой части последнего равенства

$$\int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon}\left(\int_{0}^{\pi/\sigma}\cos(st)\sin(\sigma t)dt\right)d(E_s f, f) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\sigma}^{\sigma+\varepsilon}\left[\frac{1}{\sigma+s}+\frac{\cos{}^{s\pi}/_{\sigma}}{\sigma+s}+\frac{1}{\sigma-s}+\frac{\cos{}^{s\pi}/_{\sigma}}{\sigma-s}\right]d(E_s f, f).$$

Покажем, что подинтегральная сумма является бесконечно малой величиной при $s \to \sigma$ (то есть, при $\varepsilon \to 0$). Очевидно, что

$$\left(\frac{1+\cos{}^{s\pi}/_{\sigma}}{\sigma+s}\right) \to 0, \quad \text{при } s \to \sigma$$

и

$$\left(\frac{1+\cos{}^{s\pi}/_{\sigma}}{\sigma-s}\right) \sim K\left(1-\frac{s}{\sigma}\right) \to 0, \quad \text{при } s \to \sigma \ (K - \text{const}).$$

Следовательно, отнощение

$$\frac{E_{\sigma}(f_{\sigma,\varepsilon})}{\left(\frac{\sigma}{2}\int_{0}^{\pi/\sigma}\| U_t f_{\sigma,\varepsilon} - f_{\sigma,\varepsilon}\|^2 \sin(\sigma t)dt\right)^{1/2}}$$

при достаточно малом ε как угодно близко к $\frac{1}{\sqrt{2}}$, что и доказывает неулучшаемость константы $\frac{1}{\sqrt{2}}$ в неравенстве (3).

Теорема 1 доказана.

Следствие. *Пусть A – самосопряженный оператор, порожденный заданным разложением единицы* E_s $(-\infty < s < \infty)$. *Причем* $Af = \int_{-\infty}^{\infty} s dE_s f$. *Тогда* *для любого натурального r, любого $\sigma > 0$ и произвольного $f \in D(A^r)$ справедливо неравенство*

$$E_\sigma(f) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sigma^r}\left(\frac{\sigma}{2}\int_0^{\pi/\sigma}\| U_t(A^r f) - A^r f\|^2 \sin(\sigma t)dt\right)^{1/2}. \qquad (6)$$

Если разложение единицы таково, что для любого положительного ε *выполняется* $E_{\sigma+\varepsilon} - E_\sigma \ne 0$, *то неравенство является неулучшаемым.*

Доказательство. Доказательство утверждения непосредственно следует из доказательства теоремы 1 и цепочки неравенств

$$E_\sigma^2(f) = \int_\sigma^\infty d(E_s f, f) = \int_\sigma^\infty \frac{s^{2r}}{s^{2r}} d(E_s f, f) \le \frac{1}{\sigma^{2r}}\int_\sigma^\infty s^{2r} d(E_s f, f) = \frac{1}{\sigma^{2r}} E_\sigma^2(A^r f) \le$$

$$\le \frac{1}{\sigma^{2r}}\,\frac{\sigma}{4}\int_0^{\pi/\sigma}\| U_t(A^r f) - A^r f\|^2 \sin(\sigma t)dt.$$

Для доказательства точности данного неравенства рассмотрим ненулевые элементы из области определения самосопряженного оператора $D(A^r)$

$$f_{\sigma,\varepsilon} = \int_\sigma^{\sigma+\varepsilon} dE_s f,$$

где σ – фиксированная величина, а ε – произвольное положительное число. Такие элементы всегда можно найти, поскольку $E_{\sigma+\varepsilon} - E_\sigma \ne 0$ и область определения оператора $D(A^r)$ всюду плотна в H.

$$E_\sigma^2(A^r f_{\sigma,\varepsilon}) = \int_\sigma^{\sigma+\varepsilon} s^{2r} d(E_s f_{\sigma,\varepsilon}, f_{\sigma,\varepsilon}) \le (\sigma+\varepsilon)^{2r} E_\sigma^2(f_{\sigma,\varepsilon}).$$

Следовательно,

$$\frac{E_\sigma^2(f_{\sigma,\varepsilon})}{\frac{\sigma}{2}\int_0^{\pi/\sigma}\| U_t(A^r f_{\sigma,\varepsilon}) - A^r f_{\sigma,\varepsilon}\|^2 \sin(\sigma t)dt} \ge$$

$$\geq \frac{E_\sigma^2(A^r f_{\sigma,\varepsilon})}{(\sigma+\varepsilon)^{2r}\frac{\sigma}{2}\int\limits_0^{\pi/\sigma}\| U_t(A^r f_{\sigma,\varepsilon}) - A^r f_{\sigma,\varepsilon}\|^2 \sin(\sigma t)dt} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\frac{(1-\varepsilon)}{(\sigma+\varepsilon)^{2r}} > \frac{1}{2\sigma^{2r}}\left(1-\frac{(\sigma+2r)^2}{\sigma+2r\varepsilon}\varepsilon\right).$$

Поскольку ε может быть как угодно близким к нулю, неравенство

$$E_\sigma(f) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sigma^r}\left(\frac{\sigma}{2}\int\limits_0^{\pi/\sigma}\| U_t(A^r f) - A^r f\|^2 \sin(\sigma t)dt\right)^{1/2}$$

является точным.

Теорема 2. *Для произвольного элемента $f \in H$ и любого $\sigma > 0$ справедливо точное неравенство*

$$E_\sigma(f) < \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\left(f;\frac{\pi}{\sigma}\right). \tag{7}$$

Если разложение единицы таково, что для любого положительного ε и произвольного натурального ν $E_{\nu\sigma+\varepsilon} - E_{\nu\sigma} \neq 0$, то неравенство (7) является неулучшаемым.

Доказательство. В силу равенства (4), а также определения функции $\omega(f;t)$ и её монотонности, можем записать

$$E_\sigma^2(f) \leq \frac{1}{2}\frac{\sigma}{2}\int\limits_0^{\pi/\sigma}\sin(\sigma t)\omega^2(f;t)dt < \frac{1}{2}\frac{\sigma}{2}\,\omega^2\left(f;\frac{\pi}{\sigma}\right)\int\limits_0^{\pi/\sigma}\sin(\sigma t)dt = \frac{1}{2}\,\omega^2\left(f;\frac{\pi}{\sigma}\right).$$

Перейдём к доказательству точности неравенства (6). Рассмотрим $\sigma > 0$ и точки на полуоси $\nu\sigma$ и $\nu\sigma+\varepsilon$, $\nu\in N$. На каждом промежутке $[\nu\sigma;\ \nu\sigma+\varepsilon]$, $\nu\in N$ выберем элемент $f_{\nu\sigma} \in (E_{\nu\sigma+\varepsilon} - E_{\nu\sigma})H$ с нормой $\| f_{\nu\sigma}\| = 1$. Построим элемент

$$F = \sqrt{\frac{1}{\pi\varepsilon}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu}\right)f_{\nu\sigma}.$$

Так как элементы $f_{\nu\sigma}$ имеют единичные нормы и ортогональны друг другу при различных ν, то

$$E_\sigma^2(F) = \frac{1}{\pi\varepsilon}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu}\right)^2$$

и

$$\| U_t F - F \|^2 = 2\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos(ts))d(E_s F, F) = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\nu\sigma}^{\nu\sigma+\varepsilon}(1-\cos(ts))d(E_s F, F) =$$

$$= \frac{2}{\pi\varepsilon}\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-\cos(t\xi_\nu^\varepsilon))\left(\frac{\sin\sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu}\right)^2, \text{ где } \nu\sigma < \xi_\nu^\varepsilon < \nu\sigma+\varepsilon.$$

Зафиксируем σ и, задав ε $(0 < \varepsilon < \frac{\pi}{\sigma})$, построим четную $\frac{2\pi}{\sigma}$- периодическую непрерывную на всей числовой оси функцию

$$g(\varepsilon, t) = \begin{cases} 1-\dfrac{t}{2\varepsilon}, & 0 \le t \le 2\varepsilon, \\ 0, & 2\varepsilon \le t \le \dfrac{\pi}{\sigma}. \end{cases}$$

Функция $g(\varepsilon, t)$ разлагается в ряд Фурье:

$$g(\varepsilon, t) = \frac{\varepsilon}{\pi} + \frac{2}{\pi\varepsilon}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu}\right)^2\cos(\sigma\nu t),$$

причем $g(\varepsilon, 0) = 1$, $g(\varepsilon, \frac{\pi}{\sigma}) = 0$. Отметим также, что

$$[g(\varepsilon, 0) - g(\varepsilon, t)] = \frac{2}{\pi\varepsilon}\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-\cos(\nu\sigma t)\left(\frac{\sin\sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu}\right)^2.$$

Тогда

$$\left|\| U_t F - F \|^2 - [g(\varepsilon,0) - g(\varepsilon,t)]\right| =$$

$$= \left|\frac{2}{\pi\varepsilon}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\cos(\nu\sigma t) - \cos(t\xi_\nu^\sigma)\right]\left(\frac{\sin\sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu}\right)^2\right| \le L\,\varepsilon \qquad (L\text{ - const}).$$

Поскольку

$$E_\sigma^2(F) = \frac{1}{\pi\varepsilon}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\sigma\nu\varepsilon}{\sigma\nu}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(g(\varepsilon,0) - \frac{\varepsilon}{\pi}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\pi}\right),$$

то

$$\frac{E_\sigma^2(F)}{\omega^2\left(F,\dfrac{\pi}{\sigma}\right)}=\frac{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\varepsilon}{\pi}\right)}{\sup\limits_{|t|\le\pi/\sigma}\|U_tF-F\|^2}\ge\frac{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{\varepsilon}{\pi}\right)}{L\varepsilon+\left[g(\varepsilon,0)-g\left(\varepsilon,\dfrac{\pi}{\sigma}\right)\right]}=\frac{1}{2}\frac{\left(1-\dfrac{\varepsilon}{\pi}\right)}{L\varepsilon+1}.$$

Устремляя $\varepsilon\to 0$, получим $\dfrac{E_\sigma^2(F)}{\omega^2\left(F,\dfrac{\pi}{\sigma}\right)}\ge\dfrac{1}{2}$, что и доказывает утверждение теоремы.

Теорема 2 доказана.

Библиографические ссылки

1. **Джексон Д.** (Jackson). Uber die Genauigkeit des Annaherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegeben Grades und trigonometrischen Summen gegebener Ordnung – Diss., Gottingen, 1911.
2. **Ахиезер Н.И.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. / Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. – М., 1966, – 543 с.
3. **Бабенко В.Ф.** О неравенствах типа Джексона для наилучших L_2-приближений при помощи вейвлет / В.Ф. Бабенко, Г.С. Жиганова, Л.С. Новикова // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2006. – Вип. 11 – С. 3 – 8.
4. **Горбачук М.Л.** Прямі й обернені теореми в теорії наближень методом Рітца / М.Л. Горбачук, Я.І. Грушка, С.М. Торба // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, №5. – С.633 – 643.
5. **Ибрагимов И.И.** Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени. / И.И. Ибрагимов, Ф.Г. Насибов // ДАН СССР. – 1970. – 194, № 5. – С. 1013–1016.
6. **Корнейчук Н.П.** Точная константа в теореме Д.Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций / Н.П. Корнейчук // ДАН СССР. – 1962. – 145. – С. 514 – 515.
7. **Попов В.Ю.** О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа / В.Ю. Попов // Известия ВУЗов. Математика. – 1972. – 121, № 6. – С. 65 – 73.
8. **Торба С.М.** Операторний підхід до прямих і обернених теорем теорії наближень: автореф. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук – 2007. – 20 с.
9. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 / Н.И. Черных // Труды МИАН. – 1967. – 88. – С. 71 – 74.
10. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 / Н.И. Черных // Матем. заметки. – 1967. – 2, №5. – С. 513 – 522.

Надійшла до редколегії 01.04.10

УДК 517.5

Р.О. Биличенко

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ СТЕПЕНЕЙ НОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Для степенів $k < r$ нормального оператора A гільбертового простору H знайдено найкраще наближення необмеженого оператора A^k на класі елементів, для яких $\|A^r x\| \le 1$, і найкраще наближення класу елементів, таких, що $\|A^k x\| \le 1$, класом елементів, для яких $\|A^r x\| \le N$, $N > 0$.

Ключові слова: нормальний оператор, спектральна теорема, задача Стечкіна.

Для степеней $k < r$ нормального оператора A гильбертова пространства H найдено наилучшее приближение оператора A^k на классе элементов, для которых $\|A^r x\| \le 1$, и наилучшее приближение класса элементов, таких, что $\|A^k x\| \le 1$, классом элементов, для которых $\|A^r x\| \le N$, $N > 0$.

Ключевые слова: нормальный оператор, спектральная теорема, задача Стечкина.

The best approximation of unbounded operator A^k in class with $\|A^r x\| \le 1$ and the best approximation of class with $\|A^k x\| \le 1$ by class with $\|A^r x\| \le N$, $N > 0$ for powers $k < r$ of normal operator A in the Hilbert space H are found.

Key words: normal operator, spectral theorem, Stechkin's problem.

Рассмотрим задачу наилучшего приближения неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства, которая появилась в исследованиях С.Б. Стечкина в 1965 году [11]. В [10] приведены постановка задачи и ее решение для операторов дифференцирования малого порядка. Обзор дальнейших результатов относительно данной задачи и соответствующие ссылки можно найти в [1].

Общая постановка задачи наилучшего приближения неограниченного оператора линейными ограниченными операторами (см., например, [1; 5, §7.1; 10; 11]) такова.

Пусть X, Y – банаховы пространства; $A : X \to Y$ – некоторый оператор (не обязательно линейный) с областью определения $D(A) \subset X$; $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N; X, Y)$ – множество линейных ограниченных операторов T из X в Y, нормы которых $\|T\| = \|T\|_{X \to Y}$ не превышают числа $N > 0$; $Q \subset D(A)$ – некоторый класс элементов. Величина

$$U(T) = \sup\left\{\|Ax - Tx\|_Y : x \in Q\right\}$$

называется уклонением оператора $T \in \mathcal{L}(N)$ от оператора A на классе Q, а величина

$$E(N) = E(N; A, Q) = \inf\{U(T) : T \in \mathcal{L}(N)\} \tag{1}$$

называется наилучшим приближением оператора A множеством ограниченных операторов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q.

Задача Стечкина наилучшего приближения оператора A на классе Q состоит в вычислении величины $E(N)$ и нахождении оператора, который реализует точную нижнюю грань в правой части (1).

Задача Стечкина тесно связана с задачей отыскания модуля непрерывности оператора A на классе Q, которая является абстрактной версией задачи Колмогорова об оценках промежуточной производной. Модулем непрерывности $\omega(\delta)$ оператора A на классе Q называется функция вещественной переменной $\delta \in [0, \infty)$, которая определяется равенством

$$\omega(\delta) = \sup\left\{\|Ax\|_Y : x \in Q, \|x\|_X \le \delta\right\}.$$

Следующая теорема С.Б. Стечкина дает эффективную оценку снизу величины наилучшего приближения (1) оператора через его модуль непрерывности.

Теорема 1. *Если* A *– однородный (в частности, линейный) оператор,* Q *– центрально-симметричное, выпуклое множество из области определения оператора* A, *то выполняются неравенства:*

$$E(N) \ge \sup_{\delta > 0}\left\{\omega(\delta) - N\delta\right\}, \quad N \ge 0,$$

$$\omega(\delta) \le \inf_{N \ge 0}\left\{E(N) + N\delta\right\}, \quad \delta \ge 0.$$

Пусть $L^r_{2,2}(\mathbb{R})$ $(r \in \mathbb{N})$ – пространство всех функций $x \in L_2(\mathbb{R})$, $(r-1)$-я производная которых локально абсолютно непрерывна и r-я производная принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$. Через $W^r_{2,2}(\mathbb{R})$ обозначим множество $\left\{x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R}) : \left\|x^{(r)}\right\|_2 \le 1\right\}$.

Пусть $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$. Для функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbb{R})$ известно неулучшаемое 1еравенство Харди-Литтлвуда-Полиа

$$\left\|x^{(k)}\right\|_2 \le \|x\|_2^{1-\frac{k}{r}} \left\|x^{(r)}\right\|_2^{\frac{k}{r}}. \tag{2}$$

Із (2) следует оценка для модуля непрерывности оператора ифференцирования d^k/dx^k на классе $W^r_{2,2}(\mathbb{R})$

$$\omega(\delta) \le \delta^{1-\frac{k}{r}}. \tag{3}$$

а самом деле в (3) имеет место знак равенства

$$\omega(\delta) = \delta^{1-\frac{k}{r}}. \tag{4}$$

Замечание 1. Доказательство соотношения (4) существенно опирается на тот факт, что вместе с любой функцией x пространство $L^r_{2,2}(\mathbb{R})$ содержит любую функцию вида $ax(bt)$, где $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$.

Рассмотрим также следующую задачу.

Пусть F, Q – выпуклые классы элементов в X и $N > 0$ – некоторое число. Множество $NQ = \{Nx : x \in Q\}$ будем называть гомотетом класса Q с коэффициентом гомотетии N. Величину

$$E(F, NQ)_X = \sup_{u \in F} E(u, NQ)_X = \sup_{u \in F} \inf_{x \in NQ} \|u - x\|_X \tag{5}$$

будем называть наилучшим приближением класса F гомотетом NQ.

Задача наилучшего приближения класса F гомотетом NQ состоит в вычислении величины (5).

Задача приближения класса классом также тесно связана с неравенствами типа Колмогорова [5, §§7.3-7.5; 7; 9].

Решения задач (1), (5) для оператора дифференцирования в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ принадлежат Ю.Н. Субботину и Л.В. Тайкову [12]. Для оператора $A = \frac{d^k}{dt^k}$ ими найдено наилучшее приближение $E(N)$ на классе функций $Q = W^r_{2,2}$ и наилучшее приближение $E(F, NQ)$ класса $F = W^{r-k}_{2,2}(\mathbb{R})$ гомотетом класса $Q = W^r_{2,2}(\mathbb{R})$. Субботин и Тайков доказали, что в этом случае

$$E(N) = E(F, NQ) = \frac{\frac{k}{r}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}}{N^{\frac{r-k}{k}}}.$$

Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $\|x\| = (x, x)^{1/2}$; A – линейный, неограниченный, самосопряженный оператор в H; $D(A)$ – область его определения; k, r – натуральные числа $(k < r)$.

В 2009 году В.Ф. Бабенко и Р.О. Биличенко обобщили результат Субботина и Тайкова на произвольные степени самосопряженного оператора гильбертова пространства. В [3] найдено наилучшее приближение для степеней A^k оператора A на классе $Q = WD(A^r) = \{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \le 1\}$ (здесь $D(A^r)$ – область определения оператора A^r). В [4] приводится решение задачи наилучшего приближения класса $F = WD(A^{r-k}) = \{u \in D(A^{r-k}) : \|A^{r-k} u\| \le 1\}$ гомотетом класса $Q = WD(A^r) = \{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \le 1\}$ с коэффициентом гомотетии $N > 0$. Доказано, что в этом случае

$$E(N) = E(F, NQ) = \frac{\frac{k}{r}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}}{N^{\frac{r-k}{k}}}.$$

Пусть A – линейный, неограниченный, нормальный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $D(A)$, k, r – натуральные числа $(k < r)$. Напомним, что замкнутый плотно определенный оператор A называется нормальным, если $A^* A = AA^*$.

Мы будем рассматривать:

1) задачу аппроксимации ограниченными операторами для степеней A^k нормального оператора A и класса $Q = WD(A^r) = \{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \le 1\}$, которая состоит в вычислении величины

$$E(N) = \inf_{\|T\| \le N} \sup_{\|A^r x\| \le 1} \|A^k x - Tx\|;$$

2) задачу наилучшего приближения класса $F = WD(A^{r-k}) = \{u \in D(A^{r-k}) : \|A^{r-k} u\| \le 1\}$ гомотетом класса $Q = WD(A^r) = \{x \in D(A^r) : \|A^r x\| \le 1\}$ с коэффициентом гомотетии $N > 0$, которая состоит в вычислении величины

$$E(F, NQ) = \sup_{u \in F} \inf_{\upsilon \in NQ} \|u - \upsilon\| = \sup_{\|A^{r-k} u\| \le 1} \inf_{\|A^r \upsilon\| \le N} \|u - \upsilon\|. \tag{6}$$

Приведем некоторые сведения из спектральной теории нормальных операторов [6, гл. XIII].

Пусть R – абстрактное множество, $\mathcal{R}$ – некоторая σ-алгебра его подмножеств. Разложением единицы называется операторнозначная функция $\mathcal{R} \ni \alpha \to E_\alpha$, значения которой – проекторы в фиксированном гильбертовом пространстве H, которая удовлетворяет следующим условиям:

а) $E_\varnothing = 0$, $E_R = I$ (I — тождественный оператор: $Ix = x \ \forall x \in H$);

б) для любой последовательности α_j, состоящей из непересекающихся множеств из $\mathcal{R}$ справедливо равенство

$$E\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \alpha_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} E(\alpha_j),$$

где ряд сходится в смысле сильной сходимости.

Для разложения единицы имеют место свойства:

а) ортогональность: $E_\alpha E_\beta = E_\gamma$, где $\gamma = \alpha \cap \beta$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{R})$;

б) монотонность: для $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$: $\alpha \subseteq \beta$, справедливо $E_\alpha \le E_\beta$.

Для любого $x \in H$ функция множеств $\mathcal{R} \ni \alpha \to (E_\alpha x, x) = \|E_\alpha x\|^2 \geq 0$ является неотрицательной конечной мерой на $\mathcal{R}$.

Согласно спектральной теореме каждому нормальному оператору A соответствует разложение единицы E, заданное на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ борелевских множеств комплексной плоскости, такое, что имеет место равенство

$$A = \int_{\mathbb{C}} z dE_z ,$$

которое называется спектральным разложением оператора A.

Приведенный здесь интеграл – это спектральный интеграл, определение и свойства которого можно найти в [6, § XIII.2].

Вектор x принадлежит $D(A)$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathbb{C}} |z|^2 d(E_z x, x) < \infty .$$

Если $x \in D(A)$, то

$$\|Ax\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |z|^2 d(E_z x, x) .$$

Для произвольной степени A^k $(k = 1, 2, \dots, n)$ оператора спектральное разложение имеет вид

$$A^k = \int_{\mathbb{C}} z^k dE_z$$

и при этом

$$\|A^k x\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |z|^{2k} d(E_z x, x) .$$

Последнее равенство выполняется для всех $x \in H$ таких, что при $k = 1, 2, \dots, n$

$$\int_{\mathbb{C}} |z|^{2k} d(E_z x, x) < \infty .$$

Для любой функции $\varphi(z)$, аналитической в окрестности спектра оператора A, справедливо равенство

$$\varphi(A) = \int_{\mathbb{C}} \varphi(z) dE_z .$$

При этом

$$\|\varphi(A)x\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |\varphi(z)|^2 d(E_z x, x) \tag{7}$$

для всех $x \in H$, для которых выполнено соотношение

$$\int_{\mathbb{C}} |\varphi(z)|^2 d(E_z x, x) < \infty .$$

Подробнее об аналитических функциях от оператора см. [6, § X.4].

Следующая теорема дает аналог равенства (4) для нормальных операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

Теорема 2. *Пусть* $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, *и* A – *неограниченный нормальный оператор в гильбертовом пространстве* H, $\omega(\delta)$ – *модуль непрерывности* *оператора* A^k *на классе* $Q = WD\left(A^r\right)$. *Тогда* $\forall\delta > 0$

$$\omega(\delta) \le \delta^{1-\frac{k}{r}}. \tag{8}$$

Если оператор A *таков, что*

$$E_{B_t \setminus B_s} D\left(A^{2r}\right) \ne \{\theta\}, \qquad \forall s,t \in \mathbb{R},\ 0 \le s < t, \tag{9}$$

где $B_j = \left\{z : |z| \le j, j \in \mathbb{R}\right\}$ – *круг комплексной плоскости, то*

$$\omega(\delta) = \delta^{1-\frac{k}{r}}. \tag{10}$$

Замечание 2. Выполнение для оператора A условия (9) заменяет в общем случае отмеченное в замечании 1 свойство пространств $L_{2,2}^r(\mathbb{R})$.

Доказательство. Для любого $x \in D\left(A^r\right)$ согласно спектральной теореме

$$\left\|A^k x\right\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |z|^{2k} d\left(E_z x, x\right),$$

$$\left\|A^r x\right\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |z|^{2r} d\left(E_z x, x\right)$$

и, кроме того,

$$\|x\|^2 = \int_{\mathbb{C}} d\left(E_z x, x\right).$$

Применяя для оценки $\left\|A^k x\right\|^2$ неравенство Гельдера с показателями $r/(r-k)$ и r/k, получим

$$\left\|A^k x\right\|^2 = \int_{\mathbb{C}} |z|^{2k} d\left(E_z x, x\right) \le \left\{\int_{\mathbb{C}} d\left(E_z x, x\right)\right\}^{\frac{r-k}{r}} \left\{\int_{\mathbb{C}} |z|^{2r} d\left(E_z x, x\right)\right\}^{\frac{k}{r}} \le \|x\|^{\frac{2r-2k}{r}} \left\|A^r x\right\|^{\frac{2k}{r}}.$$

Таким образом

$$\left\|A^k x\right\| \le \|x\|^{1-\frac{k}{r}} \left\|A^r x\right\|^{\frac{k}{r}}.$$

Отсюда для $x \in WD\left(A^r\right)$ такого, что $\|x\| = \delta$, получаем

$$\left\|A^k x\right\| \le \delta^{1-\frac{k}{r}},$$

так, что

$$\omega(\delta) \le \delta^{1-\frac{k}{r}}$$

и (8) доказано.

Теперь докажем, что при выполнении условия (9)

$$\omega(\delta) \ge \delta^{1-\frac{k}{r}}.$$

Пусть $\delta > 0$ задано. Для этого δ и произвольного $\varepsilon \in (0,1)$ положим $t = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{r}}$ и $s = (1-\varepsilon)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{r}}$.

Выберем элемент $x \in E_{B_t \setminus B_s} D\left(A^{2r}\right)$ такой, что $\|x\| = \delta$. Выбранный элемент x принадлежит классу $WD\left(A^r\right)$. Действительно, поскольку $x \in E_{B_t \setminus B_s} D\left(A^{2r}\right)$, то

$$\|x\|^2 = \int_{B_t \setminus B_s} d(E_z x, x),$$

следовательно,

$$\left\|A^r x\right\|^2 = \int_{B_t \setminus B_s} |z|^{2r} d(E_z x, x) \le t^{2r} \|x\|^2 \le 1.$$

Для выбранного x будем также иметь

$$\left\|A^k x\right\|^2 = \int_{B_t \setminus B_s} |z|^{2k} d(E_z x, x) \ge s^{2k} \|x\|^2 = (1-\varepsilon)^{2k} \delta^{2\left(1-\frac{k}{r}\right)}.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon \in (0;1)$ существует $x \in WD\left(A^r\right)$, $\|x\| = \delta$, такой, что

$$\left\|A^k x\right\| \ge (1-\varepsilon)^k \delta^{1-\frac{k}{r}}.$$

В силу произвольности ε получим

$$\left\|A^k x\right\| \ge \delta^{1-\frac{k}{r}}.$$

Отсюда и из (8) следует (10). Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть* $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, *и* A *– неограниченный нормальный оператор в гильбертовом пространстве* H. *Тогда для любого* $N > 0$

$$E(N) \le \frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}}{N^{\frac{r-k}{k}}}. \tag{11}$$

Если оператор A *таков, что выполнено условие* (8), *то для любого* $N > 0$

$$E(N) = \frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{\frac{r-k}{k}}}{N^{\frac{r-k}{k}}}. \tag{12}$$

При этом экстремальным аппроксимирующим оператором из $\mathfrak{L}(N)$ *является функция* $\varphi_N(A)$ *от оператора* A, *где*

$$\varphi_N(z)=\begin{cases} z^k-\dfrac{z^{2r-k}}{\left|z^{r-k}\right|}\cdot\dfrac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}, & |z|\le N^{1/k}\cdot\left(\dfrac{k}{r}\right)^{1/(k-r)}\left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{-1/k}, \\ 0, & |z|\ge N^{1/k}\cdot\left(\dfrac{k}{r}\right)^{1/(k-r)}\left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{-1/k}. \end{cases} \tag{13}$$

Доказательство. Будем следовать схеме рассуждений из [3]. В качестве аппроксимирующего оператора рассмотрим функцию от оператора $\varphi_N(A)$, где функция φ_N *определяется равенством* (13).

Сначала докажем, что $\varphi_N(A)\in\mathcal{L}(N)$. Используя (7), имеем

$$\left\|\varphi_N(A)x\right\|^2=\int_{\mathbb{C}}\left|\varphi_N(z)\right|^2 d(E_z x,x)\le$$

$$\le\max_z\left|\varphi_N(z)\right|^2\int_{\mathbb{C}}d(E_z x,x)=\max_z\left|\varphi_N(z)\right|^2\|x\|^2.$$

Несложно проверить, что $\max\limits_z\left|\varphi_N(z)\right|^2=N^2$, поэтому

$$\left\|\varphi_N(A)x\right\|\le N\|x\|. \tag{14}$$

Отсюда следует, что $\left\|\varphi_N(A)\right\|\le N$ и, таким образом, $\varphi_N(A)\in\mathcal{L}(N)$.

Теперь рассмотрим $\left\|A^k x-\varphi_N(A)x\right\|$ для $x\in WD\left(A^r\right)$. Будем иметь

$$\left\|A^k x-\varphi_N(A)x\right\|=\left\|\int_{\mathbb{C}}\left(z^k-\varphi_N(z)\right)dE_z x\right\|=$$

$$=\left(\int_{\mathbb{C}}\left|z^k-\varphi_N(z)\right|^2 d(E_z x,x)\right)^{1/2}\le\max_z\left|\frac{z^k-\varphi_N(z)}{z^r}\right|\cdot\left(\int_{\mathbb{C}}|z|^{2r}d(E_z x,x)\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}\left\|A^r x\right\|\le\frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}.$$

Равенство

$$\max_z\left|\frac{z^k-\varphi_N(z)}{z^r}\right|=\frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}$$

проверяется непосредственным вычислением. Таким образом, для $x\in WD\left(A^r\right)$

$$\left\|A^k x-\varphi_N(A)x\right\|\le\frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}. \tag{15}$$

Следовательно

$$E(N) \le \sup_{x\in Q}\left\|A^k x - \varphi_N(A)x\right\| \le \frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}.$$

Соотношение (11) доказано.

Если выполнено *соотношение* (9), то по теореме 2

$$\omega(\delta) = \delta^{1-\frac{k}{r}}.$$

Следовательно, в силу теоремы 1

$$E(N) \ge \sup_{\delta>0}\left\{\delta^{1-\frac{k}{r}} - N\delta\right\} = \frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}.$$

Отсюда и из неравенства (11) получим (13). Теорема доказана.

Приведем здесь известную теорему двойственности для наилучшего приближения [8, гл.3], которая будет применяться при дальнейших рассуждениях.

Теорема 4. *Пусть* X *– линейное нормированное пространство,* X^* *– пространство сопряженное к* X, $F \subset X$ *– выпуклое подмножество,* $x \in X$. *Тогда*

$$E(x,F)_X = \sup_{\|f\|_{X^*}\le 1}\left\{f(x) - \sup_{u\in F} f(u)\right\}. \tag{16}$$

При этом существует функционал $f_0 \in X^*$, *реализующий точную верхнюю грань в правой части* (16).

Нижеприведенные результаты существенным образом опираются также на следующую теорему, которая, по существу, является следствием теоремы 3.

Теорема 5. *Пусть* A *– нормальный, в общем случае неограниченный, оператор в гильбертовом пространстве* H *и пусть* $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$. *Тогда для любого* $N > 0$ *и любого* $x \in D(A^r)$ *справедливо неравенство*

$$\left\|A^k x\right\| \le N^{(k-r)/k}\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}\cdot\left\|A^r x\right\| + N\|x\|. \tag{17}$$

Если оператор A *таков, что выполнено условие* (9), *то для любого* $N > 0$ *данное неравенство является точным.*

Доказательство. Для $x \in D(A^r)$ справедлива оценка

$$\left\|A^k x\right\| \le \left\|A^k x - \varphi_N(A)x\right\| + \left\|\varphi_N(A)x\right\|,$$

где функция φ_N определяется равенством (13). Подставляя оценки (14) и (15) в последнее неравенство, получим искомое неравенство (17).

Покажем теперь, что при выполнении (9) неравенство (17) является точным. Предположим противное. Пусть существует $\delta > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$\left\|A^k x\right\| \le (1-\delta) N^{(k-r)/k} \frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k} \cdot \left\|A^r x\right\| + N\|x\|. \tag{18}$$

Выберем элемент $x \in E_{B_t \setminus B_s} D\left(A^{2r}\right)$ и пусть для произвольного $\varepsilon \in (0;1)$ $t = N^{1/k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{-1/k}$ и $s = (1-\varepsilon)t$. Так как $x \in E_{B_t \setminus B_s} D\left(A^{2r}\right)$, то

$$\|x\|^2 = \int\limits_{B_t \setminus B_s} d(E_z x, x).$$

Для выбранного x будем также иметь

$$\left\|A^k x\right\|^2 = \int\limits_{B_t \setminus B_s} |z|^{2k} d(E_z x, x) \ge s^{2k}\|x\|^2 = (1-\varepsilon)^{2k} t^{2k} \|x\|^2$$

и

$$\left\|A^r x\right\|^2 = \int\limits_{B_t \setminus B_s} |z|^{2r} d(E_z x, x) \le t^{2r}\|x\|^2.$$

Таким образом

$$\left\|A^k x\right\| \ge (1-\varepsilon)^k N\left(1-\frac{k}{r}\right)^{-1}\|x\| \tag{19}$$

и

$$\left\|A^r x\right\| \le N^{r/k}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{-r/k}\|x\|. \tag{20}$$

Подставим (19) и (20) в неравенство (18)

$$(1-\varepsilon)^k N\left(1-\frac{k}{r}\right)^{-1}\|x\| \le (1-\delta) N \frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{-1}\|x\| + N\|x\|.$$

В силу произвольности ε

$$1 \le (1-\delta)\frac{k}{r} + 1 - \frac{k}{r} = 1 - \delta\frac{k}{r}.$$

Поскольку $\delta > 0$, то последнее неравенство, а значит и (18), не выполняется. Поэтому коэффициент в первом слагаемом правой части неравенства (17) нельзя уменьшить. Следовательно (17) является точным. Теорема полностью доказана.

Замечание 3. Если неравенство (17) является точным, то

$$\sup_{\left\|A^r x\right\| \le 1}\left(\left\|A^k x\right\| - N\|x\|\right) = N^{(k-r)/k}\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}.$$

Следующая теорема дает решение задачи наилучшего приближения класса $F = WD\left(A^{r-k}\right)$ гомотетом $NQ = NWD\left(A^r\right)$.

Теорема 6. *Пусть* $k, r \in \mathbb{N}$, $k < r$, *и* A – *неограниченный нормальный оператор в гильбертовом пространстве* H. *Тогда для любого* $N > 0$

$$E\left(WD\left(A^{r-k}\right), NWD\left(A^{r}\right)\right) \leq \frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}. \tag{21}$$

Если оператор A *таков, что выполнено условие* (9), *то для любого* $N > 0$

$$E\left(WD\left(A^{r-k}\right), NWD\left(A^{r}\right)\right) = \frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть E_z – разложение единицы, порожденное оператором A, так что

$$A = \int_{\mathbb{C}} z dE_z .$$

Выберем произвольный элемент $x \in D\left(A^{r-k}\right)$ и подействуем на него функцией от оператора $\varphi(A)$, где

$$\varphi(z) = \begin{cases} 1 - \dfrac{z^{2(r-k)}}{\left|z^{r-k}\right|} \cdot \dfrac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}, & |z| \leq N^{1/k} \cdot \left(\dfrac{k}{r}\right)^{1/(k-r)} \left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{-1/k}, \\ 0, & |z| \geq N^{1/k} \cdot \left(\dfrac{k}{r}\right)^{1/(k-r)} \left(1-\dfrac{k}{r}\right)^{-1/k}. \end{cases}$$

Используя определение функции от оператора, несложно проверить, что

$$A^r \varphi(A) = \int_{\mathbb{C}} z^r \varphi(z) dE_z .$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left\|A^r \varphi(A) x\right\| &= \left\{\int_{\mathbb{C}} |z|^{2r} |\varphi(z)|^2 d(E_z x, x)\right\}^{1/2} = \left\{\int_{\mathbb{C}} |z|^{2k} |\varphi(z)|^2 |z|^{2(r-k)} d(E_z x, x)\right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \max_z \left|z^k \varphi(z)\right| \left\{\int_{\mathbb{C}} |z|^{2(r-k)} d(E_z x, x)\right\}^{1/2} = \max_z \left|z^k \varphi(z)\right| \left\|A^{r-k} x\right\| \leq N, \end{aligned} \tag{23}$$

так как $\left\|A^{r-k} x\right\| \leq 1$. Равенство

$$\max_z \left|z^k \varphi(z)\right| = N$$

проверяется непосредственным вычислением. Из (23) следует, что $\varphi(A) x \in NWD\left(A^r\right)$.

Далее

$$\|x-\varphi(A)x\| = \left\{\int_{\mathbb{C}} |1-\varphi(z)|^2 \, d(E_z x, x)\right\}^{1/2} = \left\{\int_{\mathbb{C}} \frac{|1-\varphi(z)|^2}{|z|^{2(r-k)}} \cdot |z|^{2(r-k)} \, d(E_z x, x)\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \max_z \left|\frac{1-\varphi(z)}{z^{r-k}}\right| \left\{\int_{\mathbb{C}} |z|^{2(r-k)} \, d(E_z x, x)\right\}^{1/2} = \tag{24}$$

$$= \max_z \left|\frac{1-\varphi(z)}{z^{r-k}}\right| \|A^{r-k}x\| \le \frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}.$$

Равенство

$$\max_z \left|\frac{1-\varphi(z)}{z^{r-k}}\right| = \frac{\frac{k}{r}\left(1-\frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}$$

проверяется непосредственным вычислением.

Из (24) и (6) следует (21).

С другой стороны, по теореме 4

$$E\left(WD\left(A^{r-k}\right), NWD\left(A^r\right)\right) = \sup_{\|A^{r-k}x\|\le 1} \sup_{\|h\|\le 1} \left\{\langle h, x\rangle - N \sup_{\|A^r u\|\le 1} \langle h, u\rangle\right\}.$$

Область определения нормального оператора и область значения ограниченного нормального оператора плотны в гильбертовом пространстве. Плотность области определения следует непосредственно из определения нормального оператора. То, что область значений ограниченного нормального оператора плотна в H следует из того, что область значений самосопряженного оператора плотна в гильбертовом пространстве [2, §46], а также того факта, что ограниченный нормальный оператор A однозначно представим в виде $A = A_1 + iA_2$, где A_1, A_2 – самосопряженные операторы (см. [6, §XIII.5]).

Тогда, учитывая, что если A – нормальный, то и A^* – нормальный, $D(A) = D(A^*)$ и $\|Ax\| = \|A^*x\|$ для любого $x \in D(A)$ [6, §XIII.6], получим

$$E\left(WD\left(A^{r-k}\right), NWD\left(A^r\right)\right) \ge \sup_{\|A^{r-k}x\|\le 1} \sup_{\|A^r \upsilon\|\le 1} \left\{\langle A^r\upsilon, x\rangle - N \sup_{\|A^r u\|\le 1} \langle A^r \upsilon, u\rangle\right\} =$$

$$= \sup_{\|A^r\upsilon\|\le 1} \left\{\sup_{\|A^{r-k}x\|\le 1} \langle A^r\upsilon, x\rangle - N \sup_{\|A^r u\|\le 1} \langle A^r\upsilon, u\rangle\right\} =$$

$$= \sup_{\|A^r \upsilon\| \le 1} \left\{ \sup_{\|A^{r-k} x\| \le 1} \left\langle A^k \upsilon, \left(A^{r-k}\right)^* x \right\rangle - N \sup_{\|A^r u\| \le 1} \left\langle \upsilon, \left(A^r\right)^* u \right\rangle \right\} = \sup_{\|A^r \upsilon\| \le 1} \left\{ \|A^k \upsilon\| - N \|\upsilon\| \right\}.$$

Пусть теперь для оператора A выполняется (9). Тогда по теореме 5 для всех $x \in D\left(A^r\right)$ справедливо точное неравенство (13) Используя замечание 3, будем иметь

$$E\left(WD\left(A^{r-k}\right), NWD\left(A^r\right)\right) \ge \sup_{\|A^r \upsilon\| \le 1} \left\{ \|A^k \upsilon\| - N \|\upsilon\| \right\} = \frac{\frac{k}{r}\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{(r-k)/k}}{N^{(r-k)/k}}. \quad (25)$$

Из (25) и (21) следует (22). Теорема доказана.

Автор выражает благодарность В.Ф. Бабенко за постановку задачи, полезное обсуждение и внимание к работе.

Библиографические ссылки

1. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи / В.В. Арестов // Успехи мат. наук. – 1996. 51, № 6. – С. 88-124.
2. **Ахиезер Н.И.** Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман – М., 1966 – 544 с.
3. **Бабенко В.Ф.** Аппроксимация неограниченных операторов ограниченными в гильбертовом пространстве / В.Ф. Бабенко, Р.О. Биличенко // Украинский мат. журнал. – 2009. – 61. – С. 147-153.
4. **Бабенко В.Ф.** Наилучшее приближение классов, задаваемых степенями самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, другими классами / В.Ф. Бабенко, Р.О. Биличенко // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2009 – Вип. 4. – С. 23-30.
5. **Бабенко В.Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пичугов – К., 2003 – 590 с.
6. **Березанский Ю.М.** Функциональный анализ. Курс лекций / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель – К., 1990 – 600 с.
7. **Корнейчук Н.П.** Неравенства для дифференцируемых периодических функций и наилучшее приближение одного класса функций другим / Н.П. Корнейчук // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1972. – 36, № 2. – С. 423 – 434.
8. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук – М., 1976 – 320 с.
9. **Корнейчук Н.П.** Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций / Н.П. Корнейчук // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – 35, № 1. – С. 93-124.
10. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов / С.Б. Стечкин // Мат. заметки. – 1967. – 1, № 2. – С. 231-244.
11. **Стечкин С.Б.** Неравенства между нормами производных произвольной функции / С.Б. Стечкин // Acta Sci. Math. – 1965. – 26, № 3 – 4. – С. 225-230.
12. **Субботин Ю.Н.** Наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве L_2 / Ю.Н. Субботин, Л.В. Тайков // Мат. заметки. – 1968. – 3, № 2. – С. 157 - 164.

Надійшла до редколегії 01.04.10

ISSN №9125 0912. ВІСНИК ДНУ Серія «Математика», №6/1 2010. Вип. 15. С.72 – 80

УДК 517.5

Л.Г. Бойцун., М.О. Шумейко
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПІДСУМОВУВАННЯ ІНТЕГРАЛА ФУР'Є ТА СПРЯЖЕНОГО ІНТЕГРАЛА ФУР'Є МЕТОДОМ Г.Ф. ВОРОНОГО

Установлені достатні умови про підсумовування інтеграла Фур'є та спряженого інтеграла Фур'є методом Вороного.

Ключові слова: інтеграл Фур'є, метод Вороного, підсумовування.

Установлены достаточные условия суммирования интеграла Фурье и сопряженного интеграла Фурье методом Вороного.

Ключевые слова: интеграл Фурье, метод Вороного, суммирование.

The sufficient conditions under which the Fourier integral and conjugate Fourier integral are Voronoi summable are obtained.

Key words: Fourier integral, Voronoi method, summability.

1. Нехай функціїя $f(u)$ і $p(t)$ інтегровні на кожному скінченному проміжку $[0, A]$, $A > 0$ і $S(t) = \int\limits_0^t f(u)du$, $P(y) = \int\limits_0^y p(t)dt$.

Кажуть, що інтеграл $\int\limits_0^\infty f(u)du$ підсумовується методом Г.Ф. Вороного до I, або скорочено $(W, p(y))$ - підсумовується до I, згідно з [1], якщо

$$\lim_{y\to\infty}\tau(y) = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{P(y)}\int\limits_0^y P(y-u)f(u)du = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{P(y)}\int\limits_0^y p(y-u)s(u)du = I.$$

Інтеграл Фур'є цієї функції $f(t) \in L(-\infty;\infty)$, згідно з [2], є

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty du\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(t-x)dt, \tag{1}$$

спряжений інтеграл Фур'є

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty du\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)\sin u(t-x)dt. \tag{2}$$

Введемо позначення:

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x), \quad \psi(t) = f(x+t) - f(x-t),$$

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-u)^{\alpha-1}\varphi(u)du, \quad \alpha > 0,$$

$$\psi_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-u)^{\alpha-1}\psi(u), \quad \alpha > 0, \quad B(y,t) = \frac{1}{\pi P(y)}\int\limits_0^y p(u)\frac{\sin(y-u)t}{t}du,$$

$$\widetilde{B}(y,t) = \frac{1}{\pi P(y)}\int\limits_0^y p(u)\frac{\cos(y-u)t}{t}du.$$

Означення 1. Якщо для $\alpha > 0$ та інтегрованій за Лебегом функції $F(u)$

$$F_{\alpha}(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}(t-u)^{\alpha-1}F(u)du=o(t^{\alpha}),\quad \textit{коли}\ t\to 0,$$

то кажуть, що $F(t)$ є (C,α) - неперервною у точці $t=0$.

Відомо, що якщо $F(u)$ неперервна (C,α), то вона також неперервна (C,β) для всіх $\beta>\alpha$.

Означення 2. Будемо казати, що точка x для якої функція $f(x)$ визначена, буде K_{α}-регулярною, якщо $\varphi(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$ є (C,α)-неперервною; буде $\widetilde{K}_{\alpha}$- регулярною, якщо $\psi(t)=f(x+t)-f(x-t)$ є (C,α) -неперервною та

$$\widetilde{f}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\psi(t)}{t}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\psi(t)}{t}dt$$

існує та скінчений.

Означення 3. Метод підсумовування називається K_{α}-ефективним, якщо він підсумовує інтеграл Фур'є функції $f(x)$ до відповідного значення у всіх K_{α}-регулярних точках; $\widetilde{K}_{\alpha}$-ефективним, якщо він підсумовує спряжений інтеграл Фур'є функції $f(x)$ до $\widetilde{f}(x)$ у всіх $\widetilde{K}_{\alpha}$ - регулярних точках.

Доведена слідуюча теорема.

Теорема *Регулярний метод* $(W,p(y))$ *буде* K_{α} *та* $\widetilde{K}_{\alpha}$ *-ефективним,* $0<\alpha\le 1$, *якщо двічі неперервна диференційована функція* $p(t)$ *задовольняє слідуючим умовам:*

$$y|p(y)|<C\cdot|P(y)|,\tag{3}$$

$$\int_{0}^{y}t|p'(t)|dt<C\cdot|P(y)|,\tag{4}$$

$$\int_{0}^{y}t(y-t)|p''(t)|dt<C\cdot|P(y)|,\tag{5}$$

$$\int_{0}^{y}\frac{|P(t)|}{t^{2}}dt<C\cdot\frac{|P(y)|}{y},\tag{6}$$

де C *– додатня константа, яка не залежить від* y, $p(0)=0$.

Для інтеграла Фур'є маємо:

$$S(y)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{y}du\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos u(t-x)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt\int_{0}^{y}\cos u(t-x)du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin y(t-x)}{t-x}dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)\frac{\sin yt}{t}dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin yt}{t}dt.$$

Для спряженого інтеграла Фур'є:

$$\widetilde{S}(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^y du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin u(t-x)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt\int_0^y \sin u(t-x)du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1-\cos y(t-x)}{t-x}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(x+t)-f(x-t)]\frac{1-\cos yt}{t}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1-\cos yt}{t}dt.$$

Нехай $\tau(y)=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)S(y-u)du$, $\widetilde{\tau}(y)=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)\widetilde{S}(y-u)du.$

Ми маємо

$$\tau(y)-f(x)=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)S(y-u)du-f(x)\cdot\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)f(x)du=$$

$$=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)\left[S(y-u)-f(x)\right]du=$$

$$=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin(y-u)t}{t}dt-f(x)\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin(y-u)t}{t}dt\right)du=$$

$$=\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y p(u)du\int_0^{\infty}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]\frac{\sin(y-u)t}{t}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^{\infty}\phi(t)dt\int_0^y p(u)\frac{\sin(y-u)t}{t}du=\int_0^{\infty}\phi(t)B(y,t)dt.$$

Інтегруючи частинами, отримаємо:

$$\tau(y)-f(x)=$$

$$=-\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^{\infty}\frac{\varphi_1(t)}{t}dt\int_0^y up(y-u)\cos ut\,du+\int_0^{\infty}\frac{\varphi_1(t)}{t}B(y,t)dt=I_1+I_2.$$

Для спряженого інтеграла

$$\tilde{\tau}(y)-\tilde{f}(x)=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)\tilde{S}(y-u)du-f(x)\cdot\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)\tilde{f}(x)du=$$

$$=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)\left[\tilde{S}(y-u)-\tilde{f}(x)\right]du=$$

$$=\frac{1}{P(y)}\int_0^y p(u)\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\psi(t)\frac{1-\cos(y-u)t}{t}dt-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\psi(t)}{t}dt\right)du=$$

$$=-\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y p(u)du\int_0^{\infty}\psi(t)\frac{\cos(y-u)t}{t}dt=-\int_0^{\infty}\psi(t)\widetilde{B}(y,t)dt.$$

Інтегруючи частинами, отримаємо

$$\widetilde{\tau}(y)-\widetilde{f}(y)=$$

$$=\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^\infty\frac{\psi_1(t)}{t}dt\int_0^y up(y-u)\sin utdu+\int_0^\infty\frac{\varphi_1(t)}{t}\widetilde{B}(y,t)dt=\widetilde{I}_1+\widetilde{I}_2.$$

Допоміжні леми. Тут і далі ми будемо вважати, що умови теореми виконані.

Лема 1. Якщо двічі неперервно диференційована функція $p(y)$ задовольняє умовам (5) і (6), тоді

$$\int_0^y (y-t)|p''(t)|dt=O\left(\frac{P(y)}{y}\right)=o(P(y)). \tag{7}$$

Доведення. Покладемо $U(y)=\int_0^y t(y-t)|p''(y)|dt=O(P(y))$,

інтегруючи частинами, отримаємо

$\int_0^y (y-t)|p''(t)|dt=\int_0^y\frac{t(y-t)|p''(t)|}{t}dt=\frac{U(y)}{y}+\int_0^y\frac{U(t)}{t^2}dt$, і результат випливає з (6).

Лема 2. Якщо неперервно диференційована функція $p(y)$ задовольняє умовам (4) і (6), тоді

$$\int_0^y |p'(t)|dt=O\left(\frac{P(y)}{y}\right)=o(P(y)). \tag{8}$$

Доведення. Покладемо $V(y)=\int_0^y t|p'(y)|dt=O(P(y))$.

Інтегруючи частинами, отримаємо

$\int_0^y |p'(t)|dt=\int_0^y\frac{t|p'(t)|}{t}dt=\frac{V(y)}{y}+\int_0^y\frac{V(t)}{t^2}dt=O\left(\frac{P(y)}{y}\right)$ за умовою (6).

Лема 3. Якщо $p(y)$ задовольняє умову (6), тоді

$$\int_0^y\frac{|P(t)|}{t}dt<C\cdot|P(y)|. \tag{9}$$

Це випливає з умови (6) і з нерівності $\frac{1}{y}\int_0^y\frac{|P(t)|}{t}dt<\int_0^y\frac{|P(t)|}{t^2}dt$.

Розглянемо

$$I_1=-\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^\infty\frac{\varphi_1(t)}{t}dt\int_0^y up(y-u)\cos utdu \quad \text{та}$$

$$\widetilde{I}_1=-\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^\infty\frac{\psi_1(t)}{t}dt\int_0^y up(y-u)\sin utdu.$$

Ми маємо, що

$$\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y up(y-u)\cos ut du \quad \text{та} \quad -\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y up(y-u)\sin ut du$$

є дійсна та уявна частина функції

$$\Re(y,t)=\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y up(y-u)e^{-iut}du=-\frac{1}{\pi P(y)}\int_0^y (y-u)p(u)e^{-i(y-u)t}du=$$

$$=\frac{e^{-iyt}}{\pi P(y)}\int_0^y (y-u)p(u)e^{iut}du. \tag{10}$$

Наша теорема буде доведена, якщо ми покажемо, що

$$\lim_{y\to\infty}T=\lim_{y\to\infty}\int_0^\infty g(t)\Re(y,t)dt=0, \tag{11}$$

де $g(t)=o(1)$, коли $t\to 0$.

$$T=\left(\int_0^{\frac{1}{y}}+\int_{\frac{1}{y}}^{\delta}+\int_{\delta}^{\infty}\right)g(t)\Re(y,t)dt=T_1+T_2+T_3.$$

Ми продовжимо оцінювати ядро (10).

Лема 4. Ми маємо

$$\Re(y,t)=O(y).$$

Дійсно $\left|\Re(y,t)\right|\le\frac{1}{\pi\left|P(y)\right|}\int_0^y\left|(y-u)p(y)\right|du\le\frac{y}{\pi P(y)}\int_0^y\left|p(u)\right|du=O(y)$

за умовою регулярності методу.

Лема 5. Якщо двічі неперервно диференційована функція $p(y)$ задовольняє умовам (7) і (8), тоді

$$\int_0^y p(u)(y-u)e^{iut}du=o\big(P(y)\big)$$

рівномірно по t *для* $t\ge\delta>0_+$ *для фіксованого* δ.

Двічі інтегруючи частинами, отримаємо

$$\int_0^y p(u)(y-u)e^{iut}du=-\frac{p(0)y}{it}-\frac{p(y)e^{iyt}}{t^2}-\frac{p'(0)y}{t^2}+\frac{p(0)}{t^2}-$$

$$-\frac{1}{t^2}\int_0^y p''(u)(y-u)e^{iut}du+\frac{2}{t^2}\int_0^y p'(u)e^{iut}du.$$

За умовою леми ми маємо

$$o\big(P(y)\big)=\int_0^y (y-u)\left|p''(u)\right|du\ge\left|\int_0^y (y-u)p''(u)du\right|=\left|yp'(y)-yp'(0)-\int_0^y up''(u)du\right|=$$

$$= \left| yp'(y) - yp'(0) - up'(u)\ \Big|_0^y + \int_0^y p'(u)du \right| \geq$$

$$\geq |yp'(0)| - |p(y) - p(0)| \Rightarrow |yp'(0)| \leq 0(P(y)) + |p(y) - p(0)| = o(P(y)). \tag{12}$$

Далі

$$\left| \int_0^y p(u)(y-u)e^{iut}du \right| \leq \frac{|P(y)|}{t^2} + \frac{|p'(0)|y}{t^2} + \frac{1}{t^2}\int_0^y |p''(u)|(y-u)du + \frac{2}{t^2}\int_0^y |p'(u)|du,$$

таким чином за умовами (3), (12), лемою 1, лемою 2 випливає

$$\int_0^y p(u)(y-u)e^{iut}du = o(P(y)).$$

Залишається знайти оцінки для ядра $\Re(y,t)$ у проміжку $(1/y, \delta)$. Щоб зробити це, ми спочатку розглянемо $\int_0^y p(u)(y-u)e^{iut}du$. Покладемо

$$|p(y)| = r(y); \quad R(y) = \int_0^y r(u)du; \quad V(y) = \int_0^y |p'(u)|du; \quad W(z) = \int_0^z (y-u)|p''(u)|du.$$

Ми маємо

$$\int_0^y p(u)(y-u)e^{iut}du = \int_0^{\frac{1}{t}} + \int_{\frac{1}{t}}^y = X_1 + X_2.$$

Тоді

$$|X_1| = \left| \int_0^{\frac{1}{t}} p(u)(y-u)e^{iut}du \right| \leq \int_0^{\frac{1}{t}} |p(u)|(y-u)du \leq y\int_0^{\frac{1}{t}} |p(u)|du = yR\left(\frac{1}{t}\right).$$

Далі, інтегруючи частинами двічі

$$X_2 = \int_{\frac{1}{t}}^y p(u)(y-u)e^{iut}du = -\frac{p\left(\frac{1}{t}\right)\left(y-\frac{1}{t}\right)e^{i}}{it} - \frac{p(y)e^{iyt}}{t^2} - \frac{p'\left(\frac{1}{t}\right)\left(y-\frac{1}{t}\right)e^{i}}{t^2} + \frac{p\left(\frac{1}{t}\right)e^{i}}{t^2} -$$

$$-\frac{1}{t^2}\int_{\frac{1}{t}}^y p''(u)(y-u)e^{iut}du + \frac{2}{t^2}\int_{\frac{1}{t}}^y p'(u)e^{iut}du.$$

Так що, якщо A-стала, що не залежить від y і t,

$$|X_2| \le A\frac{1}{t^2}\left[yt\left|p\left(\frac{1}{t}\right)\right| + |p(y)| + y\left|p'\left(\frac{1}{t}\right)\right| + \left|p\left(\frac{1}{t}\right)\right| + \int_{\frac{1}{t}}^{y}(y-u)|p''(u)|du + 2\int_{\frac{1}{t}}^{y}|p'(u)|du \right].$$

У результаті ми маємо

$$|\Re(y,t)| \le \frac{1}{\pi|P(y)|}\left|\int_0^y p(y)(y-u)e^{iut}du\right| \le A\sum_{i=1}^{7} M_i(y,t),$$

де

$$M_1(y,t) = \frac{yR\left(\frac{1}{t}\right)}{R(y)}; \qquad M_2(y,t) = \frac{y}{tR(y)}r\left(\frac{1}{t}\right);$$

$$M_3(y,t) = \frac{y}{t^2R(y)}\left|p'\left(\frac{1}{t}\right)\right|; \qquad M_4(y,t) = \frac{1}{t^2R(y)}r\left(\frac{1}{t}\right); \qquad M_5(y,t) = \frac{r(y)}{t^2R(y)};$$

$$M_6(y,t) = \frac{1}{t^2R(y)}\left[W(y) - W\left(\frac{1}{t}\right)\right];$$

$$M_7(y,t) = \frac{1}{t^2R(y)}\left[V(y) - V\left(\frac{1}{t}\right)\right].$$

Доведення теореми. Почнемо оцінювати кожний з інтегралів T_i, $i = 1,2,3$. За лемою 4 і означенням 2

$$T_1 = \int_0^{\frac{1}{y}} g(t)\cdot\Re(y,t)dt = O\left(y\int_0^{\frac{1}{y}} g(t)dt\right) = o(1).$$

За лемою 5: $T_3 = \int_\delta^\infty g(t)\Re(y,t)dt = o\left(\int_\delta^\pi g(t)dt\right) = o(1).$

Для оцінки T_3 нам достатньо показати, що $\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_i(y,t)dt \le M$ для $i = 1,2,\ldots,7$.

Для $i = 1$ ми маємо за умовою (6)

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_1(y,t)dt = \frac{y}{R(y)}\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} R\left(\frac{1}{t}\right)dt = \frac{y}{R(y)}\int_{\frac{1}{\delta}}^{y}\frac{R(s)}{s^2}ds \le C.$$

Для $i = 2$

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_2(y,t)dt = \frac{y}{R(y)}\int_{\frac{1}{y}}^{\delta}\frac{r\left(\frac{1}{t}\right)}{t}dt = \frac{y}{R(y)}\int_{\frac{1}{\delta}}^{y}\frac{r(s)}{s}ds \le \frac{y}{|R(y)|}\int_{\frac{1}{\delta}}^{y}\frac{|P(s)|}{s^2}ds \le C$$

за умовами (3) і (6). Для $i=3$ за умовою (8)

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_3(y,t)dt = \frac{y}{R(y)} \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \frac{\left|p'\left(\frac{1}{t}\right)\right|}{t^2} dt = \frac{y}{R(y)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{y} |p'(s)| ds \le C.$$

Для $i=4$ ми маємо

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_4(y,t)dt = \frac{1}{R(y)} \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \frac{r\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt = \frac{1}{R(y)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{y} r(s) ds \le 1.$$

Для $i=5$

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_5(y,t)dt = \frac{r(y)}{R(y)} \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \frac{dt}{t^2} = \frac{r(y)}{R(y)} \left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_{\frac{1}{y}}^{\delta} = \frac{r(y)}{R(y)} \left(y - \frac{1}{\delta}\right) \le \frac{yr(y)}{R(y)} = O(1) \quad \text{за}$$

(3).

Для $i=6$

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_6(y,t)dt = \frac{1}{R(y)} \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \left[W(y) - W\left(\frac{1}{t}\right)\right] \frac{dt}{t^2} < \frac{1}{R(y)} \int_{0}^{y} [W(y) - W(s)] ds$$

Інтегруючи частинами, отримаємо:

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_6(y,t)dt < \frac{1}{R(y)} \int_{0}^{y} s(y-s) |p''(s)| ds,$$

а це обмежена величина за умовою (5).

Для $i=7$, як і для $i=6$, маємо

$$\int_{\frac{1}{y}}^{\delta} M_7(y,t)dt = \frac{1}{R(y)} \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \left[V(y) - V\left(\frac{1}{t}\right)\right] \frac{dt}{t^2} < \frac{1}{R(y)} \int_{0}^{y} [V(y) - V(s)] ds =$$

$$= \frac{1}{R(y)} \int_{0}^{y} s dv(s) = \frac{1}{R(y)} \int_{0}^{y} s |p'(s)| ds,$$

а це обмежена величина за умовою (4).

Нам залишається показати, що

$$I_2 = \int_{0}^{\infty} \frac{\varphi_1(t)}{t} B(y,t) dt = o(1), \quad y \to \infty, \quad \text{і} \quad \widetilde{I}_2 = \int_{0}^{\infty} \frac{\psi_1(t)}{t} \widetilde{B}(y,t) dt = o(1).$$

Взявши довільне $\varepsilon > 0$, підберемо $\delta > 0$ таке, щоб при $0 < t \le \delta$ буде $\varphi_1(t) < \varepsilon \cdot t$. Тоді

$$\int_0^\infty \frac{\varphi_1(t)}{t} B(y,t)dt = \left(\int_0^{\frac{1}{y}} + \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \right) \frac{\varphi_1(t)}{t} B(y,t)dt = I_{11} + I_{12} + I_{13}.$$

Так як $B(y,t) = O(y)$, то

$$I_{11} = O\left(y \cdot \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{\varphi_1(t)}{t} dt \right) = O\left(y \cdot o(1) \cdot \int_0^{\frac{1}{y}} dt \right) = o(1).$$

$$I_{13} = \int_\delta^\infty \frac{\varphi_1(t)}{t} dt \frac{1}{\pi P(y)} \int_0^y \frac{p(u)}{t} \sin(y-u)tdu = \frac{1}{P(y)} \int_0^y p(u)du \int_\delta^\infty \frac{\varphi_1(t)}{t^2} \sin(y-u)tdu = o(1)$$

при $\delta \le t < \infty$, $0 \le u \le y$.

Так як $\int_\delta^\infty \frac{\varphi_1(t)}{t^2} \sin(y-u)tdu = o(1)$ рівномірно відносно u, то $I_{13} = o(1)$ при $y \to \infty$.

Далі за лемою 6 $\mathrm{B(y,t) = O}\left(\frac{\mathrm{P(1/t)}}{\mathrm{tP(y)}} \right)$, так що $I_{12} = O\left(\frac{1}{P(y)} \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \frac{\varphi_1(t)}{t^2} \left| P\left(\frac{1}{t}\right) \right| dt \right)$.

Ми маємо

$$\frac{1}{P(y)} \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \frac{\varphi_1(t)}{t^2} \left| P\left(\frac{1}{t}\right) \right| dt < \frac{\varepsilon}{P(y)} \int_{\frac{1}{y}}^{\delta} \frac{1}{t} \left| P\left(\frac{1}{t}\right) \right| dt = \frac{\varepsilon}{P(y)} \int_{\frac{1}{\delta}}^{y} \frac{|P(u)|}{u} du < C \cdot \varepsilon.$$

Таким чином ми маємо, що $I_2 = o(1)$, коли $y \to \infty$.

Аналогічно доводиться, що $\widetilde{I}_2 = o(1)$, коли $y \to \infty$.

Теорема доведена.

Бібліографічні посилання

1. **Вороной Г.Ф.** Расширение понятия о пределе суммы членов бесконечного ряда. //Собр. соч., т.3 /Г.Ф. Вороной – К., 1952. – С. 9 –10.

2. **Титчмарш Е. С.** Введение в теорию интеграла Фурье/Е.С. Титчмарш– М., 1948. – 453 с.

Надійшла до редколегії 17.01.10.

ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". № 15. 2010. Вип. 15. С. 81– 87

УДК 517.5

С. Б. Вакарчук*, М. Б. Вакарчук**

*Днепропетровский университет экономики и права

**Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ХАРДИ-ЛИТТЛЬВУДА-ПОЛИА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В банахових просторах Харді одержані точні нерівності типу Харді-Літтльвуда-Поліа для аналітичних функцій однієї и двох комплексних змінних.

Ключові слова: аналітичні функції, простір Харді, точні нерівності.

В банаховых пространствах Харди получены точные неравенства типа Харди-Литтльвуда-Полиа для аналитических функций одной и двух комплексных переменных.

Ключевые слова: аналитические функции, пространство Харди, точные неравенства.

The exact inequalities of Hardy-Littlewood-Polya type have been obtained for analytic functions one and two complex variables in Hardy spaces.

Key words: analytic functions, Hardy spaces, exact inequalities.

С начала прошлого века особый интерес у многих математиков, начиная с Э. Ландау, Ж. Адамара, Г. Харди, Дж. Литтльвуда, А. Н. Колмогорова, вызывает получение точных неравенств для норм промежуточных производных функции через норму самой функции и норму ее старшей производной. Современное развитие этой тематики связано с работами В. В. Арестова, С. Б. Стечкина, Л. В. Тайкова, В. Н. Габушина, Н. П. Купцова, А. Ю. Шадрина, В. М. Тихомирова, Н. П. Корнейчука, В. Н. Коновалова, В. Ф. Бабенко, А. А. Лигуна, С. А. Пичугова, В. А. Кофанова, Г. Г. Магарил-Ильяева и многих других [1].

С нашей точки зрения, не меньший интерес представляет решение подобных задач и в случае аналитических функций комплексного переменного, где по сравнению с вещественным случаем не так много окончательных результатов [3 – 5]. Данная статья является своеобразным продолжением указанной тематики в комплексной плоскости.

Введем необходимые обозначения и понятия. Пусть $U \overset{\mathrm{df}}{=} \{z \in C : |z| < 1\}$, $A(U)$ – множество функций, аналитических в круге U; H_q $(q \ge 1)$ – банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in A(U)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_q = \|f\|_{H_q} = \begin{cases} \lim\limits_{\rho\to 1-0} M_q(f,\rho), \text{ если } 1 \le q < \infty, \\ \sup\limits_{z\in U}|f(z)|, \quad \text{если } q = \infty, \end{cases}$$

где $M_q(f,\rho) \overset{\mathrm{df}}{=} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\tau})|^q d\tau \right\}^{\frac{1}{q}}$.

Известно, что норма функции $f \in H_q$ реализуется на ее угловых граничных значениях $f(e^{it})$, которые существуют почти для всех $0 \le t < 2\pi$ [6; 8]. При этом если $1 \le p < q$, то справедливо включение $H_q \subset H_p$.

Символом H_q^r $(r \in N)$ обозначим множество функций $f \in A(U)$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ по переменной z принадлежат пространству Харди H_q. Следовательно, при $q \ge 2$ для производной функции $f \in H_q^r$ имеем $f^{(r)} \in H_2$. Используя разложение f в ряд Тейлора $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(f) z^j$ в области U, производную $f^{(r)}$ запишем в виде $f^{(r)}(z) = \sum_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r} c_j(f) z^{j-r}$, где $\alpha_{j,r} \overset{\mathrm{df}}{=} j(j-1)\ldots(j-r+1)$. Поскольку для функции $f \in H_q^r$ норма

$$\|f^{(r)}\|_2 = \left\{ \sum_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r}^2 |c_j(f)|^2 \right\}^{1/2} \tag{1}$$

ее r-ой производной конечна в H_2, то конечными в этом пространстве будут и нормы всех ее промежуточных производных $f^{(r-k)}$ $(k = \overline{1, r-1})$. Отсюда, в частности, следует принадлежность указанных производных пространствам Харди H_p, где $1 \le p \le 2$.

Теорема 1. *Пусть* $r \in N; 1 \le k \le r$ *– натуральное число;* $1 \le p \le 2$; $2 \le s,t \le q$. *Тогда для любой функции* $f \in H_q^r$, *у которой коэффициенты Тейлора* $c_j(f) = 0$, *где* $j = r-k, \ldots, r-1$, *имеют место неравенства*

$$\|f^{(r-k)}\|_p \le \frac{\alpha_{r,r-k}}{(\alpha_{r,r})^{1-k/r}} \|f\|_s^{k/r} \|f^{(r)}\|_t^{1-k/r}. \tag{2}$$

Неравенства (2) *являются точными в том смысле, что существует функция* $f_0 \in H_q^r$, *обращающая* (2) *равенства. При этом полагаем* $\alpha_{r,0} = 1$.

Доказательство. Поскольку при $k = r$ неравенство (2) очевидно, то полагаем, что $k < r$. Для функции f, принадлежащей множеству H_q^r и удовлетворяющей условию теоремы, а также для ее производной (r–k)-го порядка $f^{(r-k)}(z) = \sum_{j=r}^{\infty} \alpha_{j,r-k} c_j(f) z^{j-r+k}$ в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |c_j(f)|^2, \tag{3}$$

$$\left\|f^{(r-k)}\right\|_2^2=\sum_{j=r}^{\infty}\alpha_{j,r-k}^2\left|c_j(f)\right|^2. \tag{4}$$

Представим равенство (4) следующим образом:

$$\left\|f^{(r-k)}\right\|_2^2=\sum_{j=r}^{\infty}(\alpha_{j,r})^{2(1-k/r)}\left|c_j(f)\right|^{2(1-k/r)}\left\{\frac{\alpha_{j,r-k}}{(\alpha_{j,r})^{1-k/r}}\right\}^2\left|c_j(f)\right|^{2k/r}. \tag{5}$$

Для получения неравенства (2) применим ряд идейных моментов, использованных И. В. Бердниковой и С. З. Рафальсоном в ходе доказательства теоремы 1 из [2]. Из (5) получаем

$$\left\|f^{(r-k)}\right\|_2^2\le\left\{\sup_{j\ge r}\frac{\alpha_{j,r-k}}{(\alpha_{j,r})^{1-k/r}}\right\}^2\sum_{j=r}^{\infty}\left|c_j(f)\right|^{2(1-k/r)}(\alpha_{j,r})^{2(1-k/r)}\left|c_j(f)\right|^{2k/r}. \tag{6}$$

Применяя к правой части соотношения (6) неравенство Гельдера для числовых рядов с показателями $r/(r-k)$ и r/k, а также учитывая формулы (1) и (3), запишем

$$\left\|f^{(r-k)}\right\|_2^2\le\left\{\sup_{j\ge r}\frac{\alpha_{j,r-k}}{(\alpha_{j,r})^{1-k/r}}\right\}^2\left\{\sum_{j=r}^{\infty}\left|c_j(f)\right|^2\right\}^{k/r}\left\{\sum_{j=r}^{\infty}\alpha_{j,r}^2\left|c_j(f)\right|^2\right\}^{1-k/r}=$$

$$=\left\{\sup_{j\ge r}\frac{\alpha_{j,r-k}}{(\alpha_{j,r})^{1-k/r}}\right\}^2\left\|f\right\|_2^{2k/r}\left\|f^{(r)}\right\|_2^{2(1-k/r)}. \tag{7}$$

Установим справедливость равенства

$$\sup_{j\ge r}\frac{\alpha_{j,r-k}}{(\alpha_{j,r})^{1-k/r}}=\frac{\alpha_{r,r-k}}{(\alpha_{r,r})^{1-k/r}}. \tag{8}$$

Поскольку, как нетрудно убедиться, при $j\ge r$ $(j\in N)$

$$\frac{\alpha_{j,r-k}}{(\alpha_{j,r})^{1-k/r}}=\frac{(j(j-1)\dots(j-r+k+1))^{k/r}}{((j-r+k)\dots(j-r+1))^{1-k/r}},$$

то для удобства рассуждений рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x)\overset{df.}{=}\frac{(x(x-1)\dots(x-r+k+1))^{k/r}}{((x-r+k)\dots(x-r+1))^{1-k/r}}, \tag{9}$$

где $r\le x<\infty$, и покажем, что она является монотонно убывающей. Прологарифмировав обе части соотношения (9), получим

$$\ln g(x)=\frac{1}{r}\{k(\ln x+\ln(x-1)+\dots+\ln(x-r+k+1))-$$
$$-(r-k)(\ln(x-r+k)+\dots+\ln(x-r+1))\}. \tag{10}$$

Продифференцировав обе части равенства (10), имеем

$$g'(x)=g(x)\frac{k(r-k)}{r}\left\{\frac{1}{(r-k)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\dots+\frac{1}{x-r+k+1}\right)-\right.$$

$$-\frac{1}{k}\left(\frac{1}{x-r+k}+\ldots+\frac{1}{x-r+1}\right)\Bigg\}. \qquad (11)$$

Заменяя каждое слагаемое в первых круглых скобках, расположенных в правой части соотношения (11), наибольшим числом $1/(x-r+k+1)$, а каждое слагаемое, записанное в расположенных там же вторых круглых скобках, наименьшим числом $1/(x-r+k)$, запишем

$$g'(x)\le g(x)\frac{k(r-k)}{r}\left(\frac{1}{x-r+k+1}-\frac{1}{x-r+k}\right)<0.$$

Следовательно, функция g монотонно убывает на полусегменте $[r,\infty)$, а значит справедливо равенство (8). Используя (7) – (8), получаем

$$\left\|f^{(r-k)}\right\|_2 \le \frac{\alpha_{r\,r-k}}{(\alpha_{r\,r})^{1-k/r}}\|f\|_2^{k/r}\left\|f^{(r)}\right\|_2^{1-k/r}. \qquad (12)$$

Учитывая принадлежность промежуточных производных $f^{(r-k)}$ $(k=\overline{1,r})$ функции $f\in H_q^r$ пространству H_p $(1\le p\le 2)$ и справедливость включений $f\in H_s$, $f^{(r)}\in H_t$, где $2\le s,t\le q$, а также учитывая специфику определения нормы в пространстве Харди, из (12) получаем требуемое неравенство (2).

Покажем, что неравенство (2) является неулучшаемым в указанном выше смысле. Для этого рассмотрим, например, функцию $f_0(z)\overset{df}{=}z^r$, которая принадлежит H_q^r. Поскольку $\left\|f_0^{(r)}\right\|_t=\alpha_{r,r}$; $\|f_0\|_s=1$; $\left\|f_0^{(r-k)}\right\|_p=\alpha_{r,r-k}$, то подставляя значения указанных величин в формулу (2) убеждаемся в том, что данное неравенство обращается в равенство. Теорема 1 доказана.

Пусть $z=(z_1,z_2)=(\rho_1e^{it_1},\rho_2e^{it_2})$ – точка двумерного комплексного пространства C^2; $U^2=\left\{z\in C^2:|z_j|<1; j=1,2\right\}$ – единичный бикруг в C^2; $\Gamma^2=\left\{z\in C^2:|z_j|=1; j=1,2\right\}$ – остов бикруга. Класс всех аналитических в U^2 функций обозначим через $A(U^2)$. Пусть $f\in A(U^2)$; $\rho_j\in[0,1), j=1,2$; $1\le q<\infty$ и $M_q(f;\rho_1,\rho_2)=\left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(\rho_1e^{i\tau_1},\rho_2e^{i\tau_2})\right|^q d\tau_1 d\tau_2\right\}^{1/q}$. Символом $H_{q,2}=H_q(U^2)$ $(q\ge 1)$ обозначим пространство Харди в U^2, состоящее из функций $f\in A(U^2)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{q,2}=\|f\|_{H_{q,2}}=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{\rho_j\to 1-0\\ j=1,2}} M_q(f;\rho_1,\rho_2), & \text{если } 1\le q<\infty,\\ \sup\limits_{\substack{z_j\in U\\ j=1,2}}|f(z_1,z_2)|, & \text{если } q=\infty.\end{cases}$$

Из результатов А. Зигмунда [9] следует, что для функции $f \in H_{q,2}$ $(1 \le q < \infty)$ почти всюду на Γ^2 существуют угловые граничные значения, выполняется равенство

$$\lim_{\substack{\rho_j \to 1-0 \\ j=1,2}} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| f(\rho_1 e^{i\tau_1}, \rho_2 e^{i\tau_2}) - f(e^{i\tau_1}, e^{i\tau_2}) \right|^q d\tau_1 d\tau_2 = 0$$

и функцию f можно считать заданной почти всюду на Γ^2. Поэтому под $H_{q,2}$ часто подразумевают именно множество таких граничных функций и говорят, что норма $f \in H_{q,2}$ реализуется на ее угловых граничных значениях $f(e^{i\tau_1}, e^{i\tau_2})$, которые существуют почти для всех $0 \le \tau_1, \tau_2 < 2\pi$.

Символом $H_{q,2}^{r_1,r_2}$ $(r_j \in N; j = 1,2)$ обозначим множество функций $f \in A(U^2)$, у которых смешанные производные $f^{(r_1,r_2)}$ по переменным z_1 и z_2 и частные производные $f^{(r_1,0)}$ по переменной z_1 и $f^{(0,r_2)}$ по переменной z_2 принадлежат пространству $H_{q,2}$. Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть* $r_1, r_2 \in N; 1 \le k_j \le r_j$ $(j = 1,2)$ – *натуральные числа,* $1 \le p \le 2$; $2 \le s,t,u,v \le q$. *Тогда для любой функции* $f \in H_{q,2}^{r_1,r_2}$, *у которой коэффициенты Тейлора*

$$c_{\nu,r_2-k_2}(f) = \ldots = c_{\nu,r_2-1}(f) = 0;\ c_{r_1-k_1,\mu}(f) = \ldots = c_{r_1-1,\mu}(f) = 0,$$

где $\nu = r_1 - k_1, r_1 - k_1 + 1, \ldots$; $\mu = r_2 - k_2, r_2 - k_2 + 1, \ldots$, *справедливы неравенства:*

$$\left\| f^{(r_1-k_1, r_2-k_2)} \right\|_p \le \frac{\alpha_{r_1,r_1-k_1}}{(\alpha_{r_1,r_1})^{1-k_1/r_1}} \frac{\alpha_{r_2,r_2-k_2}}{(\alpha_{r_2,r_2})^{1-k_2/r_2}} \times$$

$$\times \|f\|_s^{k_1k_2/(r_1r_2)} \left\| f^{(r_1,0)} \right\|_t^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2} \left\| f^{(0,r_2)} \right\|_u^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1} \left\| f^{(r_1,r_2)} \right\|_v^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)} \tag{13}$$

Неравенства (13) *являются точными в том смысле, что существует функция* $f_1 \in H_{q,2}^{r_1,r_2}$, *обращающая* (13) *в равенства.*

Доказательство. При $r_1 = k_1$ и $r_2 = k_2$ неравенство (13) очевидно. Если $r_1 = k_1$ и $1 \le k_2 \le r_2 - 1$ или $r_2 = k_2$ и $1 \le k_1 \le r_1 - 1$, то доказательство неравенства (13) повторяет ход доказательства теоремы 1. Поэтому всюду далее полагаем $1 \le k_j \le r_j - 1$ $(j = 1,2)$.

Пусть $f(z_1,z_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1} z_2^{j_2}$ – произвольная функция из множества $H_{q,2}^{r_1,r_2}$, удовлетворяющая условиям данной теоремы. Для функции f, ее частных производных $f^{(r_1,0)}(z_1,z_2) = \sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} \alpha_{j_1,r_1} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1-r_1} z_2^{j_2}$,

$$f^{(0,r_2)}(z_1,z_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty} \alpha_{j_2,r_2} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1} z_2^{j_2-r_2}$$

и смешанных производных

$$f^{(r_1,r_2)}(z_1,z_2)=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}\alpha_{j_2,r_2}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1-r_1}z_2^{j_2-r_2},$$

$$f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(z_1,z_2)=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1-k_1}\alpha_{j_2,r_2-k_2}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1-r_1+k_1}z_2^{j_2-r_2+k_2}$$

в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|f\|_2^2=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2;\ \left\|f^{(r_1,0)}\right\|_2^2=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}^2\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2, \tag{14}$$

$$\left\|f^{(0,r_2)}\right\|_2^2=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_2,r_2}^2\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2;\ \left\|f^{(r_1,r_2)}\right\|_2^2=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}^2\alpha_{j_2,r_2}^2\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2, \tag{15}$$

$$\left\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_2^2=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1-k_1}^2\alpha_{j_2,r_2-k_2}^2\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2 \tag{16}$$

Используя (16), запишем

$$\left\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_2^2=\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\left(\alpha_{j_1,r_1}\alpha_{j_2,r_2}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|\right)^{2(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\times$$
$$\times\left(\alpha_{j_1,r_1}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|\right)^{2(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\left(\alpha_{j_2,r_2}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|\right)^{2(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\times$$
$$\times\left(\frac{\alpha_{j_1,r_1-k_1}\alpha_{j_2,r_2-k_2}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^{k_1k_2/(r_1r_2)}}{\alpha_{j_1,r_1}^{1-k_1/r_1}\alpha_{j_2,r_2}^{1-k_2/r_2}}\right)^2. \tag{17}$$

Из (17) получаем

$$\left\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_2^2\le\left\{\sup_{j_1\ge r_1}\frac{\alpha_{j_1,r_1-k_1}}{(\alpha_{j_1,r_1})^{1-k_1/r_1}}\right\}^2\left\{\sup_{j_2\ge r_2}\frac{\alpha_{j_2,r_2-k_2}}{(\alpha_{j_2,r_2})^{1-k_2/r_2}}\right\}^2\times$$
$$\times\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\left\{\left(\alpha_{j_1,r_1}\alpha_{j_2,r_2}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|\right)^{2(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\alpha_{j_1,r_1}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|\right)^{2(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\left(\alpha_{j_2,r_2}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|\right)^{2(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^{2k_1k_2/(r_1r_2)}\right\} \tag{18}$$

Применяя к правой части неравенства (18) обобщенное неравенство Гельдера [7, с.36] с показателями $(r_1-k_1)(r_2-k_2)/(r_1r_2)$; $k_2(r_1-k_1)/(r_1r_2)$; $k_1(r_2-k_2)/(r_1r_2)$; $k_1k_2/(r_1r_2)$,с учетом (14) – (16) получаем

$$\left\|f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_2^2\le\left\{\sup_{j_1\ge r_1}\frac{\alpha_{j_1,r_1-k_1}}{(\alpha_{j_1,r_1})^{1-k_1/r_1}}\right\}^2\left\{\sup_{j_2\ge r_2}\frac{\alpha_{j_2,r_2-k_2}}{(\alpha_{j_2,r_2})^{1-k_2/r_2}}\right\}^2\times$$
$$\times\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}^2\alpha_{j_2,r_2}^2\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2\right\}^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}\times$$
$$\times\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_1,r_1}^2\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2\right\}^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\alpha_{j_2,r_2}^2\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2\right\}^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\times$$

$$\times\left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty}\left|c_{j_1,j_2}(f)\right|^2\right\}^{k_1k_2/(r_1r_2)} \le \left\{\sup_{j_1\ge r_1}\frac{\alpha_{j_1,r_1-k_1}}{(\alpha_{j_1,r_1})^{1-k_1/r_1}}\right\}^2\left\{\sup_{j_2\ge r_2}\frac{\alpha_{j_2,r_2-k_2}}{(\alpha_{j_2,r_2})^{1-k_2/r_2}}\right\}^2\times$$

$$\times\|f\|_2^{2k_1k_2/(r_1r_2)}\left\|f^{(r_1,0)}\right\|_2^{2(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\left\|f^{(0,r_2)}\right\|_2^{2(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\left\|f^{(r_1,r_2)}\right\|_2^{2(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}. \quad (19)$$

Используя соотношение (8), и соображения, изложенные перед формулировкой теоремы 1, из (19) получаем требуемое неравенство (13).

Рассмотрим функцию $f_1(z_1,z_2)\overset{df}{=}z_1^{r_1}z_2^{r_2}$, принадлежащую множеству $H_{q,2}^{r_1,r_2}$. Поскольку $\left\|f_1^{(r_1,r_2)}\right\|_v=\alpha_{r_1,r_1}\alpha_{r_2,r_2}$; $\left\|f_1^{(0,r_2)}\right\|_u=\alpha_{r_2,r_2}$; $\left\|f_1^{(r_1,0)}\right\|_t=\alpha_{r_1,r_1}$; $\|f_1\|_s=1$; $\left\|f_1^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|_p=\alpha_{r_1,r_1-k_1}\alpha_{r_2,r_2-k_2}$, то нетрудно убедиться в том, что после подстановки указанных величин в неравенство (13) последнее обращается в равенство. Теорема 2 доказана.

В качестве замечания отметим, что результат теоремы 2 может быть соответствующим образом распространен на случай аналитических функций n $(n>2; n\in N)$ комплексных переменных.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко, В. Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А Пичугов. – К., 2003. – 590 с.
2. **Бердникова, И. В.** Некоторые неравенства между нормами функции и ее производных в интегральных метриках / И. В. Бердникова, С. З Рафальсон // Известия вузов. Математика. – 1985. – № 12. – С. 3 – 6.
3. **Вакарчук, С. Б.** О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций / С. Б. Вакарчук // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии [Сб. науч. трудов]. – К., 1988. – С. 4. – 7.
4. **Вакарчук, М. Б.** О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических в бикруге функций / М. Б. Вакарчук // Теорія наближення та задачі обчислювальної математики [Тези доп. міжнар. конф.] – Дніпропетровськ, 1993. – С. 35.
5. **Вакарчук, М. Б.** Деякі питання апроксимації функцій у комплексній площині : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз-мат. наук : спец. 01.01 01 «Математичний аналіз» / М. Б. Вакарчук. – Дніпропетровськ, 1995. – 20 с.
6. **Гофман, К.** Банаховы пространства аналитических функций / К. Гофман. – М., 1963. – 312 с.
7. **Харди Г. Г.** Неравенства / Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. – М., 1948. – 456 с.
8. **Duren P. L.** Theory of H_p spaces / P. L. Duren. – New York and London: Academic Press, 1970. – 192 p.
9. **Zigmund A.** On the boundary values of functions of several complex variables / A. Zigmund // Fund. Math. – 1949. – V. 36 – P. 47 – 59.

Надійшла до редколегії 15 04 10

ISSN № 9125 0912 ВІСНИК ДНУ Серія „Математика" № 6/1 2010 Вип 15 С 88–90

УДК 517.5

В.Л.Великин
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

О ВЗАИМНОМ УКЛОНЕНИИ НЕКОТОРЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ЭРМИТОВЫХ СПЛАЙНОВ

Отримано точні значення і двосторонні оцінки інтерполяційних розхилів деяких підпросторів ермітових сплайнів на множинах неперервно диференційовних функцій.

Ключові слова: розхил, підпростір, сплайни.

Получены точные значения и двусторонние оценки интерполяционных растворов некоторых подпространств эрмитовых сплайнов на множествах непрерывно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: раствор, подпространство, сплайны.

We obtain exact values and two-sided estimates on the interpolatory openings of certain subspaces of Hermitian splines over sets of continuosly differentiable functions.

Key words: openings, subsets, splines.

Пусть, как обычно, C^q, $q=0,1,2,\ldots$, – линейное пространство функций, определенных на промежутке $[0,1]$ и имеющих на нем q непрерывных производных, а W^{q+1} – множество функций из C^q, у которых q-я производная абсолютно непрерывна на $[0,1]$ и $\|f^{(q+1)}\|_\infty = \|f^{(q+1)}\|_{L_\infty(0,1)} \le 1$.

Здесь мы продолжаем [1] исследовать, на этот раз на множествах W^{q+1}, значения взаимного уклонения подпространств интерполяционных эрмитовых сплайнов $S_{r,m}$:

$$S_{r,m} = \Big\{ s_{r,m}(f;x) = \sum_{k=0}^{r} f_{i-1}^{(k)} H_{k,m}(h_i; x - x_{i-1}) + (-1)^k f_i^{(k)} H_{k,m}(h_i; x_i - x),$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i],\ \ i=\overline{1,n},\ \ f \in C^q,\ \ r \le q,\ \ r \le m \Big\},$$

$$H_{k,m}(h;t) = \frac{(h-t)^{m+1}}{k!} \sum_{s=0}^{m-k} \frac{C_{m+s}^{s}}{h^{m+s+1}} t^{k+s}, \tag{1}$$

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1,\ \ n \ge 1,\ \ h_i = x_i - x_{i-1},\ \ f_j^{(k)} = f^{(k)}(x_j).$$

А именно, здесь мы оцениваем величину

$$\Theta_p\left[S_{q,m_1}, S_{q,m_2}\right] = \sup_{f \in W^{q+1}} \left\| s_{q,m_1}(f;x) - s_{q,m_2}(f;x) \right\|_{L_p(0,1)}.$$

Исходя из интегрального представления разности $f(x) - s_{q,m}(f,x)$, $f \in W^{q+1}$ (см. (2.9') из [2]), нетрудно получить следующее равенство для $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i=\overline{1,n}$:

$$\int_0^1 K_{q,\nu,m}(x,t) f^{q+1}(t)dt,$$

$$K_{q,\nu,m}(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{q} \dfrac{(-1)^{q-k}}{(q-k)!}(t - x_{i-1})^{q-k} \omega_{k,\nu,m}(h_i; x - x_{i-1}), & t \in [x_{i-1}, x_i), \\ 0, & t \notin [x_{i-1}, x_i), \end{cases}$$

а

$$\omega_{k,\nu,m}(h;u) = H_{k,m+\nu}(h;u) - H_{k,m}(u).$$

С учетом равенств (1), имеем

$$\omega_{k,1,\mu}(h;u) = \frac{u^{\mu+1}(h-u)^{\mu+1}}{k!h^{2\mu+3-k}}\left(hC_{2\mu+1-k}^{\mu} - uC_{2\mu+2-k}^{\mu+1}\right).$$

И поскольку

$$\omega_{k,\nu,m}(h;u) = \sum_{j=0}^{\nu-1} \omega_{k,1,m+j}(h;u),$$

то

$$\omega_{k,\nu,m}(h;u) = \frac{u^{m+1}(h-u)^{m+1}}{k!h^{2m+3-k}} \sum_{j=0}^{\nu-1}\left(hC_{2(m+j)+1-k}^{m+j} - uC_{2(m+j)+2-k}^{m+j+1}\right)\frac{u^j(h-u)^j}{h^{2j}}.$$

Теорема 1. *Для любых натуральных* m *имеет место равенство*

$$\Theta_\infty\left[S_{1,m}, S_{1,m+1}\right] = \frac{C_{2m}^{m}}{(m+1)2^{2m+3}}\delta_n^2, \tag{2}$$

где $\delta_n = \max\{h_i,\ i = \overline{1,n}\}$.

Доказательство. Не уменьшая общности, заменим для упрощения h_i на h, $x - x_{i-1}$ на x, $t - x_{i-1}$ на t. Тогда для $q = \nu = 1$ будем иметь

$$K_{1,1,m}(x,t) = -t\left(H_{0,m+1}(h;x) - H_{0,m}(h;x)\right) + H_{1,m+1}(h;x) - H_{1,m}(h;x), \tag{3}$$

Обозначим через t_0 нуль функции $K_{1,1,m}(x,t)$, как функции переменной t. Из (3) с учетом равенств (1) получаем

$$t_0 = \left(\frac{m+1}{2m+1}h - x\right)\frac{h}{h-2x}.$$

Для $\dfrac{m}{2m+1}h \le x \le \dfrac{h}{2}$ $h \le t_0$, т. е. для таких x $K_{1,1,m}(x,t) \ge 0$ для всех $t \in [0,h]$. Поэтому для таких x

$$\int_0^1 |K_{1,1,m}(x,t)|dt = \frac{C_{2m}^m}{2m+2}\cdot\frac{x^{m+1}(h-x)^{m+1}}{h^{2m}} \le \frac{C_{2m}^m}{(2m+2)2^{2m+2}}h^2 =$$

$$= \max_{x\in[0,h]} \int_0^1 |K_{1,1,m}(x,t)|dt. \tag{4}$$

Если же $0 \le x \le \frac{m}{2m+1}h$, то

$$\int_0^1 | K_{1,1,m}(x,t) | \, dt = \frac{C_{2m}^m}{(2m+1)(2m+2)h^{2m+1}} \cdot \varphi_m(x) \, g_m(x),$$

где

$$\varphi_m(x) = x^{m+1}(h-x)^{m+1}, \quad g_m(x) = \frac{\left((m+1)h-(2m+1)x\right)^2 - \left(mh-(2m+1)x\right)^2}{h-2x}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $g_m(x)$ возрастает для рассматриваемых значений x. Тем самым равенство (2) доказано.

Заметим, что в случае произвольного q имеет место формальное равенство

$$\Theta_\infty\left[S_{q,m}, S_{q,m+1}\right] = \left\| \int_0^{\delta_n} | K_{q,1,m}(x,t) | \, dt \right\|_\infty,$$

где

$$K_{q,1,m}(x,t) = \sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^{q-k}}{(q-k)!} t^{q-k} \, \frac{x^{m+1}(\delta_n - x)^{m+1}}{k!\,\delta_n^{2m+3-k}} \left(\delta_n C_{2m+1-k}^{m} - x\, C_{2m+2-k}^{m+1}\right), x \in [0, \delta_n].$$

Теорема 2. *Имеет место следующее соотношение*

$$\frac{1}{32}\delta_n^2 = \Theta_\infty\left[S_{1,2}, S_{1,1}\right] < \Theta_\infty\left[S_{1,m}, S_{1,1}\right] < \frac{5}{32}\delta_n^2 = \lim_{m\to\infty} \Theta_\infty\left[S_{1,m}, S_{1,1}\right] \qquad (5)$$

Левая часть этого соотношения получается из равенства (2) при $m = 1$, а предельное равенство и оба неравенства соотношения (5) вытекают из равенств (1) при $k = 0,1$, свойства монотонности функции $H_{0,m}(h,u)$ и предельных равенств для функций $H_{k,m}$, полученных в [1].

Теорема 3. *Для любых натуральных* m *имеет место равенство*

$$\Theta_1\left[S_{1,m}, S_{1,m+1}\right] = \frac{C_{2m}^m}{2m+2} r_m \sum_{i=1}^{n} h_i^3, \quad r_m = \int_0^1 u^{m+1}(1-u)^{m+1} du.$$

В частности, $r_1 = 1/6$, $r_2 = 1/30$, $r_3 = 1/140$, $r_4 = 1/630, \ldots$.

В случае равномерного разбиения

$$\Theta_1\left[S_{1,m}, S_{1,m+1}\right] = \frac{C_{2m}^m}{2m+2} r_m \frac{1}{n^2}.$$

Библиографические ссылки

1. **Великин В.Л.** Точные значения и оценки интерполяционных растворов некоторых подпространств эрмитовых сплайнов / В.Л. Великин // Вісник Дніпропетр. ун-ту, 2009, т.17, №6/1, С.54–56.
2. **Великин В.Л.** Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классе дифференцируемых функций / В.Л. Великин // Изв. АН СССР, Серия математическая, 1973.–37, С.165 –185.

Надійшла до редколегії 01.04.10

ISSN № 9125 0912 ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика" № 15 2010 Вип 15 С 91 – 101

УДК 517.5

С.В. Гончаров
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ ОБОБЩЁННЫХ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА СУММ ФУРЬЕ-ЯКОБИ В ПРОСТРАНСТВАХ L^p_ρ

Отримано оцінки знизу узагальнених констант Лебега сум Фур'є-Якобі у просторах інтегровних з вагою $\rho(t) = (1-t)^A(1+t)^B$ функцій, що підтверджують точність за порядком відомих оцінок зверху.

Ключові слова: поліноми Якобі, суми Фур'є-Якобі, константи Лебега.

Получены оценки снизу обобщённых констант Лебега сумм Фурье-Якоби в пространствах интегрируемых с весом $\rho(t) = (1-t)^A(1+t)^B$ функций, подтверждающие точность по порядку известных оценок сверху.

Ключевые слова: полиномы Якоби, суммы Фурье-Якоби, константы Лебега.

We obtain lower estimates for the generalized Lebesgue constants of Fourier-Jacobi sums, in the spaces of functions being integrable with the $\rho(t) = (1-t)^A(1+t)^B$ weight, therefore confirming an exactness of known upper estimates.

Key words: Jacobi polynomials, Fourier-Jacobi sums, Lebesgue constants.

Пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $A > -1$, $B > -1$ и $\omega(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\rho(t) = (1-t)^A(1+t)^B$. $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\}_{n=0}^\infty$ – полиномы Якоби, ортогональные на $[-1;1]$ с весом $\omega(t)$ и нормированные условием $P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$. Для $p \geq 1$ $L^p_\rho = L^p_\rho[-1;1]$ – пространство функций, интегрируемых на $[-1;1]$ с весом $\rho(t)$: $\|f\|_{L^p_\rho} = \{\int_{-1}^{+1} |f(t)|^p \rho(t) dt\}^{\frac{1}{p}}$. $\forall f \in L^p_\rho$ соответствует формальный ряд $S^{(\omega)}(f;t) = \sum_{n=0}^\infty a_n P_n^{(\alpha;\beta)}(t)$, a_n – коэффициенты Фурье; $S_n^{(\omega)}(f;t) = \sum_{k=0}^n a_k P_k^{(\alpha,\beta)}(t)$.

В [7] получен наиболее общий результат об ограниченности $\| S_n^{(\omega)} \|_{L^p_\rho}$:

Если $1 < p < \infty$, *то* $\| S_n^{(\omega)} \|_{L^p_\rho}$ *ограничены (и* $S_n^{(\omega)}(f) \underset{n\to\infty}{\to} f$, $\forall f \in L^p_\rho$*) тогда и только тогда, когда* $|\frac{1+\alpha}{2} - \frac{1+A}{p}| < \min\{\frac{1}{4}; \frac{1+\alpha}{2}\}$ *и* $|\frac{1+\beta}{2} - \frac{1+B}{p}| < \min\{\frac{1}{4}; \frac{1+\beta}{2}\}$.

В [2] показано, что *при* $p > 1$ $\forall f \in L^p_\rho$ $\exists S^{(\omega)}(f)$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1+\alpha}{2} - \frac{1+A}{p} > -\frac{1+\alpha}{2}$ *и* $\frac{1+\beta}{2} - \frac{1+B}{p} > -\frac{1+\beta}{2}$ *(если* $p = 1$, *знак «>» следует заменить на «≥»).*

Первые исследования в этом направлении касались рядов Фурье-Лежандра ($\alpha = \beta = A = B = 0$, $S_n^{(\omega)} = S_n$, $L^p_\rho = L^p$). В [8] и [9] показано, что при $p \in (\frac{4}{3};4)$: $\forall f \in L^p$ $S_n(f) \to f$, когда $n \to \infty$, а при $p \in [1;\frac{4}{3}] \cup [4;+\infty)$ – нет.

В последнем случае оказалось целесообразным рассматривать т. н. обобщённые константы Лебега, комбинируя их оценки с дифференциально-разностными свойствами функций определённых классов ([1], [3]).

Введём величины $\mu_{\lambda,n}^{\pm}(t) = (\sqrt{1 \mp t} + n^{-1})^{-\lambda}$ и $\mu_{\lambda,n}^{*}(t) = (\sqrt{1-t^2} + n^{-1})$.

В [3] получен следующий результат ([3, с. 141–143, теорема 3]):

Пусть $1 < p \le \frac{4}{3}$ *и* $\gamma \ge \frac{2}{p} - \frac{3}{2}$. *Тогда для любой функции* $f(x) \in L^p$

$$\|S_n(f;x)\|_{L^p} \le \begin{cases} C_{p,\gamma}\|f(t)\cdot\mu_{\gamma,n}^{*}(t)\|_{L^p}, \gamma > \frac{2}{p} - \frac{3}{2}, p < \frac{4}{3}, \\ C_p \ln^{\frac{1}{q}} n\|f(t)\cdot\mu_{\gamma,n}^{*}(t)\|_{L^p}, \gamma = \frac{2}{p} - \frac{3}{2}, p < \frac{4}{3}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\ C\ln n\|f(t)\|_{L^p}, p = \frac{4}{3}. \end{cases}$$

В [4] данная оценка была обобщена ([4, с. 38, теорема 3]):

Пусть выполнены условия: 1) $1 < p < \infty$ (1)

2) $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta > -\frac{1}{2}$, $A > -1$, $B > -1$ (2)

3) $\frac{1+A}{p} < 1 + \alpha$ *и* $\frac{1+B}{p} < 1 + \beta$ (3)

4) $\gamma \ge \gamma_0 = -\frac{3}{2} - \alpha + \frac{2}{p}(1+A) \ge 0$ *и* $\delta \ge \delta_0 = -\frac{3}{2} - \beta + \frac{2}{p}(1+B) \ge 0$ (4)

Тогда для любой функции $f(x) \in L_\rho^p$

$$\|S_n^{(\omega)}(f;x)\|_{L_\rho^p} \le \begin{cases} C_1\|f(t)\cdot\mu_{\gamma,n}^{+}(t)\mu_{\delta,n}^{-}(t)\|_{L_\rho^p}, \{\gamma > \gamma_0\} \wedge \{\delta > \delta_0\}, \\ C_2 \ln^{\frac{1}{q}}(n+1)\|f(t)\cdot\mu_{\gamma,n}^{+}(t)\mu_{\delta,n}^{-}(t)\|_{L_\rho^p}, \{\gamma = \gamma_0\} \vee \{\delta = \delta_0\}, \gamma_0 > 0, \delta_0 > 0, \\ C_3 \ln(n+1)\|f(t)\cdot\mu_{\gamma,n}^{+}(t)\mu_{\delta,n}^{-}(t)\|_{L_\rho^p}, \{\gamma = \gamma_0 = 0\} \vee \{\delta = \delta_0 = 0\}; \end{cases}$$

где $C_i = C_i(\alpha;\beta;A;B;p;\gamma;\delta)$ *– положительные константы.*

Здесь будет доказана точность по порядку этих обобщённых оценок.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1) – (4). *Тогда:*

а) если $\gamma > \gamma_0$ *и* $\delta > \delta_0$, *то*

$$\exists C_1 > 0 \text{ и } f(t) \in L_\rho^p : \|S_n^{(\omega)}(f;\cdot)\|_{L_\rho^p} \ge C_1\|f(t)\cdot\mu_{\gamma,n}^{+}(t)\mu_{\delta,n}^{-}(t)\|_{L_\rho^p};$$

б) если $\gamma = \gamma_0$ *(или* $\delta = \delta_0$*), и* $\gamma_0 > 0$ *(соответственно* $\delta_0 > 0$*), то*

$$\exists C_2 > 0 \text{ и } \{f_n(t)\}_{n\in N} \text{ из } L_\rho^p : \|S_n^{(\omega)}(f_n;\cdot)\|_{L_\rho^p} \ge C_2 \ln^{\frac{1}{q}}(n+1)\|f_n(t)\cdot\mu_{\gamma,n}^{+}(t)\mu_{\delta,n}^{-}(t)\|_{L_\rho^p};$$

в) если $\gamma = \gamma_0 = 0$ *или* $\delta = \delta_0 = 0$, *то*

$$\exists C_3 > 0 \text{ и } \{f_n(t)\}_{n\in N} \text{ из } L_\rho^p : \|S_n^{(\omega)}(f_n;\cdot)\|_{L_\rho^p} \ge C_3 \ln(n+1)\|f_n(t)\cdot\mu_{\gamma,n}^{+}(t)\mu_{\delta,n}^{-}(t)\|_{L_\rho^p}$$

Функции, приводящие к требуемым оценкам снизу, и методы получения этих оценок в основном воспроизводят рассуждения из [1] для рядов Фурье-Лежандра ([1, с. 90–96, лемма 3.7]) с некоторыми модификациями.

Символами C_4, $C_{\alpha,\beta}$, $\widetilde{C}$, … будем обозначать положительные константы, абсолютные или зависящие от (некоторых из) величин α, β, A, B, p, γ, δ.

Результаты, используемые в дальнейшем

1) $S_n^{(\omega)}(f;x)=\int_{-1}^{+1}K_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)f(y)\omega(y)dy$. Ядро $S_n^{(\omega)}$ представимо в виде $K_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)=\frac{2^{\alpha-\beta}}{2n+\alpha+\beta+2}\cdot\frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\cdot\frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(y)-P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(y)}{x-y}$ ([5, с. 83]). Применим первую из формул $P_n^{(\alpha+1,\beta)}(t)=\frac{2}{2n+\alpha+\beta+2}\cdot\frac{(n+\alpha+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)-(n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t)}{1-t}$, $P_n^{(\alpha,\beta+1)}(t)=\frac{2}{2n+\alpha+\beta+2}\cdot\frac{(n+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(t)+(n+1)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(t)}{1+t}$ ([5, с. 83]): $K_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)=M_n^{(\alpha,\beta)}\times$ $\times\left(\widetilde{K}_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)-\widetilde{K}_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)\right)=M_n^{(\alpha,\beta)}\widetilde{K}_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)$, где $M_n^{(\alpha,\beta)}=\frac{1}{2^{1+\alpha+\beta}}\cdot\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}$,

$$\widetilde{K}_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)=\frac{1-x}{y-x}P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(y),\ \widetilde{K}_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)=-\widetilde{K}_n^{(\alpha,\beta)}(y;x)\tag{5}$$

Отсюда $$\|S_n^{(\omega)}(f;x)\|_{L_\rho^p}=M_n^{(\alpha,\beta)}\left\{\int_{-1}^{1}\left|\int_{-1}^{1}f(y)\widetilde{K}_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)\omega(y)dy\right|^p\rho(x)dx\right\}^{\frac{1}{p}}\tag{6}$$

2) Согласно ([5, с. 176, теорема 7.32.2]) и ([5, с. 205, теорема 8.21.13]):

а) $$\forall z\in(-1;1)\ \exists C_{\alpha,\beta,z}>0:\ \forall t\in[z;1]\ \ |P_n^{(\alpha,\beta)}(t)|\le\frac{C_{\alpha,\beta,z}}{\sqrt{n}}\left(1-t+n^{-2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\tag{7}$$

б) при фиксированных $c>0$ и $d\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$, равномерно по $\tau\in\left[\frac{c}{n};\pi-d\right]$ ($\frac{c}{n}<d$) $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)=c_n^{(1)}(t)n^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\left\{\cos(N_n\tau+\varphi)-c_n^{(2)}(t)n^{-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\right\}$ ($t=\cos\tau$, $N_n=$ $=n+\frac{1+\alpha+\beta}{2}$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)$), и $C_{\alpha,\beta}^{(1)}\ge c_n^{(1)}(t)\ge C_{\alpha,\beta}^{(2)}>0$, а $c_n^{(2)}(t)\le C_{\alpha,\beta}^{(3)}$ (8)

3) Оценки интегралов, содержащих $P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$ ([1, с. 69–70, лемма 2.8]): *Если* $\alpha,\beta>-1$; $1\le r<\infty$; $Ar>-1$; $-1<z<1$; *то* $\exists C_1>0, C_2>0$ *(зависящие от* α,β,A,r,z*)*: $C_1g_n\le\left\|P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(t)(1-t)^A\right\|_{L^r[z,1]}\le C_2g_n$, *где* g_n *равна: 1)* $n^{-\frac{1}{2}}$, *если* $A+\frac{1}{r}>\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}$; *2)* $n^{-\frac{1}{2}}\ln^{\frac{1}{r}}(n+1)$, $A+\frac{1}{r}=\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}$; *3)* $n^{\alpha-2A-\frac{2}{r}}$, $A+\frac{1}{r}<\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}$ (9)

Заметим, что ввиду тождества $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^nP_n^{(\beta,\alpha)}(-x)$ ([7, (4.1.3)]) утверждения 1 – 3 имеют аналоги для противоположного конца отрезка $[-1;1]$.

4) 3 интегральных неравенства ([6, с. 438–440, леммы 3, 4 и 7]):

1. *Если* $1<p<\infty$; $r,s<-1$ *и* $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, *то* $\exists C_{p,r,s}=\mathrm{const}$:

$$\int_0^\infty x^r(1+x)^{s-r}F^p(x)dx\le C_{p,r,s}\int_0^\infty x^{r+p}(1+x)^{s-r}f(x)^pdx\tag{10}$$

2. *Если* $1<p<\infty$; $r,s>-1$ *и* $F(x)=\int_x^\infty f(t)dt$, *то* $\exists C_{p,r,s}=\mathrm{const}$:

$$\int_0^\infty x^r(1+x)^{s-r}F^p(x)dx\le C_{p,r,s}\int_0^\infty x^{r+p}(1+x)^{s-r}f(x)^pdx\tag{11}$$

3. *Пусть* $1<p<\infty$; *функция* $w(x)>0$ *такова, что* $\exists B=\mathrm{const}$: $w(2^n)\le Bw(x)\le B^2w(2^n)$, $\forall x\in\left[2^n;2^{n+1}\right]$, $\forall n\in Z$, *и* $\widetilde{F}(x)=\mathrm{V.P.}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{3x}{2}}\frac{f(y)}{x-y}dy$. *Тогда* $\exists C_{p,B}=\mathrm{const}$:

$$\int_0^\infty|\widetilde{F}(x)|^pw(x)dx\le C_{p,B}\int_0^\infty|f(x)|^pw(x)dx\tag{12}$$

Вспомогательные утверждения

$\forall a, b$ из нормированного пространства X $\|a - b\|_X \geq \|a\|_X - \|b\|_X$ (13)

$\forall t \in [-1;1]$ $R_+(t) = \frac{\sqrt{1 \pm t + n}}{\sqrt{1 \pm t + n^{-2}}} \in [1;\sqrt{2}]$ – (14); при $\mu \leq 0$ $(1 \pm x + n^{-2})^\mu \leq$ $\leq (1 \pm x)^\mu$ – (15); $\forall t \in [0;2]$ $\arccos(1-t) \geq \sqrt{2t}$ – (16).

Лемма 1. *Пусть* $z \in (0;2)$, $\lambda > -1$, *тогда* $J_n = \int_0^z (t + n^{-2})^\mu t^\lambda dt = O(\chi_n)$, *где величина* χ_n *равна: 1)* 1, *если* $\lambda + \mu > -1$*; 2)* $\ln(n+1)$, $\lambda + \mu = -1$*; 3)* $n^{-2(1+\lambda+\mu)}$, $\lambda + \mu < -1$. *При* $\lambda \leq -1$, $\mu \leq 0$ $\int_{n^{-2}}^z (t + n^{-2})^\mu t^\lambda dt = O(\chi_n)$ *(* $\frac{1}{n^2} \leq z$*)*

Доказательство. $J_n = \int_0^{n^{-2}} (\ldots)dt + \int_{n^{-2}}^z (\ldots)dt = J_n^{(1)} + J_n^{(2)}$. Если $\mu > 0$, то $(t + n^{-2})^\mu \leq 3^\mu$, и $J_n \leq 3^\mu \int_0^z t^\lambda dt = O(1)$, для $\lambda > -1$. Если $\mu \leq 0$, то $(t + n^{-2})^\mu \leq t^\mu$, и $J_n^{(2)} \leq \int_{n^{-2}}^z t^{\lambda+\mu} dt = O(\chi_n)$; при $\lambda > -1$ $(t + n^{-2})^\mu \leq n^{-2\mu}$, и $J_n^{(1)} \leq n^{-2\mu} \int_0^{n^{-2}} t^\lambda dt \leq$ $\leq \begin{cases} C_{\lambda,\mu}, \lambda + \mu \geq -1, \\ C_{\lambda,\mu} n^{-2(1+\lambda+\mu)}, \lambda + \mu < -1. \end{cases}$ Остаётся объединить оценки $J_n^{(1)}$ и $J_n^{(2)}$.

Лемма 2. $\exists C_{\alpha,\beta} > 0 : \forall n \in N$ $M_n^{(\alpha,\beta)} \geq C_{\alpha,\beta} n$.

Доказательство. $M_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^{1+\alpha+\beta}} \frac{\Gamma(2+\alpha+\beta)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} \prod_{k=1}^n \frac{k(k+1+\alpha+\beta)}{(k+\alpha)(k+\beta)} = C'_{\alpha,\beta} F_n^{(\alpha,\beta)}$; покажем $\exists \tilde{E}_{\alpha,\beta} > 0 : F_n^{(\alpha,\beta)} \geq \tilde{E}_{\alpha,\beta} n$. $\forall n > 1$ $F_n^{(\alpha,\beta)} = (1 + \frac{n - \alpha\beta}{(n+\alpha)(n+\beta)}) F_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$. Докажем: $\forall n \geq N_0 =$ $= \max\{1; 1 + [\alpha\beta(1 + (1+\alpha)(1+\beta))]\}$ $F_n^{(\alpha,\beta)} \geq E_{\alpha,\beta}(n + 1 + (1+\alpha)(1+\beta))$, $E_{\alpha,\beta} > 0$ – по индукции. Базис выполняется (берём $E_{\alpha,\beta} = F_{N_0}^{(\alpha,\beta)}(N_0 + 1 + (1+\alpha)(1+\beta))^{-1}$). Предположим, что для $F_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$ верно $F_{n-1}^{(\alpha,\beta)} \geq E_{\alpha,\beta}(n + (1+\alpha)(1+\beta))$. Тогда

$$D_n^{(\alpha,\beta)} = F_n^{(\alpha,\beta)} - F_{n-1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{n - \alpha\beta}{(n+\alpha)(n+\beta)} F_{n-1}^{(\alpha,\beta)} \geq E_{\alpha,\beta} \frac{(n + (1+\alpha)(1+\beta))(n - \alpha\beta)}{(n+\alpha)(n+\beta)} = E_{\alpha,\beta} W_n^{(\alpha,\beta)}.$$

Проверим $W_n^{(\alpha,\beta)} \geq 1$ $\Leftrightarrow$ $(n + 1 + \alpha + \beta + \alpha\beta)(n - \alpha\beta) \geq n^2 + n(\alpha + \beta) + \alpha\beta$ $\Leftrightarrow$ $n \geq \alpha\beta(1 + (1+\alpha)(1+\beta))$ – выполняется ($n > N_0$). Значит, $D_n^{(\alpha,\beta)} \geq E_{\alpha,\beta}$ $\Rightarrow$ $F_n^{(\alpha,\beta)} = F_{n-1}^{(\alpha,\beta)} + D_n^{(\alpha,\beta)} \geq E_{\alpha,\beta}(n + 1 + (1+\alpha)(1+\beta))$. Согласно ПМИ, гипотеза верна для $\forall n \geq N_0$. Тогда искомое $\tilde{E}_{\alpha,\beta} = \min\{F_1^{(\alpha,\beta)}; \ldots; F_{N_0-1}^{(\alpha,\beta)}(N_0 - 1)^{-1}; E_{\alpha,\beta}\} > 0$.

Лемма 3. *Пусть* $K > 0$*;* $1 \leq p < \infty$. *Тогда* $\forall A \in [-K:K]$, $\forall B \in (-\infty;+\infty)$. $\exists \mu(A;B)$ *такое, что* $|A + B|^p \geq ||A|^p + \mu(A;B) \cdot B|$, *причем* $|\mu(A;B)| \leq pK^{p-1}$.

Доказательство. Если $B = 0$, то можно взять $\mu(A;0) = 0$. Пусть $B \neq 0$ и $t = \frac{A}{B}$. Представим $\mu(A;B)$ в виде $\tilde{\mu}(t)|A|^{p-1} \operatorname{sign} B$, и разделим обе части неравенства на $|B|^p$: $|t+1|^p \geq ||t|^p + \tilde{\mu}(t)|t|^{p-1}| = |t|^{p-1}||t| + \tilde{\mu}(t)|$. Возможны 3 случая:

1) $t \ge 0$: $(t+1)^p \ge t^{p-1} | t + \tilde{\mu}(t)|$: берём $\tilde{\mu}(t) = 0$; 2) $-1 \le t < 0$: пусть $(-t) = s$. $(1-s)^p \ge s^{p-1} | s + \tilde{\mu}(t)|$, $\tilde{\mu}(t) := -s$; 3) $t < -1$: $(-t) = s$; $(s-1)^p \ge s^{p-1} | s + \tilde{\mu}(t)| \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (1-\frac{1}{s})^p \ge |1 + \frac{\tilde{\mu}(t)}{s}|$. Если $s \le p$, то $\tilde{\mu}(t) := -s$. А если $s > p$, то, поскольку $(-\frac{1}{s}) > -1$, $(1-\frac{1}{s})^p \ge 1 - \frac{p}{s} > 0$ по неравенству Бернулли, и полагаем $\tilde{\mu}(t) := -p$.

Ясно, что $| \mu(A;B)| = | \tilde{\mu}(t)| \, |A|^{p-1} \operatorname{sign} B| \le pK^{p-1}$.

Лемма 4. *Пусть* $m \in N$ $\sigma_m(z) = (1+\cos z)^m = A_m + \sum_{k=1}^m c_k^{(m)} \cos(kz)$, *причем* $A_m > 0$ *и* $c_k^{(m)} > 0$, $k = \overline{1,m}$ Доказательство легко осуществить по индукции, исходя из базиса, – $\sigma_1(z) = 1 + \cos z$, – а затем применяя тождество $\cos(kz)\cos z = \frac{1}{2}(\cos((k+1)z) + \cos((k-1)z))$ в $\sigma_{m+1}(t) = \sigma_m(t)(1+\cos z)$.

Пусть $-\infty < a < b < +\infty$, $n \in N$. $FM_{[a,b]}^{(n)}$ – класс функций $g(x): [a;b] \to R$, для которых $\exists \{x_k\}_{k=0}^n$ ($x_k = x_k(g)$): 1) $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$;

2) функция $g(x)$ монотонна на каждом из отрезков $[x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$.

Простым следствием второй теоремы о среднем является

Лемма 5. *Пусть* $-\infty < a < b < +\infty$; $f(x) \in C_{[a,b]}$; $g(x) \in FM_{[a,b]}^{(N)} \cap C_{[a,b]}$. *Кроме того,* $\exists K_1 > 0, K_2 > 0$: $\forall x \in [a;b]$ $|g(x)| \le K_1$ *и* $\forall c,d \in [a;b]$ $| \int_c^d f(x)dx | \le K_2$. *Тогда* $| \int_a^b f(x)g(x)dx | \le (N+1)K_1K_2$.

Оценки снизу $\| S_n^{(\omega)}(f;\cdot)\|_{L_\rho^p}$

Для фиксированного $z \in (-1;1)$ особенности веса $\rho(t)$ на $[z;1]$ определяются множителем $(1-t)^A$ (а на $[-1;z]$ – $(1+t)^B$), т. е.

$$\forall t \in [z;1] \; C_{B,z}^{(1)}(1-t)^A \le \rho(t) \le C_{B,z}^{(2)}(1-t)^A, \text{ и } C_{B,z}^{(1)} > 0 \tag{17}$$

Поэтому, а также вследствие симметрии, мы будем далее рассматривать – для определённости – поведение $\| S_n^{(\omega)} \|$, связанное с окрестностью т. $(+1)$.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \; (\Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1}, \; q-1 = \frac{1}{p-1}, \; p(q-1) = q, \; \frac{q}{p} = q-1, \ldots) \tag{18}$$

Под $p_0 = p_0^+$ понимается значение p при $\gamma_0 = 0$, т. е. $p_0 = \frac{4(1+A)}{3+2\alpha}$.

Полагаем $\hat{F}_n(x;y) = f_n(y)\hat{K}(x;y)\omega(y)$, $\check{F}_n(x;y) = f_n(y)\check{K}(x;y)\omega(y)$.

«◊ (...)» означает «применяя формулу (...)»; «$\mapsto$ (...)» – «получаем (...)».

А) $\gamma > \gamma_0$ и $\delta > \delta_0$. Пусть $\bar{\gamma} = [\frac{\gamma}{2}] + 1$ и $\bar{\delta} = [\frac{\delta}{2}] + 1$. Возьмём функцию $f(t) := (1-t)^{\bar{\gamma}}(1+t)^{\bar{\delta}}$ – это алгебраический полином некоторой степени $m = m(\gamma;\delta)$ (очевидно, $f(x) \in L_\rho^p$). При $n \ge m$ $S_n^{(\omega)}(f;x) = f(x)$, поэтому для таких n $\| S_n^{(\omega)}(f;x)\|_{L_\rho^p} = \| f(x)\|_{L_\rho^p} = C_{\gamma,\delta}$. Рассмотрим $\hat{I} = \| f(t)\mu_{\gamma,n}^+(t)\mu_{\delta,n}^-(t)\|_{L_\rho^p} \le$ $\le 2^{\frac{1}{p}}\{(\int_{-1}^0(\ldots)dt)^{\frac{1}{p}} + (\int_0^1(\ldots)dt)^{\frac{1}{p}}\} = C_p(\hat{I}_- + \hat{I}_+)$; оценим, например, величину $\hat{I}_+$.

$\Diamond$(17), неравенство $(\sqrt{1+t+n^{-1}})^{-\delta p} \le 1$ и (14) $\mapsto$ $\hat{I}_+ \le$
$\le C_1\{\int_0^1 (1-t+n^{-2})^{-\frac{\gamma p}{2}}(1-t)^{A+\gamma p}dt\}^{\frac{1}{p}}$. $A+\gamma p > A > -1$ и $A+\gamma p - \frac{\gamma p}{2} > A > -1 \Rightarrow$ по лемме 1 $\hat{I}_+ \le C_2$. Аналогично $\hat{I}_- \le C_3$, поэтому $\hat{I} \le C_4$, а $\| S_n^{(\omega)}(f;x)\|_{L_\rho^p} = (C_{\gamma,\delta}C_4^{-1})\cdot C_4 \ge C_5 \| f(t)\mu_{\gamma,n}^+(t)\mu_{\delta,n}^-(t)\|_{L_\rho^p}$. Пункт (а) доказан.

Б) $\gamma = \gamma_0 > 0$. $f_n(t) := | P_n^{(\alpha,\beta)}(t)|^{q-1} \operatorname{sign} P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\cdot(\sqrt{1-t}+n^{-1})^{\gamma_0 q}(1-t)^{(\alpha-A)(q-1)}$, если $t\in[\frac{1}{2};1)$, и 0 в остальных точках отрезка $[-1;1]$ (19)

Оценим сверху $\hat{I} = \| f_n(t)\mu_{\gamma,n}^+(t)\mu_{\delta,n}^-(t)\|_{L_\rho^p}$. $\Diamond$(17), (19), (18), (7) и (14) $\mapsto$
$\hat{I} \le C_6 n^{-\frac{q}{2p}}\{\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t+n^{-2})^{q(\frac{\gamma_0}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4})}(1-t)^{A+q(\alpha-A)}dt\}^{\frac{1}{p}}$.

(3)$\Leftrightarrow$ $A+q(\alpha-A) > -1$, а $A+q(\alpha-A)+q(\frac{\gamma_0}{2}-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}) = -1$, и по лемме 1, а также (18): $\hat{I} \le C_7 n^{-\frac{q}{2p}}\ln^{\frac{1}{p}}(n+1) = C_7 n^{\frac{1}{2}-\frac{q}{2}}\ln^{\frac{1}{p}}(n+1)$ (20)

$\Diamond$ $\mu_{\gamma,n}^+(t)\mu_{\delta,n}^-(t) \ge (1+n^{-2})^{-\gamma}(\sqrt{2}+n^{-2})^{-\delta}$, (20) $\mapsto$ $\|f_n\|_{L_\rho^p} < \infty$, т.е. $f_n \in L_\rho^p$.

Оценим $I = \|S_n^{(\omega)}(f_n;x)\|_{L_\rho^p}$ снизу. $\Diamond$(6) и уменьшаем промежуток, по которому берётся внешний интеграл, с $[-1;1]$ до $[-1;-\frac{1}{2}]$ – тогда $I \ge M_n^{(\alpha,\beta)}\{\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} | \int_{\frac{1}{2}}^1 (F_n(x;y) - \bar{F}_n(x;y))dy|^p \rho(x)dx\}^{\frac{1}{p}}$. После этого $\Diamond$(17) и (13) для $\|\cdot\|_{L^p_{(1+x)^B}[-1,-\frac{1}{2}]}$ $\mapsto$ $I \ge M_n^{(\alpha,\beta)}\{I_1^{\frac{1}{p}} - I_2^{\frac{1}{p}}\}$, (21)

где $I_1 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} | \int_{\frac{1}{2}}^1 F_n(x;y)dy|^p (1+x)^B dx$, $I_2 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} | \int_{\frac{1}{2}}^1 \bar{F}_n(x;y)dy|^p (1+x)^B dx$.

1. Оценим I_2 сверху: вносим $|\cdot|$ под внутренний интеграл, $\Diamond$(17) и $\{x \le -\frac{1}{2}, y \ge \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{y-x} \le 1\}$ $\mapsto$ $I_2 \le C_8 (I_2^{(1)})^p I_2^{(2)} = C_8 \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} | P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1+x)^{\frac{B}{p}}|^p dx \times$
$\times\{\int_{\frac{1}{2}}^1 | P_n^{(\alpha,\beta)}(y)|^{q-1}(\sqrt{1-y}+n^{-1})^{\gamma_0 q} | P_n^{(\alpha+1,\beta)}(y)| (1-y)^{1+\alpha+(\alpha-A)(q-1)}dy\}^p$ (22)

$\frac{1+B}{p} - (\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}) > \frac{1+B}{p_0} - (\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} > 0$, откуда ввиду (9) $I_2^{(2)} \le C_9 n^{-\frac{p}{2}}$ (23)

$\Diamond$(7), (14) $\mapsto$ $I_2^{(1)} \le C_{10} n^{-\frac{q-1}{2}-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-y+n^{-2})^{-(q-1)(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4})+\frac{\gamma_0 q}{2}-\frac{\alpha+1}{2}-\frac{1}{4}} \times$
$\times(1-y)^{1+\alpha+(\alpha-A)(q-1)}dy$. Поскольку $1+\alpha+(\alpha-A)(q-1) = -1+q(2+\alpha-\frac{2+A}{p}) >$
$> -1+q(1+\alpha-\frac{1+A}{p}) > -1$ ($\Diamond$(3)) и $1+\alpha+(\alpha-A)(q-1)-(q-1)(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4})+$
$+\frac{\gamma_0 q}{2}-\frac{\alpha+1}{2}-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} > -1$, по лемме 1 $I_2^{(1)} \le C_{11} n^{-\frac{q}{2}}$ (24)

Объединяя (24), (23) и (22) $\mapsto$ $I_2 \le C_{12} n^{-\frac{pq}{2}-\frac{p}{2}}$ (25)

2. Оценим I_1 снизу. $\Diamond\ z\cdot \operatorname{sign} z = |z|$, (17) для $\omega(y)$ и неравенство $1\le(y-x)\le 2 \ \mapsto\ I_1 \ge C_{13}\{\int_{\frac12}^{1} |P_n^{(\alpha,\beta)}(y)|^q (\sqrt{1-y}+n^{-1})^{\gamma_0 q}(1-y)^{\alpha+(\alpha-A)(q-1)}dy\}^p \times$

$$\times \int_{-1}^{-\frac12} |P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)(1+x)^{\frac{B}{p}}|^p\,dx = C_{13}\left(I_1^{(1)}\right)^p I_1^{(2)} \qquad (26)$$

$\Diamond$ (9), оценим $I_1^{(2)}$ аналогично $I_2^{(2)}$, но снизу $\mapsto\ I_1^{(2)} \ge C_{14} n^{-\frac{p}{2}}$ (27)

$$\left(\sqrt{1-y}+n^{-1}\right)^{\gamma_0 q} > (1-y)^{\frac{\gamma_0 q}{2}} \ \Rightarrow\ I_1^{(1)} \ge \int_{\frac12}^{1} |P_n^{(\alpha,\beta)}(y)(1-y)^{\frac{\gamma_0}{2}+\frac{\alpha}{q}+(\alpha-A)\left(1-\frac1q\right)}|^q\,dy.$$

$\frac1q+\frac{\gamma_0}{2}+\frac{\alpha}{q}+\frac1p(\alpha-A)-\frac{\alpha}{2}-\frac14=0 \quad (\Rightarrow \frac{\gamma_0 q}{2}+\alpha+(\alpha-A)(q-1)=-1+q(\frac{\alpha}{2}+\frac14)>-1$ по (2)), и потому $\Diamond$ (9) $\mapsto\ I_1^{(1)} \ge C_{15} n^{-\frac{q}{2}}\ln(n+1)$ (28)

(28), (27) и (26) $\mapsto\ I_1 \ge C_{16} n^{-\frac{p}{2}-\frac{pq}{2}}\ln^p(n+1)$ (29)

Наконец, (29), (25) и (21) вместе с леммой 2 означают, что для достаточно больших n $\ I \ge C_{17} n^{\frac12-\frac{q}{2}}\ln(n+1)$; ввиду (20) это $\ \ge \frac{C_{17}}{C_7}\ln^{\frac1q}(n+1)\hat{I} =$ $= C_{18}\ln^{\frac1q}(n+1)\| f_n(t)\mu_{\gamma,n}^{+}(t)\mu_{\delta,n}^{-}(t)\|_{L_\rho^p}$. Таким образом, доказан пункт (б).

В) $\gamma_0=0$. $H_n := [-\frac12;1-\frac{1}{2n^2}], D_n := [0;1-\frac{1}{n^2}]$ и ($x\in D_n$) $R_1(x)=[-\frac12;\frac{3x-1}{2}]$, $R_2(x)=[\frac{3x-1}{2};\frac{x+1}{2}]$, $R_3^{(n)}(x)=[\frac{x+1}{2};1-\frac{1}{2n^2}]$. Когда $x\in D_n$, а $y\in R_1(x)$, то замена $x=1-u$, $y=1-v$ переводит $H_n \to \tilde{H}_n=[\frac{1}{2n^2};\frac32]$, $D_n\to\tilde{D}_n=[\frac{1}{n^2};1]$, $R_1(x)\to$ $\to \tilde{R}_1(u)=[\frac{3u}{2};\frac32], R_2(x)\to\tilde{R}_2(u)=[\frac{u}{2};\frac{3u}{2}], R_3^{(n)}(x)\to\tilde{R}_3^{(n)}(u)=[\frac{1}{2n^2};\frac{u}{2}]$ (30)

Возьмём $f_n(t) := |P_n^{(\alpha,\beta)}(t)|^{q_0-1}\operatorname{sign}P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\cdot(1-t)^{(\alpha-A)(q_0-1)}$, если $t\in H_n$, и 0 в остальных точках отрезка $[-1;1]$ (31)

$f_n(t)=0$ в окрестностях т. (-1) и $(+1)$ $\Rightarrow\ f_n\in L_\rho^{p_0}$. Легко видеть, что при $t\in[-\frac12;1-\frac{1}{2n^2}]$ $\ C_{19}\le(\sqrt{1+t}+n^{-1})^{-\delta}\le C_{20} \Rightarrow C_{19}\|f_n\|_{L_\rho^{p_0}} \le \hat{I} \le C_{20}\|f_n\|_{L_\rho^{p_0}}$ (32)

Оценим $\|f_n\|_{L_\rho^{p_0}}$ сверху: $\Diamond$ (17), (18) и (7) $\mapsto\ \| f_n\|_{L_\rho^{p_0}} \le C_{21} n^{-\frac{q_0}{2p_0}} \times$ $\times\{\int_{H_n}(1-t+n^{-2})^{-q_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac14\right)}(1-t)^{A+(\alpha-A)q_0}dt\}^{\frac{1}{p_0}}$. Так как $A+q_0(\frac{\alpha}{2}-A-\frac14)=-1$ $(\Rightarrow A+(\alpha-A)q_0>-1)$, то по лемме 1 $\|f_n\|_{L_\rho^{p_0}} \le C_{22} n^{\frac12-\frac{q_0}{2}}\ln^{\frac{1}{p_0}}(n+1)$ (33)

Оценим снизу $I = \| S_n^{(\omega)}(f_n;x)\|_{L_\rho^{p_0}}$. $\Diamond$ (6) и уменьшая $[-1;1]$ до D_n, $\Diamond$ (17) $\mapsto\ I \ge C_{23} M_n^{(\alpha,\beta)}\{\int_{D_n}|\int_{H_n} f_n(y)\tilde{K}_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)\omega(y)dy|^{p_0}(1-x)^A dx\}^{\frac{1}{p_0}}$.

Полагая при $k=1,2,3$ $\ I_k=\{\int_{D_n}|\int_{R_k(x)}(\ldots)dy|^{p_0}(1-x)^A dx\}^{\frac{1}{p_0}}$, ввиду (13) для $\|\cdot\|_{L^{p_0}_{(1-x)^A}(D_n)}$ $\mapsto\ I \ge C_{23} M_n^{(\alpha,\beta)}(I_3-I_1-I_2)$ (34)

1. Оценим I_1 сверху. Внесём $|\cdot|$ в интеграл по y, ◊(17): $I_1 \le C_{24} \times$ $\times\{\int_{D_n}(\int_{R_1(x)}|f_n(y)||\tilde K_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)|(1-y)^\alpha dy)^{p_0}(1-x)^A dx\}^{\frac{1}{p_0}}$. ◊(5), (7), (15) (из (2) вытекает, что $-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}<0$): $|\tilde K_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)|\le C_{25}n^{-1}|y-x|^{-1}\{(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\times$ $\times(1-y)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}+(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1-y)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\}$. При $x\in D_n$, $y\in R_1(x)$ $r_1(x;y)=\frac{x-y}{1-y}\in[\frac{1}{3};1]$ $\Rightarrow|\tilde K_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)|\le C_{26}n^{-1}\{(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1-y)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}}+(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1-y)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\}$. Но $(1-x)^{\frac{1}{2}}(1-y)^{-\frac{1}{2}}=(1-r_1(x;y))^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow|\tilde K_n^{(\alpha,\beta)}(x;y)|\le\frac{C_{27}}{n}(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1-y)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\Rightarrow$

$\Rightarrow I_1\le C_{27}n^{-1}\{\int_{D_n}(\int_{R_1(x)}|f_n(y)|(1-y)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}dy)^{p_0}(1-x)^{A-p_0(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4})}dx\}^{\frac{1}{p_0}}$. ◊ (30): $I_1\le$ $\le C_{27}n^{-1}\{\int_{D_n}(\int_{\frac{3u}{2}}^{\frac{3}{2}}f_n(y)v^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}dv)^{p_0}u^{A-p_0(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4})}du\}^{\frac{1}{p_0}}\le\frac{C_{27}}{n}\{\int_0^\infty(\int_u^\infty(\ldots)dv)^{p_0}(\ldots)du\}^{\frac{1}{p_0}}$ (вне $[-1;1]$ $f_n(t):=0$). Далее, $r=A-p_0(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4})=-1+\frac{p_0}{2}>-1$, а $s=r>-1$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ◊ (11) и (17) $\mapsto$ $I_1\le C_{28}n^{-1}\{\int_0^\infty|f_n(x)|^{p_0}u^{p_0(\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4})+A-p_0(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4})+p_0}du\}^{\frac{1}{p_0}}=$

$$=C_{28}n^{-1}\{\int_{\frac{1}{2n^2}}^{\frac{3}{2}}|f_n(x)|^{p_0}u^A du\}^{\frac{1}{p_0}}\le C_{29}n^{-1}\|f_n\|_{L^{p_0}_\rho} \qquad (35)$$

2. Оценим I_2 сверху Отметим, что $J_2(x)=\text{V.P }J_2(x)$. ◊(7) для каждого из полиномов P_n в (5), ◊(17), (15) $\mapsto$ $\hat F_n(x;y)-\tilde F_n(x;y)=\frac{1}{n}\cdot\frac{f_n(y)}{y-x}\times$ $\times\{a_n^{(1)}(x)b_n^{(1)}(y)(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}(1-y)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}+a_n^{(2)}(x)b_n^{(2)}(y)(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}(1-y)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\}\cdot(1-y)^\alpha$, причём $|a_n^{(1)}(x)|\le C_{30}$, $|b_n^{(1)}(y)|\le C_{31}$. По аксиоме треугольника для $\|\cdot\|_{L^{p_0}_{(1-x)^A}(D_n)}$,

$$I_2\le C_{32}n^{-1}\cdot\{(\int_{D_n}|\int_{R_2(x)}\frac{f_n(y)}{y-x}b_n^{(1)}(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}dy|^{p_0}(1-x)^{A-p_0(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4})}dx)^{\frac{1}{p_0}}+$$

$$+(\int_{D_n}|\int_{R_2(x)}\frac{f_n(y)}{y-x}b_n^{(2)}(y)(1-y)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}dy|^{p_0}(1-x)^{A-p_0(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4})}dx)^{\frac{1}{p_0}}\}=\frac{C_{32}}{n}(I_2^{(1)}+I_2^{(2)}) \qquad (36)$$

Оценим сверху $I_2^{(1)}$ (для $I_2^{(2)}$ рассуждения аналогичны). ◊ (30): $I_2^{(1)}=$ $=\{\int_{D_n}|\int_{\frac{u}{2}}^{\frac{3u}{2}}\frac{f_n(y)}{u-v}b_n^{(1)}(y)v^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}dv|^{p_0}u^{A-p_0(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4})}du\}^{\frac{1}{p_0}}\le\{\int_0^\infty|\int_{\frac{u}{2}}^{\frac{3u}{2}}(\ldots)dv|^{p_0}u^{A-p_0(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4})}du\}^{p_0}$,

$$\text{и ◊(12)}\mapsto I_2^{(1)}\le C_{33}\{\int_{\frac{1}{2n^2}}^{\frac{3u}{2}}|f_n(x)|^{p_0}|b_n^{(1)}(x)|^{p_0}u^A du\}^{\frac{1}{p_0}}\le C_{34}\|f_n\|_{L^{p_0}_\rho} \qquad (37)$$

$$(37)\text{ и }(36)\mapsto I_2\le C_{35}n^{-1}\|f_n\|_{L^{p_0}_\rho} \qquad (38)$$

3. Оценим I_3 снизу. ◊(13) для $\|\cdot\|_{L^{p_0}_{(1-x)^A}(D_n)}\mapsto I_3\ge I_3^{(1)}-I_3^{(2)}$, (39)

$I_3^{(1)}=\{\int_{D_n}|\int_{R^{(n)}(x)}\hat F_n(x;y)dy|^{p_0}(1-x)^A dx\}^{\frac{1}{p_0}}$, $I_3^{(2)}=\{\int_{D_n}|\int_{R^{(n)}(x)}\tilde F_n(x,y)dy|^{p_0}(\ldots)\}^{\frac{1}{p_0}}$.

3-↑. **Оценим** $I_3^{(2)}$ сверху Внесём $|\cdot|$ под знак внутреннего интеграла:

$I_3^{(2)}\le\{\int_{D_n}(\int_{R_3^{(n)}(x)}|f_n(y)|\cdot\frac{1-y}{|y-x|}\cdot|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\cdot|P_n^{(\alpha+1,\beta)}(y)|\omega(y)dy)^{p_0}(1-x)^A dx\}^{\frac{1}{p_0}}$.

При $x \in D_n$, $y \in R_3^{(n)}(x)$ $r_3(x;y) = \frac{y-x}{1-x} \in \left[\frac{1}{2};1\right]$. $\Diamond$ (7), (15), (17) $\mapsto$
$I_3^{(2)} \le \frac{C_{36}}{n} \{ \int_{D_n} (\int_{R_3^{(n)}(x)} | f_n(y) | (1-y)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} dy)^{p_0} (1-x)^{A-p_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}\right)} dx \}^{\frac{1}{p_0}}$. $\Diamond$ (30).

$I_3^{(2)} \le \frac{C_{36}}{n} \{ \int_{D_n} (\int_{\frac{1}{2n^2}}^{\frac{u}{2}} | f_n(y) | v^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} dv)^{p_0} u^{A-p_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}\right)} du \}^{\frac{1}{p_0}} \le \frac{C_{36}}{n} \{ \int_0^{\infty} (\int_0^{u} (\ldots) dv)^{p_0} (\ldots) du \}^{\frac{1}{p_0}}$;

т. к. $A - p_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}\right) = -1 - \frac{p_0}{2} < -1$, а $s = r < -1$, то по (10) и (17):

$$I_3^{(2)} \le C_{37} n^{-1} \{ \int_0^{\infty} | f_n(x) |^{p_0} u^{A-p_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}\right)+p_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\right)+p_0} du \}^{\frac{1}{p_0}} \le C_{38} n^{-1} \| f_n \|_{L_r^{p_0}} \tag{40}$$

3-$\downarrow$. Оценим $I_3^{(1)}$ снизу. $\Diamond$ (31), $\Diamond$ $\frac{1-x}{y-x} = r_3^{-1}(x;y) \ge 1$, (17) $\mapsto$ $I_3^{(1)} \ge$
$\ge C_{39} \{ \int_{D_n} | P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) |^{p_0} \cdot (\int_{R_3^{(n)}(x)} | P_n^{(\alpha,\beta)}(y) |^{q_0} (1-y)^{\alpha+(\alpha-A)(q_0-1)} dy)^{p_0} (1-x)^A dx \}^{\frac{1}{p_0}}$.

$\Diamond$ (8) $\mapsto$ $| P_n^{(\alpha,\beta)}(y) | = | c_n^{(1)}(y) | n^{-\frac{1}{2}} (1-y)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} | \cos(N_n \tau + \varphi) - c_n^{(2)}(y) \frac{1}{n\sqrt{1-y}} |$, где $\tau = \arccos y$, а $C_{40} \ge c_n^{(1)}(y) \ge C_{41} > 0$ и $| c_n^{(2)}(y) | \le C_{42}$. Возведём это выражение в степень q_0 и $\Diamond$ лемму 3 к $| \cos(N_n \tau + \varphi) - c_n^{(2)}(y) n^{-1} (1-y)^{-\frac{1}{2}} |^{q_0}$ $\mapsto$
$| P_n^{(\alpha,\beta)}(y) |^{q_0} \ge \tilde{c}_n^{(1)}(y) n^{-\frac{q_0}{2}} (1-y)^{-q_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\right)} \cdot | |\cos(N_n \tau + \varphi)|^{q_0} - \tilde{c}_n^{(2)}(y) n^{-1} (1-y)^{-\frac{1}{2}} |$, где

$$C_{43} \ge \tilde{c}_n^{(1)}(y) \ge C_{44} > 0 \text{ и } | \tilde{c}_n^{(2)}(y) | \le C_{45} \tag{41}$$

$\Diamond$ $\int_a^b |g_1(t) - g_2(t)| dt \ge | \int_a^b g_1(t) dt - \int_a^b g_2(t) dt |$, (13) для $\| \cdot \|_{L^{p_0}_{(1-x)^A}(D_n)}$ и (41),

$$\alpha - q_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\right) + (\alpha - A)(q_0 - 1) = -1 \mapsto I_3^{(1)} \ge C_{46} P_1 - C_{47} P_2, \tag{42}$$

$P_1 = n^{-\frac{q_0}{2}} \{ \int_{D_n} | P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) |^{p_0} \cdot (\int_{R_3^{(n)}(x)} | \cos(N_n \tau + \varphi) |^{q_0} (1-y)^{-1} dy)^{p_0} (1-x)^A dx \}^{\frac{1}{p_0}}$,

$P_2 = n^{-1-\frac{q_0}{2}} \{ \int_{D_n} | P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) |^{p_0} \cdot (\int_{R_3^{(n)}(x)} (1-y)^{-\frac{3}{2}} dy)^{p_0} (1-x)^A dx \}^{\frac{1}{p_0}}$.

3-$\downarrow$-$\uparrow$. Оценим P_2 сверху: $\Diamond$ (7), (30) и лемму 1 для $\int_{\frac{1}{2n^2}}^{\frac{u}{2}} v^{-\frac{3}{2}} dv$;

$$\text{т. к. } A - p_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right) = -1, \ \Diamond \text{ лемму 1} \mapsto P_2 \le C_{48} n^{-\frac{1}{2}-\frac{q_0}{2}} \ln^{\frac{1}{p_0}}(n+1) \tag{43}$$

3-$\downarrow$-$\downarrow$. Оценим P_1 снизу. Пусть $(2m_1)$ – наименьшее чётное число, $\ge q_0$, тогда $| \cos(N_n \tau + \varphi) |^{q_0} \ge \{\cos(N_n \tau + \varphi)\}^{2m_1} = 2^{-m_1} \{1 + \cos(2N_n \tau + 2\varphi)\}^{m_1}$. Ввиду леммы 4 и (13) для $\| \cdot \|_{L^{p_0}_{(1-x)^A}(D_n)}$, $P_1 \ge C_{49}^{(0)} Q_0 - \sum_{k=1}^{m_1} C_{49}^{(k)} Q_k$, (44)

$Q_0 = n^{-\frac{q_0}{2}} \{ \int_{D_n} | P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) |^{p_0} \cdot (\int_{R_3^{(n)}(x)} (1-y)^{-1} dy)^{p_0} (1-x)^A dx \}^{\frac{1}{p_0}}$, а для $k = \overline{1, m_1}$

$Q_k = n^{-\frac{q_0}{2}} \{ \int_{D_n} | P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) |^{p_0} \cdot | \int_{R_3^{(n)}(x)} \cos(2k(N_n \tau + \varphi)) (1-y)^{-1} dy |^{p_0} (1-x)^A dx \}^{\frac{1}{p_0}}$.

3-$\downarrow$-$\downarrow$-$\uparrow$. Оценим сверху Q_k для $k = \overline{1, m_1}$. $\Diamond$ (7) и (30):

$Q_k \le C_{50} n^{-\frac{1}{2}-\frac{q_0}{2}} \{ \int_{n^{-2}}^{1} | \int_{\frac{1}{2n^2}}^{\frac{u}{2}} \frac{\cos(2k(N_n \tau + \varphi))}{v} dv |^{p_0} (u + n^{-2})^{-p_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)} u^A du \}^{\frac{1}{p_0}}$. Покажем, что

$U_k^{(n)}(u) = \left| \int_{\frac{1}{2n^2}}^{\frac{u}{2}} \frac{\cos(2k(N_n\tau+\varphi))}{v} dv \right| \le C_{51}$. Сделаем замену $v = 1-\cos\tau$: $U_k^{(n)}(u) =$ $= \left| \int_{\theta_1^{(n)}}^{\theta_2(u)} \cos(2k(N_n\tau+\varphi)) \cdot \mathrm{ctg}\frac{\tau}{2} d\tau \right|$; $\theta_1^{(n)} = \arccos(1-\frac{1}{2n^2})$, $\theta_2(u) = \arccos(1-\frac{u}{2})$. Поскольку $0 < \theta_1^{(n)} \le \tau \le \theta_2(u) \le \frac{\pi}{3}$, то $\mathrm{ctg}\frac{\tau}{2}$ монотонно убывает на $[\theta_1^{(n)};\theta_2(u)]$. В силу (16) $\theta_1^{(n)} \ge n^{-1}$, следовательно, $0 < \mathrm{ctg}\frac{\tau}{2} \le \mathrm{ctg}\frac{\theta_1^{(n)}}{2} \le \mathrm{ctg}\frac{1}{2n} \le \pi n$ (на $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $\cos t \le 1$, $\sin t \ge \frac{2}{\pi}t$). И $\forall e_1, e_2 \in \left[\theta_1^{(n)};\theta_2(u)\right]$: $\left| \int_{e_1}^{e_2} \cos(2k(N_n\tau+\varphi)) d\tau \right| =$ $= \frac{1}{2kN_n} \left| \sin(2k(N_n\tau+\varphi)) \Big|_{e_1}^{e_2} \right| \le \frac{1}{kN_n} \le \frac{C_{52}}{n} \Rightarrow$ по лемме 5 $U_k^{(n)}(u) \le 2\pi n C_{52} n^{-1} = C_{51}$.

$$A - p_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right) = -1 \Rightarrow \text{по лемме 1 } Q_k \le C_{53} n^{-\frac{1}{2}-\frac{q_0}{2}} \ln^{\frac{1}{p_0}}(n+1),\ k = \overline{1,m_1} \tag{45}$$

3-↓-↓-↓. Оценим Q_0 снизу. $\int_{R_1^{(n)}(x)} \frac{dy}{1-y} = \ln(n^2(1-x))$, так что

$Q_0 = n^{-\frac{q_0}{2}} \{ \int_{D_n} | P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)|^{p_0} \cdot \ln^{p_0}(n^2(1-x)) \cdot (1-x)^A dx \}^{\frac{1}{p_0}}$. Теперь $\Diamond$ (8): $| P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x)|^{p_0} = c_n'^{(1)}(x) n^{-\frac{p_0}{2}} (1-x)^{-p_0\left(\frac{\alpha+1}{2}+\frac{1}{4}\right)} | \cos(N_n'\psi+\zeta) - c_n'^{(2)}(x) n^{-1} (1-x)^{-\frac{1}{2}} |^{p_0}$, где $\psi = \arccos x$, $N_n' = n + \frac{2+\alpha+\beta}{2}$, $\zeta = -\frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)$; $C_{54}^{(1)} \ge c_n'^{(1)}(x) \ge C_{54}^{(2)} > 0$ и $| c_n'^{(2)}(x) | \le C_{54}^{(3)}$. $\Diamond$ (13) для $\|\cdot\|_{L^{p_0}_{(1-x)^A}(D_n)} \mapsto$

$$Q_0 \ge C_{55}^{(1)} Q_0^{(1)} - C_{55}^{(2)} Q_0^{(2)}, \tag{46}$$

$Q_0^{(1)} = n^{-\frac{1}{2}-\frac{q_0}{2}} \{ \int_{D_n} (1-x)^{-p_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}\right)} | \cos(N_n'\psi+\zeta)|^{p_0} \cdot \ln^{p_0}(n^2(1-x)) \cdot (1-x)^A dx \}^{\frac{1}{p_0}}$,

$Q_0^{(2)} = n^{-\frac{3}{2}-\frac{q_0}{2}} \{ \int_{D_n} (1-x)^{-p_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}\right)} \cdot \ln^{p_0}(n^2(1-x)) \cdot (1-x)^A dx \}^{\frac{1}{p_0}}$.

3-↓-↓-↓-↑. Оценим $Q_0^{(2)}$ сверху: $\Diamond$ (30) $\mapsto$ $Q_0^{(2)} = n^{-\frac{3}{2}-\frac{q_0}{2}} \times$ $\times \{ \int_{n^{-2}}^{1} \ln^{p_0}(n^2 u) \cdot u^{A-p_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}\right)} du \}^{\frac{1}{p_0}}$; $0 \le \ln(n^2 u) \le C_{56} \ln(n+1)$. Т. к. $A - p_0\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}\right) =$

$$= -1 - \frac{p_0}{2},\quad Q_0^{(2)} \le C_{57} n^{-\frac{3}{2}-\frac{q_0}{2}} \ln(n+1) \cdot \{ \int_{n^{-2}}^{1} u^{-1-\frac{p_0}{2}} du \}^{\frac{1}{p_0}} \le C_{58} n^{-\frac{1}{2}-\frac{q_0}{2}} \ln(n+1) \tag{47}$$

3-↓-↓-↓-↓. Осталось оценить $Q_0^{(1)}$ снизу. $\Diamond$ (30) $\mapsto$

$$Q_0^{(1)} = n^{-\frac{1}{2}-\frac{q_0}{2}} \{ \int_{n^{-2}}^{1} | \cos(N_n'\psi+\zeta)|^{p_0} \cdot \ln^{p_0}(n^2 u) \cdot u^{-1} du \}^{\frac{1}{p_0}} = n^{-\frac{1}{2}-\frac{q_0}{2}} V_n^{\frac{1}{p_0}} \tag{48}$$

Покажем, что $V_n \ge C_{59} \ln^{p_0+1}(n+1)$. Перейдём к переменной ψ: $V_n = \int_{\theta_1(n)}^{\theta_2} | \cos(N_n'\psi+\zeta)|^{p_0} \cdot g_n(\psi) d\psi$; $\theta_1(n) = \arccos\left(1-n^{-2}\right)$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, $g_n(\psi) =$ $= \ln^{p_0}(2n^2 \sin^2\frac{\psi}{2}) \cdot \mathrm{ctg}\frac{\psi}{2}$. Пусть $(2m_2)$ – наименьшее чётное число, $\ge p_0$. Тогда, подобно рассуждениям в (3-↓-↓-↑), в силу леммы 4 $V_n \ge C_{60}^{(0)} \int_{\theta_1(n)}^{\theta_2} g_n(\psi) d\psi +$

$$+ \sum_{k=1}^{m_2} C_{60}^{(k)} \int_{\theta_1(n)}^{\theta_2} \cos\left(2k\left(N_n'\psi+\zeta\right)\right) g_n(\psi) d\psi = C_{60}^{(0)} \Omega_0 + \sum_{k=1}^{m_2} C_{60}^{(k)} \Omega_k \tag{49}$$

Оценим $| \Omega_k |$ при $k = \overline{1,m_2}$. Поскольку $0 < \theta_1(n) \le \psi \le \theta_2 = \frac{\pi}{2}$, то на

$[\theta_1(n);\theta_2]$ $\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}$ убывает $\Rightarrow$ $\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}\le\operatorname{ctg}\frac{\theta_1(n)}{2}$, но по (16) $\theta_1(n)\ge\frac{\sqrt{2}}{n}$, и потому $\operatorname{ctg}\frac{\theta_1(n)}{2}\le\operatorname{ctg}\frac{1}{n\sqrt{2}}\le\frac{\pi}{\sqrt{2}}n$, а $0\le\ln^{p_0}\left(2n^2\sin\frac{\psi}{2}\right)\le C_{61}\ln^{p_0}(n+1)$. Значит, $0<g_n(\psi)\le C_{62}n\ln^{p_0}(n+1)$. Рассмотрим $\tilde{g}_n(t)=\ln^{p_0}\left(\sqrt{2}n\sin t\right)\cdot\operatorname{ctg}t=2^{-p_0}g_n(2t)$ при $t\in\left[\frac{1}{2}\theta_1(n);\frac{1}{2}\theta_2\right]$: $\tilde{g}_n'(t)=\frac{\ln^{p_0-1}\left(\sqrt{2}n\sin t\right)}{\sin^2 t}\left\{p_0\cos^2 t-\ln\left(\sqrt{2}n\sin t\right)\right\}$ – функция в скобках убывает $\Rightarrow$ $\tilde{g}_n'(t)$ меняет знак на $\left[\frac{1}{2}\theta_1(n);\frac{1}{2}\theta_2\right]$ не более одного раза, поэтому $\tilde{g}_n(t)\in FM^{(2)}_{\left[\frac{1}{2}\theta_1(n),\frac{1}{2}\theta_2\right]}$, а $g_n(\psi)\in FM^{(2)}_{[\theta_1(n),\theta_2]}$. Т. к. $\forall e_1,e_2\in[\theta_1(n);\theta_2]$ $\left|\int_{e_1}^{e_2}\cos(2k(N_n'\psi+\zeta))d\psi\right|\le\frac{1}{kN_n'}\le C_{63}n^{-1}$, то по лемме 5

$$|\Omega_k|\le(2+1)\cdot C_{62}n\ln^{p_0}(n+1)\cdot C_{63}n^{-1}=C_{64}\ln^{p_0}(n+1),\ k=\overline{1,m_2} \tag{50}$$

Что касается Ω_0, вернёмся к переменной u, а затем сделаем замену

$$\ln\left(n^2u\right)=t:\ \text{тогда}\ \Omega_0=\int_0^{\ln n^2}t^{p_0}dt\asymp\ln^{p_0+1}n^2\ge\ln^{p_0+1}(n+1)\ \text{для}\ n\ge2 \tag{51}$$

$$\text{Соединяя (51) и (50) с (49)}\mapsto\ V_n\ge C_{59}\ln^{p_0+1}(n+1) \tag{52}$$

(52), (48) $\mapsto$ $Q_0^{(1)}\ge C_{65}n^{-\frac{1}{2}-\frac{q_0}{2}}\ln^{1+\frac{1}{p_0}}(n+1)$; возвращаясь по цепочке (47), (46) – (45), (44) – (43), (42) – (40), (33), (39) – (38), (35), (33), (34) $\mapsto$ $I\ge C_{66}M_n^{(\alpha,\beta)}n^{-\frac{1}{2}-\frac{q_0}{2}}\ln^{1+\frac{1}{p_0}}(n+1)$. Из леммы 2, (33) и (32) вытекает, что $I\ge C_{67}\ln(n+1)\|f_n(t)\mu^+_{\gamma_0,n}(t)\mu^-_{\delta,n}(t)\|_{L^{p_0}_\rho}$.

Этим доказан пункт (в) теоремы 1, а вместе с ним и она сама.

Библиографические ссылки

1. **Бадков В.М.** Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным полиномам. / В.М. Бадков // УМН – 1978 – Т. XXXIII, вып. 4 (202) – С. 51–106.
2. **Казакова Н.М.** О порядках констант Лебега сумм Фурье-Якоби в пространствах L^r_ρ. / Н.М. Казакова // Деп. в ВИНИТИ. – Свердловск, 1981 – 54 с.
3. **Моторный В.П.** О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра. / В.П. Моторный // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1973 – 37, №1 – С. 135–147.
4. **Моторный В.П.** О сходимости в среднем рядов Фурье-Якоби. / В.П. Моторный, С.В. Гончаров, П.К. Нитиема // Доповіді НАН України – 2010 – №3 – С. 35–39.
5. **Сегё Г.** Ортогональные многочлены. / Г. Сегё – М., 1962.
6. **Muckenhoupt B.** Mean convergence of Hermite and Laguerre series. II // Trans. Amer. Math. Soc. – 1970 – 147, №2 – P. 433–460.
7. **Muckenhoupt B.** Mean convergence of Jacobi series. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969 – 23, №2 – P. 306–310.
8. **Neuman J., Rudin W.** Mean convergence of orthogonal series. // Proc. Amer. Math. Soc. – № 3 (1952) – P. 219–222.
9. **Pollard H.** The mean convergence of orthogonal series. // Duke Math. J. – 16, №1 (1949) – P. 189–191.

Надійшла до редколегії 30 03 10

ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ Серія „Математика" № 6/1 2010 Вип 15 С 102–109

УДК 517.5

Е. В. Дерец

Днепродзержинский государственный технический университет

О ТОЧНОМ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ МАЖОРАНТОЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Знайдено похибку інтервальної квадратурної формули прямокутників на класі диференційовних періодичних функцій із опуклою до гори мажорантою інтегрального модуля неперервності парної похідної.

Ключові слова: клас, функція, похибка, модуль неперервности.

Вычислена ошибка интервальной квадратурной формулы прямоугольников на классе дифференцируемых периодических функций с заданной выпуклой мажорантой модуля непрерывности четной производной.

Ключевые слова: класс, функция, погрешность, модуль непрерывности.

The error of the interval quadrature rectangle formula on the class periodic functions with convex magorant of the integral modulus of continuity of even derivative are obtained.

Key words: class, function, error, modulus of continuity.

Введение. Пусть H_1^{ω} – множество 2π-периодических измеримых функций $f(t)$ таких, что $\omega(f,t)_1 = \sup\limits_{|h|\le t} \int_0^{2\pi} |f(x+h)-f(x)|dx \le \omega(t)$, где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, $W^r H_1^{\omega}$ $(r=1,2,\ldots)$ – множество 2π–периодических функций $f(t)$, у которых $(r–1)$-я производная $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и $f^{(r)}(t) \in H_1^{\omega}$. Будем рассматривать квадратурные формулы вида

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{1}{2h} \int_{x_k-h}^{x_k+h} f(t)dt + R_n(f,\vec{c}_n,\vec{x}_n,h), \tag{1}$$

где $\vec{c}_n = \{c_k\}_{k=1}^n$, $c_k \in R$ – коэффициенты, $\vec{x}_n = \{x_k\}_{k=1}^n$, $x_k \in [0,2\pi)$ – узлы, $h \in (0,\pi/n)$ и $R_n(f,\vec{c}_n,\vec{x}_n,h)$ – погрешность квадратурной формулы (1) на функции f. Погрешностью квадратурной формулы (1) на классе $\aleph$ называют величину $R_n(\aleph,\vec{c}_n,\vec{x}_n,h) = \sup\limits_{f\in\aleph} R_n(f,\vec{c}_n,\vec{x}_n,h)$. Квадратурная формула с узлами $\vec{x}_n^*$ и коэффициентами $\vec{c}_n^*$ называется наилучшей на классе $\aleph$, если

$$R_n(\aleph,h) = \inf_{\vec{c}_n,\vec{x}_n} R_n(\aleph,\vec{c}_n,\vec{x}_n,h) = R_n(\aleph,\vec{c}_n^*,\vec{x}_n^*,h).$$

Интервальные квадратурные формулы изучались в [1 – 4; 9; 11–14]. С точки зрения приложений интервальная квадратурная формула является более естественной, чем обычная квадратурная формула, поскольку во многих случаях результаты измерений физических величин являются средними значениями измеряемой функции. Заметим, что при переходе к пределу при $h \to 0$ интервальная квадратурная формула (1) превращается в обычную квадратурную формулу. Решение задачи о наилучшей квадратурной формуле для классов $W^r H_1^\omega$ при выпуклом модуле непрерывности $\omega(t)$ известно для обычных квадратурных формул при $r = 1$ ([10]), $r = 2, 3$ ([5,6]) и для интервальных квадратурных формул при $r = 2$ ([7]). В настоящей работе для $r = 4, 6, 8, \ldots$ и любого выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$ найдена погрешность интервальной квадратурной формулы прямоугольников с узлами $\vec{x}_n^0 = \{\tau + 2\pi(k-1)/n\}_{k=1}^n$, $\tau \in [0, 2\pi/n)$ и коэффициентами $\vec{c}_n^0 = \{2\pi/n\}_{k=1}^n$, при условии, что $h \in (0, \pi/(2n)]$. В случае нечетных r и выпуклого $\omega(t)$ погрешность формулы прямоугольников найдена в [10], при этом результат легко распространяется на случай интервальных квадратур.

Вспомогательные результаты

Лемма 1. Пусть $0 < \varsigma < \pi/n$, $-\varsigma < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \pi/n - \varsigma$. Тогда для любой четной $2\pi/n$ - периодической функции $f \in L_1$ справедливы неравенства:

$$-\int_0^{\varsigma} f(t)dt + \int_{\pi/n-\varsigma}^{\pi/n} f(t)dt \le \frac{1}{4n}\omega(f, 2\varsigma)_1, \tag{2}$$

$$-\int_0^{\varsigma} f(t)dt + \int_{\pi/n-\varsigma}^{\pi/n} f(t)dt \le \frac{1}{4n}\omega(f, 2\varsigma)_1 - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\int_{t_i}^{t_i+2\varsigma} f(t)dt + \left(1-(-1)^k\right)\int_{\pi/n-\varsigma}^{\pi/n} f(t)dt \; - \tag{3}$$

$$-\int_0^{\varsigma} f(t)dt + \int_{\frac{\pi}{n}-\varsigma}^{\frac{\pi}{n}} f(t)dt \le \frac{\omega(f, 2\varsigma)_1}{4n} - 2\int_0^{\varsigma} f(t)dt + \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\int_{t_i}^{t_i+2\varsigma} f(t)dt + \left(1-(-1)^{k+1}\right)\int_{\frac{\pi}{n}-\varsigma}^{\frac{\pi}{n}} f(t)dt. \tag{4}$$

Лемма 1 является очевидным следствием леммы 1 в [10].

Лемма 2. Пусть $g(t)$ – $2\pi/n$-периодическая, равная в среднем нулю на периоде, четная функция, удовлетворяющая следующим условиям: $g'''(t)$

существует и непрерывна, $g'''(0)=g'''(\pi/n)=0$, $g'''(t)$ выпукла вниз на $[0,\pi/n]$, $|g'''(t)|\ge|g'''(\pi/n-t)|$ для всех $t\in[0,\pi/(2n)]$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$|g'(a)-g'(b)|\le g'(|a-b|) \text{ для любых } a,b\in[0,\pi/n] \text{ таких, что } |a-b|\le\pi/(2n), \quad (5)$$

$$0\le g'(t)-g'(\pi/n-t)\le g'(\pi/n-t)/2 \text{ для всех } t\in[c/2,\pi/(2n)], \quad (6)$$

где $c\in(0,\pi/(2n))$ – нуль функции $g(t)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $n=1$. В условиях леммы $g'(t)$ выпукла вверх на $[0,\pi]$, $g'(0)=g'(\pi)=0$ и $g'(t)\ge g'(\pi-t)$ для всех $t\in[0,\pi/2]$, откуда нетрудно получить (5).

Для любой функции $f(t)\in L^r$ $(r=1,2,\ldots)$ имеет место следующее интегральное представление: $f(x)=\frac{a_0}{2}+\int\limits_0^{2\pi}D_r(x-t)f^{(r)}(t)dt$, где $D_r(x)=\frac{1}{\pi}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\left(mx-\frac{\pi r}{2}\right)}{m^r}$ – ядро Бернулли. В силу нечетности $g'(t)$ $g(x)=\int\limits_0^{\pi}(D_1(x-t)-D_1(x+t))g'(t)dt$.

Поскольку разность $D_1(x-t)-D_1(x+t)$ положительна на $(0,x)$ и отрицательна на (x,π), то в силу свойств функции $g'(t)$:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)\ge\int\limits_0^{\pi/2}\left(D_1\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-D_1\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right)g'(\pi-t)dt+\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\left(D_1\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-D_1\left(\frac{\pi}{2}+t\right)\right)g'(t)dt=0,$$

$$g(x)\le\int\limits_0^{\pi}(D_1(x-t)-D_1(x+t))\frac{\pi-t}{\pi-x}g'(x)dt=\frac{2\pi g'(x)}{\pi-x}D_2(x),\ x\in(0,\pi).$$

Таким образом, $c_0\le c\le\pi/2$, где $c_0=(1-\sqrt{3}/3)\pi$ – нуль функции $D_2(t)$. Для доказательства оценки сверху в (6) заметим, что

$$g'(t)-\frac{3}{2}g'(\pi-t)=\int\limits_0^{\pi}\left(D_2(t-y)-D_2(t+y)-\frac{3}{2}D_2(\pi-t-y)+\frac{3}{2}D_2(\pi-t+y)\right)g'''(y)dy$$

Обозначим выражение в скобках через $G(t,y)$. При $t\in[2\pi/5,\pi/2]$ $G(t,y)\ge 0$ для всех $y\in[0,\pi]$ и неравенство (6) очевидно. Пусть $t\in[c_0/2,2\pi/5)$ фиксировано, тогда на промежутке $[0,\pi]$ $G(t,y)$ имеет одну перемену знака в точке $2\pi/5$ с «-» на «+», поэтому

$$g'(t)-\frac{3}{2}g'(\pi-t)\le\int_0^\pi G(t,y)\frac{\pi-y}{3\pi/5}g'''\left(\frac{2\pi}{5}\right)dy=\frac{10}{3}g'''\left(\frac{2\pi}{5}\right)\left(D_3(t)-\frac{3}{2}D_3(\pi-t)\right)\le 0\,.$$

Основные результаты. Следующая теорема обобщает лемму 2 из [8].

Теорема 1. *Пусть* $\psi(t)$ *–* $2\pi/n$ *-периодическая четная функция, равная в среднем нулю на периоде,* $k\in N$, *производная* $\psi^{(2k+1)}(t)$ *существует и непрерывна,* $\psi^{(2k+1)}(0)=\psi^{(2k+1)}(\pi/n)=0$, $\left|\psi^{(2k+1)}(t)\right|$ *выпукла вверх на* $[0,\pi/n]$, $\left|\psi^{(2k+1)}(t)\right|>\left|\psi^{(2k+1)}(\pi/n-t)\right|$ *для всех* $t\in(0,\pi/(2n))$.

Тогда для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$

$$\sup_{f\in H_1^\omega}\int_0^{2\pi}\psi(t)f(t)dt=\int_0^\xi|\psi(t)|\,\omega'(2t)dt,\tag{7}$$

где $\xi\in[0,\pi/n]$ *– нуль функции* $\psi(t)$. *Верхнюю грань в (7) реализуют функции вида* $C+f(\psi,\omega,x)$, *где C – произвольная постоянная, а* $f(\psi,\omega,x)$ *–* $2\pi/n$ *-периодическая чётная функция, определенная равенством*

$$f(\psi,\omega,x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sgn}\psi(\xi/2)}{2n}\omega'(2x), & \text{если}\quad x\in(0,\xi],\\ 0, \quad \text{если}\ x\in(\xi,\pi/n].\end{cases}$$

Доказательство. Поскольку $f(\psi,\omega,x)\in H_1^\omega$, доказательство теоремы сводится к доказательству неравенства

$$\int_0^{2\pi}\psi(t)f(t)dt\le\int_0^{2\pi}\psi(t)f(\psi,\omega,t)dt=\int_0^\xi|\psi(t)|\omega'(2t)dt\tag{8}$$

для любой функции $f(t)\in H_1^\omega$, при этом, не ограничивая общности, можно считать, что $f(t)$ – четная $2\pi/n$ -периодическая функция, равная в среднем нулю и абсолютно непрерывная на $[0,2\pi/n]$, кроме того, $\operatorname{sgn}\psi(\xi/2)<0$ (заметим, что в этом случае $\psi(t)$ удовлетворяет условиям леммы 2).

Следуя [8, лемма 2], получаем оценку

$$\int_0^{2\pi}\psi(t)f(t)dt\le 2n\int_0^\xi\psi'(t)\left(F(t)+F\left(\frac{\pi}{n}-t\right)\right)dt+2n\int_H\left(\psi'\left(\frac{\pi}{n}-t\right)-\psi'(t)\right)\cdot\big(L(t)-F(t)\big)dt+$$
$$+2n\int_\xi^{\pi/n-\xi}\psi'(t)(F(t)-F_*(t))dt,\tag{9}$$

где $F(t)=-\int_0^t f(\tau)d\tau$, $F_*(t)=\sup\limits_{0\le x\le t\le z\le\pi/n}((z-t)F(x)+(t-x)F(z))/(z-x)$, $L(t)=2F_*(\pi/(2n))-((2n)/\pi)F_*(\pi/(2n))t$, $H=\{t\in[\pi/n-\xi,\pi/n]:L(t)-F(t)>0\}$.

В случае $H=\emptyset$ или $\pi/n-\xi\notin H$ доказательство дословно повторяет [8]. Пусть $\pi/n-\xi\in H$. Возможны три случая:

(I) $\exists d\in(0,\pi/n-\xi): L(t)-F(t)>0$ при $t\in(d,\pi/n)$ и $F(d)=L(d)$.

(II) $\exists\alpha\in[\pi/(2n),\pi/n-\xi),\beta\in(\pi/n-\xi,\pi/n): F(\alpha)-L(\alpha)=F(\beta)-L(\beta)=0$ и $L(t)-F(t)>0$ для всех $t\in(\alpha,\beta)$.

(III) $\exists\alpha\in[0,\pi/(2n)),\beta\in(\pi/n-\xi,\pi/n)$: $F(\alpha)=F_*(\alpha)$, $F(\beta)=F_*(\beta)$, $F(t)<F_*(t)$ для всех $t\in(\alpha,\beta)$.

В случае (I) доказательство аналогично [8]. Пусть выполнены условия (II) либо (III). Представим множество $Q=H\bigcap(\beta,\pi/n)$ в виде объединения конечной или счетной системы попарно непересекающихся интервалов $Q=\bigcup\limits_{i\in J}(\alpha_i,\beta_i)$. При каждом $t\in[0,\xi]$ оценим в (9) сверху $F(t)+F(\pi/n-t)$ с помощью леммы 1, включая в совокупность промежутков интегрирования $[\alpha_i,\alpha_i+2t]$ и $[\beta_i-2t,\beta_i]$, если $\beta_i-\alpha_i\ge 2t$; $[\alpha_i,\alpha_i+2t]$, если $\alpha_i<\pi/n-t\le(\alpha_i+\beta_i)/2$; $[2\pi/n-2t-\beta_i,2\pi/n-\beta_i]$, если $(\alpha_i+\beta_i)/2<\pi/n-t<\beta_i$; $[\alpha,\alpha+2t]$ и $[\beta-2t,\beta]$, если $\beta-\alpha\ge 2t$; $[-\alpha,2t-\alpha]$, если $\alpha<t\le\min\{\xi,(\alpha+\beta)/2\}$ и либо $2t-\alpha\notin(\xi,\pi/n-\xi)$, либо $F_*(2t-\alpha)-F(2t-\alpha)<2F_*(t)-2F(t)$; $[\alpha,\alpha+2t]$ если $\pi/n-t\le(\alpha+\beta)/2$; $[2\pi/n-2t-\beta,2\pi/n-\beta]$, если $(\alpha+\beta)/2<\pi/n-t<\beta$ и либо $\eta(2\pi/n-2t-\beta)<2\eta(\pi/n-t)$, либо $2\pi/n-2t-\beta\notin(\xi,\pi/n-\xi)$, где $\eta(t)=L(t)-F(t)$. При этом, если при некотором t не было выбрано ни одного промежутка, то для таких t применяем (2), если выбран промежуток $[-\alpha,2t-\alpha]$, то применяем (4), если же ни один из выбранных промежутков не содержит нуля, то используем оценку (3).

В условиях (II) после преобразований и оценок, аналогичных [8], получаем

$$\int_0^{2\pi}\psi(t)f(t)dt\le\int_0^{\xi}|\psi(t)|\omega'(2t)dt+2n\int_{\max\left\{\frac{\pi}{n}-\xi,\frac{\alpha+\beta}{2}\right\}}^{(\pi/n-\xi+\beta)/2}\left\{2\psi'\left(\frac{\pi}{n}-t\right)-\psi'(t)-2\psi'(\beta-t)-\right.$$
$$\left.-4\psi'(2t-\beta)\right\}\cdot\min\left\{\frac{1}{2}\eta(2t-\beta),\eta(t)\right\}dt$$

В силу леммы 2 при любом $t\in[\pi/n-\xi,(\pi/n-\xi+\beta)/2]$

$$2\psi'\left(\frac{\pi}{n}-t\right)-\psi'(t)-2\psi'(\beta-t)-4\psi'(2t-\beta)\le 2\psi'(t)-2\psi'(2t-\beta)-2\psi'(\beta-t)\le 0,$$

откуда следует (8).

В случае (III) интегралы по промежуткам, не пересекающимся с (α,β), преобразуем аналогично [8], а для остальных промежутков принимаем во внимание то, что при $t\in[\alpha,\beta]$ $F_*(t)=kt+b$, поэтому, например, $\int_{-\alpha}^{2t-\alpha} f(\tau)d\tau-2\int_0^t f(\tau)d\tau=\eta^*(2t-\alpha)-2\eta^*(t)$, где $\eta^*(t)=F_*(t)-F(t)$. Таким образом, оценивая (9) с помощью леммы 1 и применяя (5), получаем

$$\int_0^{2\pi} f(t)\psi(t)dt\le\int_0^{\xi}|\psi(t)|\omega'(2t)dt+2n\int_{V_2}\left\{H_1(t)-\psi'\left(\frac{\pi}{n}-t\right)-\psi'(t)\right\}\eta^*(t)dt+$$

$$+2n\int_{V_1}\left\{H_1(t)-\psi'\left(\frac{\pi}{n}-t\right)-\psi'(t)\right\}\cdot\left[\eta^*(t)-\frac{1}{2}\eta^*(2t-\beta)\right]_+dt+$$

$$+2n\int_{V_1}\left\{H_1(t)+\psi'\left(\frac{\pi}{n}-t\right)-\psi'(t)-2\psi'(\beta-t)-2\psi'(2t-\beta)\right\}\cdot\min\left\{\eta^*(t),\frac{1}{2}\eta^*(2t-\beta)\right\}dt+$$

$$+2n\int_{Q_2}\{H_2(t)-2\psi'(t)\}\eta^*(t)dt+2n\int_{Q_1}\{H_2(t)-2\psi'(t)\}\left[\eta^*(t)-\frac{1}{2}\eta^*(2t-\alpha)\right]_+dt+$$

$$+2n\int_{Q_1}\{H_2(t)-2\psi'(t-\alpha)-2\psi'(2t-\alpha)\}\min\left\{\eta^*(t),\frac{1}{2}\eta^*(2t-\alpha)\right\}dt \qquad (10)$$

где $V_1=\{t\in[\pi/n-\xi,\beta]:t>(\alpha+\beta)/2,2t-\beta\in[\xi,\pi/n-\xi]\}$, $V_2=[\pi/n-\xi,\beta]\setminus V_1$, $Q_1=\{t\in[\alpha,\xi]:t<(\alpha+\beta)/2,2t-\alpha\in[\xi,\pi/n-\xi]\}$, $Q_2=[\alpha,\xi]\setminus Q_1$ (если $\alpha>\xi$, то полагаем $Q_1=Q_2=\emptyset$),

$$H_1(t)=\frac{1}{2}\psi'\left(\frac{\pi}{n}-t+\frac{t-\beta}{2}\right)-\frac{1}{2}\psi'\left(\frac{\beta-t}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\psi'\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)-\psi'\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)\right)\mathrm{sgn}\left(\left[\xi-\frac{t+\alpha}{2}\right]_+\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\psi'\left(\frac{\pi}{n}-t+\frac{t-\alpha}{2}\right)-\psi'\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)\right)\mathrm{sgn}\left(\left[\frac{t+\alpha}{2}-\left(\frac{\pi}{n}-\xi\right)\right]_+\right),$$

$$H_2(t)=\frac{1}{2}\left(\psi'\left(\frac{\pi}{n}-t+\frac{t-\beta}{2}\right)-\psi'\left(\frac{\beta-t}{2}\right)\right)\mathrm{sgn}\left(\left[\frac{\beta+t}{2}-\left(\frac{\pi}{n}-\xi\right)\right]_+\right)+\frac{1}{2}\left(\psi'\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)-\psi'\left(\frac{t-\alpha}{2}\right)\right).$$

Для доказательства теоремы остается применить к каждому слагаемому в (10) лемму 2.

Теорема 2. *Пусть* $\omega(t)$ *– выпуклый модуль непрерывности,* $n \in N$, $h \in (0, \pi/(2n)]$, $r = 4,6,8,\ldots$ *тогда погрешность интервальной квадратурной формулы прямоугольников с узлами* $\vec{x}_n^0 = \{\tau + 2\pi(k-1)/n\}_{k=1}^n$, $\tau \in [0, 2\pi/n)$ *и коэффициентами* $\vec{c}_n^0 = \{2\pi/n\}_{k=1}^n$ *для класса* $W^r H_1^\omega$

$$R_n\left(W^r H_1^\omega, \vec{c}_n^0, \vec{x}_n^0, h\right) = \int_0^\xi |\psi(t)| \omega'(2t)dt, \qquad (11)$$

где $\psi(t)$ *–* $2\pi/n$*-периодическая функция, равная в среднем нулю на периоде, определенная равенством*

$$\psi^{(r)}(t) = \begin{cases} -\pi/(hn) + 1, & \text{если} \quad t \in [-h, h], \\ 1, \quad \text{если} & t \in (h, 2\pi/n - h). \end{cases}$$

$\xi \in [0, \pi/n]$ *– нуль функции* $\psi(t)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\tau = 0$. Для любой функции $f \in W^r H_1^\omega$

$$R_n\left(f, \vec{c}_n^0, \vec{x}_n^0, h\right) = \int_0^{2\pi} f(t)dt - \sum_{k=1}^{n} \int_{2\pi(k-1)/n-h}^{2\pi(k-1)/n+h} \frac{\pi}{hn} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)\psi(t)dt$$

Для доказательства (11) остаётся воспользоваться теоремой 1, условиям которой удовлетворяет функция $\psi(t)$.

Учитывая известное равенство

$$\left|R_n\left(f, \vec{c}_n^0, \vec{x}_n^0\right)\right| = \frac{2\pi}{n^r}\left|\int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) D_r(nt)dt\right|$$

и применяя теорему 1, получаем следующую теорему

Теорема 3. *Пусть* $\omega(t)$ *– выпуклый модуль непрерывности,* $n \in N$, $r = 4,6,8,\ldots$ *тогда погрешность квадратурной формулы прямоугольников с узлами* $\vec{x}_n^0 = \{\tau + 2\pi(k-1)/n\}_{k=1}^n$, $\tau \in [0, 2\pi/n)$ *и коэффициентами* $\vec{c}_n^0 = \{2\pi/n\}_{k=1}^n$ *для класса* $W^r H_1^\omega$

$$R_n\left(W^r H_1^\omega, \vec{c}_n^0, \vec{x}_n^0\right) = \frac{2\pi}{n^r} \int_0^\xi |D_r(nt)| \omega'(2t)dt,$$

где $D_r(t)$ *– ядро Бернулли,* $\xi \in [0, \pi/n]$ *– нуль функции* $D_r(nt)$.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В.Ф.** Об одной задаче оптимизации приближенного интегрирования/ В.Ф. Бабенко// Исслед. по совр. пробл. суммирования и приближения функций и их приложениям. – Д., 1984. С. 3–13.
2. **Бабенко В. Ф.** Об оптимальных интервальных квадратурных формулах на классах дифференцируемых периодических функций/ В.Ф. Бабенко, Д.С. Скороходов // Вiсник Днiпропетр. ун-ту, Математика – 2007 – № 8 – С. 16–25.
3. **Бородачев С. В.** Об оптимизации интервальной квадратурной формулы на некотором несимметрическом классе периодических функций/ С.В. Бородачев // Вiсник Днiпропетр. ун-ту, Математика – 1999 – № 4 – С. 19 – 24.
4. **Бородачев С. В.** Об оптимальных интервальных квадратурных формулах на некоторых классах абсолютно непрерывных функций/ С.В. Бородачев // Вiсник Днiпропетр. ун-ту, Математика – 2000 – № 5 – С. 28 – 34.
5. **Дерец Е. В.** Об оптимизации квадратурных формул для некоторых классов периодических дифференцируемых функций/ Е.В. Дерец// Вiсник Днiпропетр. ун-ту. Математика. – 2005 – № 6 – С. 43-57.
6. **Дерец Е. В.** О наилучшей квадратурной формуле на классе функций $W^3H_1^\omega$ / Е.В. Дерец // Вiсник Днiпропетр. ун-ту. Математика. – 2004 – № 11 – С. 37 – 40.
7. **Дерец Е. В.** О наилучшей интервальной квадратурной формуле для класса $W^2H_1^\omega$ // Вiсник Днiпропетр. ун-ту. Математика. – 2008 – № – С. 73 – 83.
8. **Дерец Е. В.** О погрешности интервальной квадратурной формулы прямоугольников для класса $W^2H_1^\omega$ / Е.В. Дерец// Вiсник Днiпропетр. ун-ту. Математика. – 2007 – № 8 – С. 84 – 88.
9. **Кузьмина А.А.** Интервальные квадратурные формулы с кратными узловыми интервалами/А.А. Кузьмина // Изв. вузов. 1980 – № 7 – С. 39–44.
10. **Лигун А.А.** Точное решение некоторых экстремальных задач на классах функций, определяемых интегральным модулем непрерывности / А. А. Лигун, В. Г. Доронин // Вiсник Днiпропетр. ун-ту. Математика. – 2005 – № 6 – С. 64 – 70.
11. **Шарипов Р.Н.** Наилучшие интервальные квадратурные формулы для классов Липшица/Р.Н. Шарипов // Конструктивная теория функций и функцион. анализ. Казань, 1983. – Вып. 4 – С. 124 – 132.
12. **Motornyi V. P.** On the best interval quadrature formula in the class of functions with bounded r^{th} derivative // East journal of approximations. – 1998. - Vol. 4 , №4. – P. 459 – 478.
13. **Omladic M.** On a new type of quadrature formulae / M. Omladic, S. Pahor, A.Suhadolc // Numer. Math. – 1976 – Bd. 25 – № 4 – P. 421 – 426.
14. **Pittnauer Fr.** Interpolation mit Intervallfunktionalen / Fr. Pittnauer, M. Reimer // Math. Z. – 1976 – Bd. 146 – № 1 – P. 7 – 15.

Надійшла до редколегії 20.01.10

ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". № 15. 2010. Вип. 15. С. 110– 122

УДК 517, 681.31

А.В. Довженко, П.І. Когут
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

СОЕРІ-АНАЛІЗ ВЛАСТИВОСТІ НАПІВНЕПЕРЕРВНОСТІ ЗНИЗУ ВЕКТОРНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

Досліджені топологічні властивості конадграфіків векторнозначних відображень. За допомогою конадграфіків отримана напівнеперервна знизу регуляризація відображень та її варіаційне представлення.

Ключові слова: напівупорядкований простір, конус, напівнеперервне знизу відображення, конадграфік, регуляризація.

Исследованы топологические свойства конадграфиков векторнозначных отображений. С помощью конадграфиков получена полунепрерывная снизу регуляризация отображений и ее вариационное представление.

Ключевые слова: полуупорядоченное пространство, конус, полунепрерывное снизу отображение, конадграфик, регуляризация.

Topological properties of coepigraphs of vector-valued mappings are investigated. Lower semicontinuous regularuzation of such mappings and it's variational representation are recieved with the help of coepigraphs.

Key words: partially ordered space, cone, lower semicontinuous mapping, coepigraph, regularization.

Вступ. Добре відомим фактом теорії варіаційного числення є можливість побудови для довільного дійснозначного відображення $f: X \to Y^{\bullet}$ його напівнеперервної знизу (нн. зн.) регуляризації виходячи з того факту, що відображення, надграфік якого відповідає замиканню надграфіка f, є нн. зн. регуляризацією f. Більше того, у скалярнозначному випадку відображення є нн. зн. тоді і тільки тоді, коли його надграфік є замкнутим. Проте, у випадку векторнозначних відображень, ці правила в загальному випадку є хибними.

У зв'язку з цим, метою даної роботи буде знаходження такої геометричної конструкції, яка б, по-перше, однозначно характеризувала властивість нн. зн. векторнозначних відображень, а, по-друге, слугувала знаходженню їхньої нн. зн. регуляризації. Ця проблема частково розв'язана в [3] для локально обмежених за нормою відображень. У [3] був показаний зв'язок секвенційної нн. зн. та властивості замкнутості конадграфіка таких відображень. У даній роботі розширено клас відображень, властивість нн. зн. еквівалентна замкнутості конадграфіків. Отримано варіаційне подання нн. зн. регуляризації таких відображень.

Означення та попередні результати. Нехай X та Y пара дійсних нормованих просторів. Простір Y є скінченновимірним. Ці простори, як

топологічні, наділені відповідно $\sigma = \sigma(X)$ та $\tau = \tau(Y)$ топологіями. Топологію σ будемо асоціювати з сильною топологією простору X, а τ – з сильною топологією простору Y. Для довільної множини $A \subset Y$ через $\mathrm{int}_\tau A$, $\mathrm{cl}_\tau A$ та $\mathrm{fr}_\tau A$ будемо позначати відповідно її внутрішність, замикання та границю відносно топології τ. Якщо це не буде призводити до непорозуміння, індекс топології будемо опускати.

Означення 1. Будемо казати, що послідовність пар $\{(x_k, y_k) \in X \times Y\}_{k \in \mathrm{N}}$ μ-збігається до (x_0, y_0), якщо

$$x \overset{\sigma}{\to} x_0 \text{ та } y \overset{\tau}{\to} y_0, \text{ при } k \to \infty.$$

Множину $\Lambda \subset Y$ називають конусом, якщо $\alpha \cdot \Lambda = \Lambda,\ \forall\, \alpha > 0$. Конус $\Lambda \subset Y$ називають випуклим, якщо $\Lambda + \Lambda \subset \Lambda$. Конус $\Lambda \subset Y$ називають загостреним, якщо $\Lambda \cap (-\Lambda) = O_Y$. Конус Λ називають тілесним відносно топології τ, якщо $\mathrm{int}_\tau \Lambda \neq \varnothing$. Надалі будемо вважати, що простір Y напівупорядковано за допомогою випуклого, замкнутого, загостреного, тілесного конуса Λ. Позначимо породжений конусом Λ частковий порядок як $\leq_\Lambda$, що означає:

$$\forall\, y, z \in Y \ y \leq_\Lambda z \Leftrightarrow z \in y + \Lambda \tag{1}$$

та

$$\forall\, y, z \in Y \ y <_\Lambda z \Leftrightarrow z \in y + \mathrm{int}_\tau \Lambda \tag{2}$$

Означення 2. Послідовність $\{y_k\}_{k \in \mathrm{N}} \subset Y$ називають $\Lambda-$ монотонною, якщо

$$y_k \leq_\Lambda y_{k+1} \text{ або } y_k \geq_\Lambda y_{k+1},\ \forall k \in \mathrm{N}. \tag{3}$$

Означення 3. Будемо казати, що послідовність $\{y_k\}_{k \in \mathrm{N}} \subset Y$ обмежена зверху(знизу) за конусом Λ, якщо існує елемент $y^* \in Y$ такий, що $y^* \geq_\Lambda y_k (y^* \leq_\Lambda y_k)\ \forall k \in \mathrm{N}$.

Означення 4. Елемент $a \in Y$ називають $\Lambda-$ супремумом множини $A \subset Y (a = \overset{\Lambda}{\sup} A)$, якщо для довільного $y \in Y$ виконується властивість

$$a \leq_\Lambda y \Leftrightarrow b \leq_\Lambda y \text{ для будь-якого } b \in A.$$

Аналогічно Λ-інфінімум множини A, $\overset{\Lambda}{\inf} A$, визначають наступним чином:

$$\forall\, y \in Y, y \leq_\Lambda \overset{\Lambda}{\inf} A \Leftrightarrow y \leq_\Lambda z\ \forall z \in A.$$

Означення 5. [2] Конус Λ називають мініедральним, якщо кожна пара елементів з простору Y має супремум. Відомо, що мініедральність конуса рівносильна тому, що для довільних елементів $y, z \in Y$ знайдеться такий елемент $u \in Y$, такий, що

$$(y+\Lambda)\cap(z+\Lambda)=u+\Lambda,$$

де $u=\overset{\Lambda}{\inf}\{x,y\}$.

Наслідуючи Красносельского [2], введемо два невласних елементи $-\infty_\Lambda$ та $+\infty_\Lambda$ в Y. Ці елементи задовольняють наступним умовам:

1) $-\infty_\Lambda \leq_\Lambda y \leq_\Lambda +\infty_\Lambda, \forall y \in Y;$

2) $+\infty_\Lambda + (-\infty_\Lambda) = 0_Y$.

Простір $\overline{Y} = Y \cup \{-\infty_\Lambda\} \cup \{+\infty_\Lambda\}$ називають розширенням простору Y, а елементи $-\infty_\Lambda$ та $+\infty_\Lambda$ відповідно найменшим і найбільшим елементами цього простору. Простір $Y^\bullet = Y \cup \{+\infty\}$ називають напіврозширенням простору Y. Невласний елемент $+\infty$ наділимо наступними властивостями:

1) $\|+\infty_\Lambda\| = +\infty;$

2) $y + \alpha \cdot (+\infty) = +\infty_\Lambda \ \forall y \in Y, \forall \alpha \in \mathrm{R}_+$

Легко бачити, що простір $Y^\bullet$ залишається нормованим.

Означення 6. Областю визначення відображеня $f: X \to Y^\bullet$ називають множину

$$\operatorname{dom} f = \{x \in X | f(x) \neq +\infty_\Lambda\}.$$

Якщо $\operatorname{dom} f = X$, то відображення f називають власним.

Нехай множина $B \subset X \times Y^\bullet$. Перерізом B у точці $x_0 \in X$ будемо називати множину виду

$$B|_{x=x_0} = \{(x_0, y) \in X \times Y | (x_0, y) \in B\}.$$

Означення 7. Надграфіком відображення $f: X \to Y^\bullet$ називають множину

$$\operatorname{epi} f = \{(x,y) \in X \times Y^\bullet | f(x) \leq_\Lambda y\}. \tag{4}$$

Нагадаємо поняття напівнеперервності знизу (нн. зн.) та секвенційної–нн. зн. (с.–нн. зн.) векторнозначних відображень, які були запропоновані в [4].

Означення 8. Відображення $f: X \to Y^\bullet$ називають напівнеперервним знизу (нн. зн.) у точці $x_0 \in X$ відносно μ–топології, якщо для будь-якого околу нуля $\mathrm{V} \subset Y$ і довільного $b \in Y, b \leq_\Lambda f(x_0)$ існує окіл точки x_0 $\mathrm{U} \subset X$ такий, що

$$f(\mathrm{U}) \subset b + \mathrm{V} + \Lambda \cup \{+\infty\}. \tag{5}$$

Означення 9. У випадку, коли $x_0 \in \operatorname{dom} f$, відображення f називають нн. зн. в точці $x_0 \in X$, якщо для будь-якого околу нуля $V \subset Y$ існує окіл точки x_0 $U \subset X$ такий, що

$$f(U) \subset f(x_0) + V + \Lambda \cup \{+\infty\}. \qquad (6)$$

Означення 10. Відображення $f: X \to Y^{\bullet}$ називають секвенційно–напівнеперервним знизу (с.–нн. зн.) в точці $x_0 \in X$, якщо для довільного $b \in Y, b \leq_{\Lambda} f(x_0)$ і довільної послідовності $x_n \in X$, яка σ–збігається до x_0 існує послідовність $b_n \in Y$, яка τ–збігається до b і $b_n \leq_{\Lambda} f(x_n)$.

Означення 11. Якщо $f(x_0) \in Y$, то f називають с.–нн. зн. в точці $x_0 \in X$ якщо для довільної послідовності $x_n \in X$, яка σ-збігається до x_0 існує послідовність $b_n \in Y$, яка τ-збігається до $f(x_0)$ і $b_n \leq_{\Lambda} f(x_n)$.

Якщо простори X та Y є метризованими, то означення 8, 10 та 9, 11 співпадають. У загальному випадку, з нн. зн. відображення в точці випливає його с.-нн. зн. у цій точці, але не навпаки.

Залучимо наступне поняття[1]:

Нехай $L^{\tau}\{y_k\}$ – множина всіх часткових границь послідовності $\{y_k\}_{k \in N}$ відносно τ-топології в Y. Якщо ця множина є необмеженою знизу за конусом, тобто $\inf^{\Lambda} L^{\tau}\{y_k\} = -\infty_{\Lambda}$, то $\{-\infty_{\Lambda}\} \in L^{\tau}\{y_k\}$. Якщо ж $sup^{\Lambda} L^{\tau}\{y_k\} = +\infty_{\Lambda}$, будемо казати, що $\{+\infty_{\Lambda}\} \in L^{\tau}\{y_k\}$.

Зафіксуємо елемент $x_0 \in X$. Тепер для довільного відображення $f: X \to Y$ можна ввести наступну множину:

$$L^{\mu}(f, x_0) = \bigcup_{\{x_k\}_{k \in N} \in M_{\sigma}(x_0)} L^{\tau}\{f(x_k)\}, \qquad (7)$$

де $M_{\sigma}(x_0)$ – це множина всіх послідовностей $\{x_k\}_{k \in N} \subset X$, які $x_k \xrightarrow{\sigma} x_0$.

Регуляризація локально обмежених векторнозначних. Властивість напівнеперервності знизу векторнозначних відображень є суттєвою при дослідженні різноманітних задач математичного аналізу та теорії оптимізації. Загальним підходом щодо покращення властивостей довільного відображення є знаходження у певному сенсі найближчого до нього нн. зн.(с.–нн. зн.) відображення, яке називають напівнеперервною (с.–нн.) знизу регуляризацією даного відображення.

Означення 12. Напівнеперервною знизу (с.–нн. зн.) регуляризацією відображення $f: X \to Y^{\bullet}$ називається нн. зн.(с.–нн. зн.) відображення I_f яке:

1.Є меншим за $f: I_f(x) \leq_{\Lambda} f(x), \forall x \in X$.

2.Є найбільшим з усіх нн. зн.(с.-нн. зн.) відображень, які є меншими

$$\text{за } f: \forall \text{ нн. зн(с. - нн. зн.) } g: g(x) \le_\Lambda f(x) \Rightarrow g(x) \le_\Lambda I_f(x), \forall x \in X.$$

У скалярнозначному випадку нн. зн. (с.–нн. зн.) регуляризацію отримують за допомогою замикання надграфіка заданого відображення. А саме, відображення g буде нн. зн. (с.-нн. зн.) регуляризацією відображення f, якщо надграфік g співпадає з замиканням (секвенційним замиканням) надграфіка f. Проте у векторнозначному випадку, такий взаємозв'язок не має місця:

Приклад 1. Розглянемо відображення $f:[0,1] \to \mathsf{R}^2$, де простір R^2 напівупорядкований конусом додатніх елементів R^2_+

$$f(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & x \le \frac{1}{2} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}. \tag{8}$$

Побудуємо замикання надграфіка відображення f

$$\mathrm{cl}(\mathrm{epi}\, f) = \begin{cases} (x,y) \in [0,1] \times \mathsf{R}^2, y \ge_{\mathsf{R}^2_+} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & x < \frac{1}{2} \\ (x,y) \in [0,1] \times \mathsf{R}^2, y \ge_{\mathsf{R}^2_+} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & x > \frac{1}{2} \\ (x,y) \in [0,1] \times \mathsf{R}^2, y \ge_{\mathsf{R}^2_+} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{і } y \ge_{\mathsf{R}^2_+} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & x = \frac{1}{2} \end{cases}. \tag{9}$$

Легко бачити, що замикання надграфіка відображення f не є надграфіком, бо для точки $x_0 = \frac{1}{2}$ не існує такого елемента $y \in \mathsf{R}^2$, щоб розріз множини $\mathrm{cl}(\mathrm{epi}\, f)$ у точці x_0 можна було представити у вигляді $y + \mathsf{R}^2_+$.

Введемо наступне поняття, яке є ключовим у даній роботі:

Означення 13. Конадграфіком відображення $f: X \to Y^\bullet$ називається множина

$$\mathrm{coepi}\, f = \{(x,y) \in X \times Y^\bullet \mid y \not<_\Lambda f(x)\}. \tag{10}$$

У [3], за аналогічних умов на простори X та Y, були дослідженні властивості конадграфіків, та показаний їх зв'язок з с.–нн. зн. локально обмежених за конусом відображень, які діють у напівупорядкований тілесним, мініедральним конусом простір та були отримані наступні результати:

- Локально обмежене відображення f буде с.–нн. зн. тоді і тільки тоді, коли його конадграфік буде μ–замкнутим.

• μ–замикання конадграфіка локально обмеженого відображення буде конадграфіком.

• Якщо f – задане відображення, а $\hat{f}$ – відображення, що відповідає μ-замиканню конадграфіка f, то $\hat{f}$ визначається наступним чином:

$$\hat{f}(x) = \overset{\Lambda}{\inf} \mathrm{L}^{\mu}(f,x). \tag{11}$$

• Відображення $\hat{f}$, отримане за допомогою замикання конадграфіка f є с.–нн. зн. регуляризацією відображення f.

Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y^{\bullet}$ називається локально обмеженим знизу(зверху) за конусом Λ, якщо для довільної точки $x \in X$ існують такі її окіл $\mathsf{U}(x)$ і елемент $y \in Y$, що $y \leq_{\Lambda} f(\mathsf{U}(x))$.

У зв'язку зцим закономірно поставити питання про розширення класу відображень, властивості нн. зн. яких можна отримати за допомогою конадграфіків. Для цього замість $\overset{\Lambda}{\inf} \mathrm{L}^{\mu}(f,x)$ введемо іншу конструкцію, яка буде описувати варіаційні властивості не обов'язково локально обмежених одночасно зверху і знизу за конусом відображень:

$$f_{\Gamma}(x) = \overset{\Lambda}{\sup_{\mathsf{U} \in N(x)}} \overset{\Lambda}{\inf_{y \in \mathsf{U}}} f(y). \tag{12}$$

Спочатку покажемо, що в разі локально обмеженого зверху та знизу за конусом відображення f ці конструкції співпадають: $f_{\Gamma} \equiv \hat{f}$. Якщо це припущення є вірним, то у випадку регуляризації локально обмежених відображень замість $\hat{f}$ можна покласти f_{Γ}.

Нагадаємо, що у випадку тілесності конуса з обмеженості множини за нормою випливає її обмеженість зверху і знизу за конусом, і навпаки[1]. Тому локально обмежене зверху і знизу за конусом відображення будемо вважати локально обмеженим за нормою. Зважуючи на ці обставини, має місце наступний результат.

Твердження 1. Якщо відображення $f : X \to Y^{\bullet}$ є локально обмеженим за нормою, а конус Λ – тілесним, то $f_{\Gamma}(x) \equiv \hat{f}(x), \forall x \in X$.

Доведення. Покажемо, що $f_{\Gamma}(x) \leq_{\Lambda} \hat{f}(x) = \overset{\Lambda}{\inf} \mathrm{L}^{\mu}(f,x)$. Нехай $f^{*} \in \overset{\Lambda}{\inf} \mathrm{L}^{\mu}(f,x)$. Це означає, що існує послідовність $\{x_n\}_n$, яка σ-збігається до x, і $f(x_n) \xrightarrow{\tau} f^{*}$.

Із цього випливає, що для довільного околу U точки x існує номер n_0, починаючи з якого елементи $x_n \in \mathrm{U}$. Звідси виходить нерівність

$$\forall \mathrm{U}, \exists n_0 : \overset{\Lambda}{\inf_{y\in \mathrm{U}}} f(y) \leq_\Lambda f(x_n), \forall n > n_0 \tag{13}$$

Внаслідок τ-замкнутості конуса Λ та (13)

$$f_\Gamma(x) = \overset{\Lambda}{\sup_{\mathrm{U}\in N(x)}} \overset{\Lambda}{\inf_{y\in \mathrm{U}}} f(y) \leq_\Lambda \overset{\Lambda}{\inf} \mathrm{L}^u(f,x) = \hat{f}(x). \tag{14}$$

Зауважимо, що при доведенні нерівності (14) локальна обмеженість відображення не використовувалася.

Тепер, знаючи, що $f_\Gamma(x) \leq_\Lambda \hat{f}(x)$, припустимо, що $f_\Gamma(x) \neq \hat{f}(x)$. Це рівносильно тотожності $f_\Gamma(x) = \hat{f}(x) + \lambda, \lambda \in Y \setminus \Lambda$. Це означає, що для будь-якого околу U точки x, знайдеться такий $\hat{x} \in \mathrm{U}$, що

$$f(\hat{x}) \not\geq_\Lambda \hat{f}(x) + \frac{\lambda}{2}. \tag{15}$$

Унаслідок довільності околу U можна виділити збіжну до x послідовність $\{x_n\}_n$, для якої

$$f(x_n) \not\geq_\Lambda \hat{f}(x) + \frac{\lambda}{2}, \forall n. \tag{16}$$

Тому, в силу локальної обмеженості f та скінченновимірності простору Y, виділимо з $\{f(x_n)\}_n$ збіжну до певного елемента f^* підпослідовність. При чому, внаслідок (16)

$$f^* \not>_\Lambda \hat{f}(x) + \frac{\lambda}{2} \Rightarrow f^* \not\geq_\Lambda \hat{f}(x) = \overset{\Lambda}{\inf} \mathrm{L}^u(f,x). \tag{17}$$

Отримане протиріччя показує, що $f_\Gamma(x) = \hat{f}(x)$. Унаслідок довільності вибору елемента x твердження доведене.

Наслідок 1. Для не обов'язково локально обмеженого відображення f має місце нерівність

$$f_\Gamma(x) \leq_\Lambda \hat{f}(x).$$

Отже для локально обмеженого відображення $\hat{f}$ та f_Γ співпадають. Більше того, для локально обмеженого відображення f, відповідне йому відображення f_Γ визначає його нн. зн. регуляризацію. Тепер перейдемо до розгляду не обов'язково локально обмежених відображень.

Регуляризація не обов'язково локально обмежених відображень. Далі будемо розглядати власні відображення $f: X \to Y$, які не обов'язково локально обмежені зверху за конусом, проте локально обмежені знизу за конусом. Зауважимо, що наведене обмеження є природнім. У випадку, коли відображення не є локально обмеженим знизу за конусом, то внаслідок того, що елемент $\{-\infty\}$ не належить напіврозширеному простору $Y^{\bullet}$ неможливо знайти його нн. зн.(с.–нн. зн.).

Для даного класу відображень покажемо взаємовідношення властивостей їх конадграфіків, властивості нн. зн та відображення f_{Γ}.

Спочатку розглянемо зв'язок між μ–замкнутістю конадграфіка відображення та його нн.зн.

Теорема 1. *Із нн. зн. відображення f випливає μ-замкненість його конадграфіка.*

Доведення. Нехай відображення f є нн. зн. Припустимо, що конадграфік f не є замкненим, це означає, що

$$\exists \operatorname{coepi} f \ni (x_n, y_n) \xrightarrow{\mu} (x_0, y_0) \notin \operatorname{coepi} f. \tag{18}$$

З (18) випливає, що $y_n \nless_{\Lambda} f(x_n), \forall n$ та $y_0 <_{\Lambda} f(x_0)$. Звідси

$$y_0 = f(x_0) - \lambda, \lambda \in \operatorname{int} \Lambda.$$

Унаслідок того, що конус Λ є тілесним та $\lambda \in \operatorname{int} \Lambda$, можна знайти два околи V_{y_0} та $V_{f(x_0)}$ точок y_0 та $f(x_0)$ такі, що

$$V_{y_0} <_{\Lambda} f(x_0) - \frac{\lambda}{2}, \text{a } V_{f(x_0)} >_{\Lambda} f(x_0) - \frac{\lambda}{2}.$$

З цього та збіжності послідовності y_n випливає, що

$$\exists n_0 : y_n <_{\Lambda} f(x_0) - \frac{\lambda}{2}, \forall n > n_0.$$

З іншого боку, внаслідок нн. зн. відображення f

$$\exists n_1 : f(x_n) \subset V_{f_0} + \Lambda \cup \{+\infty\}, \forall n > n_1. \tag{19}$$

У свою чергу, з (19) випливає, що для довільного $n > \max(n_1, n_2)$:

$$y_n <_{\Lambda} f(x_0) - \frac{\lambda}{2} <_{\Lambda} f(x_n),$$

що суперечить тому, що послідовність $\{(x_n, y_n)\}_n$ належить конадграфіку f. Тому припущення про незамкненість $\operatorname{coepi} f$ є хибним.

Для доведення оберненого зв'язку розглянемо допоміжну лему.

Лема 1. Нехай Λ–тілесний мініедральний конус, який напівупорядковує простір Y. Тоді якщо елементи a і b є незрівняними, тобто $a \ngeq_{\Lambda} b$ та $b \ngeq_{\Lambda} a$, то

$$\overset{\Lambda}{\inf}\{a,b\}\in(a-\mathrm{fr}\,\Lambda)\cap(b-\mathrm{fr}\,\Lambda).$$

Теорема 2. *З μ-замкнутості конадграфіка відображення випливає його нн. зн.*

Доведення. Нехай конадграфік відображення $f:X\to Y$ є μ-замкнутим Припустимо, що відображення f не є нн. зн. в точці x_0. Це означає, що існує окіл нуля $\mathrm{V}\in Y$ і послідовність $x_n\overset{\mu}{\to}x_0$ такі, що

$$f(x_n)\notin f(x_0)+\mathrm{V}+\Lambda\cup\{+\infty\}. \tag{20}$$

З іншого боку, внаслідок леми 1

$$(x_n,z_n)=(x_n,\overset{\Lambda}{\inf}\{f(x_n),f(x_0)\})\in\mathrm{coepi}\,f.$$

Більше того, внаслідок локальної обмеженості знизу за конусомвідображення f, з послідовності z_n ми можемо виділити τ-збіжну до z^* послідовність. Звідси, внаслідок включення (20) та побудови послідовності $\{z_n\}$

$$z^*<_\Lambda f(x_0),$$

що суперечить замкнутості конадграфіка відображення f.

Залучаючи теореми 1–2 отримуємо взаємооднозначний зв'язок між нн. зн. відображення та замкнутості його конадграфіка:

Наслідок 2. Локально обмежене знизу за конусом відображення є нн. зн. тоді і тільки тоді, коли його конадграфік є μ-замкнутим.

Покажемо тепер, що μ-замикання конадграфіка довільного локально обмеженого знизу за конусом відображення $f:X\to Y^\bullet$ є конадграфіком. Більше того, доведемо, що отриманий внаслідок замикання конадграфік, буде конадграфіком відображення f_Γ.

Для цього знадобиться наступний допоміжний результат.

Лема 2. Нехай $\{f_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ та $\{y_k\}_{k\in\mathrm{N}}$ дві послідовності з $Y^\bullet$ такі, що

$$f_k\overset{\tau}{\to}f_0,\qquad y_k\overset{\tau}{\to}y_0 \text{ коли } k\to\infty, \tag{21}$$

$$y_k\not<_\Lambda f_k\quad\forall k\in\mathrm{N},\text{ тобто } y_k\in Y^\bullet\setminus(f_k-\mathrm{int}_\tau\Lambda). \tag{22}$$

Тоді відношення (22) є замкнутим відносно τ-збіжності в Y, а саме:

$$y_0\in A=Y^\bullet\setminus(f_0-\mathrm{int}_\tau\Lambda). \tag{23}$$

Доведення. Припустимо, що при виконанні (21)–(22), (23) є хибним, тобто $y_0<_\Lambda f_0$. Тоді існує такий окіл $\mathrm{V}(y_0)\in Y$ точки y_0, що

$$\mathrm{V}(y_0)\subset f_0-\mathrm{int}_\tau\Lambda. \tag{24}$$

Нехай z_0 довільний елемент множини A, а через B позначимо шар в Y

$$B = \{y \in Y | \|y\|_Y \le \max\{\|y_0\|_Y, \|z_0\|_Y\}\}.$$

Унаслідок того, що Y є скінченновимірним нормованим просторгом, існує така метрика $\rho : Y \times Y \to \mathsf{R}$ така, що для довільної послідовності $\{v_k\}_{k \in \mathsf{N}}$ в Y наступні твердження є еквівалентними:

1. $v_k \xrightarrow{\tau} v_0$ коли $k \to \infty$;
2. $\{v_k\}_{k \in \mathsf{N}} \subset B$ та $\rho(v_k, v_0) \to 0$ коли $k \to \infty$,

через те, що топологію τ можна метризувати на B. Тоді з (24) випливає, що $\rho(y_0, B \cap A) = \inf\{\rho(y_0, y) : \forall y \in B \cap A\} > 0$. Нехай $R = \rho(y_0, B \cap A)$ та $B_0 = B_\rho(0_Y, \frac{R}{4})$ – шар у метричному просторі (Y, ρ) з центом у точці нуль та радіусом $\frac{R}{4}$. Тоді виконується тотожність

$$(y_0 + B_0) \bigcap ((A \cap B) + B_0) = \varnothing.$$

А з того, що z_0 довільний елемент A, випливає тотожність

$$(y_0 + B_0) \bigcap (A + B_0) = \varnothing. \tag{25}$$

У результаті, з (21) маємо, що

$$\exists\, k_0 : y_k \in y_0 + B_0,\ f_k \in f_0 + B_0,\ \forall\, k > k_0. \tag{26}$$

З іншого боку, внаслідок включення

$$f_k + (Y^\bullet \setminus (-\mathrm{int}_\tau \Lambda)) \subset f_0 + B_0 + (Y^\bullet \setminus (-\mathrm{int}_\tau \Lambda)) \quad \forall k > k_0,$$

та умови (22) має місце включення

$$y_k \in f_0 + B_0 + (Y^\bullet \setminus (-\mathrm{int}_\tau \Lambda)) \Rightarrow y_k \in A + B_0 \quad \forall k > k_0.$$

Одже, для довільного $k > k_0$ елементи y_k одночасно належать і до $y_0 + B_0$, і до $A + B_0$, що суперечить (25). З цього протиріччя випливає нерівність $y_0 \not<_\Lambda f_0$, що доводить твердження.

Теорема 3. *μ–замикання конадграфіка локально обмеженого знизу за конусом відображення $f : X \to Y$ є конгадграфіком відображення f_Γ.*

Доведення. Для доведення теореми нам достатньо показати, що

$$\mathrm{cl}_\mu \mathrm{coepi} f|_{x=x_0} = \{(x_0, y) | y \not<_\Lambda f_\Gamma(x_0)\} \tag{27}$$

Нехай $(x_0, y_0) \in \{(x_0, y) | y \not<_\Lambda f_\Gamma(x_0)\}$. Якщо $y_0 \not<_\Lambda f(x_0)$, то зрозуміло, що $(x_0, y_0) \in \mathrm{cl}_\mu \mathrm{coepi} f|_{x=x_0}$. Нехай $y_0 <_\Lambda f(x_0)$. Покажемо, що в цьому випадку включення $(x_0, y_0) \in \mathrm{cl}_\mu \mathrm{coepi}\, f\,|_{x=x_0}$ виконується.

З того, що $(x_0, y_0) \in \{(x_0, y) | y \not<_\Lambda f_\Gamma(x_0)\}$ випливає наступне:

$$y_0 \not<_\Lambda f_\Gamma(x_0) \Rightarrow y_0 \not<_\Lambda \overset{\Lambda}{\inf_{y \in U}}, \forall\, U \in N(x_0). \Rightarrow \forall U \exists\, x' \in U : y_0 \not<_\Lambda f(x'). \qquad (28)$$

З (28) виходить, що можна виділити σ-збіжну до x_0 послідовність $\{x_n\}_n$, для якої

$$f(x_n) \not>_\Lambda y_0. \qquad (29)$$

Відображення f локально обмежене знизу за конусом,

тому $\exists n_0 \in \mathrm{N}, b \in Y : f(x_n) \geq_\Lambda b, \forall\, n > n_0$. Побудуємо послідовність $\{z_n\}_{n=n_0}^{\infty} \in Y$:

$$z_n = \overset{\Lambda}{\inf} \{f(x_0), f(x_n)\}. \qquad (30)$$

Ця послідовність обмежена зверху елементом $f(x_0)$ і знизу елементом $\overset{\Lambda}{\inf}\{b, f(x_0)\}$, а тому вона обмежена за нормою простору Y. З леми 1 та нерівності $y_0 <_\Lambda f(x_0)$ випливає, що $y_0 \not<_\Lambda z_n$.

Виділимо з $\{z_n\}_n$ τ-збіжну підпослідовність $\left\{z_{n_k}\right\}_k \xrightarrow{\tau} z^*$. Внаслідок леми 2

$$y_0 \not<_\Lambda z^*. \qquad (31)$$

У свою чергу, внаслідок леми 1 та того, що $y_0 <_\Lambda f(x_0)$, послідовність $\{(x_{n_k}, z_{n_k})\}_k$ починаючи з фіксованого номера належить до coepi f. Унаслідок цього та (31) послідовність $\{(x_{n_k}, z_{n_k} + y_0 - z^*)\}_k$ належить до coepi f. Звідси, її μ-границя (x_0, y_0) належить до секвенційного μ-замикання конадграфіка відображення f.

З іншого боку, нехай $(x_0, y_0) \in \mathrm{cl}_\mu \mathrm{coepi}\, f\,|_{x=x_0}$. Покажемо, що в цьому випадку $(x_0, y_0) \in \{(x_0, y) | y \square f_\Gamma(x_0)\}$. Аналогічно першій частині доведення побудуємо послідовність $\{(x_n, z_n)\}_n$. Та виділимо з неї μ-збіжну підпослідовність $\{(x_{n_k}, z_{n_k})\}_k$, яка μ-збігається до елемента (x_0, z^*).

Унаслідок леми 2

$$y_0 \not<_\Lambda z^*. \qquad (32)$$

Також легко бачити, що внаслідок побудови елементів z_{n_k} для довільного околу U точки x_0 в X

$$\exists k_0 : z_{n_k} \geq_\Lambda \overset{\Lambda}{\inf_{y \in U}} f(y), \forall k > k_0. \qquad (33)$$

З (33) випливає, що $\forall \mathsf{U}: z^* \geq_\Lambda \inf^\Lambda_{y\in \mathsf{U}} f(y)$. Звідси, беручи до уваги нерівність (32),

$$y_0 \not>_\Lambda \overset{\Lambda}{\inf_{y\in U}} f(y) \Rightarrow y_0 \not>_\Lambda \overset{\Lambda}{\sup_{\mathsf{U}\in N(x_0)}} \overset{\Lambda}{\inf_{y\in \mathsf{U}}} f(y) = f_\Gamma(x_0),$$

що доводить теорему.

Наслідок 3. Легко бачити, що внаслідок теорем 1–3, у разі нн. зн. відображення $f : X \to Y$

$$f \equiv f_\Gamma.$$

Представимо головний результ роботи. Покажемо, що відображення f_Γ, побудоване за допомогою μ – замикання конадграфіка даного відображення є його нн. зн. регуляризацією.

Теорема 4. *Нехай задане напівобмежене знизу за конусом Λ власне відображення $f : X \to Y$. Де X, Y – пара нормованих просторів. Простір Y є скінченновимірним. Ці простори, як топологічні, наділені сильними $\sigma = \sigma(X)$ та $\tau = \tau(Y)$ топологіями. Простір Y напівупорядкований τ-замкненим, загостреним, тілесним і мініедральним конусом Λ. Тоді відображення I_f, яке відповідає μ-замиканню надграфіка відображення f, є його нн. зн. регуляризацією.*

Доведення. Для доведення теореми нам достатньо показати, що для довільного відображення f, яке задовольняє умови теореми, виконуються наступні припущення:

1. μ-замикання конадграфіка f є конадграфіком відображення I_f.
2. I_f є нн. зн. відображенням.
3. I_f є найбільшим з усіх нн. зн. відображень, які є меншими за f:

$$\forall \text{ нн.зн. } g : g(x) \leq_\Lambda f(x) \Rightarrow g(x) \leq_\Lambda I_f(x), \forall x \in X.$$

Припущення 1 доведене в теоремі 3. Припущення 2 виконується внаслідок замкнутості конадграфіка нн. зн. відображення та теореми 2.

Доведемо припущення 3. З нн. зн. відображення g та наслідка 3 випливає, що

$$g(x) = \overset{\Lambda}{\sup_{\mathsf{U}\in N(x)}} \overset{\Lambda}{\inf_{y\in \mathsf{U}}} g(y). \tag{34}$$

В свою чергу, внаслідок (34) та того, що $g(x) \leq_\Lambda f(x)$, випливає нерівність

$$g(x) = \overset{\Lambda}{\sup_{\mathsf{U}\in N(x)}} \overset{\Lambda}{\inf_{y\in \mathsf{U}}} g(y) \leq_\Lambda \overset{\Lambda}{\sup_{\mathsf{U}\in N(x)}} \overset{\Lambda}{\inf_{y\in \mathsf{U}}} f(y) = f_\Gamma(x), \forall x \in X, \tag{34}$$

яка доводить припущення 3.

Наслідок. 4 Для довільного відображення $f: X \to Y$, яке задовольняє умовам теореми 4, відображення f_Γ є його нн. зн. регуляризацією.

Підсумуємо результати отримані в роботі. Для відображення $f: X \to Y$, яке задовольняє умовам теореми 4 є вірними наступні твердження:

1. Відображення f є нн. зн. тоді і тільки тоді, коли його конадграфік є μ–замкненим.
2. μ–замикання конадграфіка відображення f є конадграфіком.
3. Відображення, яке відповідає μ-замиканню конадграфіка f є його нн. зн. регуляризацією.
4. Нн. зн. регуляризація I_f відображення f має наступне варійційне представлення $I_f(x) = \overset{\wedge}{\sup\limits_{U \in N(x)}} \overset{\wedge}{\inf\limits_{y \in U}} f(y) = f_\Gamma(x)$.

Бібліографічні посилання

1. **Нечай І.В.** Про розв'язність та регуляризацію задач нескалярної оптимізації в банахових просторах: дис.... кандидата фіз.-мат. наук/ Нечай І.В.// 2009.
2. **Красносельський М. А.**, Положительные решения операторных уравнений, /М.А. Красносельский //Groningen, P.Noordhoff Ltd, 1964.
3. **Dovzhenko A. V.** Epi and Coepi -Analysis of Vector-Valued Mappings in Banach spaces/ A. V. Dovzhenko, P. I. Kogut, R. Manzo // Revista Complutence Matematica (представлено до друку).
4. **Penot J. P.** Semicontinuous mappings in general topology/ J. P. Penot, M. Thera // Arch. Math., 38(1982), 158 –166.

Надійшла до редколегії 03 03 10

ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". № 15. 2010. Вип. 15. С. 123 – 127

УДК 517.5

В. А. Кофанов

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ РАЗНЫХ МЕТРИК ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСИ

Отримано точні оцінки півнорм Вейля функцій, що задані на осі, та їх проміжних похідних через локальні L_p-норми цих функцій та рівномірні норми їх старших похідних.

Ключові слова: нерівності для похідних, півнорма Вейля.

Получены оценки полунорм Вейля функций, заданных на оси, и их промежуточных производных через локальные L_p-нормы этих функций и равномерные нормы их старших производных.

Ключевые слова: неравенства для производных, полунорма Вейля.

We obtain the estimates of the seminorms of Weil of the functions on the real line and their derivatives with the help of local L_p-norms the functions and uniform norms their oldest derivatives.

Key words: inequalities for derivatives, seminorms of Weil.

Символом G будем обозначать отрезок, действительную ось R, или единичную окружность T, реализованную в виде отрезка $[0,2\pi]$ с отождествленными концами. Через $L_p(G)$, $0 < p \le \infty$, обозначим пространства измеримых функций $x : G \to R$, таких что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где $\|x\|_{L_p(G)} := \left(\int_G |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$, если $0 < p < \infty$, и $\|x\|_{L_\infty(G)} := \operatorname{vrai}\sup_{t\in G}|x(t)|$. Для $r \in N$ через L^r_∞ обозначим пространство функций $x : R \to R$, для которых $x^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна, $x \in L_\infty(R)$ и $x^{(r)} \in L_\infty(R)$. *Положим*

$$\|x\|_{W_q} := \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{a\in R}\left(\frac{1}{\Delta}\int_a^{a+\Delta}|x(t)|^q dt\right)^{1/q}. \tag{1}$$

Хорошо известно [1], что для функций x, таких что $x \in L_q[a,b]$ для любых $a, b \in R$, предел в правой части (1) существует. Пусть далее

$$L(x)_p := \sup\{\ \|x\|_{L_p[a,\,b]} : a, b \in R, |x(t)| > 0,\ t \in (a,b)\ \}. \tag{2}$$

Функционалы (2) изучались в [2].

В настоящей работе доказано точное неравенство типа Колмогорова-Надя

$$\left\|x^{(k)}\right\|_{W_q} \le \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q} \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^\alpha \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha} \tag{3}$$

для функций $x \in L^r{}_\infty$, где φ_r – идеальный сплайн Эйлера порядка r, $p > 0$, $k = 0,\ q \ge p$ или $k = 1,\dots,r-1,\ q \ge 1$, $\alpha = (r-k)/(r+1/p)$.

Для $p=\infty$, $k\geq 1$ неравенство (3) получено в [3]. Аналог неравенства (3) для периодических функций доказан ранее в [4].

Для доказательства (3) нам потребуются формулировки некоторых результатов в [5]. Для $\lambda>0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t)=:\lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$. Фиксируем $p>0$, произвольный отрезок $[a,b]\subset R$, $r\in N$ и $A_r, A_0>0$. Выберем $\lambda>0$, удовлетворяющее условию $A_0=A_r\, L(\varphi_{\lambda,r})_p$, т. е.

$$\lambda=\left(\frac{L(x)_p}{A_r L(\varphi_r)_p}\right)^{\frac{1}{r+1/p}}, \tag{4}$$

и представим длину Δ отрезка $[a, b]$ в виде

$$\Delta=n\frac{\pi}{\lambda}+2\Theta,\quad n\in N,\quad \Theta\in(0,\pi/(2\lambda)). \tag{5}$$

Положим

$$\varphi_{[a,b],\,r,\,k}(t):=A_r\,\varphi_{\lambda,r}(t+\tau_k),\qquad \tau_k:=\frac{\pi}{4\lambda}\left(1+(-1)^{k+1}\right),$$

где τ_k выбрано так, что

$$\left|\varphi^{(k)}_{[a,b],\,r,\,k}(a+\Theta)\right|=\left|\varphi^{(k)}_{[a,b],\,r,\,k}(b-\Theta)\right|=A_r\left\|\varphi_{\lambda,r-k}\right\|_\infty .$$

Ясно, что $\varphi_{[a,b],\,r,\,k}\in L^r_\infty$ и

$$L(\varphi_{[a,b],\,r\,\,k})_p = A_0,\qquad \left\|\varphi^{(r)}_{[a,b],\,r,\,k}\right\|_\infty = A_r .$$

Конструкция функции $\varphi_{[a,b],\,r,\,k}$ заимствована из работы [6]. Символом $K^r_{p,\infty}(A_0, A_r)$ обозначим класс функций $x\in L^r{}_\infty$, таких что

$$L(x)_p\leq A_0,\qquad \left\|x^{(r)}\right\|_\infty\leq A_r .$$

В [5] доказана следующая теорема.

Теорема А. *Пусть* $p>0$, $r\in N$; $k=0$, $q\geq p$ или $k=1,\ldots,r\text{-}1$, $q\geq 1$. *Тогда для любых* $a, b\in R$

$$\sup\left\{\ \left\|x^{(k)}\right\|_{L_q[a,b]} : x\in K^r_\infty(A_0, A_r)\ \right\} = \left\|\varphi^{(k)}_{[a,b],\,r,\,k}\ \right\|_{L_q[a,b]}.$$

Для $p=\infty$, $k\geq 1$ теорема А доказана в [6]. Главным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $p>0$, $r\in N$; $k=0$, $q\geq p$ или $k=1,\ldots,r\text{-}1$, $q\geq 1$. Тогда *для любой функции* $x\in L^r_\infty$ *имеет место неравенство (3), где* $\alpha=(r-k)/(r+1/p)$. *Неравенство (3) является точным и обращается в равенство для функций вида* $x(t)=a\,\varphi_{\lambda,r}(t+b)$, $a, b\in R$, $\lambda>0$.

Доказательство. Рассмотрим класс функций

$$L^r_{p,\infty}(A_0, A_r):=\left\{\,x\in L^r_\infty : L(x)_p = A_0,\ \left\|x^{(r)}\right\|_\infty = A_r\,\right\}$$

и пусть

$$R(\Delta) := \sup_{x \in L^r_{p\,\infty}(A_0,\, A_r)} \frac{\sup\limits_{a\in R}\left(\dfrac{1}{\Delta}\displaystyle\int_a^{a+\Delta}\left|x^{(k)}(t)\right|^q dt\right)^{1/q}}{L(x)_p^{\alpha}\ \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}}, \quad \Delta > 0.$$

По теореме А

$$R(\Delta) = \frac{\left(\dfrac{1}{\Delta}\displaystyle\int_a^{a+\Delta}\left|\varphi^{(k)}_{[a,a+\Delta],\,r,\,k}(t)\right|^q dt\right)^{1/q}}{A_0^{\alpha}\ A_r^{1-\alpha}}.$$

Найдем двухсторонние оценки для величины $R(\Delta)$. Пусть m – точка локального максимума сплайна φ_{r-k}. Тогда

$$\int_a^{a+\Delta}\left|\varphi^{(k)}_{[a,a+\Delta],\,r,\,k}(t)\right|^q dt = n\,A_r^q \int_{m/\lambda}^{m/\lambda+\pi/\lambda}\left|\varphi_{\lambda,r-k}(t)\right|^q dt + 2A_r^q \int_{m/\lambda}^{m/\lambda+\Theta}\left|\varphi_{\lambda,r-k}(t)\right|^q dt,$$

где λ определяется условием (4), а n и Θ – условием (5). Следовательно, ввиду определения $\varphi_{\lambda,r-k}$

$$R(\Delta) = \frac{A_r\lambda^{-(r-k+1/q)}\left(n\displaystyle\int_m^{m+\pi}\left|\varphi_{r-k}(t)\right|^q dt + 2\int_m^{m+\Theta\lambda}\left|\varphi_{r-k}(t)\right|^q dt\right)^{1/q}}{\Delta^{1/q}\left(A_r\ \lambda^{-(r+1/p)}\,L(\varphi_r)_p\right)^{\alpha}\ A_r^{1-\alpha}}.$$

Таким образом

$$R(\Delta) = \frac{1}{(\Delta\lambda)^{1/q}}\ \frac{\left(n\displaystyle\int_m^{m+\pi}\left|\varphi_{r-k}(t)\right|^q dt + 2\int_m^{m+\Theta\lambda}\left|\varphi_{r-k}(t)\right|^q dt\right)^{1/q}}{L(\varphi_r)_p^{\alpha}}.$$

Ясно, что

$$0 \le 2\int_m^{m+\Theta\lambda}\left|\varphi_{r-k}(t)\right|^q dt \le \int_m^{m+\pi}\left|\varphi_{r-k}(t)\right|^q dt,$$

так как $\Theta \in (0, \pi/(2\lambda))$. Поэтому

$$\left(\frac{n}{\Delta\lambda}\right)^{1/q}\frac{\left(\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\varphi_{r-k}(t)\right|^q dt\right)^{1/q}}{L(\varphi_r)_p^{\alpha}} \le R(\Delta) \le \left(\frac{n+1}{\Delta\lambda}\right)^{1/q}\frac{\left(\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\varphi_{r-k}(t)\right|^q dt\right)^{1/q}}{L(\varphi_r)_p^{\alpha}}.$$

Согласно (5) и (4)

$$\frac{n\pi}{\Delta\lambda} = \frac{n\pi}{n\pi + 2\lambda\Theta} \ge \frac{n}{n+1}, \qquad \frac{(n+1)\pi}{\Delta\lambda} = \frac{(n+1)\pi}{n\pi + 2\lambda\Theta} \le \frac{n+1}{n},$$

$$n = \left[\frac{\lambda\Delta}{\pi}\right] = \left[\frac{\Delta}{\pi}\left(\frac{A_r L(\varphi_r)_p}{L(x)_p}\right)^{\frac{1}{r+1/p}}\right], \tag{6}$$

где $[a]$ – целая часть числа a. Таким образом,

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1/q}\frac{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q}}{L(\varphi_r)_p^{\alpha}}\le R(\Delta)\le\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1/q}\frac{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q}}{L(\varphi_r)_p^{\alpha}}. \quad (7)$$

Зафиксируем произвольную функцию $x\in L^r_\infty$, $x\ne\mathrm{const}$. Тогда $x\in L^r_{p,\infty}(A_0, A_r)$, где $A_0=L(x)_p$, $A_r=\left\|x^{(r)}\right\|_\infty$. По неравенству (7)

$$\frac{\sup\limits_{a\in R}\left(\frac{1}{\Delta}\int\limits_a^{a+\Delta}\left|x^{(k)}(t)\right|^q dt\right)^{1/q}}{L(x)_p^{\alpha}\ \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{1-\alpha}}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/q}\frac{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q}}{L(\varphi_r)_p^{\alpha}}, \quad (8)$$

где n определено равенством (6). Из (6) следует, что $n\to\infty$ при $\Delta\to\infty$. Поэтому, переходя в (8) к пределу при $\Delta\to\infty$, получаем (3). Точность неравенства (3) очевидна. Теорема 1 доказана.

Приведем решение задачи Колмогорова о вычислении величины

$$\Phi^{r,k}_{q,p}(\gamma,\delta):=\sup\left\|x^{(k)}\right\|_{W_q},$$

где точная верхняя грань берется по всем функциям $x\in L^r_\infty$, таким что

$$L(x)_p\le\gamma,\qquad \left\|x^{(r)}\right\|_\infty\le\delta.$$

Следствие 1. *В условиях теоремы 1*

$$\Phi^{r,k}_{q,p}(\gamma,\delta)=\frac{\left\|\varphi_{r-k}\right\|_{W_q}}{L(\varphi_r)_p^{\alpha}}\gamma^{\alpha}\delta^{1-\alpha},\quad \gamma,\ \delta>0. \quad (9)$$

Доказательство. Ясно, что величина $\Phi^{r,k}_{q,p}(\gamma,\delta)$ меньше или равна правой части равенства (9). С другой стороны, для любых фиксированных $\gamma,\ \delta>0$ рассмотрим функцию $x_0(t):=\delta\varphi_{\lambda,r}(t)$, где λ выбрано так, что $L(x_0)_p=\gamma$. Тогда $L(x_0)_p=\gamma$, $\left\|x_0^{(r)}\right\|_\infty=\delta$ и

$$\Phi^{r,k}_{q,p}(\gamma,\delta)\ge\left\|x_0^{(k)}\right\|_{W_q}=\delta\left(\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_0^{\pi/\lambda}|\varphi_{\lambda,r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q}=\delta\lambda^{-(r-k)}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q}=$$

$$=\delta\left(\frac{\gamma}{\delta L(\varphi_r)_p}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}|\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q}=\frac{\left\|\varphi_{r-k}\right\|_{W_q}}{L(\varphi_r)_p^{\alpha}}\gamma^{\alpha}\delta^{1-\alpha}.$$

Следствие 1 доказано.

Повторяя рассуждения Колмогорова [7], получаем еще одно следствие.

Следствие 2. *В условиях теоремы 1 для положительных* ϖ, γ, δ *существует функция* $x_0\in L^r_\infty$, *такая что*

$$\left\|x_0^{(k)}\right\|_{W_q}=\varpi,\qquad \left\|x_0\right\|_\infty=\gamma,\qquad \left\|x_0^{(r)}\right\|_\infty=\delta$$

если и только если

$$\varpi \le \|\varphi_{r-k}\|_{W_q} L(\varphi_r)_p^{-\alpha} \gamma^\alpha \delta^{1-\alpha}.$$

В следующем следствии получено неравенство (11), обобщающее на целые функции известное неравенство Кальдерона-Клейна [9] для тригонометрических полиномов, которое впоследствии было передоказано Тайковым [10].

Следствие 3. *В условиях теоремы 1 для любой целой функции* f *экспоненциального типа* σ *справедливо неравенство*

$$\left\|f^{(k)}\right\|_{W_q} \le \sigma^{k+1/p} \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos t|^q dt\right)^{1/q} \frac{L(f)_p}{L(\cos(\cdot))_p}. \tag{10}$$

В частности, для $k \in N$, $q \ge 1$ *выполнено точное неравенство*

$$\left\|f^{(k)}\right\|_{W_q} \le \sigma^k \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos t|^q dt\right)^{1/q} \|f\|_\infty. \tag{11}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную целую функцию f экспоненциального типа σ. По неравенству Бернштейна $\left\|f^{(r)}\right\|_\infty \le \sigma^r \|f\|_\infty$, $r \in N$.

Следовательно, $f \in L^r{}_\infty$ для любого r и согласно (3) для $r > k$

$$\left\|f^{(k)}\right\|_{W_q} \le \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right)^{1/q} \left(\frac{L(f)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\frac{r-k}{r+1/p}} \left(\sigma^r \|f\|_\infty\right)^{\frac{k+1/p}{r+1/p}}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $r \to \infty$ и учитывая соотношение $\|\varphi_r\|_p \to 4\pi^{-1}\|\cos(\cdot)\|_p$, получим (10). Точность (11) очевидна. Следствие доказано.

Библиографические ссылки

1. **Левитан Б.М.** Почти-периодические функции / Б.М. Левитан – М.,1953. – 396 с.
2. **Pinkus A.** Variations on the Chebyshev and L^p Theories of Best Approximations/ A. Pinkus, O. Shisha // Journal of Approximation Theory.– 1982.–35, № 2.– С. 148–168.
3. **Кофанов В.А.** Оценка производных функций на оси в пространствах Вейля/ В.А. Кофанов //Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика.– 2009.– Т. 17, № 6/1, вып.14.– С.80-84.
4. **Кофанов В.А.** О точных неравенствах типа Колмогорова и Бернштейна/ В.А. Кофанов // Теорія наближень та гармонічний аналіз: зб. наук. пр. Українського математичного конгресу–2001.– К., 2002.– 252 с.– С. 84–99.
5. **Кофанов В.А.** О некоторых экстремальных задачах разных метрик для дифференцируемых функций на оси/ В.А. Кофанов // Укр. мат. журн. – 2009.– 61, № 6, С. 765 – 776.
6. **Bojanov B.,** An extension of the Landau-Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos/B. Bojanov, N.Naidenov // Journal d'Analyse Mathematique.– 1999.–78.– С.263 – 280.
7. **Колмогоров А. Н.** Избранные труды. Математика, механика / А. Н. Колмогоров – М., 1985, – С 252 – 263.
8. **Ахиезер Н.И..** Лекции по теории аппроксимации/ Н.И. Ахиезер.– М., 1965, 407 с.
9. **Calderon A.P.** On some inequalities for polynomials/ A.P. Calderon, G.Klein //Studia Math.– 1951.– 12.– С. 166–169.
10. **Тайков Л.В.** Об одном обобщении неравенства Бернштейна/ Л.В. Тайков //Труды математического института им. В.А. Стеклова.–1965.–78.– С. 43–47.

Надійшла до редколегії 20 01.10

ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". № 6/1. 2010. Вип. 15 С. 128– 132

УДК 517.5

А. Н. Пасько

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

НАИЛУЧШЕЕ ОДНОСТОРОННЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ИНТЕГРАЛОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С УЧЁТОМ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ НА ОТРЕЗКЕ

Отримані асимптотично точні оцінки найкращих односторонніх наближень класів W_∞^r для дробового $r > 1$ з урахуванням місцезнаходження точки на відрізку.

Ключові слова: найкраще наближення, асимптотично точна оцінка, алгебраїчний поліном, клас функцій.

Получены асимптотически точные оценки наилучших односторонних приближений классов W_∞^r при дробном $r > 1$ с учётом положения точки на отрезке.

Ключевые слова: наилучшее приближение, асимптотически точная оценка, алгебраический полином, класс функций.

The asymptotic estimations for the best one-sided point-wise approximation to the classes W_∞^r $r > 1$ (in case of r is fraction) by algebraic polynomials.

Key words: the best approximation, asymptotic estimation, algebraic polynomial, function class.

Символом W_∞^r для любого $r > 0$ мы будем обозначать класс определённых на отрезке [–1; 1] функций f, заданных равенством

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{1} (x-t)_+^{r-1} \varphi(t)dt + P(x),$$

где $\Gamma(r)$ – гамма-функция Эйлера, $(x-t)_+^{r-1}$ – усечённая степенная функция, $\varphi(t)$ – произвольная измеримая на [–1; 1] функция, такая что $|\varphi(t)| \le 1$ почти всюду на [–1; 1], $P(x)$ – алгебраический многочлен степени ниже $[r]$ ($[a]$ – целая часть числа a).

В [1] установлена следующая асимптотически точная оценка наилучших приближений классов W_∞^r с учётом положения точки на отрезке.

Теорема А. *Для любого дробного числа* $r > 0$ *и любой функции* $f \in W_\infty^r$ *существует последовательность алгебраических многочленов* $P_{n,r}(x)$ *степени* $n \ge [r]$ *таких, что для всех* $x \in [-1;1]$

$$|f(x) - P_{n,r}(x)| \le \frac{K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + \frac{C_r \ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{r-1}, \quad (1)$$

где

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sin\frac{r\pi}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^{r+1}}, \qquad \text{если } 0<r<1,$$

и

$$K_r = \frac{4}{\pi}\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\right)}{(2m+1)^{r+1}}\right|, \qquad \text{если } r>1,$$

а $\gamma_r \in [0,\pi)$ *является корнем уравнения*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos\left((2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2}\right)}{(2m+1)^{r}} = 0.$$

Здесь и далее под C_r *мы понимаем постоянную, зависящую только от* r. *Конкретное же её значение в различных местах может быть разным.*

Основным результатом данной работы является аналог теоремы A для односторонних приближений.

Теорема 1. *Для любого дробного числа* $r>1$ *и любой функции* $f \in W_{\infty}^{r}$ *существует последовательность алгебраических многочленов* $P_{n,r}^{+}(x)$ *степени* $n \geq [r]$ *таких, что для всех* $x \in [-1;1]$ *выполняется неравенство*

$$0 \leq P_{n,r}^{+}(x) - f(x) \leq \frac{2K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r +$$
$$+ C_r\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{[r]}}{n^{r+\{r\}}} + \frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-1}\right), \qquad (2)$$

если $[r]$ *– чётное, и*

$$0 \leq P_{n,r}^{+}(x) - f(x) \leq \frac{2K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r +$$
$$+ C_r\left(\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{[r]-1}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)}{n^{r+\{r\}}} + \frac{\ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{r-1}\right), \qquad (3)$$

если $[r]$ *– нечётное. Здесь через* $\{r\}$ *мы обозначили дробную часть числа* r, *а* K_r *– то же, что и в теореме A.*

Отметим, что поточечные односторонние приближения классов W^r_∞ при натуральных r рассмотрены в [2].

Для доказательства теоремы нам потребуются следующие несколько лемм.

Лемма 1. Пусть β – произвольная постоянная, ω – модуль непрерывности. Тогда для любого натурального n существует алгебраический многочлен $q_n(x)$, степени не выше n такой, что для всех $x \in [-1;1]$

$$\left|\omega\left(\frac{\beta}{n}\sqrt{1-x^2}\right)-q_n(x)\right| \le C\omega\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где C – зависящая только от β постоянная.

Лемма 2. Пусть β – произвольная постоянная, ω – модуль непрерывности. Тогда для любого натурального n существует алгебраический многочлен $q_n(x)$, степени не выше n такой, что для всех $x \in [-1;1]$

$$0 \le q_n(x) - \sqrt{1-x^2}\,\omega\left(\frac{\beta}{n}\sqrt{1-x^2}\right) \le$$
$$\le C\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)\omega\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

где C – зависящая только от β постоянная.

Лемма 3. Для любого $m \in N$ и любого натурального $n \ge 2m$ существует алгебраический полином $h^+_{n,m}(x)$ степени не выше n, удовлетворяющий неравенству

$$0 \le h^+_{n,m}(x) - \left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^m \le \frac{2\pi m}{n}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^{m-1}. \qquad (4)$$

Доказательство леммы 1 и леммы 3 содержится в [3], доказательство леммы 2 – в [4].

Лемма 4. Пусть m – натуральное число, число $\alpha \in (0;1)$. Для любого натурального $n \ge 4m$ существует алгебраический полином $H^+_{n,m}(x)$ степени не выше n, удовлетворяющий неравенству

$$0 \le H^+_{n,m}(x) - \left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^{m+\alpha} \le \frac{C_m}{n^\alpha}\left(\frac{1}{n}+\sqrt{1-x^2}\right)^m. \qquad (5)$$

Доказательство. Можно доказать, что существует последовательность алгебраических полиномов $q^+_n(x)$, степени не выше n такая, что для всех $x \in [-1;1]$

$$0 \le q_n^+(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{\alpha} \le \frac{C}{n^{\alpha}}. \tag{6}$$

В этом легко убедиться с помощью рассуждений, сходных с использованными в [3] при доказательстве леммы 1. При этом, в качестве модуля непрерывности, следует взять $\omega(t) = t^{\alpha}$.

Пусть $h_{n,m}^+(x)$ – последовательность многочленов из леммы 3. Положим $H_{n,m}^+(x) = h_{[n/2],m}^+(x) q_{[n/2]}^+(x)$. Первые неравенства из (4), (6) обеспечивают выполнение первого неравенства (5). В выполнение второго из неравенств (5) несложно убедиться, расписав разность $H_{n,m}^+(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{m+\alpha}$ в виде

$$\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{m}\left(q_{[n/2]}^+(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{\alpha}\right) +$$

$$+ q_{[n/2]}^+(x)\left(h_{[n/2],m}^+(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{m}\right)$$

и оценивая каждое из слагаемых с помощью вторых неравенства из (4), (6). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Обозначим $m = [r]$, $\alpha = \{r\}$. Предположим, что m – нечётно. Перепишем неравенство (1) в виде

$$0 \le P_{n,r}(x) - f(x) + \frac{K_r}{n^m}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{m-1}\sqrt{1-x^2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{\alpha} +$$

$$+ \frac{C_r \ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{m+\alpha-1} \le$$

$$\le \frac{2K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r} + \frac{C_r \ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{r-1}. \tag{7}$$

Применив лемму 2 к модулю непрерывности $\omega(t) = t^{\alpha}$ получим, что существует последовательность алгебраических многочленов $q_n^+(x)$, такая что

$$0 \le q_n^+(x) - \sqrt{1-x^2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^{\alpha} \le C\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n^{2\alpha}} + \frac{1}{n^{2\alpha+1}}\right). \tag{8}$$

Из леммы 4 следует существование последовательности многочленов $H_{n,m}^+(x)$ такой, что

$$0 \le H^{+}_{n,m}(x) - \left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{m-1+\alpha} \le \frac{C_m}{n^\alpha}\left(\frac{1}{n} + \sqrt{1-x^2}\right)^{m-1}. \qquad (9)$$

Сложив (7) с умноженным на $K_r n^{-m}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{m-1}$ неравенством (8) и умноженным на $C_r n^{-r-1}\ln n$ неравенством (9) и выполнив несложные арифметические преобразования получим неравенство (3).

Рассмотрим случай чётного m. Перепишем неравенство (1) в виде

$$0 \le P_{n,r}(x) - f(x) + \frac{K_r}{n^m}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^m \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^\alpha +$$

$$+ \frac{C_r \ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{m+\alpha-1} \le$$

$$\le \frac{2K_r}{n^r}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + \frac{C_r \ln n}{n^{r+1}}\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{r-1}. \qquad (10)$$

Применив лемму 1 к модулю непрерывности $\omega(t) = t^\alpha$ получим, что существует последовательность алгебраических многочленов $q_n^+(x)$, такая что

$$0 \le q_n^+(x) - \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)^\alpha \le \frac{C}{n^{2\alpha}}. \qquad (11)$$

Сложив (10) с умноженным на $K_r n^{-m}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^m$ неравенством (11) и умноженным на $C_r n^{-r-1}\ln n$ неравенством (9) и выполнив несложные арифметические преобразования получим неравенство (2).

Теорема 1 доказана.

Библиографические ссылки

1. **Моторный В. П.** Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами. / В. П. Моторный // Укр. мат. журн. – 1999, т. 51, №7, С. 940–951.
2. **Пасько А. Н.** Одностороннее приближение функций класса W^r_∞ алгебраическими полиномами с учётом положения точки на отрезке. / А. Н. Пасько // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2006, Вип. 11, С. 67–70.
3. **Пасько А. Н.** Одностороннее приближение функций с учётом положения точки на отрезке. / А. Н. Пасько // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2005, Вип. 10, С. 86–91.
4. **Пасько А. Н.** Наилучшее одностороннее приближение классов WH^ω с учётом положения точки на отрезке. / А. Н. Пасько // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2005, Вип. 14, С. 99–102.

Надійшла до редколегії 17.01.10

ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". № 6/1. 2010 Вип. 15. С. 133 – 140

УДК 517.948.5

Б.И. Пелешенко

Днепропетровский государственный аграрный университет

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА, В ВИДЕ СВЕРТКИ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА

Усяка 2π-періодична функція, яка належить простору Ліпшиця Λ_b^α, може подаватися у вигляді згортки функцій із просторів Лоренця $L_{p,r}$ та $L_{b,r'}$ випадку, коли $1 \le b < \infty$, $0 < 1 - p^{-1} < \alpha < 1$ і числа r, r' підібрані відповідним чином.

Ключові слова: згортка функцій, простір Ліпшиця.

Любая 2π-периодическая функция, принадлежащая пространству Липшица Λ_b^α, представима в виде свертки функции из пространств Лоренца $L_{p,r}$ и $L_{b,r'}$ в случае, когда $1 \le b < \infty$, $0 < 1 - p^{-1} < \alpha < 1$ и числа r, r' подобраны соответствующим образом.

Ключевые слова: свёртка функций, пространство Липшица.

An any 2π-periodic function from the Lipschitz space Λ_b^α can be presented by way of the convolution of the functions from the Lorenz spaces $L_{p,r}$ and $L_{b,r'}$ in the case when $1 \le b < \infty$, $0 < 1 - p^{-1} < \alpha < 1$ and the numbers r, r' are picked in the corresponding way.

Key words: convolution of the function, Lipschitz space.

Пусть символами $L_p, L_{p,r}, \Lambda_b^\alpha$, где $1 \le p, r, b \le \infty$, $0 < \alpha < 1$, обозначаются соответственно пространства Лебега [1], Лоренца [7], Липшица [1] 2π-периодических функций. Пусть $L_{p,r} * L_{b,q}$ – класс функций, представимых в виде свертки $f(x) = (g * h)(x)$ функции $g(x) \in L_{p,r}$ и функции $h(x) \in L_{b,q}$.

Далее $f^*(t)$ обозначается невозрастающая перестановка относительно нормированной Лебеговой меры $(d\mu = dx/2\pi)$ модуля измеримой на $(0, 2\pi)$ функции $f(x)$, $f^{**} = t^{-1}\int_0^t f^*(t)dt$ и $\chi_G(t)$ – характеристическая функция множества G.

Из результатов С.Н. Бернштейна [1] в случае $p = q = 2$, Салема [9] в случае $p = 1, q = \infty$, Ароншайна, Смита и Кальдерона [8] в случае $1 < p < 2, q = p/(p-1)$ следует, что пространство Λ_∞^α содержится в $L_p * L_q$ если $\alpha > 1/q$. В [10] приведен пример функции, которая принадлежит $\Lambda_\infty^{1/q}$, но не принадлежит $L_p * L_q$. Кроме того, из [6] и [5] следует вложение пространства

Λ_b^α в L_q если $1 \le b < q < \infty$ и $\alpha > 1/b - 1/q$. В [5] построены примеры функций, принадлежащих Λ_b^α, но не принадлежащих L_q при $q = b/(1 - b\alpha)$.

В настоящей статье доказана теорема, дополняющая перечисленные результаты.

Теорема. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $b = r' = 1$ *или* $1 < b < \infty$, $1 \le r' \le \infty$; $1 < p < (1-\alpha)^{-1}$, $r = r'/(r'-1)$ *или* $p = r = 1$ *и* $r' = \infty$.

Если $f(x) \in \Lambda_b^\alpha$, *то тогда* $f(x) \in L_{p,r} * L_{b,r'}$. *Существует функция, которая принадлежит* Λ_b^α, *но не принадлежит* $L_{p,r} * L_{b,r'}$, *когда* $p = (1-\alpha)^{-1}$.

Доказательство этой теоремы основывается на следующих леммах.

Лемма 1. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \le r \le \infty$ или $p = r = 1$, $p = r = \infty$. Если $\beta > (p-1)/p$, то тогда функция $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-\beta} \cos nx \in L_{p,r}$.

Доказательство. Из теоремы Харди, Литтлвуда [7; 2] в случае $1 < p < \infty$, $1 \le r \le \infty$ получаем

$$\|g\|_{L_{p,r}} \approx \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)^{-\beta} n^{1-1/p} \right]^r \frac{1}{n} \right\}^{1/r} \approx \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[n^{1-\beta-1/p} \right]^r \frac{1}{n} \right\}^{1/r}. \qquad (1)$$

Так как по условию теоремы $1 - \beta - 1/p < 0$, то числовой ряд в (1) сходится, следовательно, норма функции $g(x)$ в $L_{p,r}$ конечна и $g(x) \in L_{p,r}$.

Пусть теперь $p = 1$, в [1] доказано, что функция $g(x) \approx \Gamma(1-\alpha) \sin \frac{\pi\beta}{2} x^{\beta-1}$.

Значит, $g(x) \in L_1$ при любом $\beta > 0$. Если $p = \infty$, то в условии теоремы $\beta > 1$. Тогда $g(x) \in L_\infty$, так как

$$\max_{x \in [0,2\pi]} |g(x)| \le \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-\beta} < \infty.$$

Далее $\sigma_n(f,x)$ обозначается $(C,1)$ среднее ряда Фурье $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$ функции $f(x)$.

Лемма 2. Пусть $0 < \alpha < 1$, $1 \le b < \infty$, $0 \le r \le b$. Если функция $f(x) \in \Lambda_b^\alpha$, то тогда $f(x) \in L_{b,r}$ и выполняется соотношение

$$\|\sigma_n(f) - f\|_{L_{b,r}} = O\left(n^{-\alpha} \log^{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}} n \right). \qquad (2)$$

Доказательство проводится по схеме доказательства обратных теорем теории приближения функций [3].

Пусть $f(x) \in \Lambda_b^\alpha$, тогда $\|\sigma_n - f\|_{L_b} = O(n^{-\alpha})$ [9]. Рассмотрим последовательность частных сумм $S_n(x)$ ряда $\sigma_1(f;x)+\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sigma_{2^{\nu+1}}-\sigma_{2^\nu}\right)$.

Применяя неравенство разных метрик для тригонометрических многочленов [4], получаем в случае $b>1$, $r\in(1,b)$ оценку

$$\|s_n\|_{L_{b,r}} \le \|\sigma_1(f)\|_{L_{b,r}} + \sum_{\nu=0}^{n}\left\|\sigma_{2^{\nu+1}}-\sigma_{2^\nu}\right\|_{L_{b,r}} \le$$

$$\le C\left\{\|\sigma_1(f)\|_{L_b} + \sum_{\nu=0}^{n}\left(1+\log\ 2^\nu\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{b}}\left\|\sigma_{2^{\nu+1}}-\sigma_{2^\nu}\right\|_{L_b}\right\} \le$$

$$\le C\left\{\|f\|_{L_b} + \sum_{\nu=0}^{n}(1+\nu\ \log\ 2)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{b}}\left\{\left\|\sigma_{2^{\nu+1}}-f\right\|_{L_b}+\left\|\sigma_{2^\nu}-f\right\|_{L_b}\right\}\right\} \le$$

$$\le C\left\{\|f\|_{L_b} + \sum_{\nu=0}^{n}(1+\nu\ \log\ 2)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{b}}2^{-\nu\alpha}\right\} < \infty .$$

Отсюда и из условия, что $\|s_n-f\|_{L_b}\to 0$ при $n\to\infty$, стандартными рассуждениями получаем, что $\|s_n-f\|_{L_{b,r}}\to 0$ при $n\to\infty$ и $f(x)\in L_{b,r}$.

Далее имеем

$$\left\|\sigma_{2^m}(f)-f\right\|_{L_{b,r}} \le \sum_{\nu=m}^{\infty}\left\|\sigma_{2^{\nu+1}}-\sigma_{2^\nu}\right\|_{L_{b,r}} \le$$

$$\le C\sum_{\nu=m}^{\infty}\left(1+\log\ 2^{\nu+1}\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{b}}\left\|\sigma_{2^{\nu+1}}-\sigma_{2^\nu}\right\|_{L_b} \le$$

$$\le C\sum_{\nu=m}^{\infty}\left(1+\log\ 2^{\nu+1}\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{b}}\left\{\left\|\sigma_{2^{\nu+1}}-f\right\|_{L_b}+\left\|\sigma_{2^\nu}-f\right\|_{L_b}\right\} \le$$

$$\le C\sum_{\nu=m}^{\infty}\left(1+\log\ 2^{\nu+1}\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{b}}2^{-\nu\alpha} \le$$

$$\le C\left(1+(m+1)\ \log\ 2\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{b}}2^{-m\alpha}.$$

В случае $b\ge 1$, $0<r<1$ воспользовавшись неравенством

$$\|s_n\|_{L_{b,r}}^r \le \|\sigma_1(f)\|_{L_{b,r}}^r + \sum_{\nu=0}^{n}\left\|\sigma_{2^{\nu+1}}-\sigma_{2^\nu}\right\|_{L_{b,r}}^r ,$$

получим, что

$$\|s_n\|_{L_{b,r}} \le C\left\{\|f\|_{L_{b,r}}^r + \sum_{\nu=0}^{n}(1+(\nu+1)\ \log\ 2)^{1-r/b}2^{-\nu\alpha r}\right\}^{\frac{1}{r}}$$

и $\|s_n-f\|_{L_{b,r}}\to 0$ при $n\to\infty$.

Аналогично получаем оценку

$$\left\|\sigma_{2^m}(f)-f\right\|_{L_{b,r}} \le \left\{\sum_{\nu=m}^{\infty}\left\|\sigma_{2^{\nu+1}}-\sigma_{2^\nu}\right\|_{L_{b,r}}^{r}\right\}^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\le C\left\{\sum_{\nu=m}^{\infty}\left(1+\log\ 2^{\nu+1}\right)^{1-\frac{r}{b}}\left\|\sigma_{2^{\nu+1}}-\sigma_{2^\nu}\right\|_{L_b}^{r}\right\}^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\le C\left\{\sum_{\nu=m}^{\infty}\left(1+\log\ 2^{\nu+1}\right)^{1-\frac{r}{b}}2^{-\nu\alpha r}\right\}^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\le C\left(1+m\ \log\ 2\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{b}}2^{-m\alpha}.$$

Выбрав m так, чтобы выполнялось неравенство $2^m \le n \le 2^{m+1}$, получаем доказательство соотношения (2).

Лемма 3. Пусть $0<\beta<\alpha<1$, $0\le\alpha<\infty$, $b=1$, $(1+\alpha-\beta)^{-1}<r\le 1$ или $1<b<\infty$, $0<r\le\infty$. Если функция $f(x)\in L_{b,r}$ и выполняется соотношение

$$\left\|\sigma_n-f\right\|_{L_{b,r}}=O\left(n^{-\alpha}\log^{\alpha}n\right),$$

тогда ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\left(|n|+1\right)^{\beta}\hat{f}(n)e^{inx}$ является рядом Фурье некоторой функции $h(x)\in\Lambda_{b,r}$.

Доказательство леммы проводится методом, используемым в [9]. Обозначим $\mu_k=\left(|k|+1\right)^{\beta}$ и через $\tau_n(x)$ $(C,1)$ – средние ряда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\mu_k\hat{f}(k)e^{ikx}$.

Применяя два раза преобразование Абеля, получаем

$$\tau_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^2\mu_k(k+1)\sigma_k(f;x)-$$

$$-(n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^2\mu_k(k+1)k\sigma_k(f;x)+$$

$$+2(n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^2\mu_{k+1}(k+1)\sigma_k(f;x)+\mu_n\sigma_n(f;x),$$

где $\Delta\mu_k=\mu_k-\mu_{k+1}$, $\Delta^2\mu_k=\Delta\mu_k-\Delta\mu_{k+1}$.

Заменив $\sigma_k(f;x)$ на $\sigma_k(f;x)-f$, имеем

$$\tau_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^2\mu_k(k+1)\left(\sigma_k(f;x)-f(x)\right)-$$

$$-(n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^2\mu_k(k+1)k\left(\sigma_k(f;x)-f(x)\right)+$$

$$+2(n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^2\mu_{k+1}(k+1)(\sigma_k(f;x)-f(x))+$$

$$+\mu_n(\sigma_n(f;x)-f(x))+\mu_0 f(x).$$

Так как $\Delta\mu_k = O\left(k^{\beta-1}\right)$ и $\Delta^2\mu_k = O\left(k^{\beta-2}\right)$, то

$$\Delta^2\mu_k(k+1)\left\|\sigma_k(f)-f\right\|_{L_{b,r}} = O\left(k^{\beta-1-\alpha}\log^a n\right),$$

$$\Delta^2\mu_k(k+1)k\left\|\sigma_k(f)-f\right\|_{L_{b,r}} = O\left(k^{\beta-\alpha}\log^a n\right),$$

$$\Delta^2\mu_{k+1}(k+1)\left\|\sigma_k(f)-f\right\|_{L_{b,r}} = O\left(k^{\beta-\alpha}\log^a n\right),$$

$$\mu_n\left\|\sigma_n(f)-f\right\|_{L_{b,r}} = O\left(n^{\beta-\alpha}\log^a n\right).$$

Из этих соотношений следует, что для заданных в условии теоремы параметров квазинормы $\|\tau_n\|_{L_{b,r}}$ конечны и равномерно ограничены для всех n. Тогда $\tau_n(x)$ сходится в пространстве $L_{b,r}$ к некоторой функции $h(x)\in\Lambda_{b,r}$ и $\hat{h}(n)=(|n|+1)\hat{f}(n)$ для всех $n\in Z$.

Лемма 4. Пусть $b=r=r'=1$, $1<p\le 2$, либо $1<b\le 2$, $p=r=r'=1$, либо $1<b,\ p\le 2$, $1\le r\le\infty$, $r'=r/(r-1)$. Если функция

$$f(x)=(g*h)(x)\in L_{p,r}*L_{b,r'},$$

тогда имеет место неравенство

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(k)\right|k^{1-1/p-1/b}\le C\|g\|_{L_{p,r}}\|h\|_{L_{b,r}},$$

где в сумме $k\ne 0$ и C не зависит от $f(x)$.

Доказательство. Пусть $1<p,\ b\le 2$, $p'=p/(p-1)$, $b'=b/(b-1)$ $g(x)\in L_{p,r}$ и $h(x)\in L_{b,r'}$, тогда из неравенства Пэли [7; 2] имеем:

$$\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\hat{g}(k)\right|k^{1/p'}\right]^r\frac{1}{n}\right\}^{\frac{1}{r}}\le C\|g\|_{L_{p,r}},$$

$$\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left|\hat{h}(k)\right|k^{1/b'}\right]^{r'}\frac{1}{n}\right\}^{\frac{1}{r'}}\le C\|h\|_{L_{b,r'}}.$$

Далее применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(k)\right|n^{1-1/p-1/b}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat{g}(n)\right|\left|\hat{h}(n)\right|n^{1/p'+1/b'-1}\le$$

$$\le C\|g\|_{L_{p,r}}\|h\|_{L_{b,r'}}.$$

В случае $b=r=r'=1$, $1<p\le 2$ имеем оценку

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat f(n)\right|n^{-1/p}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat g(n)\right|\left|\hat h(n)\right|n^{1/p'-1}\le$$
$$\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\hat g(n)\right|n^{-1/p'-1}\sup_k\left|\hat h(n)\right|\le C\|g\|_{L_{p,1}}\|h\|_{L_1}.$$

Аналогично доказывается неравенство и в случае $p=r=r'=1$, $1<b\le 2$.

Лемма 5. Пусть $1<b,\ p<\infty$, $b^{-1}+p^{-1}>1$, $1<r<\infty$, $r'=r/(r-1)$ и последовательность чисел $\{c_k\}$ убывает и стремится к нулю при $n\to\infty$. Если функция $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\cos kx$ принадлежит $L_{p,r}*L_{b,r'}$, то тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n n^{1-1/p-1/b}$ сходится.

Доказательство. Пусть $f(x)$ представима в виде $(g*h)(x)$ где $g(x)\in L_{p,r}$ и $h(x)\in L_{b,r'}$. Далее полагаем $\tilde h(x)=h(x)\chi_{[0,4\pi]}(x)$, $\tilde g(x)=g(x)\chi_{[0,2\pi]}(x)$ и $\tilde f(x)=(\tilde h\cdot\tilde g)(x)$. Из неравенства О'Нейла [7] следует, что

$$\int_0^1 t^{\frac{1}{q}}\tilde f^{**}(t)t^{-1}dt=\int_0^1 t^{\frac{1}{q}}\left(\tilde h\cdot\tilde g\right)^{**}(t)t^{-1}dt\le$$
$$\le\int_0^1 t^{\frac{1}{q}}\tilde g^{**}(t)\tilde h^{**}(t)t^{-1}dt+\int_0^1 t^{\frac{1}{q}}\left[\int_t^1\tilde g^{*}(z)\tilde h^{*}(z)dz\right]\frac{dt}{t}.$$

Применяя ко второму интегралу, стоящему в правой части, неравенство Харди [7; 2] получаем для чисел q, удовлетворяющих соотношению $1/q=1/p+1/b-1$, неравенство

$$\int_0^1 t^{\frac{1}{q}}\tilde f^{**}(t)\ t^{-1}dt\le C\int_0^1 t^{\frac{1}{q}}\tilde g^{**}(t)\tilde h^{**}(t)dt.\qquad(3)$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера для оценки правой части в (3) и соотношениями $\left(f\chi_{[0,2\pi]}\right)^{**}(t)\le\tilde f^{**}(t)$, $\left(g\chi_{[0,2\pi]}\right)^{**}(t)\le g^{**}(t)$, $\tilde h^{**}(t)\le 3h^{**}(t)$ при $0\le t\le 1$, имеем

$$\|f\|_{L_{q,1}}\le\int_0^1 t^{\frac{1}{q}+1}\tilde f^{**}(t)\ t^{-1}dt\le$$
$$\le C\left\{\int_0^1\left[t^{\frac{1}{p}}\tilde g^{**}(t)\right]^r t^{-1}dt\right\}^{\frac{1}{r}}\left\{\int_0^1\left[t^{\frac{1}{q}+1-\frac{1}{p}}\tilde h^{**}(t)\right]^{r'}t^{-1}dt\right\}^{\frac{1}{r'}}\le C\|g\|_{L_{p,r}}\|h\|_{L_{b,r'}}.\qquad(4)$$

По теореме Харди-Литллвуда [7; 2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{1-1/p-1/b} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{1/q'-1} \le C\|f\|_{L_{q,1}}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) получаем утверждение леммы.

Замечание. Лемма 5 допускает обращение в случае, когда $r = 1 + p'/b'$, $r' = 1 + b'/p'$. Действительно пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{1-1/p-1/b}$ сходится, тогда по теореме Харди, Литллвуда $f(x) \in L_{q,1}$. Рассмотрим функции $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\frac{1}{r}} \cos\ nx$ и $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{\frac{1}{r'}} \cos\ nx$. Так как в силу выбора r и r' ряды $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{\frac{r}{p'}-1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{\frac{r'}{b'}-1}$ совпадают с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{1-1/p-1/b}$, то они сходятся. По условию леммы последовательность чисел $\{c_k\}$ убывает и стремится к нулю при $n \to \infty$, а $1 - 1/p - 1/b < 0$, применяя снова теорему Харди, Литллвуда, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{\frac{r}{p'}-1} \approx \|g\|_{L_{p,r}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{\frac{r}{b'}-1} \approx \|h\|_{L_{p,r'}}.$$

Поскольку $\hat{f}(k) = c_k^{\frac{1}{r}} c_k^{\frac{1}{r'}} = \hat{g}(k)\hat{h}(k)$, то $f(x) = (g*h)(x) \in L_{p,r} * L_{b,r'}$.

Доказательство теоремы. Пусть $f(x) \in \Lambda_b^{\alpha}$ и число β удовлетворяет неравенству $1 - 1/p < \beta < \alpha$. Из лемм 2, 3 следует, что функция $h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k|+1)^{\beta} \hat{f}(k) e^{ikx} \in L_{b,r'}$, а из леммы 1 получаем, что $g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k|+1)^{-\beta} e^{ikx}$ принадлежит $L_{p,r}$. Тогда $\hat{f}(n) = \hat{h}(n) \cdot \hat{g}(n)$ для каждого $n \in Z$ и значит $f(x) \in L_{p,r} * L_{b,r'}$.

Для доказательства второй части теоремы используем функцию

$$f_0(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\ nx,$$

где $a_n = \left\{ \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{(\nu - n + 1)\left(\nu^{-\alpha b} - (\nu+1)^{-\alpha b}\right)}{(\nu+1)^b} \right\}^{\frac{1}{b}} \approx \frac{1}{(n+1)^{\alpha+1-1/b}}$.

Таким способом в [5] конструировались контрпримеры в более общей ситуации, из этой работы следует, что $f_0(x)$ принадлежит Λ_b^{α}. В то же время ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{1/p'-1/b} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-\alpha-1+1/b} n^{1/p'-1/b}$$

расходится, так как $\alpha = 1/p'$. Из лемм 4, 5 следует, что $f_0(x) \notin L_{p,r} * L_{b,r'}$. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды/ А. Зигмунд – М., Т.1, 1978. – 468 с.
2. **Крейн С.Г.** Интерполяция линейных операторов. / С.Г. Крейн, Ю.И. Петунии, Е.М. Семенов – М., 1978. – 400 с.
3. **Никольский С.М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения / С.М. Никольский – М., 1977. – 455 с.
4. **Пелешенко Б.И.** Неравенства разных метрик для тригонометрических многочленов в F–пространствах / Б.И. Пелешенко // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – 2003. – С. 168–177.
5. **Тиман М.Ф.** О вложении $L_p^{(k)}$ классов функций / М.Ф. Тиман // Изв. вузов. Сер. Матем. – 1974, №10. – С.61–74.
6. **Ульянов П.Л.** Вложения некоторых классов функций H_p^w / П.Л. Ульянов // ИАН СССР. Сер.матем. – 1968. – Т. 32, № 3. – С.649-686.
7. **Bennett C.** On Lorentz - Zygmund spaces/ C. Bennett, K. Rudnik// – Warszawa, 1980. – 73 p.
8. **Hahn L.-S.** On multipliers of p- integrable functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967, – 128. – P.321–335.
9. **Salem R.** Sur les trancformations des series de Fourier // Fund. Math. – 1939. – 33. – P.108 – 114.
10. **Uno Y.** Lipschitz Functions and Convolution // Proc. Japan Acad. – 1974. – 50. – P.785–788.

Надійшла до редколегії 20.03.10

УДК 512.544

О.О. Пипка, В.А. Чупордя
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ДЕЯКІ ТИПИ АНТИНОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП

Підгрупа *H* групи *G* називається пронормальною в *G*, якщо для довільного $g \in G$ підгрупи *H* і H^g спряжені у породженій ними групі $<H, H^g>$. Підгрупа *H* групи *G* називається контранормальною, якщо її нормальне замикання співпадає з усією групою, тобто $H^G = G$. Підгрупу *H* групи *G* будемо називати наближено пронормальною в *G*, якщо нормалізатор $N_K(H)$ є контранормальним у довільній підгрупи *K*, що містить *H*. Отримано приклади наближено пронормальних підгруп, які не є пронормальними.

Ключові слова: пронормальна підгрупа, наближено пронормальна підгрупа, абнормальна підгрупа.

Подгруппа *H* группы *G* называется пронормальной в *G*, если для произвольного $g \in G$ подгруппы *H* и H^g сопряжены в порожденной ими группе $<H, H^g>$. Подгруппа *H* группы *G* называется контранормальной, если ее нормальное замыкание совпадает со всей группой, то есть $H^G = G$. Подгруппу *H* группы *G* будем называть приближенно пронормальной в *G*, если нормализатор $N_K(H)$ является контранормальным в произвольной подгруппе *K*, которая содержит *H*. Получены примеры приближенно пронормальных подгрупп, которые не являются пронормальными.

Ключевые слова: пронормальная подгруппа, приближенно пронормальная подгруппа, абнормальная подгруппа.

A subgroup *H* is called a pronormal subgroup in a group *G* if for any $g \in G$ subgroups *H* and H^g are conjugated in $<H, H^g>$. A subgroup *H* is called a contranormal subgroup in a group *G* if $H^G = G$. A subgroup *H* is called a weak pronormal subgroup in a group *G* if $N_K(H)$ is contranormal in any subgroup *K* witch contains *H*. It was obtained the examples of non pronormal but weak pronormal subgroups.

Key words: pronormal subgroup, weak pronormal subgroup, abnormal subgroup.

Підгрупа *H* групи *G* називається пронормальною в *G*, якщо для довільного $g \in G$ підгрупи *H* і H^g спряжені в групі $<H, H^g>$. Термін «пронормальна підгрупа» був введений Ф. Холлом більше тридцяти років тому, а перші результати, пов'язані з пронормальними підгрупами, з'явились у роботі Д. Роуса [4].

Наступним типом антинормальних підгруп є контранормальні. Підгрупа *H* групи *G* називається контранормальною, якщо її нормальне замикання співпадає з усією групою, тобто $H^G = G$. Підгрупу *H* групи *G* будемо називати наближено пронормальною, якщо нормалізатор $N_K(H)$ є контранормальним у довільній для підгрупи *H* надгрупі *K*, інакше кажучи $(N_K(H))^K = K$. Наближено пронормальні підгрупи є узагальненням пронормальних підгруп. Тому досить природним є пошук таких підгруп, які б були наближено пронормальними, але б не були пронормальними.

Пошук таких прикладів тісно пов'язаний із розв'язністю групи. Відповідь на питання про збіг вище зазначених типів підгруп у випадку розв'язних груп дає наступна теорема.

Теорема. *Якщо G – скінченна розв'язна група, то будь-яка наближено пронормальна підгрупа є також і пронормальною.*

Доведення. Як відомо, у скінченній групі підгрупа $H \le G$ є пронормальною тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умові Фраттіні, тобто якщо для довільних підгруп K і L, таких що $H \le K \trianglelefteq L$, виконується рівність $L = KN_L(H)$.

Нехай H – наближено пронормальна підгрупа в G. Розглянемо такі підгрупи K і L, що $H \le K \trianglelefteq L$. Оскільки група G розв'язна, то можна записати $H \le K = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq K_2 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_n = L$, де фактори K_{j+1}/K_j, $j = \overline{1, n-1}$ – абелеві. Оскільки H – наближено пронормальна, то $N_{K_1}(H)$ контранормальний у K_1, звідки отримуємо, що $N_{K_1}(H)$ не є підгрупою K_0.

Розглянемо фактор $N_{K_1}(H)K_0/K_0$. Це неодинична контранормальна група. Оскільки K_1/K_0 – абелевий, то $N_{K_1}(H)K_0/K_0$ є нормальним в K_1/K_0, а отже $N_{K_1}(H)K_0/K_0 = K_1/K_0$. Таким чином, отримали, що $K_1 = N_{K_1}(H)K_0$.

Розглянемо тепер $H \le K_1 \trianglelefteq K_2$. Використовуючи попередні міркування, маємо

$$K_2 = N_{K_2}(H)K_1 = N_{K_2}(H)N_{K_1}(H)K_0 = N_{K_2}(H)K_0,$$

тобто $K_2 = N_{K_2}(H)K_0$.

Продовжуючи далі цей ланцюг, одержимо, що $L = N_L(H)K$, а отже H має властивість Фраттіні, що говорить про її пронормальність. Теорему доведено.

Отже, пошук наближено пронормальних підгруп, які не є пронормальними, слід проводити лише серед нерозв'язних груп. У [1] наведений наступний результат: серед груп S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 та $GL_2(5)$, $GL_2(7)$, $GL_3(3)$ вище зазначеного типу підгруп немає, тобто будь-яка наближено пронормальна підгрупа є одночасно і пронормальною.

За допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP аналогічні дослідження було проведено також у групах $GL_2(11)$, $GL_2(13)$, $GL_2(17)$, $GL_2(19)$, $GL_3(2)$ та $GL_4(2)$. Відмітимо, що пошук проводився як серед самих груп, так і серед нерозв'язних підгруп. Проте збіг наближено пронормальних та пронормальних підгруп є в кожній із зазначених груп.

Відмітимо, що при збільшенні порядку групи пошук цього прикладу ускладнюється великим часом виконання програми. Тому потрібно було розглядати інші типи груп.

Відповідний приклад було знайдено у спеціальній унітарній групі $SU(3,3)$. Виявилось, що в $SU(3,3)$ є дві (з точністю до спряженості) наближено пронормальних підгрупи, які не задовольняють умові пронормальності. Ці групи наведені нижче:

$$H_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a^4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^4 \\ 0 & a^4 & 0 \\ a^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a^2 & a^5 \\ a^5 & 0 & a^5 \\ a & a^6 & a^5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ a^2 & 0 & a^6 \\ 1 & a^6 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$H_2=\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a^4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^4 \\ 0 & a^4 & 0 \\ a^4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a^2 & a^5 \\ a^5 & 0 & a^5 \\ a & a^6 & a^5 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

де a – породжуючий елемент мультиплікативної групи поля $GF(9)$.

Порядок першої підгрупи – 24, другої – 12. Перша підгрупа є ізоморфною до симетричної групи S_4, а друга – до групи A_4. Дійсно, для підгрупи S_4 маємо: $S_4 = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2) \rangle$, а підгрупу H_1 можна також записати за допомогою двох породжуючих елементів:

$$H_1=\left\langle \begin{pmatrix} a^4 & a^3 & 1 \\ a^5 & 0 & a^5 \\ 1 & a^3 & a^4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a^6 & 1 \\ a^6 & 0 & a^2 \\ 1 & a^2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ізоморфізм між групами можна встановити наступним чином:

$$(1234) \to \begin{pmatrix} a^4 & a^3 & 1 \\ a^5 & 0 & a^5 \\ 1 & a^3 & a^4 \end{pmatrix},\ (12) \to \begin{pmatrix} 1 & a^6 & 1 \\ a^6 & 0 & a^2 \\ 1 & a^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно, для A_4 маємо: $A_4 = \langle (1\ 2\ 3), (2\ 3\ 4) \rangle$, в свою чергу H_2 можна подати у вигляді:

$$H_2=\left\langle \begin{pmatrix} a^7 & a^7 & a^7 \\ a^2 & 0 & a^6 \\ a^3 & a^7 & a^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^5 & a^6 & a \\ a^5 & 0 & a^5 \\ a^5 & a^2 & a \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Тоді ізоморфізм можна встановити наступним чином:

$$(123) \to \begin{pmatrix} a^7 & a^7 & a^7 \\ a^2 & 0 & a^6 \\ a^3 & a^7 & a^3 \end{pmatrix},\ (234) \to \begin{pmatrix} a^5 & a^6 & a \\ a^5 & 0 & a^5 \\ a^5 & a^2 & a \end{pmatrix}$$

Як було вище зазначено, ці підгрупи знайдені з точністю до спряженості. Загальна ж кількість підгруп такого типу в $SU(3,3)$ – 504. Що стосується самої групи $SU(3,3)$, порядок якої 6048, то вона містить 36 класів спряжених підгруп (при цьому загальна кількість підгруп – 5150). З них 23 класи (2392 підгрупи) є пронормальними. Відповідно, наближено пронормальних – 25 класів (2896 підгруп).

Відмітимо деякі властивості знайдених підгруп. Незважаючи на те, що пошук здійснювався у нерозв'язній групі, самі вони є розв'язними. Також вони не є абелевими і не задовольняють умовам нільпотентності.

Цей приклад є досить важливим, оскільки він дає можливість вивчати наближено пронормальні підгрупи як одне з узагальнень пронормальних підгруп.

Одним з типів підгруп, які тісно пов'язані з пронормальними підгрупами, є абнормальні підгрупи. Підгрупа H групи G називається абнормальною в G, якщо виконується включення $g \in \langle H, H^g \rangle$ для будь-якого

$g \in G$. Цей тип підгруп уперше розглянув Ф. Холл [3], проте термін «абнормальна підгрупа» був введений Р. Картером [2].

Як відомо, кожна нормальна та абнормальна підгрупа є також і пронормальною. Обернене твердження в загальному випадку не має місця. Одним із прикладів є загальна лінійна група $GL_2(3)$. За допомогою системи GAP можна показати, що $GL_2(3)$ містить пронормальні підгрупи, які не задовольняють умовам нормальності або абнормальності. Список таких підгруп наведений нижче:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \left\langle \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & b \end{pmatrix} \right\rangle,$$

де b – породжуючий елемент мультиплікативної групи поля $GF(3)$. Усі ці підгрупи знайдені з точністю до спряженості.

Цікавим є питання про структуру груп, в яких пронормальні підгрупи можуть бути лише двох типів: нормальними або абнормальними. Після дослідження було отримано наступний результат: кількість пронормальних підгруп, які задовольняють умовам нормальності або абнормальності, у порівнянні із загальною кількістю пронормальних підгруп є невеликою, що наштовхує на подальші дослідження, результатом яких може стати опис таких груп. Співвідношення між кількостями цих типів підгруп наведені нижче (тут вказані загальні кількості підгруп з відповідними властивостями, а не лише класів спряжених підгруп):

- $GL_2(3)$ – містить 12 пронормальних підгруп з умовами нормальності або абнормальності з 34 пронормальних підгруп;
- $GL_2(5)$ – 42 з 256;
- $GL_2(7)$ – 65 з 794;
- $GL_2(11)$ – 361 з 3150;
- $GL_2(13)$ – 559 з 7 044;
- $GL_2(17)$ – 725 з 11 704;
- $GL_2(19)$ – 2 103 з 24 371;
- $GL_3(2)$ – 73 з 158;
- $GL_3(3)$ – 1 006 з 8 432;
- $GL_4(2)$ – 5 569 з 16 046.

Бібліографічні посилання

1. **Чупордя В.А.** Про підгрупи близькі до пронормальних / В.А. Чупордя // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2009, Вип. 14. – С. 140 – 142.
2. **Carter R.W.** Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups. / R.W. Carter // Math. Z. – 1961. – № 75. – P. 136 – 139.
3. **Hall P.** On system normalizers of soluble groups. / P. Hall // Ibid. – 1937. – № 43. – P. 507 – 528.
4. **Rose J.S.** Finite soluble groups with pronormal system normalizers / J.S. Rose // Proc. London Math. Soc. – 1967. – № 17. – P. 447 – 469.

Надійшла до редколегії 30 03 10

ISSN N 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". N 6/1/ 2010. Вип. 15. С. 145 – 150

УДК 517.5

Д.С. Скороходов

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ КЛАССОВ КРАТНО МОНОТОННЫХ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ФУНКЦИЙ

Знайдено точні константи в адитивних нерівностях типу Колмогорова на класі кратно монотонних на скінченному відрізку функцій.

Ключові слова: нерівності типу Колмогорова, кратно монотонні функції.

Найдены точные постоянные в аддитивных неравенствах типа Колмогорова на классе кратно монотонных на конечном отрезке функций.

Ключевые слова: неравенства типу Колмогорова, кратно монотонные функции.

We solve the problem about exact constants in additive Kolmogorov-type inequalities on the class of multiply monotonic functions, defined on a finite interval.

Key words: Kolmogorov type inequalities, multiply monotone functions.

Пусть L_p, $1 \le p \le \infty$, – пространство измеримых функций $x:[0,1] \to \mathbf{R}$ с нормой

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\int\limits_0^1 |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & \text{если} \quad 1 \le p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}\{|x(t)| : t \in [0,1]\}, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Через L_p^r, $r \in \mathbf{N}$, обозначим множество всех функций $x:[0,1] \to \mathbf{R}$, для которых существует и абсолютно непрерывна на $[0,1]$ производная $x^{(r-1)}$ ($x^{(0)} := x$), и $x^{(r)} \in L_p$.

Пусть $1 \le q,s \le \infty$ и $k \in \mathbf{N}$, $1 \le k \le r-1$. Неравенства следующего вида

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le A \|x\|_p + B \left\| x^{(r)} \right\|_s \tag{1}$$

часто называются аддитивными неравенствами типа Колмогорова. Сформулируем задачу об отыскании множества точных постоянных в неравенствах вида (1).

Задача 1. Найти все пары неотрицательных чисел (A,B) таких, что:

1) для любой функции $x \in L_s^r$ имеет место неравенство (1);

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $x_\varepsilon \in L_s^r$, для которой

$$\left\| x_\varepsilon^{(k)} \right\|_q > A \|x_\varepsilon\|_p + (B - \varepsilon) \left\| x_\varepsilon^{(r)} \right\|_s .$$

На данное время не известно полных (в смысле произвольности порядков k промежуточной и r старшей производных) решений задачи 1. Частные решения этой задачи 1 известны в следующих ситуациях.

1) $p=q=s=\infty$, $r=2$ – Э. Ландау [10];

2) $p=q=s=\infty$, $r=3$ – А.И. Звягинцев, А. Лепин [3] и М. Сато [12];

3) $p=s=\infty$, $1\le q\le\infty$, $r=2$ – Б. Боянов и Н. Найденов [7], Н. Найденов [11];

4) $p=q=\infty$, $1\le s\le\infty$, $r=2$ – Ю.В. Бабенко [2].

Обзор других известных результатов по решению задачи 1, а также смежных вопросов можно найти, например, в книге [1] и статье [13].

Представляет также интерес изучение задачи 1 и на более узких, чем L_s^r, классах функций. Имеющиеся в этом направлении результаты можно найти, например, в работах [9,6].

В данной работе мы будем рассматривать задачу 1 на классе r-кратно монотонных на отрезке $[0,1]$ функций. Напомним, что функция $x:[0,1]\to\mathbf{R}$ называется r-*кратно монотонной* на $[0,1]$, если существует производная $x^{(r)}$, и $x^{(j)}(t)\ge 0$ для всех j=0,...,r и $t\in[0,1]$. Через MM^r обозначим множество всех r-кратно монотонных на $[0,1]$ функций.

Рассуждения, которые будут применяться при доказательстве основного утверждения данной работы, позволяют рассматривать задачу 1 на классе MM^r в несколько более общей постановке. Приведем необходимые для этого определения идеальных банаховых решеток и ассоциированных к ним пространств.

Следуя [4;5], функциональное банахово пространство E с нормой $\|\cdot\|_E$ будем называть *идеальной банаховой решеткой (идеальной решеткой)*, если из справедливости неравенства $|f(t)|\le|g(t)|$ для всех $t\in[0,1]$, где $f(t)$ – измеримая функция и $g\in E$, вытекает тот факт, что $f\in E$ и $\|f\|_E\le\|g\|_E$.

Наименьшее измеримое множество, вне которого все функции из E совпадают с нулем, называется *носителем* идеальной решетки E.

Ассоциированным пространством E^1 к идеальной решетке E называется множество измеримых функций $f(t)$, носитель которых содержится в носителе E, для которых

$$\|f\|_{E^1}=\sup_{\|g\|_E=1}\int_0^1 f(t)g(t)dt<\infty.$$

Идеальными решетками являются, например, все пространства L_s, $1\le s\le\infty$, и классы Орлича L_M (см. [4]). Ассоциированными к ним пространствами будут соответственно пространства $L_{s'}$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$, и сопряженные классы Орлича L_M^* соответственно.

Через L_E^r обозначим пространство функций $x:[0,1]\to\mathbf{R}$, имеющих абсолютно непрерывную на $[0,1]$ производную $x^{(r-1)}$, и таких, что $x^{(r)}\in E$. Теперь мы готовы дать обобщенную постановку задачи 1 на классе MM^r.

Задача 2. Найти множество $\Gamma_{p,q,E}^{k,r}\left(MM^r\right)$ всех пар неотрицательных чисел (A,B) таких, что:

1) для любой функции $x\in L_E^r\cap MM^r$ имеет место неравенство

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q\le A\|x\|_p+B\left\|x^{(r)}\right\|_E;$$

2) для любого $\varepsilon>0$ найдется функция $x_\varepsilon\in L_E^r\cap MM^r$, для которой

$$\left\|x_\varepsilon^{(k)}\right\|_q>A\|x_\varepsilon\|_p+(B-\varepsilon)\left\|x_\varepsilon^{(r)}\right\|_E.$$

Сформулируем основное утверждение данной работы.

Теорема 1. *Пусть* E *– идеальная решетка,* $p,q\in\{1,\infty\}$ *и* $k,r\in\mathbf{N}$, $1\le k\le r-1$. *Пусть также* $\Delta_A\in E^1$ *для всех* $A>0$, *где*

$$\Delta_A(t)=\max\left\{\frac{(1-t)^{r-k-1+1/q}}{(r-k-1+1/q)!}-A\frac{(1-t)^{r-1+1/p}}{(r-1+1/p)!},0\right\},\quad t\in[0,1].$$

Тогда

$$\Gamma_{p,q,E}^{k,r}\left(MM^r\right)=\left\{(A,B):A\ge\frac{(r-1+1/p)!}{(r-k-1+1/q)!},B=\|\Delta_A\|_{E^1}\right\}.$$

Доказательство. Через π_{r-1}^{r-1} обозначим множество всех алгебраических многочленов степени не выше $r-1$, принадлежащих множеству MM^r. Согласно лемме 2 из [6], для любого многочлена $P\in\pi_{r-1}^{r-1}$ имеет место следующее неравенство:

$$\left\|P^{(k)}\right\|_q\le\frac{(r-1+1/p)!}{(r-k-1+1/q)!}\|P\|_p,\tag{2}$$

которое обращается в равенство для многочлена $P(t)=t^{r-1}$. Очевидно, что $P^{(r)}(t)\equiv0$ для любого $P\in\pi_{r-1}^{r-1}$. Поэтому, множество $\Gamma_{p,q,E}^{k,r}\left(MM^r\right)$ не содержит те пары неотрицательных чисел (A,B), для которых $A < \dfrac{(r-1+1/p)!}{(r-k-1+1/q)!}$.

Пусть теперь число $A \ge \dfrac{(r-1+1/p)!}{(r-k-1+1/q)!}$ произвольно. Для произвольной функции $x \in MM^r$ запишем формулу Тейлора в точке t=0 с остаточным членом в интегральной форме

$$x(t) = P_{r-1}(t) + \int_0^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} x^{(r)}(u)du,$$

где $P_{r-1}(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \dfrac{x^{(k)}(0)}{k!} t^k$. Несложно проверить, что

$$\|x\|_\infty = \|P_{r-1}\|_\infty + \int_0^1 \frac{(1-u)^{r-1}}{(r-1)!} x^{(r)}(u)du \quad \text{и} \quad \|x\|_1 = \|P_{r-1}\|_1 + \int_0^1 \frac{(1-u)^{r}}{r!} x^{(r)}(u)du.$$

Поэтому, для $p,q \in \{1,\infty\}$

$$\|x\|_p = \|P_{r-1}\|_p + \int_0^1 \frac{(1-u)^{r-1+1/p}}{(r-1+1/p)!} x^{(r)}(u)du \tag{3}$$

и

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q = \left\|P_{r-1}^{(k)}\right\|_q + \int_0^1 \frac{(1-u)^{r-k-1+1/q}}{(r-k-1+1/q)!} x^{(r)}(u)du. \tag{4}$$

Применяя равенства (3) и (4), неравенство (2), используя неотрицательность производной $x^{(r)}$ и определение ассоциированного пространства, получим:

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q - A\|x\|_p =$$

$$= \left\|P_{r-1}^{(k)}\right\|_q - A\|P_{r-1}\|_p + \int_0^1 \left[\frac{(1-u)^{r-k-1+1/q}}{(r-k-1+1/q)!} - A\frac{(1-u)^{r-1+1/p}}{(r-1+1/p)!}\right] x^{(r)}(u)du \le$$

$$\le \left(\frac{(r-1+1/p)!}{(r-k-1+1/q)!} - A\right)\|P_{r-1}\|_p + \int_0^1 \left[\frac{(1-u)^{r-k-1+1/q}}{(r-k-1+1/q)!} - A\frac{(1-u)^{r-1+1/p}}{(r-1+1/p)!}\right] x^{(r)}(u)du \le$$

$$\le \int_0^1 \left[\frac{(1-u)^{r-k-1+1/q}}{(r-k-1+1/q)!} - A\frac{(1-u)^{r-1+1/p}}{(r-1+1/p)!}\right] x^{(r)}(u)du \le \int_0^1 \Delta_A(u) x^{(r)}(u)du \le$$

$$\le \|\Delta_A\|_{E^1} \left\|x^{(r)}\right\|_E.$$

Таким образом, мы доказали, что если $(A,B) \in \Gamma_{p,s,E}^{k,r}\left(MM^r\right)$, то

$A \ge \frac{(r-1+1/p)!}{(r-k-1+1/q)!}$ и $B \le \|\Delta_A\|_{E^1}$. Покажем теперь, что на самом деле $B = \|\Delta_A\|_{E^1}$.

Действительно, в силу определения нормы в ассоциированном пространстве E^1, для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $g \in E$, $\|g\|_E = 1$, для которой

$$\int_0^1 \Delta_A(u) g(u) du > (1-\varepsilon)\|\Delta_A\|_{E^1}.$$

Заметим, что функция $\overline{g}(t) := |g(t)| \operatorname{sign} \Delta_A(t)$ также принадлежит пространству E и $\|\overline{g}\|_E \le \|g\|_E$. Пусть $f(t) := \|\overline{g}\|_E^{-1} \overline{g}(t)$, $t \in [0,1]$. Тогда

$$\int_0^1 \Delta_A(u) f(u) du = \|\overline{g}\|_E^{-1} \int_0^1 \Delta_A(u) \overline{g}(u) du \ge \int_0^1 \Delta_A(u) g(u) du > (1-\varepsilon)\|\Delta_A\|_{E^1}.$$

Для $t \in [0,1]$ рассмотрим функцию

$$x(t) := \int_0^t \frac{(t-u)^{r-1}}{(r-1)!} f(u) du.$$

Ясно, что $x \in MM^r$ и $\left\|x^{(r)}\right\|_E = \|f\|_E = 1$. Поэтому, используя равенства (3), (4), а также определение функции $f(t)$, получим

$$\left\|x^{(k)}\right\|_q - A\|x\|_p = \int_0^1 \left[\frac{(1-u)^{r-k-1+1/q}}{(r-k-1+1/q)!} - A \frac{(1-u)^{r-1+1/p}}{(r-1+1/p)!} \right] f(u) du =$$

$$= \int_0^1 \Delta_A(u) f(u) du > (1-\varepsilon)\|\Delta_A\|_{E^1} = (1-\varepsilon)\|\Delta_A\|_{E^1} \left\|x^{(r)}\right\|_E.$$

Теорема доказана.

Отметим, что в случае, когда $E = L_s$, $1 \le s \le \infty$, несложные вычисления показывают, что

$$\|\Delta_A\|_{s'} = \left(\frac{B\left(s'+1, (1/\lambda - 1)s' - \frac{s'-1}{k+1/p-1/q}\right)}{k+1/p-1/q} \right)^{\frac{1}{s'}} \frac{\left((r-1+1/p)!\right)^{\frac{1}{\lambda}-1}}{A^{\frac{1}{\lambda}-1}\left((r-k-1+1/q)!\right)^{\frac{1}{\lambda}}},$$

где $s' = \frac{s}{s-1}$ и $\lambda = \frac{k-1/q+1/p}{r-1/s+1/p}$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору В.Ф. Бабенко за постановку задачи и ее полезные обсуждения.

Библиографические ссылки

1. **Бабенко В.Ф.** Неравенства для производных и их приложения / В.Ф. Бабенко, Н.П. Корнейчук, В.А. Кофанов, С.А. Пічугов. – К.: Наукова думка, 2003. – 592 с.
2. **Бабенко Ю.В.** Поточечные неравенства типа Ландау-Колмогорова для функций, определенных на конечном отрезке / Ю.В. Бабенко // Укр. матем. журн. – 2000. – Т 53. – С. 238–243.
3. **Звягинцев А.И.** О неравенствах Колмогорова между верхними границами производных функций для $n = 3$ / А.И. Звягинцев, А. Лепин // Латв. Мат. Ежегодник. – 1985. – 26. – С. 176–181.
4. **Красносельский М.А.** Выпуклые функции и пространства Орлича / М.А. Красносельский, Я.Б. Рутицкий. – М., 1958. – 271 с.
5. **Крейн С.Г.** Интерполяция линейных операторов / С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
6. **Скороходов Д.С.** О задаче Ландау-Колмогорова на отрезке для абсолютно монотонных функций / Д.С. Скороходов // Вістник Дніпропетр. ун-ту, Серія Матем. – 2009. – № 14. – С. 120–128.
7. **Bojanov B.** Examples of Landau-Kolmogorov inequality in integral norms on a finite interval / B. Bojanov, N. Naidenov // J. Approx. Theory. – 2003. – 117. – P. 55–73.
8. **Chui C.K.** A note on Landau's problem for bounded intervals / C.K. Chui, P.W. Smith // Amer. Math. Monthly. – 1975. – 82. – P. 927–929.
9. **Fink A.M.** Kolmogorov-Landau inequalities for monotone functions / A.M. Fink // J. Math. Appl. – 1992. – V. 90. – P. 251–258.
10. **Landau E.** Einige Ungleichungen fur zweimal differenzierbare Funktionen / E Landau // Proc. London Math. Soc. – 1913. – 13. – P. 43–49.
11. **Naidenov N.** Landau-type extremal problem for the triple $\|f\|_\infty$, $\|f'\|_p$, $\|f''\|_\infty$ on a finite interval / N. Naidenov // J. of Approx. Theory. – 2003 – V. 123. – P. 147–161.
12. **Sato M.** The Landau inequality for bounded intervals with $\left\|f^{(3)}\right\|$ finite / M Sato // J. Approx. Theory. – 1982. – 34. – P. 159–166.
13. **Shadrin A.Yu.** To the Landau–Kolmogorov problem on a finite interval: in Open Problems in Approximation Theory / A.Yu. Shadrin. – Singapure.: SCT Publ., 1994. – P. 192–204.

Надійшла до редколегії 01 04 10

ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". № 15. 2010. Вип. 15. С. 151 – 157

УДК 519.41/47

О.М. Ткаченко

Придніпровська державна академія будівництва та архітектури

ВЛАСТИВОСТІ МАЙЖЕ ЛОКАЛЬНО-НОРМАЛЬНИХ ГРУП, У ЯКИХ БУДЬ-ЯКІ ДВІ СИЛОВЬКІ p-ПІДГРУПИ ЛОКАЛЬНО СПРЯЖЕНІ

Доведено, що у класі майже локально-нормальних груп властивість локальної спряженості будь-яких двох силовських p-підгруп не успадковується нормальними дільниками скінченного індексу. Досліджуються окремі випадки, в яких дана властивість успадковується підгрупами скінченного індексу або усіма підгрупами.

Ключові слова: клас, група, індекс, підгрупа .

Доказано, что в классе почти локально-нормальных групп свойство локальной сопряженности любых двух силовских p-подгрупп не наследуется нормальными делителями конечного индекса. Исследуются отдельные случаи, в которых данное свойство наследуется подгруппами конечного индекса или всеми подгруппами.

Ключевые слова: класс, группа, индекс, подгруппа.

Is proved, that in a class of almost locally normal groups the property locally conjugation of any two Sylow subgroups is not inherited by normal dividers of a finite index. The separate cases are explored, in which such property is inherited by subgroups of a finite index or by all subgroups.

Key words: class, group, index, subgroup.

У 1976 році автору даної роботи тодішнім науковим керівником Л.А. Курдаченком запропонована задача дослідження силовських підгруп у скінчених розширеннях локально-нормальних груп. Ця тематика залишається актуальною й наразі. Після того, як стало відомо, що не всі силовські підгрупи майже локально-нормальної групи можуть бути проекційними, а також не кожні дві навіть проекційні силовські підгрупи є ізоморфними [1], виявилось доцільним продовжити дослідження, накладаючи на систему силовських підгруп майже локально-нормальної групи певні обмеження, властиві для «базового класу" локально-нормальних груп. Так, виходячи з того, що в локально-нормальній групі будь-яка силовська підгрупа проекційна, в [2] проведено дослідження майже локально-нормальних груп з проекційними силовськими підгрупами. Було зокрема доведено, що властивість проекційності силовських підгруп успадковується підгрупами майже локально-нормальної групи, а також, що клас майже локально-нормальних груп з проекційними силовськими підгрупами утворює формацію. У [3], виходячи з того, що в локально-нормальних групах будь-які дві силовські p-підгрупи локально спряжені, досліджено майже локально-нормальні групи з локально спряженими силовськими p-підгрупами для деякого простого числа p. Проте отримані в цій роботі критерії не дають відповіді на запитання про успадкованість цієї властивості підгрупами майже локально-нормальної групи.

У даній роботі побудовано приклад майже локально-нормальної групи (приклад 1), будь-які дві силовські 2-підгрупи якої локально спряжені; водночас, існує такий її нормальний дільник скінченного індексу, в якому принаймні дві силовські 2-підгрупи не є локально спряженими. Таким чином, доведено, що в класі майже локально-нормальних груп властивість локальної спряженості силовських 2-підгруп не успадковується підгрупами, зокрема, нормальними дільниками скінченного індексу. Звідси слідує, що клас майже локально-нормальних груп з локально спряженими силовськими 2-підгрупами не утворює формацію.

Ситуація стає дещо іншою, якщо розглядати окремий підклас майже локально-нормальних груп, а саме, груп, які є розширеннями локально-нормальних груп за допомогою скінченних p-груп. Доведено (теорема 1), що в таких групах властивість локальної спряженості силовських p-підгруп успадковується всіма підгрупами скінченного індексу. Водночас побудовано приклад триступенево розв'язної групи з локально спряженими силовськими 2-підгрупами, яка містить нормальний дільник нескінченного індексу, в якому не будь-які дві силовські 2-підгрупи локально спряжені (приклад 2). Як далі випливає з теореми 2, у класі двоступенево розв'язних груп, які є розширеннями локально-нормальних груп за допомогою скінченних p-груп, властивість локальної спряженості силовських p-підгруп успадковується усіма підгрупами.

Приклад 1. За допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP знайдено приклад такої двоступенево розв'язної групи K порядку $486 = 2\cdot 3^5$, що

$$K = F\lambda(\langle x\rangle \times \langle y\rangle),$$

де $|x| = |y| = 3$, для деякої силовської 2-підгрупи P множника F виконується умова

$$K = N_K(P)\cdot N_K(\langle y\rangle \times \langle x\rangle),$$

але при цьому для нормального дільника $H = F\lambda\langle y\rangle$ аналогічна умова не виконується, а саме

$$H \neq N_H(P)\cdot N_H(\langle y\rangle).$$

Позначимо

$$G = \left(\underset{i\in I}{\times} F_i\right)\lambda(\langle x\rangle \times \langle y\rangle)$$

де I – нескінченна множина, F_i – ізоморфні копії підгрупи F, на яких елементи x, y діють так, як у групі K на множнику F. Як випливає з теореми 4 [3], будь-які дві силовські 2-підгрупи групи G локально спряжені. Разом з тим, згідно тій же теоремі, у нормальному дільнику індексу 3

$$G = \left(\underset{i \in I}{\times} F_i \right) \lambda(\langle y \rangle),$$

існують принаймні дві силовські 2-підгрупи, які є в ньому локально спряженими.

Зауваження. У групі K силовська 3-підгрупа множника F інваріантна. Звідси випливає, що кожна силовська 3-підгрупа групи G містить інваріантну підгрупу скінченного індексу, а отже силовські 3-підгрупи спряжені в G. Таким чином, із локальної спряженості силовських p-підгруп у майже локально-нормальній групі G для кожного $p \in \pi(G)$ не слідує, що такою ж властивістю володіють усі нормальні дільники групи G скінченного індексу.

Для дослідження розширень локально-нормальних груп за допомогою скінченних p-груп будуть потрібними дві леми. Наступна лема встановлює зв'язок між деякими локально внутрішніми автоморфізмами майже локально-нормальної групи та її фактор-групи за скінченним нормальним дільником.

Лема 1. Нехай група G розкладається у добуток

$$G = FB, \tag{1}$$

де F – інваріантна локально-нормальна підгрупа скінченного індексу, B – скінченна підгрупа. Нехай, далі, N – скінчений нормальний дільник G. Якщо $\overline{\varphi}$ – локально внутрішній автоморфізм фактор-групи G/N, який нормалізує її підгрупу BN/N, то існує локально внутрішній автоморфізм φ групи G, індукування якого на фактор-групу G/N збігається з $\overline{\varphi}$.

Доведення. Нехай N_i, $i \in I$ – локальна система скінченних підгруп множника F, інваріантних у групі G. Тоді N_iNB, $i \in I$ – локальна система підгруп групи G. Позначимо через A_i множину автоморфізмів підгрупи N_iNB, які індуковані такими внутрішніми автоморфізмами f групи G, що $f(NB) = NB$ і для будь-якого елемента $x \in N_iNB$ має місце співвідношення $f(xN) = \overline{\varphi}(xN)$. З умови леми та означення локально внутрішнього автоморфізму випливає, що множина A_i не є порожньою. Нехай $A_i \le A_j$ при $N_i \le N_j$. Якщо $A_i \le A_j$, і $\varphi_j \in A_j$ то проекцією елемента φ_j на множину A_i означимо як звуження автоморфізму φ_j на підгрупу A_i. Так побудована система множин A_i, $i \in I$ задовольняє умовам теореми Куроша про повну проекційну множину [4], згідно якій у кожній з множин A_i можна так вибрати по одному автоморфізму φ_i, що будь-які два з цих автоморфізмів φ_i, φ_j індукуються деяким третім автоморфізмом φ_k. Тому сукупність цих автоморфізмів визначає локально внутрішній автоморфізм φ групи G, який задовольняє твердженню леми. Лему доведено.

Доведена лема дозволяє дати критерій локальної спряженості силовських p-підгруп майже локально-нормальної групи через її фактор-групу за скінченним нормальним дільником.

Лема 2. У майже локально-нормальній групі G будь-які дві силовські p-підгрупи локально спряжені тоді й тільки тоді, коли такою ж властивістю володіє фактор-група G/K, де K – деякий скінченний нормальний дільник.

Доведення. Необхідність очевидна. Для доведення достатності розкладемо групу G у добуток (1) і позначимо через P й Q дві її довільні силовські p-підгрупи. Як випливає з умови леми й теореми 1 [3], у множнику F міститься така підгрупа $N \lhd G$ скінченного індексу, що $\bar{\varphi}\big((PK/K)\cap(NK/K)\big)=\big((QK/K)\cap(NK/K)\big)$ для деякого локально внутрішнього автоморфізму $\bar{\varphi}$ фактор-групи G/N, який нормалізує множник BN/N. Згідно лемі 1 у групі G існує локально внутрішній автоморфізм φ, що $\varphi(P\cap N)\le QK$. Добуток QK є скінченним розширенням p-групи, тому в ньому всі силовські p-підгрупи спряжені. Послідовне виконання автоморфізму φ та внутрішнього автоморфізму, що переводить $\varphi(P\cap N)$ в $Q\cap N$ – локально-внутрішній автоморфізм, який переводить $P\cap N$ в $Q\cap N$. Таким чином, перетини $P\cap N$ та $Q\cap N$ локально спряжені в G. Згідно твердженню 1 роботи 3 підгрупи P й Q також локально спряжені в G. Лему доведено.

Наслідок 1. У майже локально-нормальній групі G будь-які дві силовські p-підгрупи локально спряжені тоді й тільки тоді, коли такою ж властивістю володіє її фактор-група, за будь-яким скінченним нормальним дільником.

Теорема 1. *Якщо в групі, яка є розширенням локально-нормальної групи за допомогою скінченної p-групи, будь-які дві силовські p-підгрупи локально спряжені, то такою ж властивістю володіє будь-яка її підгрупа скінченного індексу.*

Доведення. Нехай G – група, яка задовольняє умовам теореми, H – її довільна підгрупа скінченнного індексу. Тоді група G задовольняє співвідношенню (1), в якому скінченний множник B – p-група, а для підгрупи H має місце співвідношення

$$H=(F\cap H)B_1, \tag{2}$$

при цьому можна вважати, що $B_1\le B$.

Припустимо спочатку, що перетин $F\cap B$ одиничний. Згідно зауваженню до теореми 2 [3] у множнику F існує така підгрупа N

скінченного індексу, що всі силовські p-підгрупи кожного скінченного нормального дільника $K < N$, $K \lhd N$ спряжені в F за допомогою елементів, які нормалізують множник B. Із припущення $F \cap B = 1$ випливає, що ці елементи централізують множник B. Позначимо $C = C_F(B)$. Тоді

$$C = (C \cap H)D, \tag{3}$$

де D – деяка скінченна підгрупа. Покажемо, що будь-який нормальний дільник N_1 групи G, який міститься у перетині $H \cap N \cap C_F(D)$ задовольняє умові теореми 2 роботи 3. Справді, розглянемо будь-який нормальний дільник K_1 підгрупи H, який міститься в N_1 і дві його довільні силовські $p-$підгрупи P_1, Q_1. Позначимо через K який-небудь скінчений нормальний дільник групи G, який міститься в N_1 та містить K_1, а через P, Q – силовські p-підгрупи K, що містять відповідно P_1 та Q_1. Нехай $c \in C$ такий елемент, що $c^{-1}Pc = Q$. Згідно факторизації (3) $c = hd$, де $h \in C \cap H$, $d \in D$. Оскільки $D \le C_F(N_1) \le C_F(K)$, то $h^{-1}Ph = Q$, а отже $h^{-1}P_1h = Q_1$, крім того $h \in C_H(B) \le C_H(B_1)$. Таким чином, згідно теоремі 2 [3] у підгрупі H будь-які дві силовські p-підгрупи локально спряжені.

Припустимо тепер, що $F \cap B \ne 1$. Позначимо через S інваріантну в G скінченну підгрупу множника F, що містить перетин $F \cap B$. За доведеним у попередньому абзаці всі силовські p-підгрупи фактор-групи

$$HS / S \cong H / (H \cap S)$$

локально спряжені. Згідно лемі 2 такою ж властивістю володіє група H. Теорему доведено.

Наступний приклад показує, що умова скінченності індексу в теоремі 1 є істотною.

Приклад 2. За допомогою системи комп'ютерної алгебри GAP знайдено приклад такої триступенево розв'язної групи K порядку 576, що

$$K = F\lambda(\langle x\rangle \times \langle y\rangle),$$

де $|x| = 2$, $|y| = 3$, для деякої силовської 2-підгрупи P триступенево розв'язного множника F виконується умова

$$K = N_K(P) \cdot N_K(\langle y\rangle \times \langle x\rangle),$$

але при цьому для нормального дільника $W = F\,\acute{r}\,\langle x\rangle$ аналогічна умова не виконується, а саме

$$W \neq N_W(P) \cdot N_W(\langle x \rangle).$$

Позначимо

$$G = \left(\underset{\iota \in I}{\times} H_\iota \right) \lambda(\langle x \rangle),$$

де I – нескінченна множина, $H_\iota = F_\iota \leftthreetimes \langle y_\iota \rangle$ – ізоморфні копії підгрупи $H = F \leftthreetimes \langle y \rangle$, на яких елемент x діє так, як у групі K на H. Як випливає з теореми 4 [3], будь-які дві силовські 2-підгрупи групи G локально спряжені. Разом з тим, згідно тій же теоремі, в нормальному дільнику нескінченго індексу

$$G = \left(\underset{\iota \in I}{\times} F_\iota \right) \lambda(\langle x \rangle),$$

існують дві силовські 2-підгрупи, які не є у ньому локально спряженими.

У зв'язку з тим, що у прикладі 2 група G та її локально-нормальна підгрупа скінченного індексу є триступенево розв'язними, природно дослідити групи виду (1), в яких множник F являє собою двоступенево розв'язну підгрупу.

Наступна лема визначає ще один клас майже локально-нормальних груп, будь-які дві проекційні силовські p-підгрупи яких локально спряжені. Два класи груп такого роду виділено у [5].

Лема 3. У групі, яка є розширенням двоступенево розв'язної локально-нормальної групи за допомогою скінченної p-групи, будь-які дві проекційні силовські p-пігрупи локально спряжені.

Доведення. Розглянемо групу G виду (1), при цьому множник F 2-ступенево розв'язний, а множник B є p-групою. Позначимо через P й Q дві проекційні силовські p-підгрупи групи G. За наслідком 4 роботи [1] не порушуючи загальності можна вважати, що підгрупи P й Q містять множник B. Нехай N – скінчена інваріантна в G підгрупа множника F, R – силовська p-підгрупа N. З того, що підгрупа N двоступенево розв'язна слідує, що добуток $K = R \cdot O_{p'}(N)$ є характеристичною підгрупою N, а отже містить усі її силовські p-підгрупи. Згідно лемі, доведеній у [5], перетини $P \cap K$ й $Q \cap K$, що нормалізуються множником B, спряжені за допомогою елемента, який централізує множник B. За теоремою 1 [3] підгрупи P й Q локально спряжені у групі G. Лему доведено.

Теорема 2. *Якщо в групі, яка є розширенням двоступенево розв'язної локально-нормальної групи за допомогою скінченної p-групи, будь-які дві силовські p-підгрупи локально спряжені, то такою ж властивістю володіє і довільна її підгрупа.*

Доведення. З локальної спряженості силовських p-підгруп у групі випливає, що всі її силовські p-підгрупи проекційні. За теоремою 3 роботи 2 проекційними є усі силовські підгрупи в довільній підгрупі . Тоді за лемою 3 будь-які дві з них локально спряжені у підгрупі. Теорему доведено.

Наслідок 2. Клас розширень двоступенево розв'язних локально-нормальних груп за допомогою скінченних p-груп з локально спряженими силовськими p-підгрупами утворює формацію.

Приклад 1 показує: вимога в теоремі 2 та наслідку 2, яка полягає в тому, що група є розширенням двоступенево розв'язної локально-нормальної групи за допомогою саме p-групи є істотною.

Приклад 1 анонсовано у матеріалах Українського математичного конгресу 2009 р. [6].

Бібліографічні посилання.

1. **Ткаченко А.Н.** Силовские подгруппы почти локально нормальных групп /А.Н. Ткаченко// Укр. матем. журн. – 1984. – 36, № 6. – С. 798-801.
2. **Ткаченко О.М.** Умови локальної спряженості підгруп Силова у майже локально-нормальній групі /О.М. Ткаченко// Математичні студії. – 2008, Т. 29, № 2. – С. 127-131.
3. **Ткаченко О.М.** Майже локально-нормальні групи, всі силовські підгрупи яких проекційні /О.М. Ткаченко// Науковий вісник НГУ. – 2005, N 8. – С. 74-76.
4. **Курош А.Г.** Теория групп /А.Г. Курош– М., 1967. – 648 с.
5. **Ткаченко О.М.** Умови, при яких проекційні силовські підгрупи майже локально-нормальної групи локально спряжені /О.М. Ткаченко// Вісник Дніпропетр. національного ун-ту. Математика. – 2009, Вип. 14, № 6/1 – С. 129-132.
6. **Ткаченко О.М.** Локально спряжені силовські підгрупи скінченних розширень локально-нормальних груп /О.М. Ткаченко// URL http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Tkachenko.html.

Надійшла до редколегії 30 02 10

ISSN № 9125 0912. ВІСНИК ДНУ. Серія „Математика". № 6/1. 2010. Вип. 15. С. 158– 170

УДК 517.9

P.I. Kogut*, T.N. Rudyanova**

**Dnipropetrovsk National University,*

***Dniprоpetrovsk State Finance Academy*

ON SOME SMOOTH APPROXIMATIONS ON THICK PERIODIC MULTI-STRUCTURES

Досліджуються питання апроксимації L^2 - обмежених функцій, означених на густих сингулярних з'єднаннях. Показано, що довільну функцію з означеного класу можна наблизити в просторі L^2 гладкою функцією, за її значеннями на боковій поверхні швидко осцилюючого сингулярного з'єднання. Отримано оцінки таких наближень та досліджено їх асимптотичну поведінку.

Ключові слова: густе сингулярне з'єднання, апроксимаційні властивості, сингулярні міри, збіжність у змінних просторах.

Изучается проблема аппроксимации L^2 - ограниченных функций, заданных на густых сингулярных соединениях. Показано, что любая функция из указаного класса может быть аппраксимирована в норме пространства L^2 гладкой функцией, которая задана только на боковой поверхности быстро осцилирующего сингулярного соединения. Получены оценки таких приближений и изучено их асимптотическое поведение.

Ключовые слова: 'густое сингулярное соединение, аппроксимационные свойства, сингулярные меры, сходимость в переменных просторанствах.

In this paper we study the approximation properties of measurable and square-integrable functions. In particular we show that any L^2 - bounded functions can be approximated in L^2-norm by smooth functions defined on a highly oscillating boundary of thick multi-structures in R^n . We derive the norm estimates for the approximating functions and study their asymptotic behavior.

Key words: thick multi-structure, approximating properties, singular measures, convergence in variable spaces.

Introduction

The main object of our consideration in this paper is a class of functions defined on a domain $\Omega_\varepsilon \subset R^n$, whose boundary $\partial\Omega_\varepsilon$ contains the very highly oscillating part with respect to a small parameter ε, as $\varepsilon \to 0$.

We say that Ω_ε is a thick multi-structure in R^n, if Ω_ε consists of some fixed domain Ω^+ and a large number of cylinders with axes parallel to Ox_n and ε-periodically distributed along some manifold $\sum$ on the boundary of Ω^+ (see Fig.1).This manifold is called the joint zone and the domain Ω^+ is called the junction's body. Here ε is a small positive parameter, which characterizes the distance between the neighboring cylinders and their thickness. So, each attached cylinder has a small cross section of the size ε and its limiting dimension (as $\varepsilon \to 0$) is equal to 1. In view of this, such cylinders will be called thin domains.

Thick junctions have a special character of the connectedness: there are points in a thick junction which are at a short distance of order $O(\varepsilon)$, but the length of all curves, which connect these points in the junction, is order $O(1)$

As a result, there are no extension operators $P: W^{1,p}(\Omega_\varepsilon) \to W^{1,p}_{loc}(R^n)$ that would be uniformly bounded in ε. At the same time thick multi-structures (or thick junctions) are prototypes of widely used engineering constructions as well as many other physical and biological systems with very distinct characteristic scales (microscopic radiators, ferrite-filled rod radiators, and others). As a rule, the computational calculation of the solutions of any problems on Ω_ε is very complicated due to singularities of the thick junctions. As a result, asymptotic analysis is one of the main approaches to study majority of problems in such domains.

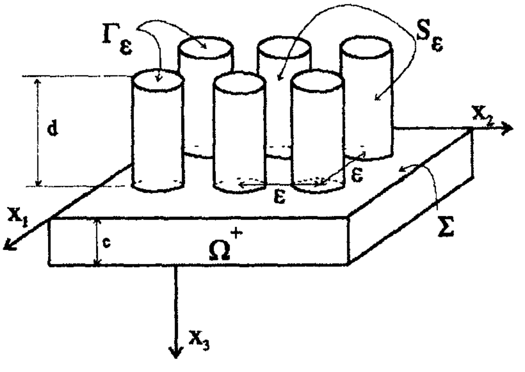

Fig. 1. Thick multi-structure Ω_ε

In view of this we consider the approximation problem of L^2-bounded functions by sequences of smooth functions defined on lateral side of thin cylinders and their bases which form a quickly oscillating counterpart of thick junctions. We derive the norm estimates for the approximating functions and study their asymptotic behaviour.

Notation and Preliminaries

Let $a > 0$, $d > 0$ and $c > 0$ be given positive constants. Let $B = (0,a)^{n-1}$ and C be bounded open smooth domain in R^{n-1} $(n \geq 2)$. Moreover we assume that $C \subset\subset (0,1)^{n-1}$, that is the set C belongs to the $n-1$-dimensional cube $(0,1)^{n-1}$ together with its boundary ∂C. Throughout this paper the parameter ε varies in a strictly decreasing sequence of

positive numbers which converges to zero, i.e. we can suppose that $\varepsilon = a/N$, where N is a large positive integer. When we write $\varepsilon > 0$, we consider only the elements of this sequence.

Let us denote the elements of R^n by $x=(x_1,x_2,\dots x_n)=(x',x_n)$ and introduce the following sets: $\theta_\varepsilon=\{. =(k_1,k_2,\dots k_{n-1})\in N^{n-1}:\varepsilon C+\varepsilon .\ \subset\subset B\}$,

$$\Omega=B\times(-d,c),\ G_\varepsilon=\{(x',x_n)\ :\ x'\in\varepsilon C+\varepsilon .\ ,\ -d<x_n\le 0\},$$
$$\Sigma=B\times\{0\},\ \ \Omega^+=B\times(0,c),\ \ \Omega^-=B\times(-d,0), \tag{1}$$
$$\Gamma_0=B\times\{-d\},\ \ \Omega_\varepsilon^-=\Omega_\varepsilon\cap\Omega^-.$$

Then in view of our previous description, the set

$$\Omega_\varepsilon=(B\times(0,c))\cup\left(\bigcup_{.\in\theta_\varepsilon}(\varepsilon C+\varepsilon .\ )\times\left(-d,0\right]\right)=\Omega^+\cup\left(\bigcup_{\in\theta_\varepsilon}G_\varepsilon\right),$$

is a thick multi-structure in R^n, which consists of the junction's body Ω^+ and a large number N^{n-1} of the thin cylinders G_ε with axis Ox_n and ε-periodically distributed on the basis Σ of Ω^+ (see Fig. 1 for 3-d example). Here, each cylinder G_ε is obtained with ε-homothety in the first $(n-1)$ variables. It is easy to see that $\Omega_\varepsilon=\Omega^+\cup\left(\bigcup_{.\in\theta_\varepsilon}G_\varepsilon\right)$.

Denote by Γ_ε the union of the lower bases

$$\Gamma_\varepsilon=\{(x',x_n)\ :\ x'\in\varepsilon\cdot C+\varepsilon .\ ,\ x_n=-d\}$$

of the thin cylinders G_ε when $.\in\theta_\varepsilon$ (i.e. $\Gamma_\varepsilon=\Gamma_0\cap\partial\Omega_\varepsilon$, and by S_ε the union of their boundaries along the axis Ox_n:

$$S_\varepsilon=\{(x',x_n)\ :\ x'\in\varepsilon\cdot\partial C+\varepsilon\ \ ,\ -d<x_n<0\}.$$

We make also use of the idea of classical smoothing. Let $K(x)$ be a positive compactly supported smooth function $\left(K\in C_0^\infty\right)$ such that $\int_{R^n}K(x)dx=1$ and $K(x)=K(-x)$ for all $x\in R^n$. For an arbitrary measurable function $\varphi\in L^1_{loc}(R^n)$ we define an ordinary smoothing operator by the equality

$$(\varphi)_h(x)=h^{-n}\int_{R^n}K\left(\frac{x-y}{h}\right)\varphi(y)dy=\int_{R^n}K(y)\varphi(x+hy)dy. \tag{2}$$

On smooth Γ_ε-approximation of $L^2(\Gamma_0)$-functions

Let $u^0\in L^2(\Gamma_0)$ be a given function such that $\left\|u^0\right\|_{L^2(\Gamma_0)}\le .\ \ .$ with some constant $.\ .>0$. Our aim is to construct a sequence of smooth functions $\{u_\varepsilon\in C^\infty(\Gamma_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ satisfying the following conditions:

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} \le \left(\sqrt{|C|}\right)^{-1} \quad , \forall \varepsilon > 0, \tag{3}$$

$$\widetilde{u}_\varepsilon \xrightarrow{w} u^0 \text{ in } L^2(\Gamma_0) \text{ as } \varepsilon \to 0. \tag{4}$$

Here $|C|$ is the $(n-1)$-dimensional Lebesgue measure of the set C, and $\widetilde{u}_\varepsilon$ is the trivial extension by zero of a function $u_\varepsilon \in L^2(\Gamma_\varepsilon)$ to the set Γ_0. It is clear that in this case $\widetilde{u} \in L^2(\Gamma_0)$.

Remark 1. Note that for every $\varepsilon > 0$ the restriction $u^0\big|_{\Gamma_\varepsilon}$ is an element of $L^2(\Gamma_\varepsilon)$ whereas the functions u_ε in (3)–(4) must be elements of $C^\infty(\Gamma_\varepsilon)$. In view of this we call the sequence $\{u_\varepsilon \in C^\infty(\Gamma_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ with properties (3)–(4) a smooth Γ_ε-approximation of $u^0 \in L^2(\Gamma_0)$.

In order to construct the sequence $\{u_\varepsilon \in C^\infty(\Gamma_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$, we make use the idea of classical smoothing. Let $K_u \in C_0^\infty\left(R^{n-1}\right)$ be nonnegative function such that

$$\int_{R^{n-1}} K_u(x')dx' = 1 \quad \text{and} \quad K_u(x') = K_u(-x') \quad \forall x' \in R^{n-1}.$$

Let $\widetilde{u}^0$ be the trivial extension by zero of function $u^0 \in L^2(\Gamma_0)$ to the set $O = \left\{(x', x_n) \in R^n : x' \in R^{n-1}, x_n = -\beta_0\right\}$. For every fixed $\varepsilon > 0$ we define the following smoothing operator

$$\left(u^0\right)_\varepsilon = \left(K_u^\varepsilon u^0\right)(x') = \varepsilon^{-n+1} \int_O K_u\left(\frac{x'-y'}{\varepsilon}\right)\widetilde{u}^0(y', y_n)dH^{n-1} =$$

$$= \varepsilon^{-n+1} \int_{R^{n-1}} K_u\left(\frac{x'-y'}{\varepsilon}\right)\widetilde{u}^0(y')dy'. \tag{5}$$

We begin with the following result:

Proposition 1. *Let $u^0 \in L^2(\Gamma_0)$ be a given function such that $\left\|u^0\right\|_{L^2(\Gamma_0)} \le$ . . Then for every δ>0 there exists $\varepsilon(\delta) = a/N$, where $N \in$. , such that*

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} \le \left(\sqrt{|C|}\right)^{-1}. \tag{6}$$

provided

$$u_\varepsilon := |C|^{-1}\left(u^0\right)_\delta\Big|_{\Gamma_\varepsilon}. \tag{7}$$

Proof. First of all we note that $u_\varepsilon \in C^\infty(\Gamma_\varepsilon)$ by the properties of smoothing operator (5). Following the definition of the smoothing operator and using the Cauchy-Bunyakovskii inequality, we have

$$\left\|\left(u^0\right)_\delta\right\|_{L^2(R^{n-1})} = \int_{R^{n-1}}\left(\delta^{-n+1}\int_{R^{n-1}} K_u\left(\frac{x'-y'}{\delta}\right)\widetilde{u}^0(y')dy'\right)^2 dx' \leq$$

$$\leq \int_{R^{n-1}}\left(\delta^{-n+1}\int_{R^{n-1}} K_u\left(\frac{x'-y'}{\delta}\right)dy'\right)\times$$

$$\times\left(\delta^{-n+1}\int_{R^{n-1}} K_u\left(\frac{x'-y'}{\delta}\right)\left(\widetilde{u}^0(y')\right)^2 dy'\right)dx' =$$

$$= \int_{R^{n-1}}\left(\delta^{-n+1}\int_{R^{n-1}} K_u\left(\frac{x'-y'}{\delta}\right)\left(\widetilde{u}^0(y')\right)^2 dy'\right)dx'$$

$$\int_{R^{n-1}}\left(\delta^{-n+1}\int_{R^{n-1}} K_u\left(\frac{x'-y'}{\delta}\right)dx'\right)\left(\widetilde{u}^0(y')\right)^2 dy' =$$

$$= \int_{R^{n-1}}\left(\widetilde{u}^0(y')\right)^2 dy' = \int_{\Gamma_0}\left(u^0(y')\right)^2 dy' = \left\|u^0\right\|^2_{L^2(\Gamma_0)}. \tag{8}$$

Due to this estimate, we come to the inequality

$$\left\|\left(u^0\right)_\delta\right\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} = \left\|\chi_{\Gamma_\varepsilon}\left(u^0\right)_\delta\right\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)}$$

$$\leq \left\|\chi_{\Gamma_0}\left(u^0\right)_\delta\right\|_{L^2(R^{n-1})} \leq \left\|u^0\right\|_{L^2(\Gamma_0)} \leq. \tag{9}$$

which holds true for every $\varepsilon > 0$. Here $\chi_{\Gamma_\varepsilon} \in L^\infty(\Gamma_0)$ is the characteristic function of the zone Γ_ε, i.e.,

$$\chi_{\Gamma_\varepsilon}(x') = \begin{cases} 1, & x' \in \Gamma_\varepsilon, \\ 0, & otherwise \end{cases} \quad \forall x' \in \Gamma_0.$$

Note that

$$\chi_{\Gamma_\varepsilon} \xrightarrow{w} |C| \text{ in } L^\infty(\Gamma_0) \text{ as } \varepsilon \to 0. \tag{10}$$

Indeed, in view of $\varepsilon[0,1)^{n-1}$-periodicity of this characteristic function and the mean value property, we have

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_0}\varphi(x')\,\chi_{\Gamma_\varepsilon}(x')d\,H^{n-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_B\varphi(x')\,\chi_{\cup_{\cdot\in\theta_\varepsilon}(\varepsilon C+\varepsilon\ )}(x')dx' =$$

$$= \int_B\varphi(x')dx'\left(\int_{(0,1)^{n-1}}\chi_C(x')dx'\right) =$$

$$= |C|\int_B\varphi(x')\,dx' == |C|\int_{\Gamma_0}\varphi(x')dH^{n-1} \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\Gamma_0).$$

Thus, the property (10) holds true.

Further for a given $\delta > 0$ we define a parameter $\varepsilon = a/N$ so that the following inequality would be valid

$$\frac{1}{|\Gamma_\varepsilon|} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(u^0\right)_\delta^2 dx' \le \frac{1}{|\Gamma_0|} \int_{\Gamma_0} \left(u^0\right)_\delta^2 dx' .$$

Then from (9) we deduce

$$\left\| |C|^{-1} \left(u^0\right)_\delta \right\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)}^2 \le \frac{|\Gamma_\varepsilon|}{|\Gamma_0|} \left\| |C|^{-1} \left(u^0\right)_\delta \right\|_{L^2(\Gamma_0)}^2 \le \frac{|\Gamma_\varepsilon|}{|\Gamma_0|} |C|^{-2} . \quad ^2 . \qquad (11)$$

Since $|\Gamma_0| = |B| = a^{n-1}$ and

$$|\Gamma_\varepsilon| = \sum_{\cdot \in \theta_\varepsilon} \int_{\Gamma_\varepsilon} dx' = \sum_{k \in \theta_\varepsilon} \varepsilon^{n-1} |C| = \left(\frac{a}{\varepsilon}\right)^{n-1} \varepsilon^{n-1} |C| = a^{n-1} |C| ,$$

it follows from (11) that

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} \equiv \left\| |C|^{-1} \left(u^0\right)_\delta \right\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)} \le \left(\sqrt{|C|}\right)^{-1} . \quad . \qquad (12)$$

Thus for the chosen value of ε inequality (6) is valid. This concludes the proof.

The next step to prove the property of strong convergence (4).

Proposition 2. *Assume the functions* $u_\varepsilon \in C^\infty(\Gamma_\varepsilon)$ *are defined by* (7). *Then the property* (4) *holds true.*

Proof. To begin with, we note that

$$\left(u^0\right)_\delta \to u^0 \text{ strongly in } L^2(\Gamma_0) \text{ as } \delta \to 0 \qquad (13)$$

by properties of the classical smoothing. Hence in view of (10), (13), and the fact that the value of ε depends on a given parameter δ, we have

$$\widetilde{u}_{\varepsilon(\delta)} = |C|^{-1} \aleph \Gamma_{\varepsilon(\delta)} \left(u^0\right)_\delta \xrightarrow{w} |C|^{-1} |C| u^0 = u^0 \text{ as } \delta \to 0$$

as a limit of the product of the weak and strong convergent sequences in $L^2(\Gamma_0)$.This implies the required property (4).The proof is complete.

Some auxiliary results

We begin this section with the description of the $(n-1)$-dimensional surface S_ε in the terms of singular measures in R^n which do not satisfy the regularity property with respect to the corresponding Lebesgue measure.

Let μ_0 be a periodic finite positive Borel measure in R^{n-1}. Let $\square = [0,1)^{n-1}$ be the cell or torus of periodicity for μ_0. We assume that Borel measure μ_0 is the probability measure in R^{n-1}, concentrated and uniformly distributed on the set ∂C, so $\int_\square d\mu_0 = 1$.

Remark 2. By definition we have $\mu_0(\square \setminus \partial C) = 0$. Therefore any functions, taking the same values on the set ∂C, coincide as elements of $L^2(\square, d\mu_0)$. Here the Lebesgue space

$L^2(\square, d\mu_0)$ with respect to the measure μ_0 is defined in a usual way with the corresponding norm

$$\|f\|^2_{L^2(\square, d\mu_0)} = \int_\square |f(x)|^2 \, d\mu_0$$

(we adopt the standard notation $L^2(\square)$ when μ_0 is the Lebesgue measure).

We set $\square_n = \square \times [0,1) = [0,1)^n$ and consider the following measure $d\mu = d\mu_0 \times dx_n$ in $\square_n$. It is easy to see that this measure concentrated on the set $\partial C \times [0,1)$, and for any smooth function g we have

$$\int_{\square_n} g\, d\mu = \int_0^0 \int_\square g\, dx_n\, d\mu_0 = \left[H^{n-1}(\partial C \times [0,1))\right]^{-1} \int_{\partial C \times [0,1)} g d\, H^{n-1}.$$

However, as follows from the properties of the Hausdorff measure, we have $H^{n-1}(\partial C \times [0,1)) = H^{n-2}(\partial C)$ (see [1]). In what follows, we use the notation $|\partial C|_H = H^{n-2}(\partial C)$ for $(n-2)$-dimensional Hausdorff measure of the set ∂C. Then the previous relation can be rewritten in the form

$$\int_{\square_n} g\, d\mu = \int_0^1 \int_\square g\, dx_n\, d\mu_0 = |\partial C|_H^{-1} \int_{\partial C \times (0,1)} g d\, H^{n-1}. \tag{14}$$

In order to clarify relation (14), we consider the planar thick multi-structure $\Omega_\varepsilon \subset R^2$. Then $n = 2$ and the set C is some part of the segment $(0,1)$. For instance, let $C = \{x_1 \in (0,1) : |x_1 - 1/2| < h/2\}$, where $h \square (0,1)$ is a fixed value. In this case $|\partial C|_H = 2$ and the 1-periodic measure μ_0 in R^1 can be defined as

$$\mu_0(B) = \frac{1}{|\partial C|_H}\left(\partial_{M_1} + \partial_{M_2}\right)(B) = \frac{1}{2}\left(\partial_{M_1} + \partial_{M_2}\right)(B)$$

for any Borel set $B \square [0,1)$, where $M_i = \frac{1}{2} + \left(i - \frac{3}{2}\right)h$, i=1,2. Here δ_{M_i} is the Dirac measures located at the points M_i. Thus, the multiplier $|\partial C|_H^{-1}$ in (14) is equal to 1/2.

Let Λ be any Borel set of R^n. We introduce the scaling measure μ_ε by the rule $\mu_\varepsilon(\Lambda) = \varepsilon\, \mu(\varepsilon^{-1}\Lambda)$. This measure has a period ε, and moreover, since $\mu_\varepsilon(\varepsilon \square_n) = \varepsilon\, \mu_0(\varepsilon \square)$, it follows that

$$\mu_\varepsilon(\varepsilon \square_n) = \varepsilon^n \int_0^\varepsilon \int_{\varepsilon\square} d\mu_0(x'/\varepsilon) d(x_n/\varepsilon) = \varepsilon^n \int_0^1 \int_\square d\mu_0\, dx_n = \varepsilon^n.$$

As a result, the measure μ_ε weakly converges to Lebesgue measure in R^n as $\varepsilon \to 0$ (in symbols $d\mu_\varepsilon \xrightarrow{w} dx$), that is,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R_n} \varphi\, d\mu_\varepsilon = \int_{R_n} \varphi\, dx \text{ for all functions } \varphi \in C_0^\infty(R^n).$$

Indeed, since the set Ω^- is bounded, and $\hat{p}_\varepsilon \, d\mu_\varepsilon$ is a Radon measure, it follows that $\int_{\Omega^-} \hat{p}_\varepsilon \varphi \, d\mu_\varepsilon$ is a linear continuous functional on $C_0^\infty(R^n;\Gamma_\varepsilon)$.

In a similar manner to (15), we can derive the following relation

$$\varepsilon \|p_\varepsilon\|^2_{L^2(S_\varepsilon)} = \varepsilon \int_{S_\varepsilon} p_\varepsilon^2 \, d\, H^{n-1}$$

$$= |\partial C|_H \int_{\Omega^-} \hat{p}_\varepsilon^2 \, d\mu_\varepsilon = |\partial C|_H \|\hat{p}_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega^-, d\mu_\varepsilon)}. \qquad (16)$$

On smooth S_ε-approximation of $L^2(\Omega^-)$-functions

Let $p^0 \in L^2(\Omega^-)$ be a given function such that $\|p^0\|^2_{L^2(\Omega^-)} \le \cdot$. with some constant . . > 0. Our aim is to construct a sequence of smooth functions $\{p_\varepsilon \in C^\infty(S_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ satisfying the following conditions:

$$\|p_\varepsilon\|^2_{L^2(S_\varepsilon)} \le \sqrt{\frac{|\partial C|_H}{\varepsilon}} \cdot \,. \,, \quad \forall \varepsilon > 0, \qquad (17)$$

$$\widetilde{p}_\varepsilon \xrightarrow{w} p^0 \text{ in } L^2(\Omega^-, d\mu_\varepsilon) \text{ as } \varepsilon \to 0. \qquad (18)$$

Remark 3. Note that we can'not use the restriction of this function to the construction of the sequence $\{p_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ because a trace of an L^2-function on the $(n-1)$-dimensional surface S_ε is not defined. In view of this we call the sequence $\{p_\varepsilon \in C^\infty(\Gamma_\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ with properties(17)–(18) a smooth S_ε-approximation of the function $p^0 \in L^2(\Gamma_0)$.

Let $K_p \in C_0^\infty(R^n)$ be nonnegative function such that

$$\int_{R^n} K_p(x)dx = 1, \text{ and } K_p(x) = K_p(-x) \;\; \forall x \in R^n.$$

Let $\widetilde{p}^0$ be the trivial extension by zero of the function $p^0 \in L^2(\Omega^-)$ to R^n. For every fixed $\varepsilon > 0$ we define the following smoothing operator

$$(p^0)_\varepsilon = (K_p^\varepsilon p^0)(x) = \varepsilon^{-n} \int_{R^n} K_p\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \widetilde{p}^0(y) dy.$$

We begin with the following result:

Proposition 3. *Let $p^0 \in L^2(\Omega^-)$ be a given function such that $\|p^0\|_{L^2(\Omega^-)} \le \cdot$ . . Then there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that the functions*

$$p_\varepsilon = (p^0)_\varepsilon \big|_{S_\varepsilon} \qquad (19)$$

satisfy the estimate (17) *for all* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Proof. Since $(p^0)_\varepsilon \in C(\overline{\Omega^-})$ it is clear that $p_\varepsilon^{sub} = (p^0)_\varepsilon\big|_{S_\varepsilon} \in L^2(S_{\varepsilon}, \ ^{n-1})$. By analogy with (8) it is easy to show the validity of the following inequality

$$\left\|p^0\right\|^2_{L^2(\Omega^-)} \le \int_{\Omega^-} (p^0)^2\, dx = \left\|p^0\right\|^2_{L^2(\Omega^-)} \le . \ \ ^2. \tag{20}$$

Thus, taking into account (20), we have to prove that the estimate (17) is valid at least for ε small enough. In order to verify this fact we will show that the value

$$\sigma = \left|\varepsilon |\partial C|_H^{-1} \left\|(p^0)_\varepsilon\right\|^2_{L^2(S_\varepsilon;\ ^{n-1})} - \left\|(p^0)_\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^-)}\right|$$

can be done as small as is wished for ε small enough.

To begin with, we note that

$$\left\|(p^0)_\varepsilon\right\|^2_{L^2(\Omega^-)} = \sum_{j=1}^{N^{n-1}} \int_{\left\{x=(x',x_n):\left|\begin{array}{l} x'\in\varepsilon(\square+\ _j) \\ -\beta_0<x_n<0 \end{array}\right.\right\}} (p^0)^2_\varepsilon\, dx. \tag{21}$$

Here $\square = [0,1)^{n-1}$. Further we make use the following notation:

$$L_\varepsilon = \{(x', x_n) : x' \in \varepsilon\square + \varepsilon.\ ,\ -\beta < x_n \le 0\},$$

$$G_\varepsilon = \{(x', x_n) : x' \in \varepsilon C + \varepsilon.\ ,\ -\beta < x_n \le 0\},$$

$$\Delta_i S_\varepsilon = \{(x', x_n) : x' \in \varepsilon\,\partial C + \varepsilon.\ ,\ -\beta + (i-1)\Delta < x_n \le -\beta_0 + i\Delta\},$$

where $\Delta = \beta_0 / J$.

Since $(p^0)_\varepsilon \in C_0^\infty(R^n)$ it means that a wild oscillation of this function is excluded on the cross sections of thin cylinders L_ε for ε small enough. Hence for a given $\eta > 0$ there exist an $\varepsilon_\eta > 0$, an integer $J \in N$, and a collection of points $\{x_{\varepsilon,i} \in \Delta_i S_\varepsilon\}$ such that

$$\left|\int_{L_\varepsilon} (p^0)^2_\varepsilon\, dx - \sum_{i=1}^{J} (p^0)^2_\varepsilon (x_{\varepsilon,i}) L^n(\varepsilon\square)\Delta\right| < \frac{\eta}{2N^{n-1}} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\eta).$$

Taking into account the chain of transformations

$$\sum_{i=1}^{J} (p^0)^2_\varepsilon (x_{\varepsilon,i}) L^n(\varepsilon\square)\Delta$$

$$= \sum_{i=1}^{J} (p^0)^2_\varepsilon (x_{\varepsilon,i}) \varepsilon^n \Delta = \sum_{i=1}^{J} (p^0)^2_\varepsilon (x_{\varepsilon,i}) \varepsilon^n \frac{H^{n-1}(\Delta_i S_\varepsilon)}{H^{n-2}(\varepsilon\,\partial C)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{H^{n-2}(\partial C)} \sum_{i=1}^{J} \left(p^0\right)^2_\varepsilon \left(x_{\varepsilon,i}\right) H^{n-1}\left(\Delta_i S_\varepsilon\right)$$

$$= \varepsilon |\partial C|_H^{-1} \sum_{i=1}^{J} \left(p^0\right)^2_\varepsilon \left(x_{\varepsilon,i}\right) H^{n-1}\left(\Delta_i S_\varepsilon\right)$$

and the fact that

$$\left| \sum_{i=1}^{J} \left(p^0\right)^2_\varepsilon \left(x_{\varepsilon,i}\right) H^{n-1}\left(\Delta_i S_\varepsilon\right) - \int_{S_\varepsilon^k} \left(p^0\right)^2_\varepsilon dH^{n-1} \right| < \frac{\eta |\partial C|_H}{2\varepsilon N^{n-1}}$$

for J large enough, we deduce: for a given $\eta > 0$ there exists an $\varepsilon_\eta > 0$ such that

$$\begin{aligned} &\left| \int_{L_\varepsilon} \left(p^0\right)^2_\varepsilon dx - \varepsilon |\partial C|_H^{-1} \int_{S_\varepsilon} \left(p^0\right)^2_\varepsilon dH^{n-1} \right| \\ &\le \left| \int_{L_\varepsilon} \left(p^0\right)^2_\varepsilon dx - \varepsilon |\partial C|_H^{-1} \sum_{i=1}^{J} \left(p^0\right)^2_\varepsilon \left(x_{\varepsilon,i}\right) H^{n-1}\left(\Delta_i S_\varepsilon\right) \right| \\ &\quad + \varepsilon |\partial C|_H^{-1} \left| \sum_{i=1}^{J} \left(p^0\right)^2_\varepsilon \left(x_{\varepsilon,i}\right) H^{n-1}\left(\Delta_i S_\varepsilon\right) \right. \\ &\qquad \left. - \int_{S_\varepsilon} \left(p^0\right)^2_\varepsilon dH^{n-1} \right| < \frac{\eta}{N^{n-1}} \end{aligned} \tag{22}$$

for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\eta)$.

As a result, combining this estimate with the representation (21), we come to the conclusion:

$$\begin{aligned} &\left| \left\| \left(p^0\right)_\varepsilon \right\|^2_{L^2(\Omega^-)} - \varepsilon |\partial C|_H^{-1} \left\| \left(p^0\right)_\varepsilon \right\|^2_{L^2(S_\varepsilon; H^{n-1})} \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{N^{n-1}} \left(\int_{L_\varepsilon^j} \left(p^0\right)^2_\varepsilon dx - \varepsilon |\partial C|_H^{-1} \int_{S_\varepsilon^j} \left(p^0\right)^2_\varepsilon d\, H^{n-1} \right) \right| < \eta . \end{aligned} \tag{23}$$

Since relation (20) turns into the equality only in the case when p^0 is a constant, it follows that choosing an appropriate value $\eta > 0$ we can find an $\varepsilon_\eta > 0$ such that for every $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\eta)$ the inequality

$$\varepsilon |\partial C|_H^{-1} \left\| \left(p^0\right)_\varepsilon \right\|^2_{L^2(S_\varepsilon; H^{n-1})} \le \left\| p^0 \right\|^2_{L^2(\Omega^-)} \le \cdot \; {}^2$$

holds true. Hence the estimate (17) is valid for $\varepsilon_\eta > 0$ small enough. □

It remains to substantiate the convergence property (18).

Proposition 4. *Assume the functions* $p_\varepsilon \in C^\infty(S_\varepsilon)$ *are defined by* (19).*Then the property* (18) *holds true.*

Proof. Let $\{\varsigma_\varepsilon\}$ be any sequence of smooth functions such that $\varsigma_\varepsilon \to p$ strongly in $L^2(\Omega^-)$ as $\varepsilon \to 0$. Let us show that

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Omega^-} \varsigma_\varepsilon \varphi d\mu_\varepsilon = \int_{\Omega^-} p\varphi dx \;\; \forall \varphi \in C_0^\infty(R^n). \tag{24}$$

Indeed, let us partition Ω^- into cubes with edges ε and denote these cubes by the symbols $\varepsilon\square_n^j$. Then

$$\int_{\Omega^-} \varsigma_\varepsilon \varphi d\mu_\varepsilon = \sum_j \int_{\varepsilon\square_n^j} \varsigma_\varepsilon(x)\varphi(x) d\mu_\varepsilon$$
$$+\sum \int_{\Omega^-\cap\varepsilon\square_n^j} \varsigma_\varepsilon(x)\varphi(x)d\mu_\varepsilon = \sum_j \varsigma_\varepsilon(x_j)\varphi(x_j)\int_{\varepsilon\square_n^j} d\mu_\varepsilon$$
$$+\sum \int_{\Omega^-\cap\varepsilon\square_n^j} \varsigma_\varepsilon(x)\varphi(x)d\mu_\varepsilon,$$

where x_j is a Lebesgue point of pin the cube $\varepsilon\square_n^j$ and the second sum is calculated over the set of boundary cubes. By definition of the measure μ_ε we have $\int_{\varepsilon\square_n^j} d\mu_\varepsilon = \varepsilon^n \int_{\square_n} d\mu = \varepsilon^n$.

Moreover, $\left|\sum \int_{\Omega^-\cap\varepsilon\square_n^j} \varsigma_\varepsilon(x)\varphi(x)d\mu_\varepsilon\right| \le \sup\limits_{x\in\Omega^-} |\varsigma_\varepsilon(x)\varphi(x)|\varepsilon^n \cdot D(\varepsilon)$, where $D(\varepsilon)$ is a quantity of boundary cubes, and $\varepsilon^n D(\varepsilon) \to 0$ by Jordan's measurability of the set $\partial\Omega^-$. Thus, summarizing the above cited facts, we have

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega^-} \varsigma_\varepsilon\varphi \mu_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sum_j \varsigma_\varepsilon(x_j)\varphi(x_j)\varepsilon^n - \int_{\Omega^-}\varsigma_\varepsilon\varphi dx\right] +$$
$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega^-}\varsigma_\varepsilon\varphi dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\sum_j \varsigma_\varepsilon(x_j)\varphi(x_j) - \varepsilon^n \int_{\varepsilon\square_n^j}\varsigma_\varepsilon\varphi dx\right]\varepsilon^n +$$
$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\sum \int_{\Omega^-\cap\varepsilon\square_n^j}\varsigma_\varepsilon(x)\varphi(x)dx + \int_{\Omega^-} p\varphi dx =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_j\left[\varsigma_\varepsilon(x_j)\varphi(x_j) - \varepsilon^n \int_{\varepsilon\square_n^j}\varsigma_\varepsilon\varphi dx\right]\varepsilon^n + \int_{\Omega^-} p\varphi dx.$$

Let us suppose that $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sum\limits_j \left|\varsigma_\varepsilon(x_j)\varphi(x_j) - \varepsilon^{-n}\int_{\varepsilon\square_n^j}\varsigma_\varepsilon\varphi dx\right|\varepsilon^n > 0.$

Then there exist a constant $C^* > 0$ and a value $\varepsilon^* > 0$ such that

$$\left|\varsigma_\varepsilon(x_j)\varphi(x_j) - \varepsilon^{-n}\int_{\varepsilon\square_n^j}\varsigma_\varepsilon\varphi dx\right| \ge C^* \;\; \forall\varepsilon\in(0,\varepsilon^*)$$

(possibly except, for a finite number of indices j for every fixed ε). Hence extremely wild oscillations are present in the sequence $\{\varsigma_\varepsilon\varphi\}$. However (see [1]; [2]), if we have very rapid fluctuations in the functions $\{\varsigma_\varepsilon\varphi\}$, then the convergence $\varsigma_\varepsilon\varphi \to p\varphi$ almost everywhere in Ω^- is excluded. This fact immediately reflects the failure of the strong convergence in $L^2(\Omega^-)$ as $\varepsilon \to 0$ (see Valadier's Theorem [2]). So, our supposition was wrong and we get

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_j \left|\varsigma_\varepsilon(x_j)\varphi(x_j) - \varepsilon^{-n}\int_{\varepsilon\square_n^j}\varsigma_\varepsilon\varphi\,dx\right|\varepsilon^n = 0.$$

As a result, we come to the relation (24).

To conclude the proof it remains to use the main property of classical smoothing

$$\left(p^0\right)_\varepsilon \to p^0 \text{ strongly in } L^2\left(\Omega^-\right) \text{ as } \varepsilon \to 0$$

and apply the relation (24). □

As the direct consequence of Proposition 3, which we feel to be interesting per se, we present one observation concerning L^2-functions defined on thick junctions.

Corollary 1. *Let ε be a thick multi-structure in R^n, which consists of some domain Ω^+ and a large number of thin cylinders G_ε with a small cross section of the size εC and ε-periodically distributed along some manifold Σ on the boundary of Ω^+ (see Fig. 1 for 3-d example). Let $\Omega^- = \Sigma\times(a,b)$ be a domain which is filled up by the thin cylinders in the limit passage as ε→0. Let $f \in L^2_{loc}(R^n)$ a given function. Then*

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega^-)} \geq \frac{\varepsilon}{H^{n-2}(\partial C)}\|(f)_\varepsilon\|^2_{L^2(S_\varepsilon;H^{n-1})}$$

for ε small enough, where $(f)_\varepsilon$ denotes the direct smoothing of the function $\chi_{\Omega^-}f$, i.e.

$$(f)_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\int_{R^n} K\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\chi_{\Omega^-}(y)f(y)dy.$$

References

1. **Evans L.C., Gariepy R.F.**, Measure Theory and Fine Properties of Functions, CRC Press, Boca Raton, 1992.
2. **Valadier M.**, Oscillations et compacit'e forte dans L1 , Sem. Anal. Convexe, 21(1991), 7.1-7.10.
3. **Zhikov V. V.**, On two-scale convergence, Trudy Seminara imeni I.G. Petrovskogo, Moscow University, 23(2003), 149–187(in Russian).

Надійшло до редколегії 08.04.10

ЗМІСТ